Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

CADENES DE MARKOV A TEMPS DISCRET

Autor: Asier Hernández Camacho

Director: Dr. Carles Rovira Escofet
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

The work you will read below deals with a special type of random process called the *Markov Chain*. We will aim to study and understand the basis of this random process when it occurs in discrete time and its evolution does not depend on time. Finally, we will look at some of many applications that Markov chains have inside and outside the mathematical field.

Resum

El treball que a continuació llegireu tracta sobre un tipus especial de procés aleatori anomenat *Cadena de Markov*. Tindrem com a objectiu estudiar i entendre la base d'aquest procés aleatori quan succeeix en temps discret i la seva evolució no depengui del temps. Finalment, en veurem algunes de les moltes aplicacions que les cadenes de Markov tenen dins i fora de l'àmbit matemàtic.

2020 Mathematics Subject Classification. 60G05, 60G07, 60J10

Agraïments

Com no pot ser d'una altra manera, el meu primer agraïment va dedicat al meu tutor, el Dr. Carles Rovira, per acollir-me com alumne seu tot i portar ja bastants treballs; pel seu guiament a l'hora d'escollir tema; per aconsellar-me durant tota la realització del projecte i estar sempre disposat a aclarir dubtes i ajudar-me d'una manera eficient.

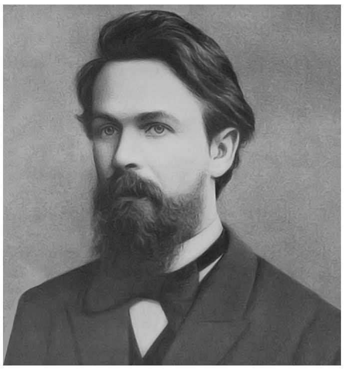
Seguidament, vull agrair a la meva família i amics per donar-me els ànims necessaris quan m'han fet falta, per donar-me el seu suport incondicional i per confiar sempre en mi.

Sense vosaltres no hauria estat possible arribar fins aquí.

Índex

1 Introducció

Les cadenes de Markov van ser introduïdes per primera vegada pel matemàtic rus amb qui comparteixen el nom, *Andrei Markov*. Markov va destacar en diferents àmbits de la matemàtica: els seus primers treballs importants van ser de teoria de nombres i anàlisi, fraccions contínues, límits d'integrals, teoria d'aproximació i convergència de sèries. Tanmateix, Andrei Markov és conegut principalment pel descobriment el 1906 de l'instrument matemàtic que hem comentat anteriorment: les *cadenes de Markov*. Aquest treball tindrà com a objectiu fer una introducció d'aquests tipus de processos quan la variable pren únicament valors dins d'un conjunt finit o numerable i que l'evolució de la cadena sigui independent del temps (*homogeneïtat*).



Andrei Markov

El projecte

Les cadenes de Markov tenen una característica especial que les fa molt atractives a l'hora d'estudiar-les i veure les seves propietats, i és que aquest tipus de procés no té memòria. Això vol dir que la probabilitat que ocorri un esdeveniment depèn exclusivament de la situació actual en què es trobi la cadena, sense importar qualsevol estat anterior ni la manera per la qual la cadena ha arribat a estar on és actualment.

Aquesta falta de memòria fa que sigui relativament fàcil predir el comportament d'una cadena a futur. Al mateix temps, això les fa especialment útils per predir diferents situacions o successos que es poden donar tan sols observant el present. És per aquest motiu que en diferents camps, com poden ser biologia, enginyeria, economia, física, finances i un llarg etcètera, les cadenes de Markov són utilitzades molt sovint per modelar i estudiar diferents situacions.

Estructura de la Memòria

La idea d'aquest projecte és començar a explicar les cadenes de Markov homogènies a temps discret des del principi, i a poc a poc anar introduint nocions d'interès i útils en l'estudi d'aquestes. Per tant, podem dir aquest projecte tindrà una *estructura constructiva* amb la qual es pretendrà explicar detalladament la construcció d'aquest tipus de cadenes i anar extraient diferents resultats, propietats o nocions que ens ajudin a continuar. Això fa que aquest treball sigui relativament assequible de seguir pel lector sempre que tingui uns coneixements bàsics de teoria de probabilitats.

- El primer capítol de la memòria estarà dedicat a veure diferents nocions de probabilitat a manera d'introducció a la teoria de les cadenes de Markov que s'explicarà durant els capítols posteriors.
- En el següent capítol ja formalitzarem la definició de Cadena de Markov homogènia i en veurem propietats importants d'aquestes.
- A continuació, estudiarem la relació entre els estats de la cadena. Això ens permetrà fer una classificació d'aquests estats. També veurem maneres de classificar a les cadenes.

- Després ens dedicarem a estudiar el temps necessari perquè una cadena entri en un cert subconjunt d'estats. Parlarem del fet que la cadena quedi atrapada en aquest subconjunt.

- Seguidament, ens centrarem a estudiar una nova forma de classificar els estats de la cadena, aquest cop tenint en compte el comportament de la cadena a llarg termini.

- Per últim veurem diferents exemples de les moltes aplicacions que tenen aquests tipus de cadenes de Markov en diferents àmbits.

Podem veure que, a excepció de l'últim capítol, el projecte és bastant teòric. No obstant això, en cada un dels apartats veurem diferents exemples pràctics amb la intenció de fer el treball més amè i comprensible pel lector.

Un cop dit tot això, us convido a llegir les següents pàgines, ja que aprendreu molt d'aquesta útil eina matemàtica anomenada *Cadena de Markov*.

2 Definicions i conceptes bàsics

No podem començar a parlar de les cadenes de Markov sense saber abans algunes nocions de la teoria de probabilitats. Així doncs, aquest primer apartat del treball estarà dedicat a definir alguns conceptes que ens seran d'ajut per entendre i seguir la informació dels següents capítols.

Definició 2.1. *Un* ***espai de probabilitat*** *és una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *on*

i. Ω *és un espai amb tots els possibles resultats anomenat espai mostral.*

ii. $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ *és una* σ*-àlgebra de* Ω*, per tant, ha de complir:*

   (a) $\Omega \in \mathcal{F}$

   (b) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

   (c) $A_n \in \mathcal{F}$ *per qualsevol* $n \geq 1 \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

iii. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *és una probabilitat, és a dir, és una aplicació que compleix:*

   (a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

   (b) Sigui $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ *successió de conjunts tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *per tot* $i \neq j$*, aleshores:*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) \text{ (Propietat de } \sigma\text{-additivitat)}$$

Durant tot el treball suposarem que estem en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

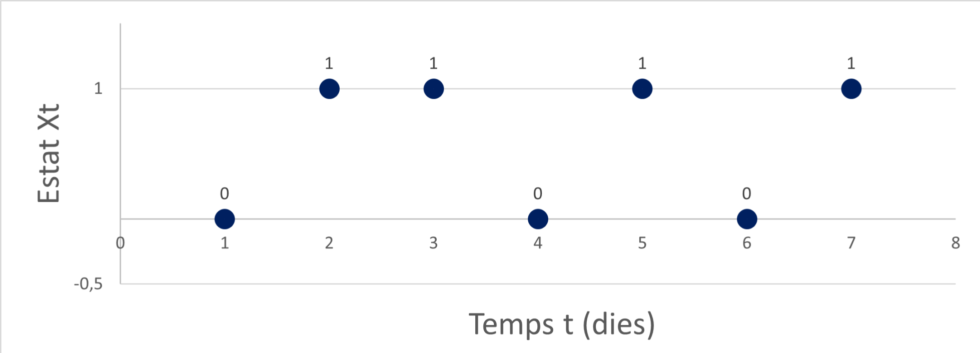
Definició 2.2. *Un* ***procés estocàstic*** *amb espai d'estats* S *és una família* $\{X_t\}_{t\in T}$ *de variables aleatòries* $X_t : \Omega \to S$ *indexades en un conjunt* T *anomenat espai de paràmetres.*

Observacions:

1. L'espai de paràmetres T pot ser discret o continu.
2. L'índex t representa el temps i X_t serà l'estat del procés al temps t.
3. Els estats del procés poden prendre valors discrets (S espai d'estats discret) o valors continus (S espai d'estats continu).
4. Podem interpretar el procés estocàstic com una successió de variables aleatòries les característiques de les quals poden variar al llarg del temps.

Definició 2.3. *Una* ***cadena*** *és un procés estocàstic en el qual el temps es mou de manera discreta i la variable aleatòria només pren valors discrets en l'espai d'estats* S*.*

Exemple 2.4. *(de Cadena)* Considerem un ordinador de la facultat. Els possibles estats l'ordinador poden ser que estigui en funcionament o que estigui fora de servei i suposem que sempre anem a mirar aquest ordinador a la mateixa hora durant els set dies de la setmana. Assignem el valor d'1 si l'ordinador funciona i 0 en cas contrari. La gràfica següent mostra una seqüència de canvis d'estats durant aquests dies:



$S = \{0{,}1\}$, $T = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7\}$

Així doncs, nosaltres treballarem amb temps discret $n \in T \subseteq \{0, 1, 2, ..., 100, ...\}$ (per tant treballarem amb X_n en lloc de X_t i supondrem $T = \mathbb{N}$) i amb estats $i \in S$, S finit o numerable. Notem que cada variable aleatòria X_n té associada una distribució λ tal que per a cada $i \in S$:

$$\lambda_i = \mathbb{P}(X_n = i)$$

Definició 2.5. *Diem que una matriu $P = (p_{ij} : i{,}j \in S)$ és una* ***matriu de transició*** *si compleix:*

i. $p_{ij} \geqslant 0$ *per* $\forall\ i,\ j \in S$

ii. Fixada una fila i, $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$

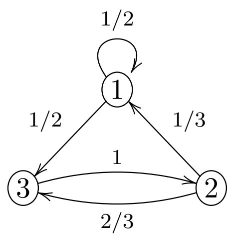
Observacions 2.6.

1. La matriu de transició és sempre una matriu quadrada.
2. p_{ij} és la probabilitat que el procés passi de l'estat i a l'estat j en un sol pas, és a dir, $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Aquesta probabilitat s'anomena *probabilitat de transició*.
3. S'acostuma a treballar també amb diagrames que tenen una correspondència bijectiva amb les matrius estocàstiques. Fixeu-vos en l'exemple següent:

Matriu de transició

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagrama de la matriu



(2.1)

Si observem, per exemple, la primera fila de la matriu veiem que la probabilitat que romanguem a l'estat 1 és de 1/2, aleshores fem una fletxa que surti de l'estat 1 i que acabi en ell mateix amb probabilitat 1/2. La probabilitat de passar de l'estat 1 al 3 és de 1/2 també, per tant fem una fletxa de l'1 al 3 amb un 1/2. Per últim, la probabilitat de què passi de l'estat 1 al 2 és de 0, en aquest cas no fem cap fletxa. Les altres files es farien de manera anàloga i així crearíem el diagrama.

3 Cadenes de Markov

En aquest capítol tractarem de definir i explicar les cadenes de Markov, així com algunes de les propietats més essencials d'aquestes. Acabarem amb alguns exemples que pretendran il·lustrar les nocions estudiades per fer-ne més fàcil l'enteniment.

3.1 Definicions i propietats

Definició 3.1. *Diem que un procés estocàstic $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una* ***cadena de Markov homogènia*** *amb distribució inicial λ i matriu de transició P si, per a tot $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$, es compleix:*

i. X_0 té distribució λ, és a dir, $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$

ii. $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) =^1 \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) =^2 p_{ij}$

En la característica ii. podem distingir dues propietats importants. La primera s'anomena *propietat de Markov*[1] i ens indica que el valor futur de la variable aleatòria X_{n+1} només depèn de l'estat actual X_n. La segona és la *propietat d'homogeneïtat*[2] i ens diu que l'evolució del procés és independent del temps; totes les cadenes amb les quals treballarem seran homogènies.

Notació 1. *Si un procés estocàstic $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de Markov homogènia amb distribució inicial λ i matriu de transició P, direm que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena Markov(λ,P).*

Ara esmentarem un teorema que ens servirà d'equivalència a la pràctica per saber si un procés estocàstic és una cadena de Markov o no ho és.

Teorema 3.2. *Un procés estocàstic $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és Markov(λ,P) si i només si per a qualssevol $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ se satisfà*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0,\, X_1 = i_1,\, \ldots,\, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} \tag{3.1}$$

Demostració:

$\Longrightarrow$) Començem amb la implicació cap a la dreta. Suposem que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és $Markov(\lambda, P)$, aleshores

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)\\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = i_0)\cdot\mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})\\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = i_0)\cdot\mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})\\
&\quad = \lambda_{i_0}\cdot \mathrm{p}_{i_0 i_1}\cdot\ldots\cdot \mathrm{p}_{i_{n-1} i_n}
\end{aligned}$$

En la primera igualtat hem utilitzat el teorema de la probabilitat composta i en les altres les propietats de ser cadena de Markov. Així ja hem demostrat la primera implicació.

$\Longleftarrow$) Ara considerem que es compleix l'equació (3.1) per a tot $n \in \mathbb{N}$. Considerem primer

$n = 0$, llavors tenim $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$. Així doncs, la primera propietat de cadena de Markov es compleix. Ens quedaria veure la segona propietat:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots , X_n = i) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)}$$
$$= \frac{\lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n} \cdot p_{i_n i_{n+1}}}{\lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n}} = p_{i_n i_{n+1}}$$

Hem provat també la segona propietat i hem usat la definició de probabilitat condicionada i l'equació (3.2) que es compleix per hipòtesi. Per tant $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de *Markov*(λ,P).

□

El proper resultat reforçarà la idea de què les cadenes de Markov no tenen memòria.

Proposició 3.3. *Sigui* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de* $Markov(\lambda, P)$, *amb espai d'estats* S, $i,j,k \in S$ *i* $0 \leq m \leq n-1$, n, $m \in \mathbb{N}$, *es compleix que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_m = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$$

Demostració:

Suposarem $m = 0$ per simplificar la notació, la prova general es faria de manera semblant. Comencem veient que l'espai mostral Ω es pot escriure de la següent manera:

$$\Omega = \bigcup_{i_1,...,i_{n-1}\in S} \{X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

Ara calcularem la probabilitat $\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i, X_0 = k)$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i, X_0 = k) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 \in S, ..., X_{n-1} \in S, X_n = i, X_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \sum_{i_1,...,i_{n-1}\in S} \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 = i_1, ..., X_n = i, X_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \sum_{i_1,...,i_{n-1}\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_0 = k, X_1 = i_1, ..., X_n = i) \times \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 = i_1, ..., X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \sum_{i_1,...,i_{n-1}\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) \times \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 = i_1, ..., X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \times \sum_{i_1,...,i_{n-1}\in S} \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 = i_1, ..., X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \times \frac{\mathbb{P}(X_0 = k, X_1 \in S, ..., X_{n-1} \in S, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = k, X_n = i)}$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij}$$

En aquestes igualtats hem utilitzat la definició de probabilitat condicionada, també que la probabilitat de la unió numerable de conjunts disjunts és igual a la suma de les probabilitats d'aquests conjunts i la propietat de Markov.

□

Exemple 3.4. Sigui $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes que prenen valors sencers $S = \mathbb{Z}$. Denotem p_Y la distribució de Y_i ($p_Y(i) = \mathbb{P}(Y_k = i)$, $i \in S$). Considerem la successió

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i, \qquad n \in \mathbb{N},$$

Ara veurem que és una cadena de Markov amb espai d'estats S i determinarem les seves probabilitats de transició. Observem que l'espai d'estats del procés aleatori X és $\mathbb{Z}$, ja que és la suma de nombres enters. Si volem demostrar la propietat de Markov, haurem de provar que es compleix que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots , X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\forall i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{Z}$

Primerament tenim que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_k = i_k) = \mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1 - i_0, ..., Y_k = i_k - i_{k-1})\\ &\quad = p_Y(i_0)p_Y(i_1 - i_0) \cdot \dots \cdot p_Y(i_k - i_{k-1})\end{aligned}$$

on hem usat que $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_i$ i que Y és una successió de variables aleatòries independents.

Seguidament calcularem $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)$ utilitzant el resultat que acabem de veure:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)}\\ &\quad = \frac{p_Y(i_0)p_Y(i_1 - i_0) \cdot \dots \cdot p_Y(i_{n+1} - i_n)}{p_Y(i_0)p_Y(i_1 - i_0) \cdot \dots \cdot p_Y(i_n - i_{n-1})} = p_Y(i_{n+1} - i_n)\end{aligned}$$

D'altra banda, usant que $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_i$ i que, per tant, les variables X_n i Y_{n+1} són independents, tenim que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) &= \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)}\\ &= p_Y(i_{n+1} - i_n) = p_{i_n i_{n+1}}\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agrupant aquestes dues fórmules tenim:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)$$

Així doncs, ja hem provat la propietat de Markov i hem deduït que les probabilitats de transició estan donades per l'equació (3.2).

Ara bé, per tenir una cadena de Markov ben definida hem de tenir, a més de les probabilitats de transició, la distribució inicial de X_0. Sigui $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$, com ja hem vist que la cadena compleix la propietat de Markov podem usar el Teorema 3.2 per extreure que

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n} \cdot \lambda_{i_0}$$

Amb això ja tenim també determinada la distribució inicial X_0, per tant, hem comprovat que la successió $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_i$ és una cadena de Markov.

□

Vegem un cas particular més clar de l'exemple anterior anomenat *passejada aleatòria*:

En aquest cas suposarem que $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pren valors en l'espai d'estats $S = \{-1, 1\}$ i que $p_Y(-1) = 1 - p$, $p_Y(1) = p$ $(p < 1)$. Aleshores la successió X_n està definida com:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i = X_0 + Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

on $X_0 = 0$ és la distribució inicial. Podem entendre la successió X_n com el moviment d'un cos que comença a l'eix de coordenades d'una recta $(X_0 = 0)$ i que a cada pas pot, o bé moure's una unitat a la dreta amb probabilitat p o moure's una unitat cap a l'esquerra amb probabilitat 1 - p.

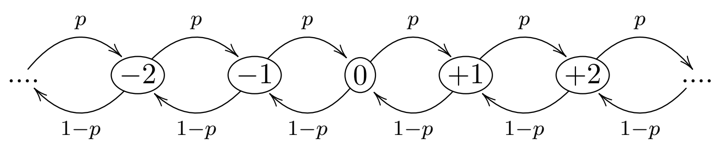
Aleshores, utilitzant els resultats de l'exemple tenim que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de Markov amb espai d'estats $\mathbb{Z}$. Anem a veure la seva matriu de transició P.

Siguin $i, j \in \mathbb{Z}$, tenim que $p_{ij} = p_Y(j - i) = \begin{cases} p & si \;\; j - i \; = \; 1 \\ 1 - p & si \;\; j - i \; = \; -1 \\ 0 & si \quad altre\ cas \end{cases}$

Aquestes són les probabilitats de transició, per tant, la matriu de transició és de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & p \\ 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

També podem fer el diagrama d'aquesta matriu; és de la manera següent:



3.2 Probabilitats de transició en m passos

En aquest moment ja hem vist la probabilitat de passar d'un estat al següent, que són les probabilitats de transició p_{ij}. Però què passaria si volguéssim saber la probabilitat de què després de m passos la cadena estigui en un estat determinat? Vegem-ho.

Definició 3.5. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de $Markov(\lambda, P)$ i $n,m \in \mathbb{N}$, $i,j \in S$. Definim la* ***probabilitat de transició en m passos****, $p_{ij}^{(m)}$, com la probabilitat que la cadena estigui en l'estat j després de m passos sabent que inicialment estava a l'estat i, és a dir:*

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$$

De la mateixa manera que amb la probabilitat de transició, també podem definir la ***matriu de transició en m passos****:*

$$P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)} : i,j \in S)$$

Anomenarem també ***distribució de probabilitat en m passos*** *al vector:*

$$\lambda^{(m)} = (\lambda_i^{(m)})_{i\in S} \text{ tal que } \lambda_i^{(m)} = \mathbb{P}(X_m = i)$$

Observació 3.6. Tenim dos casos particulars:

1. Si $m = 0$ tenim que $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & si \ \ i = j \\ 0 & si \ \ i \neq j \end{cases}$, i per tant, $P^{(0)} = Id$.

2. Si $m = 1$, per definició es té que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Ens seria de molta utilitat trobar una manera de relacionar la matriu de transició en m passos, $P^{(m)}$, amb la matriu de transició en un sol pas, P, ja que d'aquesta manera podríem calcular $P^{(m)}$ a través de P. Doncs resulta que es dona que $P^{(m)} = P^m$ i és el que mostrarem en la següent proposició.

Proposició 3.7. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov(λ,P) i $P^{(m)}$ la seva matriu de transició en m passos, aleshores $P^{(m)} = P \cdot P \cdot ... \cdot P = P^m$. A més, $\lambda^{(m)} = \lambda \times P^m$.*

Demostració:

Ho demostrarem per inducció.

Cas $m = 1$: Com hem vist a l'observació anterior tenim que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, per tant, $P^{(1)} = P = P^1$. Es compleix.

Hipòtesi d'inducció: Suposarem que es compleix per un cert natural m, és a dir, $P^{(m)} = P^m$. Això és, per $\forall$ $i,j \in S$, $\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}^{(m)}$.

Cas $m + 1$: Prenem $i,j \in$ S qualssevol.

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+m+1} = j | X_n = i) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{n+m} = k, X_{n+m+1} = j | X_n = i) \\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{n+m} = k | X_n = i) \cdot \mathbb{P}(X_{n+m+1} = j | X_{n+m} = k) \\ &\overset{H.I}{=} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} \mathbb{P}(X_{n+m+1} = j | X_{n+m} = k) = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj} \Longrightarrow P^{(m+1)} = P^{(m)} P \end{aligned}$$

En aquestes igualtats hem usat, a part de la hipòtesi d'inducció, el teorema de les probabilitats totals i que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de $Markov(\lambda, P)$.

Així hem vist que es compleix per $m+1$ i que $P^{(m+1)} = P^{m+1}$.

Un cop tenim aquest resultat és fàcil veure que

$$\begin{aligned}\lambda_j^{(m)} &= \mathbb{P}(X_{n+m} = j) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = k)\mathbb{P}(X_0 = k) \\ &= \sum_{k\in S} \lambda_k p_{kj}^{(m)} \Longrightarrow \lambda^{(m)} = \lambda \times P^m\end{aligned}$$

□

A conseqüència d'aquesta proposició podem extreure el següent resultat, que ens serà de molta utilitat durant la resta del treball en moltes demostracions.

Equació de Chapman-Kolmogorov: Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de $Markov(\lambda, P)$ amb probabilitats de transició p_{ij}. Per a qualssevol n,$m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant n \leqslant m$, es té

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m-n)}$$

Aquesta equació ens indica que en passar de l'estat i a l'estat j en m passos, el procés estarà en un estat *"k"* després d'exactament n (menor que m) passos.

O vist d'una altra manera

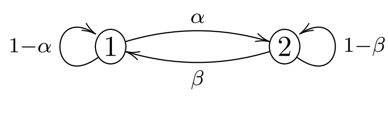
$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Ara que ja tenim aquestes definicions i propietats explicades donarem un cop d'ull a un parell d'exemples de com trobar les probabilitats de transició en m passos a la pràctica.

Exemple 3.8. Donats α, $\beta \geqslant 0$. Suposem que tenim una cadena de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ amb espai d'estats $S = \{1, 2\}$ i matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

El seu diagrama ve representat de la següent manera:



Donat que sabem que $P^{(n)} = P^n$, si volem saber $p_{ij}^{(n)}$, ho podríem extreure d'elevar la matriu P n vegades. Per n prou petit pot ser un bon mètode, però si no és el cas és millor buscar una alternativa.

Notem que com $P^{n+1} = P^n P$, podem escriure

$$p_{11}^{(n+1)} = p_{11}^{(n)} p_{11} + p_{12}^{(n)} p_{21} = p_{11}^{(n)}(1-\alpha) + p_{12}^{(n)}\beta$$

Notem també que $p_{11}^{(n)} + p_{12}^{(n)} = 1$ (ja que $P^{(n)}$ és matriu de transició), aleshores si aïllem $p_{12}^{(n)}$ i substituïm en l'equació anterior ens queda

$$p_{11}^{(n+1)} = p_{11}^{(n)}(1-\alpha) + (1 - p_{11}^{(n)})\beta = (1-\alpha-\beta)p_{11}^{(n)} + \beta$$

Així doncs, obtenim la següent relació de recurrència

$$\begin{cases} p_{11}^{(n+1)} = (1-\alpha-\beta)p_{11}^{(n)} + \beta \\ p_{11}^{(0)} = 1 \end{cases}$$

Volem trobar una expressió directa per trobar la solució a la recurrència, per fer-ho iterem la relació anterior. Fem el canvi $r := 1-\alpha-\beta$ per facilitar el càlcul:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= rp_{11}^{(n-1)} + \beta = r(rp_{11}^{(n-2)} + \beta) + \beta = r^2 p_{11}^{(n-2)} + \beta(r+1) \\ &= r^2(rp_{11}^{(n-3)} + \beta) + \beta(r+1) = r^3 p_{11}^{(n-3)} + \beta(r^2+r+1) \\ &\;\;. \\ &\;\;. \qquad \text{(recursivament)} \\ &\;\;. \\ &= r^n p_{11}^{(0)} + \beta\sum_{k=0}^{n-1} r^k = r^n + \beta\sum_{k=0}^{n-1} r^k = r^n + \beta\frac{1-r^n}{1-r} \\ &= (1-\alpha-\beta)^n + \beta\frac{1-(1-\alpha-\beta)^n}{1-(1-\alpha-\beta)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n \end{aligned}$$

En les últimes igualtats hem usat la fórmula de la suma parcial d'una sèrie geomètrica i hem desfet el canvi $r = 1-\alpha-\beta$ que havíem fet.

De manera anàloga seríem capaços de trobar les probabilitats de transició en n passos restants: $p_{12}^{(n)}$, $p_{21}^{(n)}$ i $p_{22}^{(n)}$.

Observem que l'expressió per trobar $p_{11}^{(n)}$ només té sentit en el cas que $\alpha + \beta \neq 0$. En el cas que $\alpha = \beta = 0$ notem que $P = Id$ i, per tant, el càlcul de les probabilitats de transició en n passos és trivial, ja que per a qualsevol pas n es compleix $p_{11}^{(n)} = p_{22}^{(n)} = 1$ i $p_{12}^{(n)} = p_{21}^{(n)} = 0$.

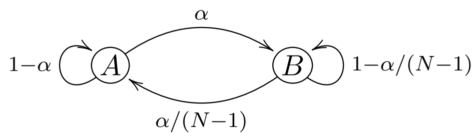
El següent exemple és més interessant, ja que és un problema aplicat a un tema realacionat amb la biologia. Es tracta de les diferents etapes per què passa un virus que va mutant.

Exemple 3.9. (*Mutació d'un virus*) Suposem que un virus pot existir en N estats diferents i que en cada generació el virus pot mutar a un altre estat aleatori amb probabilitat α o bé romandre en el mateix estat amb probabilitat $1-\alpha$. Quina és la probabilitat de què en la n-èsima generació el virus es trobi en la mateixa situació que en la generació inicial?

Tenim $S = \{1, 2, ..., N\}$, aleshores la matriu de transició P és una matriu $N \times N$ de la forma

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

El nostre objectiu seria trobar $p_{11}^{(n)}$ usant la matriu de transició P. Observem, però, que aquest problema es pot simplificar de manera significativa si ens fixem en el fet que per qualsevol temps, la transició va de l'estat inicial (A) a un altre estat (B) amb probabilitat α i d'un altre estat a l'estat inicial amb probabilitat $\dfrac{\alpha}{N-1}$. Per tant, la cadena es redueix a una cadena de dos estats i el seu diagrama es



Aquest diagrama ens és familiar, notem que posant $\beta := \dfrac{\alpha}{N-1}$ obtenim la mateixa cadena que hem analitzat a l'exemple anterior. Aleshores utilitzant el que ja hem vist sabem que

$$p_{11}^{(n)} = p_{AA}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n = \frac{\frac{\alpha}{N-1}}{\alpha + \frac{\alpha}{N-1}} + \frac{\alpha}{\alpha+\frac{\alpha}{N-1}}(1-\alpha-\frac{\alpha}{N-1})^n$$
$$= \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N}(1-\frac{\alpha N}{N-1})^n$$

Aquesta és la probabilitat que estàvem buscant, la probabilitat que en la n-èsima generació el virus hagi tornat a la situació inicial.

4 Estructura de classes

Ja hem vist que en una cadena de Markov podem "moure'ns" d'un estat a un altre sempre que la probabilitat de transició pertinent sigui positiva. En aquesta secció utilitzarem aquest fet per definir diferents conceptes que ens seran d'utilitat per fer una classificació dels estats de la cadena i de la cadena mateixa.

4.1 Comunicació entre estats i classificació de cadenes

Moltes vegades ens és possible dividir una cadena de Markov en peces més petites que són més fàcils d'estudiar i que un cop estudiades per separat ens donen informació de la cadena sencera. Aquestes peces són les *classes de comunicació* de la cadena i veurem quines són en aquest apartat.

Definició 4.1. *Siguin i,j dos estats en l'espai d'estats S. Diem que l'estat j és* ***accessible*** *des de l'estat i (o que i* ***condueix*** *a j) si*

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0 \textit{ per algun } n \geqslant 0$$

i en aquest cas escriurem $i \to j$. Diem que i es ***comunica*** *amb j (o que i* i *j es* ***comuniquen****) si els dos estats són accessibles mútuament, és a dir, si $i \to j$ i $j \to i$. En aquest cas escriurem $i \leftrightarrow j$.*

Observacions 4.2.

1. D'una manera més intuïtiva, quan $i \to j$ estem dient que partint de i sempre es pot arribar a j en un cert nombre finit de passos amb una probabilitat positiva.

2. Una manera per trobar $p_{ij}^{(n)}$ és tenint en compte tots els camins possibles d'anar de i a j, per tant tenim que per $\forall n \geqslant 1$

   $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1,\dots,i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1}j}$$

   En conseqüència tenim que $i \to j \iff \exists\, i_1, \dots, i_{n-1} \in$ S tals que $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1}j} > 0$ (és a dir, si i només si existeix un camí que comunica i i j amb probabilitat positiva).

A continuació voldrem veure que la relació $\leftrightarrow$ satisfà les condicions d'una relació d'equivalència sobre l'espai d'estats S. Provar això és un pas essencial per arribar a l'objectiu de l'apartat i poder dividir la cadena de Markov a trossos més petits.

Proposició 4.3. *La relació $\leftrightarrow$ és una relació d'equivalència.*

Demostració:

Siguin i, j, $k \in$ S. Veurem que la relació $\leftrightarrow$ és reflexiva, simètrica i transitiva.

1. *Reflexiva*, mirem si $i \leftrightarrow i$: $p_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1 > 0$, per tant $i \leftrightarrow i$.

2. *Simètrica*, suposem $i \leftrightarrow j$ i mirem si $j \leftrightarrow i$:
   $i \leftrightarrow j \implies \exists\, n,m \geq 0$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$, per tant $j \leftrightarrow i$.

3. *Transitiva*, suposem $i\leftrightarrow j$ i $j\leftrightarrow k$ i mirem si $i\leftrightarrow k$:
   $i\leftrightarrow j$ i $j\leftrightarrow k \Longrightarrow \exists\ n,m \geq 0$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{jk}^{(m)} > 0$. Ara utilitzant l'equació de Chapman-Kolmogorov podem obtenir

   $$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

   Així hem vist que $i \to k$. Usant la simetria s'aconsegueix $k \to i$ de manera anàloga. Per tant, $i\leftrightarrow k$.

□

Ara ja sabem que la relació $\leftrightarrow$ és una relació d'equivalència. Aquesta indueix a una partició de l'espai d'estats S i les diferents classes d'equivalència resultants són les ja esmentades *classes de comunicació*. De manera que si dos estats es comuniquen, pertanyen a la mateixa classe de comunicació i tots els estats dins d'una mateixa classe es comuniquen entre ells.

Com que ja tenim les classes de comunicació, ja podem passar a definir més conceptes relacionats amb elles i també les diferents maneres de classificar els estats d'aquestes.

Definició 4.4. *Direm que una classe de comunicació $C \subseteq S$ és* ***tancada*** *si és una classe d'on no es pot sortir, és a dir, si compleix:*

$$i \in C \text{ tal que } i \to j \Longrightarrow j \in C$$

Definició 4.5. *Direm que un estat $i \in S$ és* ***absorbent*** *si $\{i\}$ és una classe tancada.*

Definició 4.6. *Direm que un estat $i \in S$ és* ***essencial*** *si es comunica amb cada estat al que condueix. És a dir, $i \to j \Longrightarrow j \to i$. En cas contrari diem que i és* ***no essencial****.*

Observacions 4.7.

1. Qualsevol estat dins d'una classe de comunicació tancada és un estat essencial.

2. Un estat absorbent és un estat essencial.

Un cop ja definides les nocions relacionades amb els estats d'una cadena de Markov podem passar a veure la classificació de la cadena en general, en veure'm dues.

Definició 4.8. *Diem que una matriu de transició P és* ***regular*** *si $\exists\ n >$ 0 tal que per a $\forall\ i,j \in S$ es té $p_{ij}^{(n)} > 0$. Direm que una cadena és* ***regular*** *si la seva matriu de transició ho és.*

Definició 4.9. *Direm que un cadena és* ***irreduïble*** *quan tots els estats es comuniquen. Per tant, tots els estats conformen una única classe.*

Observació 4.10. *Relació entre cadenes irreduïbles i regulars*

Donades aquestes dues últimes definicions traiem que una cadena regular sempre serà irreduïble. No obstant això, una cadena irreduïble no té per què ser regular. Vegem un contraexemple que mostri que hi ha cadenes *irreduïbles* i *no regulars*.

Contraexemple: Sigui una cadena de Markov amb matriu de transició $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Òbviament, aquesta cadena és *irreduïble*, ja que els únics dos estats existents (1 i 2) estan comunicats ($p_{12} > 0$ i $p_{21} > 0 \Longrightarrow 1 \leftrightarrow 2$).

Calculant potències de P tenim que $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Notem que en general per $n \in \mathbb{N}$ es té $P^{(2n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ i $P^{(2n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P$

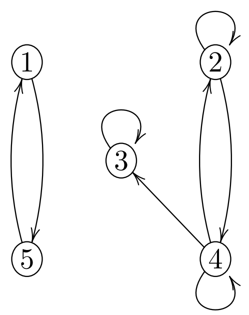
De manera que no existeix cap n tal que $\forall\ i,j \in \{1,2\}$ es tingui $p_{ij}^{(n)} > 0$, arribant així a la conclusió que *no* és una cadena *regular* tot i ser *irreduïble*.

Per finalitzar aquest apartat donarem un exemple complet amb l'objectiu de veure com utilitzar aquestes definicions apreses a la pràctica.

Exemple 4.11. Volem identificar les classes de comunicació de la matriu de transició següent i dir-ne quines en són tancades. És la cadena irreduïble? És regular? A més intentarem classificar els estats en essencials i no essencials. N'hi ha algun d'absorbent?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La millor manera de trobar les classes de comunicació és a través del diagrama associat a la matriu. En aquest cas no ens importa el valor de les probabilitats de transició sinó que aquestes siguin estrictament positives. Així doncs, no ens fa falta plasmar-les en el diagrama.



Observant el diagrama podem deduir que hi ha tres classes de comunicació, vegem-les.

Primerament, veiem que els estats 1 i 5 es comuniquen entre ells. Aleshores, $\{1,5\}$ és la primera classe de comunicació. A més, notem que estan aïllats dels altres estats i, per tant, és una *classe tancada*, ja que no se'n pot sortir.

Ara fixem-nos en l'estat 2. A part d'amb si mateix, només comunica amb l'estat 4. Llavors $\{2,4\}$ és una altra classe de comunicació. En aquest cas *no* és una *classe tancada* perquè l'estat 3 és accessible des del 4.

Per últim, la darrera classe de comunicació seria $\{3\}$, ja que només es comunica amb ell mateix. Veiem també que es tracta d'una *classe tancada* i, per tant, podem dir a més que 3 és un estat *absorbent.*

Un cop sabem quines són les classes i si són tancades o no, podem estudiar-ne quins estats són *essencials* o *no essencials*:

- $\{1{,}5\}$ és una classe tancada, per tant els estats 1 i 5 són *essencials.*
- $\{2{,}4\}$ no és una classe tancada, per tant hem d'estudiar els estats per separat:
  - L'estat 2 condueix a l'estat 4 i, alhora, el 2 está comunicat amb el 4. Per tant, 2 és un estat *essencial.*
  - L'estat 4 condueix a l'estat 2 (i comunica amb l'estat 2) i condueix a l'estat 3. En aquest cas veiem que 4 no comunica amb 3 i això fa que 4 sigui un estat *no essencial.*
- $\{3\}$ és un estat absorbent, llavors també és un estat *essencial.*

Finalment, com tots els estats de la cadena no conformen una única classe (hem vist que n'hi ha tres) la cadena *no* és *irreduïble* i, per tant, *tampoc* és *regular.*

4.2 Periodicitat

En una cadena de Markov sovint ens podem trobar amb què tingui una propietat curiosa. Per veure-ho reprenem l'Exemple 4.11 on podem observar que $p_{11} = 0$ però $p_{11}^{(2)} = 1 > 0$. Això significa que no és possible acabar a l'estat 1 en un pas, però si que ho és en dos passos. Encara podem ser més precisos, donat $k \in \mathbb{N}$, es té que $p_{11}^{(k)}$ és $\begin{cases} 0 & si \;\; k \; senar \\ > 0 & si \;\; k \; parell \end{cases}$

Quan casos així o semblants succeeixen diem que la cadena té *comportaments periòdics* i és el que volem estudiar en aquest apartat.

Definició 4.12. *Sigui $i \in S$ un estat. Definim el* ***període de i****, $d(i)$, com*

$$d(i) := m.c.d\,\{n \geqslant 1 \colon p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

És a dir, $d(i)$ és el número més gran que dividirà tots els n tals que $p_{ii}^{(n)} > 0$. En particular, només es podrà retornar a i en una quantitat de passos múltiple de $d(i)$.

Per a cada estat i poden donar-se dos casos:

- *Si $d(i) > 1$, direm que l'estat i és* ***periòdic amb període d(i)****.*
- *Si $d(i) = 1$, direm que l'estat i és* ***aperiòdic****.*

Un cop tenim aquesta definició, si tornem a l'Exemple 4.11 mencionat anteriorment podem dir que $d(1) = 2$. A més, podem veure que $d(5) = 2$. Sabent que els estats 1 i 5 estaven connectats, que els períodes coincideixin no és cap casualitat i ho podem veure amb la següent proposició.

Proposició 4.13. *Sigui $i,j \in S$ dos estats, es compleix:*

$$i \leftrightarrow j \Longrightarrow d(i) = d(j)$$

Demostració:

Suposem que $i \leftrightarrow j$, per demostrar que $d(i) = d(j)$ veurem que $d(i)|d(j)$ i $d(j)|d(i)$. Vegem primer que si $p_{jj}^{(r)} > 0$ aleshores $d(i)|d(j)$:

$i \rightarrow j$ i $i \rightarrow j \implies \exists\, n,m \geqslant 0$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Aleshores usant l'equació de Chapman-Kolmogorov obtenim

$$p_{ii}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{ki}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$$

I també:

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geqslant \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kk}^{(r)} p_{ki}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)} > 0$$

Així que $d(i)|n+m$ i $d(i)|n+r+m \implies d(i)|r$. Com que per definició tenim que $d(j) = m.c.d\{n \geqslant 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\}$ es compleix que $d(i)|d(j)$ que és el que volíem veure.

Notem que per veure que $d(j)|d(i)$ podem fer servir el mateix raonament intercanviant la i i la j. Per tant, $d(i) = d(j)$.

□

Observació 4.14. D'aquesta proposició podem treure que tots els elements d'una classe de comunicació tindran el mateix període. En particular, si una cadena és irreduïble, tots els estats de la mateixa compartiran període.

En conseqüència, podem definir els següents conceptes.

Definició 4.15. *Sigui C una classe de comunicació. Definim el* ***període de C****, $d(C)$ com*

$$d(C) := d(i_C),\ i_C \in C$$

Direm que la classe és ***aperiòdica*** *si $d(C) = 1$.*

En el cas que estiguem amb una cadena irreduïble, direm que el ***període de la cadena*** *és $d(i)$, $i \in S$.*

Direm que la cadena és ***aperiòdica*** *si $d(i) = 1$.*

La proposició que a continuació esmentarem i demostrarem ens servirà com a petit criteri per identificar si una cadena de Markov és aperiòdica.

Proposició 4.16. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Marokv irreduïble amb espai d'estats S. Aleshores*

$$\exists\ i \in S \text{ tal que } p_{ii} > 0 \implies \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és aperiòdica}$$

Demostració:

Suposem que existeix $i \in S$ tal que $p_{ii} > 0$. Sabem que $d(i) = m.c.d\{n \geqslant 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Per tant, la condició es compleix per $n = 1$ i com que $m.c.d(1, r) = 1$ per $\forall r \in \mathbb{N}$, tenim $d(i) = 1$.
Ara, com la cadena és irreduïble i $d(i) = 1$ es té que la cadena és aperiòdica.

□

L'exemple que veurem d'aquest apartat és un que ja hem vist anteriorment. En aquell moment, però, no vam estudiar-ne la periodicitat. Ho farem ara que ja tenim les eines necessàries per fer-ho.

Exemple 4.17. (*Passejada aleatòria*) Recuperem el cas particular de l'Exemple 3.4 i estudiem els comportaments periòdics de la cadena $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Recordem que les probabilitats de transició eren:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & si \;\; j - i \; = \; 1 \\ 1-p & si \;\; j - i \; = \; -1 \\ 0 & si \quad altre \; cas \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

El que primer podem dir és que aquesta cadena és *irreduïble*, això ho podem saber perquè per $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ existeix un camí que els comunica amb probabilitat positiva:

- $j > i$, agafem el camí $i, i+1, ..., j$ que té probabilitat $p_{ii+1}p_{i+1i+2}...p_{j-1j} = p^{\,j-i} > 0$
- $j < i$, agafem el camí $i, i-1, ..., j+1, j$ que té probabilitat $p_{ii-1}p_{i-1i-2}...p_{j+1j}$ $= (1-p)^{i-j} > 0$
- $j = i$, agafem el camí $i, i+1, i$ que té probabilitat $p_{ii+1}p_{i+1i} = p(1-p) > 0$

Ara que ja sabem que la cadena és irreduïble podem mirar quin és el seu període. En aquest cas té *període 2*, ja que, començant des d'un estat i arbitrari, necessites fer com a mínim 2 passos per tornar-hi. Per tant, només es pot tornar a l'estat i en un nombre parell de passos.

5 Temps d'entrada i probabilitats d'absorció

En aquesta secció ens centrarem a estudiar el temps que pot tardar la cadena a entrar en un subconjunt $A \subseteq S$. Ens interessa especialment el cas que el conjunt A sigui una classe tancada ja que aquí direm que el procés ha sigut *absorbit* i és en aquest moment quan podem parlar de la probabilitat que la cadena sigui absorbida.

Definició 5.1. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov(λ,P). Definirem el **temps d'entrada a un subconjunt A** $\subseteq S$ com la variable aleatòria H^A: $\Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que*

$$H^A(\omega) := inf\{n \geqslant 0 : X_n(\omega) \in A\}$$

*De manera que $H^A(\omega) = \infty$ quan $\{n \geqslant 0 : X_n(\omega) \in A\} = \emptyset$. També definim, donat un estat $i \in S$, la **probabilitat que començant a i la cadena entri a A** com*

$$h_i^A := \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i)$$

*Quan A es tracta d'una classe tancada, diem que h_i^A és la **probabilitat d'absorció**.*

Observació 5.2. Vegem dos casos particulars:

1. Si $i \in A \Longrightarrow h_i^A = 1$.
2. Si B és una classe tancada amb $i \in B$ i $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow h_i^A = 0$.

Definició 5.3. *Definim el **temps mig d'absorció** d'una cadena de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al temps mitjà necessari per arribar a A. És donat de la següent manera:*

$$k_i^A := \mathbb{E}(H^A | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i) + \infty\mathbb{P}(H^A = \infty | X_0 = i)$$

Observació: $\infty\mathbb{P}(H^A = \infty|X_0 = i) = \begin{cases} 0 & si \quad \mathbb{P}(H^A = \infty|X_0 = i) \; = \; 0 \\ \infty & si \quad \mathbb{P}(H^A = \infty|X_0 = i) \; \neq \; 0 \end{cases}$

Notació 2.
- *Vector de les probabilitats d'absorció $\to h^A = \{h_i^A : i \in S\}$*
- *Vector dels temps mig d'absorció $\to k^A = \{k_i^A : i \in S\}$*

Amb això ja hem vist les definicions d'aquesta secció. Ara ens interessa buscar una manera de poder calcular h^A i k^A. Els següents teoremes ens ajudaran a fer-ho, en particular aquest primer teorema ens ajuda a buscar el vector de les probabilitats d'absorció.

Teorema 5.4. *El vector de les probabilitats d'absorció h^A és la solució minimal no negativa del següent sistema d'equacions lineals:*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & si \quad i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in S} p_{ij} h_j^A & si \quad i \notin A \end{cases}$$

(NOTA: Per minimal entenem que si $x = \{x_i \geqslant 0 : i \in S\}$ és una altra solució del sistema, aleshores $x_i \geqslant h_i$ per $\forall\ i \in S$)

Demostració:

Per començar mirarem que h^A és solució del sistema.

Cas 1: $X_0 = i \in A \Longrightarrow H_A = 0 \Longrightarrow h_i^A = 1$.

Cas 2: $X_0 = i \notin A \Longrightarrow H_A \geqslant 1$, així que per la propietat de Markov tenim

$$\mathbb{P}(H_A < \infty | X_0 = i, X_1 = j) = \mathbb{P}(H_A < \infty | X_1 = j) = h_j^A$$

Amb això

$$\begin{aligned} h_i^A = \mathbb{P}(H_A < \infty | X_0 = i) &= \sum_{j \in S} \mathbb{P}(H_A < \infty, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} \mathbb{P}(H_A < \infty | X_0 = i, X_1 = j) \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^A \end{aligned}$$

Per tant h^A sí és solució del sistema, Ara veurem que és minimal. Suposem que $x = \{x_i : i \in S\}$ és una altra solució del sistema no negativa. Aleshores $h_i^A = x_i = 1$ per $\forall\ i \in$ A. Mirem ara x_i tals que $i \notin$ A, tenim

$$x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j$$

Substituïm x_j usant la fórmula anterior ja que $j \notin A$

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left(\sum_{k \in A} p_{jk} + \sum_{k \notin A} p_{jk} x_k \right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A | X_0 = i) + \mathbb{P}(X_1 \notin A, X_2 \in A | X_0 = i) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k \end{aligned}$$

Ara repetim aquest pas substituint x_k, i així continuem successivament amb la resta de x. Després de n passos obtindrem

$$\begin{aligned} x_i &= \mathbb{P}(X_1 \in A | X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(X_1 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{j_1 \notin A} ... \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} ... p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \\ &= \mathbb{P}(H_A = 1 | X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(H_A = n | X_0 = i) + \sum_{j_1 \notin A} ... \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} ... p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \\ &= \mathbb{P}(H_A \leqslant n | X_0 = i) + \sum_{j_1 \notin A} ... \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} ... p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \end{aligned}$$

Sabem que $x_{j_n} \geqslant 0$, per tant l'últim terme també ho és. Aleshores es compleix que $x_i \geqslant \mathbb{P}(H_A \leqslant n | X_0 = i)$ per $\forall n$. Així doncs, podem fer el límit quan $n \to \infty$ i obtenim

$$x_i \geqslant \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(H_A \leqslant n | X_0 = i) = \mathbb{P}(H_A < \infty | X_0 = i) = h_i^A$$

$\square$

Ara veurem un teorema semblant a l'anterior però amb els temps mig d'absorció k^A.

Teorema 5.5. *El vector dels temps mig d'absorció k^A és la solució minimal no negativa del següent sistema d'equacions lineals:*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & si \quad i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum\limits_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & si \quad i \notin A \end{cases}$$

(NOTA: Per minimal entenem que si $x = \{x_i \geqslant 0 : i \in S\}$ és una altra solució del sistema, aleshores $x_i \geqslant h_i$ per $\forall\ i \in S$)

Demostració:

Per començar mirarem que k^A és solució del sistema.

Cas 1: $X_0 = i \in A \Longrightarrow H_A = 0 \Longrightarrow k_i^A = 0$.

Cas 2: $X_0 = i \notin A \Longrightarrow H_A \geqslant 1$. Aquí de nou podem separar dos casos que poden donar-se:

Subcàs 1: $\mathbb{P}(H^A = \infty | X_0 = i) \neq 0 \Longrightarrow k_i^A = \infty$.
Com $i \notin A$ i $p_{ij} > 0$, es té $1 + \sum\limits_{j \notin A} p_{ij} k_j^A = \infty \Longrightarrow k_i^A = 1 + \sum\limits_{j \notin A} p_{ij} k_j^A$

Subcàs 2: $\mathbb{P}(H^A = \infty | X_0 = i) = 0$. Això implica que $1 = \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i)$. Amb això, mirem de calcular k_j^A

$$\begin{aligned} k_j^A &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{\mathbb{P}(H^A = n, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} = 1 + \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{\mathbb{P}(H^A = n, X_0 = i, X_1 = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= 1 + \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{\mathbb{P}(H^A = n, X_0 = i, X_1 = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = j)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= 1 + \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i, X_1 = j) \cdot \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= 1 + \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(H^A = n | X_1 = j) p_{ij} = 1 + \sum_{j \in S} k_j^A p_{ij} = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A \end{aligned}$$

Per tant, hem provat que k^A és solució i en les igualtats anteriors hem utilitzat la propietat de Markov i la definició de probabilitat condicionada.

Ens quedaria només provar que és minimal. Suposem que $x = \{x_i : i \in S\}$ és una altra solució del sistema no negativa. Aleshores $k_i^A = x_i = 0$ per $\forall\ i \in$ A. Mirem ara x_i tals que $i \notin$ A, tenim

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} (1 + \sum_{k \notin A} p_{jk} x_k) \\ &= \mathbb{P}(H^A \geqslant 1, X_0 = i) + \mathbb{P}(H^A \geqslant 2, X_0 = i) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k \end{aligned}$$

Ara repetim aquest pas substituint x_k, i així continuem successivament amb la resta de x. Després de n passos obtindrem

$$x_i = \mathbb{P}(H^A \geqslant 1, X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(H^A \geqslant n, X_0 = i) + \sum_{j_1 \notin A} ... \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} ... p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n}$$

Sabem que $x_{j_n} \geqslant 0$, per tant l'últim terme també ho és. Aleshores es compleix que $x_i \geqslant \mathbb{P}(H_A \geqslant 1|X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(H^A \geqslant n, X_0 = i)$ per $\forall n$. Així doncs, podem fer el límit quan n $\to \infty$ i obtenim

$$x_i \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_A \geqslant n|X_0 = i) = \mathbb{E}(H_A|X_0 = i) = k_i^A$$

Observació 5.6. En aquest últim pas hem utilitzat que en general si X és una variable aleatòria que pren valors naturals es compleix

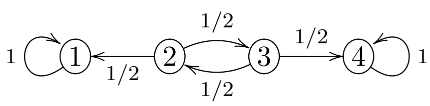
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

□

Tal com havíem dit abans, aquests dos teoremes ens donen una forma de calcular tant h^A com k^A. Ara veurem, mitjançant un parell d'exemples, com fer ús d'aquests resultats d'una manera més pràctica.

Exemple 5.7. Considerem la cadena de Markov donada per la matriu de transició i el diagrama següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Les preguntes que ens plantejarem són:

- Començant a l'estat 2, quina és la probabilitat d'absorció de l'estat 4, $h_2^{\{4\}}$?
- Començant a l'estat 2, quin és el temps mig necessari perquè la cadena sigui absorbida dins del conjunt {1,4}, $k_2^{\{1,4\}}$?

(Nota: Tant l'estat 1 com el 4 són estats absorbents i, per tant, {1},{4} són classes tancades. Així que té sentit voler calcular $h_2^{\{4\}}$ i $k_2^{\{1,4\}}$).

- Primerament tractarem de calcular $h_2^{\{4\}}$.

La manera més fàcil és usant el Teorema 5.4 per conèixer $h^{\{4\}}$. Aleshores tenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} h_1^{\{4\}} = h_1^{\{4\}} \\ h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_1^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_3^{\{4\}} \\ h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_4^{\{4\}} \\ h_4^{\{4\}} = 1 \end{cases}$$

Veiem que la primera equació no ens proporciona cap mena d'informació de $h_1^{\{4\}}$. No obstant això, podem treure el seu valor a través de la definició de probabilitat d'absorció, ja que com 1 és un estat absorbent, es té $h_1^{\{4\}} = \mathbb{P}(H^{\{4\}} < \infty|X_0 = 1) = 0$.

A partir d'aquí resolem el sistema i obtenim com a resultat $\begin{cases} h_1^{\{4\}} = 0 \\ h_2^{\{4\}} = \frac{1}{3} \\ h_3^{\{4\}} = \frac{2}{3} \\ h_4^{\{4\}} = 1 \end{cases}$

En particular volíem $h_2^{\{4\}} = \frac{1}{3}$.

- Ara passem a calcular $k_2^{\{1,4\}}$.

En aquest cas usarem el Teorema 5.5 per conèixer $k^{\{1,4\}}$. El sistema d'equacions que hem de resoldre és:

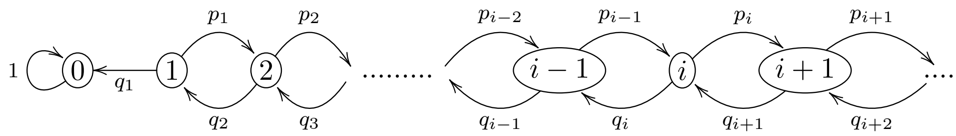
$$\begin{cases} k_1^{\{1,4\}} = 0 \\ k_2^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}k_3^{\{1,4\}} \\ k_3^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}k_2^{\{1,4\}} \\ k_4^{\{1,4\}} = 0 \end{cases}$$

És fàcil resoldre aquest sistema. Substituint, per exemple, $k_2^{\{1,4\}}$ a la tercera equació ja obtenim el resultat: $k_1^{\{1,4\}} = k_4^{\{1,4\}} = 0$ i $k_2^{\{1,4\}} = k_3^{\{1,4\}} = 2$.

En particular volíem $k_2^{\{1,4\}} = 2$.

L'exemple que farem a continuació és un de més conegut i interessant. N'és de dinàmica de poblacions en el qual veurem la probabilitat que una població acabi desapareixent o si per contra té possibilitats d'aconseguir sobreviure.

Exemple 5.8. *(Cadena de naixement i mort)* Aquest exemple ve determinat per la cadena de Markov que té com a diagrama



Per tant, tenim que les probabilitats de transició són $\begin{cases} p_{00} = 1 \\ p_{i,i-1} = q_i & \text{per } i = 1,2,3,... \\ p_{i,i+1} = p_i \end{cases}$

Sempre tenim que se satisfà $0 < p_i = 1 - q_i < 1$. El nostre propòsit és calcular la probabilitat d'absorció del 0 començant a i, $h_i = h_i^{\{0\}}$. Fixem-nos que de nou té sentit ja que 0 és un estat absorbent.

Aquesta cadena podria servir de model per la grandària de la població essent p_i i q_i la taxa de naixement i mort respectivament quan hi ha i individus. Aleshores estem buscant la probabilitat que la població desaparegui completament sabent que al principi la població està formada per i individus.

Voldríem resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = q_i h_{i-1} + p_i h_{i+1}, \qquad i = 1, 2, ... \end{cases}$$

per usar el Teorema 5.4 que ens diu que h és la solució minimal no negativa.

Per resoldre això considerarem $u_i := h_{i-1} - hi \implies q_i u_i = q_i(h_{i-1} - hi)$ $\implies q_i u_i = p_i u_{i+1}$. Llavors fent servir recurrència arribem a la següent igualtat

$$u_{i+1} = \left(\frac{q_i}{p_i}\right) u_i = \left(\frac{q_i q_{i-1} ... q_1}{p_i p_{i-1} ... p_1}\right) u_1 = \gamma_i u_i$$

També sabem que $u_1 + ... + u_i = h_0 - h_i$ per la definició de u_i. Aleshores

$$h_{i+1} = 1 - A(\gamma_0 + ... + \gamma_{i-1})$$

on $A = u_1$ i $\gamma_0 = 1$. Notem que encara no hem determinat A, per fer-ho mirarem dos casos:

- Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$, aleshores com $0 \leqslant h_i \leqslant 1$, ha de ser $A = 0$. Això implicaria que $h_i = 1$ per $\forall i$, significant això l'erradicació completa de la població sense importar el nombre d'individus inicial.

- Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$, aleshores podem agafar qualsevol $A > 0$ que satisfaci

$$1 - A(\gamma_0 + ... + \gamma_{i-1}) \geqslant 0 \text{ per } \forall i$$

  En aquest cas la solució minimal no negativa es dona quan $A = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i\right)^{-1}$

  Per tant,

$$h_i = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j - \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j} = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}$$

  i com que $\gamma_0 = 1$ tenim que per qualsevol $i = 1, 2, ...$ es compleix que $h_i < 1$. En aquest cas, doncs, la població té una probabilitat positiva de sobreviure.

6 Classificació d'estats. Comportament de la cadena a llarg termini

En aquesta part del treball veurem dues maneres més de classificar els estats d'una cadena de Markov: en *estats recurrents* i *estats transitoris.* Aquesta manera de classificar els estats estarà relacionada amb el comportament que tingui la cadena a mesura que el nombre de passos va augmentant.

6.1 Temps d'atur i propietat forta de Markov

Aquesta secció estarà dedicada a explicar nocions que necessitarem per definir adequadament els estats recurrents i transitoris. Necessitem aquests coneixements per demostrar propietats importants que veurem més endavant en aquest mateix capítol.

Definició 6.1. *Sigui $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ una variable aleatòria. Diem que T és un* ***temps d'atur*** *del procés $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si per a $\forall n \in \mathbb{N}$ l'esdeveniment $\{T = n\}$ depèn únicament de $X_0, X_1, ..., X_n$.*

Més intuïtivament això ens està dient que només amb la informació de $X_0, X_1, ..., X_n$ podem estar segurs de si l'esdeveniment $\{T = n\}$ ha succeït o no. En altres paraules, si estem en el temps n, podem saber amb exactitud si $\{T = n\}$ s'ha produït o no. Per tant, la definició habitual d'un temps d'atur és

$$T = inf\{n \in \mathbb{N} : \text{cert esdeveniment } E \text{ succeeix}\}$$

Exemples 6.2. Un parell d'exemples destacables de *temps d'atur* són els següents:

1. El *primer temps d'arribada* per un estat i:

   $$T_i = inf\{n \geqslant 1 : X_n = i\}$$

   el qual és un temps d'atur perquè $\{T_i = n\} = \{X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i, X_n = i\}$.

2. El *temps d'entrada a un subconjunt A*, H^A vist al capítol anterior:

   $$H^A = inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}$$

   el qual és un temps d'atur perquè $\{H^A = n\} = \{X_1 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$.

El següent teorema és molt important perquè veurem que la propietat de Markov es compleix per a temps d'atur.

Teorema 6.3. *(Propietat forta de Markov) Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov(λ,P) i T un temps d'atur de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aleshores, condicionalment en $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$, $\{X_{T+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de Markov(δ_i,P) i és independent de $X_0, X_1, ..., X_T$.*

Demostració:

Sigui B un esdeveniment qualsevol determinat per $X_0, X_1, ..., X_T$, aleshores $B \cap \{T = m\}$ està determinat per $X_0, X_1, ..., X_m$. Així tenim

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \\
&\quad = \mathbb{P}(\{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, ..., X_{m+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \\
&\quad =^1 \mathbb{P}(X_m = j_0, ..., X_{m+n} = j_n \mid B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \\
&\quad =^2 \mathbb{P}(X_m = j_0, ..., X_{m+n} = j_n | X_m = i) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})
\end{aligned}$$

En aquestes igualtats hem utilitzat la definició de probabilitat condicionada[1] i la propietat de Markov[2] a l'instant m, a més d'haver-hi substituït T per m usant la condició $\{T = m\}$. I de fer això hem extret que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})
\end{aligned}$$

Ara sumarem des de $m = 0$ fins a l'infinit en ambdues parts de la igualtat i ens queda

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})
\end{aligned}$$

Per últim dividirem aquesta expressió per $\mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$ i usem el fet que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una cadena de $Markov(\lambda, P)$ per obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \mid T < \infty, X_T = i) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i) \\
&\quad = \delta_{ij_0} \cdot \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n) \cdot \mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i) \\
&\quad = \delta_{ij_0} \cdot p_{ij_1} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n} \cdot \mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i)
\end{aligned}$$

On $\delta_{ij_0} := \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j_0 \\ 1 & si \;\; i = j_0 \end{cases}$ és la *probabilitat concentrada en l'estat i.*

Notem que amb la primera igualtat ja provem la independència de $\{X_{T+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$ respecte $X_0, X_1, ..., X_T$.

Ara ens quedaria només veure que $\{X_{T+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$ és una cadena de $Markov(\delta_i, P)$. Per fer-ho observem que la igualtat anterior és certa per qualsevol esdeveniment B, en particular si agafem $B = \Omega$ es quedaria

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \mid T < \infty, X_T = i) = \delta_{ij_0} \cdot p_{j_0 j_1} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}$$

Així doncs, fent ús del Teorema 3.2 tenim que $\{X_{T+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$ és una cadena de $Markov(\delta_i, P)$ tal com es volia provar.

□

6.2 Estats recurrents i transitoris

En aquesta part ja definirem quins estats d'una cadena de Markov són recurrents i transitoris. També veurem diferents conceptes que ens seran d'utilitat en la part que ve immediatament després d'aquesta, en la qual es pretendrà buscar resultats útils per classificar els estats més còmodament.

Definició 6.4. *Sigui $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov(λ,P) amb $i \in S$ un estat. Direm que l'estat i és* ***recurrent*** *si*

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ per infinits } n \mid X_0 = i) = 1$$

*D'altra banda, direm que l'estat i és **transitori** si*

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ per infinits } n \mid X_0 = i) = 0$$

Vist d'una altra manera, un estat *recurrent* és aquell al que sempre es torna sense importar el nombre de cops que arribem ell. A l'estat *transitori*, però, només podrem entrar un número finit de vegades, quedant-nos en algun moment amb la impossibililtat de tornar-hi.

Observació: Un estat *absorbent* és sempre un estat *recurrent*.

Recordem del subapartat anterior que el *primer temps d'arribada* a un estat i és la variable aleatòria definida per

$$T_i(\omega) = inf\{n \geqslant 1 : X_n(\omega) = i\}$$

on $inf\{\emptyset\} = \infty$. Sabent això, ara definirem uns conceptes nous.

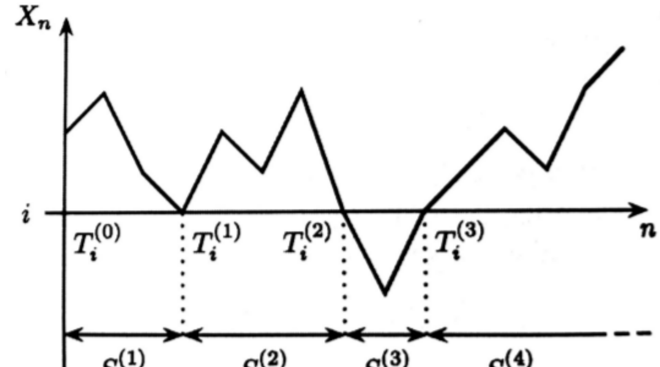
Definició 6.5. *Definirem el **r-èsim temps d'arribada** a un estat i com*

$$T_i^{(r)} := \begin{cases} 0 & si \quad r = 0 \\ T_i & si \quad r = 1 \\ inf\{n \geqslant T_i^{(r-1)} + 1 : X_n = i\} & si \quad r \geqslant 2 \end{cases}$$

Definició 6.6. *Definirem la **longitud de la r-èsima excursió** per a un estat i com*

$$S_i^{(r)} := \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & si \quad T_i^{(r-1)} < \infty \\ 0 & si \quad T_i^{(r-1)} = \infty \end{cases}$$

El següent gràfic il·lustra aquestes definicions a mesura que va passant el temps:



Veiem gràficament com la cadena va passant per diferents estats i cada cop que talla l'estat i trobem un *temps d'arribada* $T_i^{(r)}$ i el temps recorregut des de l'anterior temps d'arribada fins a aquest és la *longitud de l'excursió* $S_i^{(r)}$.

Observació 6.7. Les variables aleatòries $T_i^{(r)}$ i $S_i^{(r)}$ són temps d'atur. Notem que

$$\{T_i^{(r)} = n\} = \{X_0, ..., X_n : X_n = i,\ \#\{X_k = i : 0 \leqslant k < n\} = r - 1\}$$

i que, per tant, $\{T_i^{(r)} = n\}$ depèn només de $X_0, ..., X_n$ i és un temps d'atur.

Com a conseqüència, $S_i^{(r)}$ és també un temps d'atur perquè per definició depèn únicament de $T_i^{(r)}$.

Lema 6.8. *Per a qualsevol $r \geqslant 2$ condicionat a l'esdeveniment $T_i^{(r-1)} < \infty$, $S_i^{(r)}$ és independent de $\{X_m : m \leqslant T_i^{(r-1)}\}$ i*

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i)$$

Demostració:

Considerem el temps d'arribada $T = T_i^{(r-1)}$. Per definició de temps d'arribada sabem que si $T < \infty$ aleshores $X_T = i$. Així doncs, tenim les condicions necessàries per poder usar la propietat forta de Markov, això ens diu que

1. $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de $Markov(\delta_i, P)$.
2. $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$ és independent de $X_0, X_1, ..., X_T$.

Com $S_i^{(r)} = T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)}$, ja tenim que $S_i^{(r)}$ és independent de $\{X_m : m \leqslant T_i^{(r-1)}\}$. Per provar ara la igualtat veiem que si $T < \infty$ es compleix que:

$$\begin{aligned} S_i^{(r)} &= T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} \\ &= inf\{n \geqslant T_i^{(r-1)} + 1 : X_n = i\} - T_i^{(r-1)} \\ &= inf\{n \geqslant 1 : X_{T+n} = i\} \end{aligned}$$

Per tant, amb aquesta condició $S_i^{(r)}$ és el primer temps d'arribada per l'estat i de la cadena $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}}$. Aleshores

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i)$$

□

Definició 6.9. *Sigui $i \in S$ un estat. Definim el* ***nombre de visites a i**, V_i, com*

$$V_i := \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

on $A_n = \begin{cases} 1 & si \quad X_n = i \\ 0 & si \quad X_n \neq i \end{cases}$

Corol·lari 6.10. *El* ***nombre esperat d'instants en què la cadena està en i*** *és*

$$\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

Demostració:

$$\mathbb{E}(V_i|X_0=i) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n|X_0=i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(A_n|X_0=i) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_n=i|X_0=i)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

on hem usat que l'esperança és un operador lineal i que, per tant, l'esperança d'una suma és la suma de les esperances.

$\square$

Observació 6.11. Un estat recurrent és aquell al que sempre es torna, en altres paraules, el seu nombre de visites és infinit. Emprant el mateix argument, un estat transitori és aquell al que es torna de manera limitada o que el seu nombre de visites és finit. En resum, es compleix que

- $\mathbb{P}(V_i=\infty|X_0=i)=1 \Longrightarrow i$ és un estat *recurrent.*
- $\mathbb{P}(V_i=\infty|X_0=i)=0 \Longrightarrow i$ és un estat *transitori.*

Definició 6.12. *Sigui $i \in S$ un estat i $n \geqslant 1$. Definim* ***la probabilitat de retorn a l'estat i en el pas n*** *com*

$$f_i^{(n)} := \mathbb{P}(T_i=n|X_0=i)$$

Notem que la probabilitat de retorn en el pas n, $f_i^{(n)}$, no és la mateixa que la probabilitat de transició en n passos, $p_{ii}^{(n)}$. Perquè $f_i^{(n)}$ és la probabilitat que la **primera** visita a l'estat i es doni en el pas n i $p_{ii}^{(n)}$ no té en compte si ja hi ha hagut una visita anteriorment.

Així doncs, ara podem definir també la ***probabilitat de retorn a l'estat i*** *(en algun pas) com*

$$f_i := \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \mathbb{P}(T_i<\infty|X_0=i)$$

Lema 6.13. *Per a qualsevol $r \geqslant 0$, es compleix $\mathbb{P}(V_i>r|X_0=i)=f_i^r$.*

Demostració:

Ho demostrarem per inducció, però primerament observem que si $X_0=i$, llavors $\{V_i>r\}=\{T_i^{(r)}<\infty\}$ per $\forall\ r\geqslant 0$.

Cas $r=0$: En aquest cas tenim que $\mathbb{P}(V_i>0|X_0=i)=\mathbb{P}(T_i^{(0)}<\infty|X_0=i)$
$=\mathbb{P}(0<\infty|X_0=i)=1=f_i^0$. Es compleix.

Hipòtesi d'inducció: Suposarem que es compleix per un cert natural r, és a dir, que $\mathbb{P}(V_i>r|X_0=i)=f_i^r$.

Cas $r+1$: Tenim

$$\mathbb{P}(V_i>r+1|X_0=i) = \mathbb{P}(T_i^{(r+1)}<\infty|X_0=i)$$
$$= \mathbb{P}(T_i^{(r)}<\infty, S_i^{(r+1)}<\infty|X_0=i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(S_i^{(r+1)} < \infty | T_i^{(r)} < \infty, X_0 = i)\mathbb{P}(T_i^{(r)} < \infty | X_0 = i) \\
&\stackrel{1}{=} \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i)\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(V_i > 1 | X_0 = i)\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) \\
&\stackrel{H.I.}{=} f_i \cdot f_i^r = f_i^{r+1}
\end{aligned}
$$

En aquestes igualtats hem usat, a part de la Hipòtesi d'inducció, la definició de probabilitat condicionada, $S_i^{(r)}$ i $T_i^{(r)}$ i que $\{V_i > r\} = \{T_i^{(r)} < \infty\}$ si $X_0 = i$ i el Lema 6.7 demostrat anteriorment[1].

□

6.3 Criteris de classificació

Ara tenim com a propòsit buscar maneres senzilles de fer la classificació dels estats. Amb tot el material que hem anat recopilant en les parts anteriors podem ja esmentar un teorema molt important en aquest camp i que seguidament veurem. Abans, però, recordem l'Observació 5.6 amb la qual podem dir que $\mathbb{E}(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(V > n)$. Necessitarem aquest resultat per la demostració del teorema mencionat.

Teorema 6.14. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov(λ,P) amb $i \in S$ un estat. Aleshores*

1) $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) = 1 \Longrightarrow$ *i és un estat recurrent i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

2) $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) < 1 \Longrightarrow$ *i és un estat transitori i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

En particular, cada estat és o bé recurrent o bé transitori.

Demostració:

1) Suposem que $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$, aleshores pel Lema 6.12 tenim que $\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = 1$ per $\forall\ r \geqslant 1$. Lavors

$$\mathbb{P}(V_i = \infty | X_0 = i) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = 1$$

Per tant, i és un estat *recurrent*, que ho sabem per l'Observació 6.11, i a més, usant el Corol·lari 6.10 traiem que

$$\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

2) Suposem ara que $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) < 1$, aleshores novament pel Lema 6.13 i el Corol·lari 6.10 tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = \sum_{r=0}^{\infty} f_i^r = \frac{1}{1 - f_i} < \infty$$

Observem que hem usat la convergència d'una sèrie geomètrica a l'infinit de raó f_i, $0 < f_i < 1$, per extreure que la suma convergeix i saber el seu valor.

Podem concloure doncs que $\mathbb{P}(V_i = \infty | X_0 = i) = 0$ i que i és un estat *transitori*.

$\square$

Observacions 6.15.

1. De la demostració del Teorema podem dir que si i és un estat transitori, aleshores

$$\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \frac{1}{1 - f_i}$$

2. Aquest teorema ens dona dues possibilitats vàlides per saber classificar els estats en recurrents i transitoris, una en funció de la *probabilitat de retorn* i l'altra en funció de la *probabilitat de transició en n passos*. Podem fer-ne ús de la que més fàcil ens sigui depenent del cas.

Ara ja sabem que els estats que no són recurrents són transitoris i passa el mateix a la inversa. Doncs també es pot provar que dins d'una *classe de comunicació* tots els estats són del mateix tipus. Vegem-ho.

Teorema 6.16. *Sigui $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena Markov(λ,P) i C una classe de comunicació. Llavors tots els estats de C són transitoris o recurrents.*

Demostració:

Prenem $i,j \in C$ amb i estat transitori aleshores $\exists\, n,m \in \mathbb{N}$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Ara, per l'equació de Chapman-Kolmogorov tenim que per $\forall r \geqslant 0$

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geqslant \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kk}^{(r)} p_{ki}^{(m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)} \Longrightarrow p_{jj}^{(r)} \leqslant \frac{p_{ii}^{(n+r+m)}}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}}$$

Com això és cert per $\forall r \geqslant 0$, també ho és per la suma

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} \leqslant \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+r+m)} < \infty$$

Que estigui acotada ho deduïm del Teorema 6.14; a més, amb aquest mateix teorema també deduïm que l'estat j és un estat transitori tal com volíem veure.

Això implica directament que si en una classe hi ha un estat recurrent aleshores tots els altres estats hauran de ser recurrents també per força. Perquè hem vist que ser transitori i recurrent són complementaris i que si hagués un estat transitori a la classe, no podria haver-hi estats recurrents.

$\square$

Notació 3. *Amb la informació d'aquest teorema és natural parlar de classes recurrents i transitòries.*

Seguidament, veurem dos teoremes que ens relacionaran les classes recurrents amb les classes de comunicació tancades.

Teorema 6.17. *Tota classe recurrent és tancada.*

Demostració:

Sigui C classe no tancada. Llavors existeixen $i \in C$, $j \notin C$ i $m \geqslant 1$ tals que

$$\mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i) > 0$$

Aleshores es compleix que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ per infinits } n\} \mid X_0 = i) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_n = i \text{ per infinits } n \mid X_m = j, X_0 = i)\mathbb{P}(X_m = j \mid X_0 = i) = 0 \end{aligned}$$

ja que una vegada $X_m = j$, com que $j \notin C$ la cadena no pot tornar mai més a i; i molt menys fer-ho infinitament.

Ara utilitzant això i que

$$\begin{aligned} \{X_n = i \text{ per infinits } n\} = &(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ per infinits } n\}) \\ &\cup (\{X_m \neq j\} \cap \{X_n = i \text{ per infinits } n\}) \end{aligned}$$

podem calcular

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i \text{ per infinits } n \mid X_0 = i) &\leqslant \mathbb{P}(\{X_m \neq j\} \cap \{X_n = i \text{ per infinits } n\} | X_0 = i) \\ &\leqslant \mathbb{P}(X_m \neq j | X_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i) < 1 \end{aligned}$$

Per tant, això implica que i no és un estat recurrent i, conseqüentment, C tampoc és recurrent.

□

Després d'aquest teorema és normal preguntar-se si el recíproc és cert. De fet, per classes infinites no ho és, però si alguna classe de comunicació conté finits estats i la cadena no pot sortir d'aquesta, aleshores sembla raonable que la cadena vagi passant per tots els estats de la classe infinitament. Vegem-ho en el següent teorema.

Teorema 6.18. *Tota classe de comunicació finita i tancada és recurrent.*

Demostració:

Sigui C una classe de comunicació tancada amb finits estats i prenem $i \in$ C un d'aquests. Donat que la classe és finita i no se'n pot sortir d'ella, si la cadena comença a i, ha d'haver-hi per força almenys un estat $j \in C$ que és visitat infinitament amb probabilitat positiva:

$$\mathbb{P}(X_n = j \text{ per infinits } n \mid X_0 = i) > 0$$

Si $i = j$ ja ho tindríem, si no, com que i,$j \in C \Longrightarrow \exists\ m > 0$ tal que $p_{ji}^{(m)} > 0$. I tenim la desigualtat

$$\mathbb{P}(X_n = j \text{ per infinits } n \mid X_0 = j) \geqslant p_{ji}^{(m)} \cdot \mathbb{P}(X_n = j \text{ per infinits } n \mid X_0 = i) > 0$$

D'aquí deduïm que j no pot ser un estat transitori i que, per tant, ha de ser recurrent. Això implica que C és una classe recurrent.

$\square$

Observació 6.19. D'aquests dos últims teoremes podem extreure les següents equivalències per classes de comunicació **finites**:

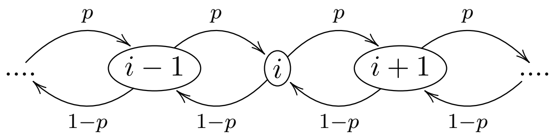
1) C classe de comunicació recurrent $\iff$ C classe tancada.

2) C classe de comunicació transitori $\iff$ C classe no tancada.

6.4 Exemples

En aquest últim apartat del capítol veurem un parell d'exemples amb la intenció que siguin útils pel lector per assimilar millor les nocions apreses durant aquest capítol.

Exemple 6.20. (*Passejada aleatòria*) Recuperem novament aquest exemple i estudiem la recurrència o transitorietat dels estats de la cadena. Recordem que el diagrama d'aquesta cadena era:



Ja sabíem, del capítol 4, que aquesta cadena és irreduïble i que, per tant, té una única classe. Notem que si la cadena fos finita, ja podríem dir que tots els seus estats són recurrents, però la cadena té infinits estats i aquest argument no el podem utilitzar. No obstant això, si és cert que al ser la cadena irreduïble ens val estudiar un sol estat, per exemple el 0.

Suposem que la cadena comença en 0, aleshores la cadena només podrà tornar de nou en un nombre parell de passos, en altres paraules, $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ per $\forall\ n \geqslant 0$. També podem observar que per tornar-hi la cadena ha de fer els mateixos passos cap a la dreta que cap a l'esquerra, això es tradueix a dir que si la cadena retorna a 0 en $2n$ passos, aleshores ho fa amb probabilitat $p^n(1-p)^n$ i a més hem de veure quantes maneres hi ha de fer els n passos a la dreta dels $2n$ possibles per calcular $p_{00}^{(2n)}$. Per tant, resumidament, tenim per $\forall\ n \geqslant 0$:

$$p_{00}^{(2n+1)} = 0$$
$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

Observació:

En farem ús de la fórmula de Stirling que és una fórmula utilitzada per aproximar factorials de gran magnitud, aquesta ens diu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1 \qquad \text{o en altres paraules} \qquad n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ quan } n \to \infty$$

També recordem la fórmula dels nombres combinatoris perquè la necessitarem:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Utilitzant la fórmula de Stirling en la probabilitat de transició en n passos quan $n \to \infty$ obtenim

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Distingim 2 casos:

- Si $p = \frac{1}{2} \Longrightarrow 4p(1-p) = 1 \Longrightarrow p_{00}^{(2n)} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quan $n \to \infty$. Això ens diu que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geqslant n_0$ se satisfà $p_{00}^{(2n)} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}}$. Aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty\ .$$

  Per tant, pel Teorema 6.13 sabem que 0 és un estat recurrent i que, en conseqüència, en aquest cas tots els estats són *recurrents*.

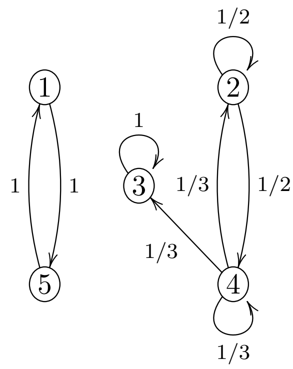
- Si $p \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow 4p(1-p) = r < 1 \Longrightarrow p_{00}^{(2n)} \approx \dfrac{r^n}{\sqrt{\pi n}}$ quan $n \to \infty$. Això ens diu que $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geqslant n_0$ se satisfà $p_{00}^{(2n)} \leqslant r^n$. Aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty$$

  Llavors aquí 0 és un estat transitori i, fent ús del mateix argument del cas anterior, podem dir que tots els estats de la cadena són *transitoris*.

Aquest exemple anterior era d'una cadena infinita. A continuació veurem un exemple d'una cadena amb espai d'estats finit.

Exemple 6.21. Recuperem l'Exemple 4.11 del Capítol 4 i estudiarem quins estats de la cadena són transitoris i quins recurrents. Recordem que el diagrama amb les probabilitats de transició era



Primer de tot, vam veure que la cadena no era irreduïble, aleshores no ens és suficient classificar un estat i dir-ne que els altres seran iguals. Ho hem de fer estudiant cada una de les classes de comunicació, que vàrem veure que n'hi havia 3: $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ i $\{3\}$.

- {1,5} vam veure que era una classe tancada, com és òbviament finita podem utilitzar el Teorema 6.18 per poder dir que {1,5} és una classe recurrent $\Longrightarrow$ 1 i 5 són *estats recurrents.*

- {2,4} no era una classe tancada. De nou, com és una classe finita, utilitzem l'Observació 6.19 per concloure que es tracta d'una classe transitòria $\Longrightarrow$ 2 i 4 són *estats transitoris.*

- {3}: Podríem usar el mateix argument dels casos anteriors per classificar l'estat 3, però com veure que era un estat absorbent, immediatament sabem que 3 és un *estat recurrent.*

Nota: Fer aquest tipus de classificació d'estats quan l'espai d'estats és finit es redueix a classificar les classes de la cadena en tancades o no tancades. Això ho vam estudiar durant el capítol 4.

7 Aplicacions

El nostre propòsit en aquesta última secció teòrica del treball és veure algunes de les aplicacions més importants de les cadenes de Markov en diferents àmbits. Aquestes són utilitzades molt sovint, ja que modelitzen moltes situacions de la vida quotidiana i en són útils per predir futurs esdeveniments.

Tant és així que trobem cadenes de Markov en un ampli ventall de camps; com per exemple en biologia, que ja hem vist el cas de l'Exemple 3.9 - *Mutació d'un virus*. Però aquest no és l'únic exemple que hem vist, també està l'Exemple 5.8 - *Cadena de naixement i mort* que està relacionat amb l'estudi de la dinàmica de poblacions. Aquests casos no són casos aïllats, n'hi ha moltes més aplicacions. En física són utilitzades en molts problemes de termodinàmica o física estadística; també són emprades per modelar molts jocs d'atzar i en economia i finances també són molt útils.

Les trobem inclús en àmbits més allunyats de la matemàtica pura, com poden ser en meteorologia, per fer una predicció del temps que farà, o programació, per exemple Google fa ús de les cadenes de Markov en el seu algorisme. Estan presents fins i tot en música, en algorismes de composició musical, o en lingüística, per analitzar la probabilitat que una lletra vagi després d'una altra, fent-les així de molta utilitat en criptografia.

Podríem fer una llista molt llarga amb les aplicacions i usos de les cadenes de Markov en diferents contextos. A continuació veurem alguns exemples pràctics d'algunes aplicacions importants.

7.1 Biologia

Com hem comentat anteriorment i com hem vist durant el treball, la biologia és un dels camps que més usa les cadenes d Markov. Recordem que vam veure en l'Exemple 3.9 l'estudi de què un virus mutés, per tant, és útil en epidemiologia, on es fan servir també per modelar el desenvolupament d'epidèmies. A més d'aquest cas, són també utilitzades en l'àmbit genètic. En el següent exemple ho podem veure.

Exemple 7.1. *(Model de Wright-Fisher)* Aquest model és una cadena de Markov a temps discret amb espai d'estats $S = \{1, 2, ..., 2N\}$, on N és el nombre d'individus i $2N$ indica el nombre d'al·lels en cada generació que poden ser de dos tipus: A i a; sent A l'al·lel dominant i a el recessiu (són diferents versions de la informació genètica d'un mateix gen; cada individu porta el gen amb dos al·lels, per tant, els individus poden ser AA, Aa i aa). Suposarem que les generacions no es superposen, és a dir, un individu de la generació n no estarà present en la següent generació $n + 1$.

En la generació n, dels $2N$ al·lels tenim i al·lels del tipus A i $2N - i$ al·lels del tipus a i per a compondre la generació $n + 1$ s'escullen aleatòriament $2N$ d'aquests al·lels amb reemplaçament. Si X_n denota el nombre d'al·lels de tipus A en la n-èsima generació, aleshores $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una cadena de Markov amb les probabilitats de transició

$$p_{ij} = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(\frac{2N-i}{2N}\right)^{2N-j}$$

Les classes de comunicació d'aquesta cadena $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ són $\{0\}$, $\{1, ..., 2N-1\}$ i $\{2N\}$.

Eventualment, a mesura que n va creixent, el nombre d' al·lels A en la població serà 0 (l'al·lel A es perd), o $2N$ (l'al·lel a es perd). Així doncs, 0 i $2N$ són estats absorbents i $\{1, ..., 2N-1\}$ és una classe transitòria (classe finita i no tancada).

Sigui el temps d'atur

$$\tau = min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0 \text{ o } X_n = 2N\}$$

el moment en què la cadena és atrapada en $\{0, 2N\}$, és a dir, el temps en què apareix la primera generació que amb un sol tipus d'al·lel, A o a.

Observació:

Notem que $X_{n+1} \sim Binomial(2N, p)$ amb $p = \frac{i}{2N}$ probabilitat de seleccionar un al·lel A (on i és el nombre d'al·lels A en la generació n). Aleshores tenim que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = i) = 2N \cdot p = 2N \cdot \left(\frac{i}{2N}\right) = i = X_n$$

Això ens està dient que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una martingala.

Un cop sabem que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una martingala i sabem que τ és un temps d'atur tenim que es compleix que

$$\mathbb{E}(X_\tau|X_0 = i) = \mathbb{E}(X_0|X_0 = i) = \sum_{k=0}^{2N} k \cdot \mathbb{P}(X_0 = k|X_0 = i) = i \cdot \mathbb{P}(X_0 = i|X_0 = i) = i$$

Com $X_\tau = 0, 2N$ tenim que

$$\begin{aligned} i = \mathbb{E}(X_\tau|X_0 = i) &= 0 \cdot \mathbb{P}(X_\tau = 0|X_0 = i) + 2N \cdot \mathbb{P}(X_\tau = 2N|X_0 = i) \\ &= 2N \cdot \mathbb{P}(X_\tau = 2N|X_0 = i) \Longrightarrow \mathbb{P}(X_\tau = 2N|X_0 = i) = \frac{i}{2N} \end{aligned}$$

Llavors la probabilitat d'absorció $h_i^{\{2N\}}$ (que tots els individus siguin AA) és:

$$h_i^{\{2N\}} = \mathbb{P}(X_\tau = 2N|X_0 = i) = \frac{i}{2N}$$

i la probabilitat d'absorció $h_i^{\{0\}}$ (que tots els individus siguin aa) és:

$$h_i^{\{0\}} = \mathbb{P}(X_\tau = 0|X_0 = i) = \frac{i}{2N} = 1 - \mathbb{P}(X_\tau = 2N|X_0 = i) = 1 - \frac{i}{2N} = \frac{2N-i}{2N}$$

D'acord amb aquest model de Fisher-Wright, la diversitat s'acabaria perdent completament. Sabem, però, que desapareix lentament, ja que per p tal que $0 < p < 1$, quan $n \to \infty$ tenim que

$$\mathbb{E}(\tau) \sim -2n[(1-p)log(1-p) + p\, log(p)]$$

Nota 1: En aquest exemple hem usat material de la teoria de martingales. Donarem la definició de martingala i el resultat utilitzat.

Definició *Siguin* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat,* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió de variables aleatòries integrables sobre ell i* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successió creixent de sub-*σ*-àlgebres de* $\mathcal{F}$*. Direm que* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una* ***martingala*** *respecte a* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si per a* $\forall n \geqslant 0$ *es compleix*

1. M_n *és* $\mathcal{F}_n$ *mesurable.*
2. $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$

Teorema *Sigui* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala i sigui* T *un temps d'atur. Suposem que almenys una de les següents afirmacions és certa:*

1. $T \leqslant n$ *per alguna* n
2. $T < \infty$ *i* $|M_n| \leqslant C$ *sempre que* $n \leqslant T$

Aleshores $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$

Nota 2: Observem que el model de Wright-Fisher només considera generacions que no se superposin, per tant, no es podrà usar en l'espècie humana. Si ho volguéssim fer per humans hauríem de fer-ne ús del model Wright-Fisher-Moran que és un model continu.

7.2 Meteorologia

Una aplicació curiosa d'aquests tipus de cadenes és en meteorologia. Són utilitzades molt sovint per fer una predicció del temps que farà en un futur amb la informació del temps actual. Amb l'exemple que ve a continuació aprendrem com es poden usar en aquest context.

Exemple 7.2. *(Pronòstic del clima)* Suposem que la probabilitat que plogui demà depèn únicament de si avui ha plogut o no. Assignem el valor de 0 a que plogui i el valor d'1 a que no plogui, és a dir, definim per un temps $n \geqslant 0$; $X_n = \begin{cases} 0 & si\ \ plou \\ 1 & si\ \ no\ plou \end{cases}$ i suposem les següents probabilitats de transició

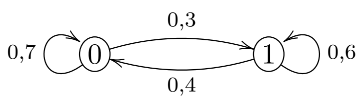
1. $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 0,7 = p_{00}$
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = 0,4 = p_{10}$

Ens preguntem quina és la probabilitat que plogui d'aquí a quatre dies sabent que avui està plovent.

Primerament, amb les dades podem saber que la matriu de transició associada aquest procés és

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

I el seu diagrama ve representat de la següent manera



Notem que ens estan preguntant per la probabilitat de transició en 4 passos, $p_{00}^{(4)}$. Com quatre és un número no massa gran, podem fer el càlcul de la matriu de transició en 4 passos, P^4, directament per respondre a la pregunta.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5749 & 0,4251 \\ 0,5668 & 0,4332 \end{pmatrix}$$

Per tant, la probabilitat que plogui d'aquí a quatre dies sabent que avui està plovent és de $p_{00}^{(4)} = 0,5749$.

Ja hem respost la pregunta del problema, però què passaria si volguéssim saber la probabilitat de pluja d'aquí a més dies o la probabilitat de pluja a llarg termini? O sigui, per n més gran?

Per fer això utilitzarem els resultats vists a l'Exemple 3.8, ja que si ens fixem aquest és un cas particular d'aquell exemple. Recordem que la matriu de transició era

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

i vam obtenir com a resultat que $p_{11}^{(n)} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$.

Extrapolant ara al nostre cas tenim que $\alpha = 0{,}3$ i $\beta = 0{,}4$ i, per tant, per $\forall n \geqslant 0$

$$p_{11}^{(n)} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

d'on podem calcular $p_{00}^{(4)} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7} \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^4 = 0,5749$ sense necessitat de fer potències de matrius.

Per acabar, per calcular la probabilitat que plogui a llarg termini farem el límit quan $n \to \infty$

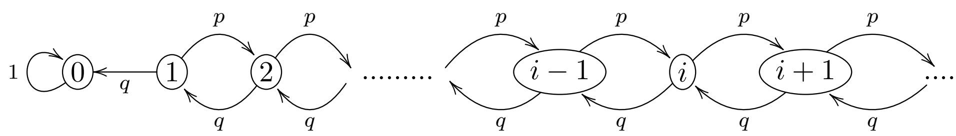
$$\text{Probabilitat de pluja a llarg termini} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

7.3 Jocs d'atzar

En aquesta part veurem com es poden aplicar les cadenes de Markov en l'àmbit lúdic, perquè són usades en diferents jocs d'atzar. L'exemple que següent tractarà d'un joc d'apostes; és un exemple molt conegut i veurem si ens interessa participar per guanyar diners o si és millor idea no jugar-hi.

Exemple 7.3. (*La ruina del jugador*) Suposem que som un jugador d'un casino que comença amb una fortuna d'i € i que en cada jugada guanya 1 € amb probabilitat p o el perd amb probabilitat $q = 1 - p$. Suposem també que els diners que pots guanyar en el casino és il·limitat. Quina és la probabilitat que acabem arruïnats?

El diagrama d'aquesta cadena de Markov és el següent



Fixem-nos que al preguntar-nos la probabilitat d'acabar arruïnats, ens estan preguntant la probabilitat d'absorció $h_i^{\{0\}}$, que té sentit perquè 0 és un estat absorbent. Denotarem $h_i = h_i^{\{0\}}$ per simplificar i fem ús del Teorema 5.4 que ens diu que h és la solució minimal no negativa del sistema

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1}, \qquad i = 1, 2, ... \end{cases}$$

Observació:

Les relacions de recurrència de la forma $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$ *tal que* $a, c \neq 0$ *tenen com a solució general*

$$x_n = \begin{cases} A\alpha^n + B\beta^n & si \;\; \alpha \neq \beta \\ (A + nB)\alpha^n & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

on: ▪ α *i* β *són les arrels del polinomi* $ax^2 + bx + c = 0$

▪ A *i* B *són constants que compleixen* $\begin{cases} x_0 = A + B \\ x_1 = A\alpha + B\beta \end{cases}$

En el nostre cas $\alpha = 1$ i $\beta = \dfrac{q}{p}$ ja que són les arrels del polinomi $px^2 - x + q = 0$.

Distingim 2 casos:

- Si $p \neq q$, aleshores la solució de la recurrència és de la forma

$$h_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

Pot passar que

▪ $p < q \Longrightarrow \dfrac{q}{p} > 1$. Com $0 \leq h_i \leq 1$, ja que h_i és una probabilitat, tenim que $B = 0$ i com s'ha de complir $h_0 = 1 = A + B$, es té $A = 1$. Això implica $h_i = 1$ per $\forall i$. Per tant, en aquest cas acabarem arruïnats independentment de la fortuna amb què comencem a jugar.

▪ $p > q$. Novament s'ha de complir $h_0 = 1 = A + B \Longrightarrow B = 1 - A$. Aleshores susbstituïnt B en la solució de la recurrència obtenim

$$h_i = A + (1-A)\left(\frac{q}{p}\right)^i = \left(\frac{q}{p}\right)^i + A\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$$

Segons el Teorema 5.3 busquem la solució h no negativa, per tant $A \geq 0$. A més, també s'ha de complir que sigui minimal, de manera que A $= 0$. Llavors $h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i$. D'aquí podem extreure que com més diners tinguem al principi, menys probabilitats tenim d'acabar en la ruïna.

- Si $p = q$, aleshores la solució de la recurrència és de la forma

$$h_i = A + iB$$

De nou la restricció $0 \leq h_i \leq 1$ implica $B = 0$, i al mateix temps aquesta implica $A = 1$. Per tant, $h_i = 1$ per $\forall i$. Així doncs, en aquest joc acabarem inevitablement arruïnats tot i que a priori no ho semblava per tractar-se d'un joc just.

7.4 Economia i negocis

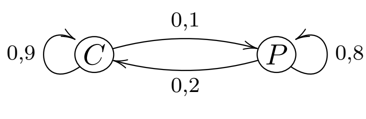
En l'àmbit econòmic, les cadenes de Markov s'utilitzen freqüentment per modelar l'avaluació d'opcions per determinar quan hi ha oportunitats d'arbitratge (treure beneficis d'una diferència del preu entre dos o més mercats).

Pel que fa als negocis, aquestes són usades per analitzar patrons de compra dels deutors morosos, planejar les necessitats de personal o analitzar el reemplaçament d'equip. Així mateix, també estan presents en la predicció de les vendes d'un producte d'una indústria, ja que això suposa un problema matemàtic important en el camp dels negocis. El contingut de l'exemple d'aquest apartat estarà directament relacionat amb aquesta última part.

Exemple 7.4. *(Predicció de vendes de refrescos)* Suposarem que tota la indústria dels refrescos produeixen dos tipus de begudes: Coca-Cola (C) i Pepsi (P). Sabem que si una persona ha comprat Coca-cola, hi ha un 90% de probabilitats que el pròxim cop també en compri. I si el que ha comprat ha sigut Pepsi, aleshores la probabilitat que repeteixi és del 80%.

Sabent això podem construir la matriu de transició d'aquesta cadena i el seu diagrama

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$



- A la productora de Pepsi li interessa saber quina és la probabilitat que una persona que ara compra el seu producte, d'aquí a dues compres passi a comprar a la competència. Analitzem-ho.

És un cas fàcil que ja hem anat fent durant el treball, se'ns demana la probabilitat de transició en 2 passos, $p^{(2)}_{PC}$. Per fer-ho calcularem P^2.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$$

i la probabilitat que busquem és $p_{PC}^{(2)} = 0,34$. Per tant, és bastant probable que encara compri Pepsi d'aquí a dues compres, un 66% de probabilitats.

- Ara és la productora de Coca-Cola la que vol saber quina és la probabilitat que d'aquí tres compres un client compri Coca-Cola sabent que actualment compra Coca-Cola. Analitzem-ho.

  En aquest cas hem de saber la probabilitat de transició en 3 passos, $p_{CC}^{(3)}$. Necessitem doncs calcular P^3.

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix}$$

  i la probabilitat desitjada és $p_{CC}^{(3)} = 0,781$. Per tant, la probabilitat que aquest client passi a beure el refresc de la competència en tres compres és relativament baixa, d'un 21,9%.

- Per últim, suposem que avui hi ha un 30% de la gent que compra Coca-Cola i un 70% que compra Pepsi. Volem saber quina fracció de la gent estarà comprant Coca-Cola i quina fracció Pepsi d'aquí a tres compres.

  Tenim que el vector de probabilitat inicial és (0,3 0,7). Aleshores la fracció que estem buscant vindrà donada per

$$(0,3\ \ 0,7)P^3 = (0,3\ \ 0,7)\begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix} = (0,5409\ \ 0,4591)$$

  Això ens està dient que tres compres més tard hi haurà un 54,09% de les persones que consumiran Coca-Cola i un 45,91% Pepsi.

8 Conclusions

Un cop finalitzada la memòria d'aquest projecte m'agradaria comentar diferents aspectes del mateix i examinar si hem aconseguit arribar a l'objectiu que ens vam proposar en un primer moment.

La finalitat d'aquest treball era introduir al lector al món de les cadenes de Markov homogènies en temps discret. Farem una breu repassada superficial dels temes tocats durant la memòria amb la intenció de poder discutir posteriorment si s'ha assolit el propòsit satisfactòriament.

Recordem que vam començar per un primer capítol d'explicacions de diferents nocions de probabilitats que servirien de base per a la construcció de la teoria de les cadenes que trobem immediatament després. Vam definir una cadena de Markov, veient així la seva característica principal: la *propietat de Markov*; seguidament vam estudiar les *probabilitats de transició en m passos*. Hem après també a classificar els estats en *essencials*, *no essencials*, *absorbents* i *periòdics* o *aperiòdics* i les cadenes en *irreduïbles*, *regulars* i *aperiòdiques*. A continuació vam passar a estudiar conceptes relacionats amb la *probabilitat d'absorció* i després vam aprendre a saber identificar dos nous tipus d'estats: *recurrents* i *transitoris*. Per acabar tenim l'última part dedicada a mostrar les *aplicacions* més destacables de les cadenes d'aquest tipus.

A grans trets hem pogut veure tots aquests elements durant el treball; no obstant això, tot això no és més que la punta de l'iceberg de la teoria de les cadenes de Markov i hi ha molt més que descobrir. M'agradaria posar èmfasi en el fet que les cadenes que hem estat estudiant eren homogènies i en temps discret, però n'hi ha cadenes de Markov contínues i que no compleixen l'homogeneïtat que, tot i que s'escapen del temari d'aquest projecte, són molt interessants i tenen moltes utilitats i aplicacions pràctiques.

Aleshores, malgrat que es podria aprofundir més en el tipus de cadenes de Markov que hem estudiat, crec que hem assolit amb èxit l'objectiu del treball, ja que, cal destacar que aquest era fer una introducció a la teoria de les cadenes de Markov homogènies en temps discret i no una explicació exigent d'aquestes. Probablement si haguéssim volgut entrar en més detall, hauríem d'haver prescindit de diferents aclariments i haver anat més de pressa, cosa que hagués fet el treball més difícil de comprendre pel lector.

Per acabar voldria insistir en el fet que les cadenes de Markov tenen moltísimes aplicacions; n'hem vist unes quantes, però n'hi ha moltes a les quals no hem pogut prestar-li atenció. M'hauria agradat afegir-ne més, tanmateix s'utilitzaven conceptes de les cadenes més avançats o es tractaven de cadenes en temps continu, com és el cas del model Wright-Fisher-Moran que és el cas continu de l'Exemple 7.1 - *Model de Wright-Fisher*. És per això que crec que és un tema interessant i ampli i m'agradaria animar al lector a continuar indagant la teoria de les cadenes de Markov i els seus usos.

Referències

[1] J.R. Norris: *Markov Chains*, Cambridge University Press, New York, 1997.

[2] Dimitri Franco; Sebastián Páez; Miguel Sánchez; Oscar Bernal: *Modelos Probabilísticos*, 2015.

[3] Luis Rincón: *Introducción a los procesos estocásticos*, México, gener 2012.

[4] Miguel A. Marmolejo; Édgar A. Valencia: *Martingalas discretas. Aplicaciones*, Universidad Industrial de Santander, Vol. 27, No. 2, 2009.

[5] Valentina Castellanos Rodríguez: *Forma de la Distribución cuasiestacionaria de una cadena de Markov bivariada: Aplicación a un modelo genético*, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., México, setembre 2006.

[6] Verónica Rumbo: *Cadenas de Markov con restricciones y aplicación a la composición automática de música tonal*, Universidad de la República, Uruguay, març 2017.

[7] Raúl Jiménez; Rosario Romera: *Procesos Estocásticos*, UC3M, `http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/rjjimene/apuntes-rj/Todo.pdf`, decembre 2008.

[8] Javier Pérez Lázaro: *Cadenas de Markov (en tiempo discreto, con estados discretos)*, Universidad de La Rioja, La Rioja.
`https://www.unirioja.es/cu/franpere/ModyOptfiles/Tema6.pdf`

[9] Joaquín Ortega Sánchez: *Cadenas de Markov*, Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT),
`https://www.cimat.mx/ jortega/MaterialDidactico/probabilidad17/Tema4.pdf`, 2017.

[10] Recurrence and transience
`https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik _II/Skript_2B.pdf`.

[11] Juan Kuntz: Markov chains revisited,
`arXiv:2001.02183v2 [math.PR]`, juliol 2014.

[12] Andrei Andreyevich Markov, Biografía
`https://www.ugr.es/ eaznar/markov.htm`