Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

MATEMÀTIQUES: UNA CIÈNCIA INCOMPLETA

Autora: Iris Navarro Borraz

Director: Dr. Joan Bagaria Pigrau
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

The present paper aims to show the consequences of Gödel's incompleteness theorems on the foundations of mathematics and on the philosophy of mathematics. It has three sections. The first section shows the triggers of the stage known as "the crisis in the foundations" as well as the two main philosophical currents that emerged in it: logicisim and formalism. In the second section, Gödel's incompleteness theorems are presented as they were originally presented by adding comments that try to explain the different steps of the proof. This section also shows the subsequent advances that allowed enunciating them as we know nowadays. Finally, the third section tries to analyze the consequences that these two theorems had.

Resum

El present treball pretén mostrar les conseqüències dels teoremes d'incompletesa de Gödel en els fonaments de les matemàtiques i en la filosofia de la matemàtica. Consta de tres seccions. La primera mostra els desencadenants de l'etapa coneguda com "la crisi dels fonaments" així com els dos principals corrents filosòfics que van sorgir en ella: el logicisme i el formalisme. En la segona secció, s'exposen els teoremes d'incompletesa de Gödel tal com van ser presentats originalment, amb comentaris que tracten d'explicar els diferents passos de la demostració. En aquesta secció també es mostren els avanços posteriors que van permetre que siguin enunciats com els coneixem actualment. Finalment, el tercer apartat tracta d'analitzar les conseqüències que van tenir aquests dos teoremes.

2020 Mathematics Subject Classification. 00A30, 03B25, 03A05

Agraïments

Vull agrair a en Joan Bagaria el seu suport durant l'elaboració d'aquest treball.

A l'Ari, companya de classe i rival als jocs de cartes al claustre.

I a les persones que han aconseguit que durant aquests anys no hagi engegat a rodar aquest repte. A elles sobretot.

Índex

1 Introducció

El projecte

La lògica ocupa un lloc poc destacat dins del pla d'estudis de la carrera de matemàtiques; una assignatura introductòria a primer i, excepte que triïs optatives relacionades, no es proporciona més formació als estudiants sobre aquesta matèria. En particular, els teoremes de Gödel no estan continguts en el pla docent de cap de les assignatures obligatòries, no obstant la seva rellevància i les seves implicacions transversals a tota la ciència. Per tant, tampoc existeix un debat sobre els fonaments de la matemàtica, ni es reflexiona sobre les limitacions dels sistemes sobre els quals està sostingut el coneixement que s'explica en totes les matèries incloses a l'ensenyament.

Aquesta és la meva segona carrera i existeix una menció vinculada al primer grau que vaig cursar; per tant, el camí que havia de prendre ja estava, d'alguna forma, determinat, així com les optatives que escolliria. Conseqüentment, els meus coneixements sobre lògica eren –i són– limitats. Tampoc havia rebut cap aprenentatge anterior sobre filosofia de les matemàtiques.

Així, l'objectiu d'aquest treball és fer una aproximació a aquests temes, que em semblen interessants i sobre els quals no havia rebut cap formació prèvia.

Estructura de la Memòria

El primer apartat analitza els principals fets que van ocórrer perquè es produís l'anomenada "crisi dels fonaments": el descobriment d'una nova geometria i el desenvolupament de la teoria de conjunts. Posteriorment, s'analitzen les característiques dels dos principals corrents filosòfics que van sorgir durant aquesta etapa, el logicisme i el formalisme.

El segon bloc mostra els teoremes d'incompletesa de Gödel en la forma original en la qual van ser presentats per Gödel al 1930, així com les seves demostracions, aportant comentaris que ajuden a fer un correcte seguiment de les mateixes. En acabar, s'indiquen els avanços posteriors que permeten arribar als enunciats dels teoremes tal i com són coneguts actualment.

Finalment, a l'últim apartat, s'analitzen algunes de les conseqüències que deriven d'aquests teoremes, filosòfiques i matemàtiques, incloent-hi tres exemples il·lustratius de problemes indecidibles.

2 Orígens de la fonamentació de la matemàtica

2.1 Introducció

Euclides va ser l'autor dels *Elements*, un tractat matèmatic i geomètric escrit al voltant del 300 a.C., que consta de 13 llibres i que està considerat com la primera sistematització de la geometria. A partir de –tan sols– 23 definicios i 5 postulats Euclides mostrava com es podien obtenir un elevat nombre de proposicions que durant més de dos mil anys van ser considerades certeses matemàtiques pràcticament inqüestionables. D'acord amb Ernest Nagel i James R. Newman "la forma axiomàtica de la geometria va ser presentada a moltes generacions de destacats pensadors com el més excel·lent model de coneixament científic".

No obstant, el cinquè postulat d'Euclides, que afirma que per un punt exterior a una recta donada pot traçar-se una única línia paral·lela a aquesta recta, i que formava part de la seva sistematització, havia sigut, ja des dels antics grecs, objecte de debat. Euclides defineix les línies paral·leles com línies rectes que "prolongant–se en el pla indefinidament no es troben". Per tant, si dues línies són paral·leles, d'acord amb la definició, no es troben mai, ni tan sols a l'*infinit*. Però, tal i com afirmen Nagel i Newman "els antics coneixien línies que, encara que no es tallaven en cap regió finita del pla, es troben en l'*infinit*. De tals línies es diu que són *asimptòtiques*". En conseqüència, durant segles, molts matemàtics van tractar de deduïr aquest postulat a partir d'altres axiomes sobre el quals no existia cap dubte respecte la seva evidència.

Va ser a mitjans del segle XIX quan Gauss[2] —sense publicar-ho—, Bolyai[3] i Lobachevsky[4] van aconseguir resoldre el misteri. Els resultats obtinguts per aquests matemàtics van tenir una transcendència inesperada, degut a les conclusions i implicacions obtingudes. D'una banda, es va conèixer un resultat poc habitual: aquest postulat era necessari que fos considerat com a tal i, conseqüentment, es va demostrar la impossibilitat de demostrar el cinquè postulat utilitzant les altres proposicions del sistema. És a dir, l'afirmació havia de considerar–se com autoevident per a obtenir totes les certeses que s'en deriven. D'altra banda, i quasi més important, es va obrir la porta per a la creació de noves geometries. Així, intentant negar el cinquè postulat d'Euclides per arribar a una contradicció, va crear-se la geometria hiperbòlica, on per cada punt exterior a una recta passen com a mínim dues rectes paral·leles, que es usada, per exemple, en la teoria de la relativitat general.

Es pot observar que el descobriment va suposar una destacada aportació epistemològica. El nou model de la geometria no només gaudia de validesa en el sentit formal o lògic sinó que més tard seria demostrat com a útil per a explicar diferents fenòmens. Així la consideració –o no– d'un axioma en base a una suposada autoevidència va començar a posar–se en dubte i va deixar de considerar–se una raó suficient. A més, aquest fet va provocar l'anàlisi d'altres sistemes axiomàtics, així com la creació de nous, en camps en què el seu desenvolupament s'havia dut a terme d'una forma més o menys intuïtiva.

D'altra banda, menys de mig segle després, l'any 1873, George Cantor[5] en una carta

[2]Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 d'abril de 1777 – Gotinga, 23 de febrer de 1855) fou un destacat Matemàtic, astrònom i físic alemany. Considerat com a *Princeps Mathematicorum*, el príncep dels matemàtics, per les seves importants contribucions a diverses àrees.

[3]János Bolyai (15 de desembre de 1802 – 27 de gener de 1860), matemàtic hongarès.

[4]Nikolái Ivánovich Lobachevski (1 de desembre de 1792 – 24 de febrer de 1856), matemàtic rus.

[5]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3 de març de 1845 – 6 de gener de 1918) fou un destacat

dirigida a Dedekind[6] preguntava si els conjunts[7] del nombres naturals i el conjunt de nombres reals poden ésser posats en correspondència un a un. Dedekind, en resposta, va demostrar que el conjunt de nombres algebraics[8] és numerable (i.e., pot posar–se en correspondència un a un amb els naturals). Uns pocs dies més tard, Cantor va poder demostrar que suposar que el conjunt dels nombres reals era numerable portava a contradicció. Aquests descubriments van permetre clarificar allò que sempre havia romàs inexcrutable: *l'infinit.* Segons Cantor, dos conjunts tenen la mateixa mida –o cardinalitat– si, i només si, existeix una bijecció entre ells. Aplicant aquesta definició podem distinguir dos tipus d'infinits: l'infinit numerable i l'infinit no numerable.

Durant els anys 1878 a 1885 Cantor publicà una sèrie de treballs que van convertir la teoria de conjunts en una branca autònoma de les matemàtiques. L'any 1878 va conjecturar que qualsevol subconjunt infinit de $\mathbb{R}$ pot ésser posat en correspondència un a un amb el conjunt $\mathbb{N}$ o amb el conjunt $\mathbb{R}$. Aquesta conjectura es coneix com la *hipòtesi del continu.*

Cantor, va analitzar de forma destacada els conjunts de punts, que el va portar, l'any 1882, a concebre els números transfinits. Posteriorment, va centrar el seu estudi en els nombres cardinals i ordinals[9] transfinits. Els ordinals transfinits van ésser introduits com a nous nombres per Cantor en l'important article *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fonaments d'una teoria general de conjunts) l'any 1883, definits mitjançant dos principis generadors: el primer, es genera com el successor *a+1* per a qualsevol nombre *a*, i el segon diu que existeix un número *b* que segueix en qualsevol successió de números sense un element final. Per exemple, si apliquem a la successió 0,1,2,3,... el segon principi generador obtenim 0,1,2,3,...,ω, $\omega+1, \ldots$ on ω denota el primer número transfinit. Ara com que obtenim una successió també inacabada podríem repetir el procés de forma que obtindríem

$$0,1,2,3,...,\omega,\omega+1,...,\omega+\omega=\omega\cdot 2,\omega\cdot 2+1,..., \omega\cdot \mathrm{n}, \omega\cdot \mathrm{n}+1,...,\omega^2,\omega^2+1,...,\omega^\omega,...$$

I axí successivament, on sempre que apareix una successió sense el darrer element podem aplicar el segon principi generador. De l'estudi d'aquests nombres, els ordinals transfinits, Cantor centrà la seva atenció en l'ordre, i en particular en els conjunts ben ordenats; un conjunt S direm que està ben ordenat per una relació $<$ si, i només si, $<$ és un ordre total i cada subconjunt no buit de S té un element mínim en l'ordre $<$. Cantor va presentar la hipòtesi que *tot* conjunt pot estar ben ordenat com una "llei fonamental i trascendental del pensament". La demostració d'aquest principi, el principi de bona ordenació, serà comentada més endevant.

Aquests descobriments varen tenir implicacions transversals a tota la ciència matemàtica i com a conseqüència neixia el período anomenat com "la crisi dels fonaments", on diversos autors van tractar d'establir les bases de la ciència matemàtica. Durant aquest

matemàtic rus, nacionalitzat alemany, i el creadors de la teoria de conjunts.

[6]Julius Wilhelm Richard Dedekind (6 d'octubre de 1831 – 12 de febrer de 1916) fou un matemàtic alemany considerat un el creador de la teoria de conjunts.

[7]Tal i com va descriure Cantor: "Per *conjunt* entenem cada combinació M de certs objectes ben diferenciats en la nostra intuïció o el nostre pensament (que s'anomenen els "elements"de M) en un tot". Traducció pròpia.

[8]Nombre algebraic, per definició, qualsevol nombre, real o complex, que és solució d'una equació polinòmica amb coeficients racionals.

[9]Donat un conjunt, hom pot comptar–los i, un cop acabats de comptar tots el elements, no només s'obté el nombre total d'elements, el nombre cardinal corresponent al conjunt, sinó que durant el procés també ha estat distinguit cada un dels elements. Així cada element té assignat un número, anomenat nombre ordinal i que indica la posició que ocupa l'element en el procés de compteig.

període van aparèixer diverses corrents, destacant-ne dues: el logicisme i el formalisme.

2.2 Logicisme

La paraula lògica deriva del vocable grec *logos* i significa "raó", "coneixement". Aristòtil va redactar una sèrie d'obres, conegudes com *Órganon*, que li van atorgar el títol de fundador de la lògica, on l'eix central d'un sistema lògic eren els sil·logismes: "un discurs en el qual, establertes determinades coses, resulta necessàriament d'elles, per ser allò que són, una altra cosa diferent".

Kant, distingia dos tipus de proposicions: els judicis analítics i els sintètics. Els judicis analítics són aquells on el predicat està contingut en la noció de subjecte i els sinètics on no està contingut. Per exemple, *Tots els llibres tenen fulls* és un judici analític (doncs, per definició, un llibre és un conjunt de fulls) i, en canvi, *tots els llibres són gruixuts* és un judici sintètic. A més establia una altra diferenciació dintre dels judicis sintètics, si són *a priori* –aquells en què la seva justificació és independent de l'experiència– i els *a posteriori* –aquells que sí depenen de l'experiència.

Per Kant, tant l'aritmètica com la geometria eren sintètiques *a priori*. Per exemple, si pensem en la proposició 7+5=12 i raonem sobre si 12 està contingut en el concepte de suma hom determina que no ho està i per tant, és un judici sintètic, i ho és *a priori* com a conseqüència de "la forma pura de la nostre intuicó del temps", això és, segons Michael Friedman "per les característiques generals de successió i iteració del temps que garanteixen la existència i unicitat de sumar 7 i 5". D'altra banda el caràcter *a priori* de la geometria euclidiana derivaria de "la forma pura de la nostra intuïció de l'espai".

El logicistes utilitzen la distinció que fa Kant sobre els judicis, però per afirmar que –almenys– la aritmètica és analítica i no sintètica. El primer autor en presentar aquesta visió fou Dedekind, recomanant que calia allunyar d'una base per a l'aritmètica, així com per l'àlgebra i l'anàlisi real, qualsevol aspecte intuicionista geomètric. En el prefaci de l'obra que va escriure al 1888 –i que va ser publicada al 1896– queden expressades clarament les seves inquietuds:

"Al parlar d'aritmètica (àlgebra, anàlisis) como mera part de la lògica, vull fer entendre entendre que considero el concepte de nombre enterament independent de les nocions o intuicions d'espai i temps, que més aviat ho considero un producte immediat de les lleis pures de pensament ... És només a través del procés purament lògic de construir la ciència dels nombres i l'adquirir així el domini numèric continu que podem investigar amb precisió les nostres nocions d'espai i temps al posar–les en relació amb aquest domini numèric creat a la nostre ment".

Dedekind, no obstant la presentació de les seves ideas fou informal, pot ésser considerat com el precursor de la corrent logicista.

Gottlob Frege

La corrent logicista com a tal s'inicià quan Frege[10] publicà al 1857 l'article *Begriffsschrift*, que podria ser traduït com a ideografia.

[10]Friedrich Ludwig Gottlob Frege (Wismar, 8 de novembre de 1848 – Bad Kleinen, 26 de juliol de 1925) fou un matemàtic, lògic i filòsof alemany. Considerat precursor de la filosofia analítica i fundador de la corrent logicista.

Frege, en el prefaci de l'obra citada anteriorment, divideix les veritats que no són evidents entre aquelles que són obtingudes mitjançant un procediment lògic i aquelles en què s'ha fet ús de l'experiència i es va preguntar a quina de les dues categories pertanyien els coneixements sobre aritmètica. Per respondre a aquesta pregunta va intentar elaborar un sèrie de veritats encadenades mitjançant un sistema lògic, però es va trobar amb importants dificultats. Així, ell mateix ens fa saber la finalitat de la seva obra:

(...)"El seu primer propòsit, per tant, és donar–nos la prova més confiable de validesa d'una cadena d'inferències i assenyalar cada pressuposició que tracta de colar–se inadvertidament per tal que el seu origen pugui ser investigat."(...)[11]

Frege, en la seva obra, utilitzant la teoria de conjunts i recolzant–se en les idees inicialment exposades per Dedekind, va tractar d'establir les bases sobre les quals fonamentar l'aritmètica mitjançant un sistema purament lògic, introduint els símbols i conceptes que serien emprats en el sistema, on destaca la definició dels termes *argument* i *funció* que substitueixen respectivament els conceptes de subjecte i predicat fets servir en el llenguatge ordinari. Així, donada una expressió, considerem la funció com allò que roman inalterat en l'expressió i l'argument de la funció com allò que podem intercanviar. És evident que ser funció o ser argument depèn d'allò que hom considera, resaltant que Frege considerava ser funció o argument inclús de forma indeterminada, i.e., variable. Un exemple ilustratiu és el mateix que dóna Frege en la seva obra, si considerem la proposició "Cato va matar Cato" el paper de funció o d'arqument és diferent depenent de quina part serà la que considerem com a reemplaçable. Per exemple, si considerem el primer "Cato" com intercanviable, aleshores la funció seria "va matar Cato"; si considerem el segon "Cato", en canvi, la funció seria "assassinat per Cato"; i, si considerem tots dos "Cato" com reemplaçables, és clar que allò que resulta inalterat és matar–se un mateix.

Després de les nocions més fonamentals de les regles lògiques i de la definició de diferents símbols que formen part de la introducció, estableix les regles i lleis usades per a obtenir raonaments més complexos partint d'aquesta notació i de les nocions prèvies fonamentals del pensament. Com el mateix Frege menciona, aquest document era una petita introducció per tal de seguir investigant sobre els diferents coneixements aritmètics que podien ser obtinguts mitjançant una argumentació purament lògica.

Al 1874 va publicar *Grundgesetze der Arithmetik*, Lleis bàsiques sobre aritmètica, l'obra emblemàtica de l'aportació de Frege a la corrent logicista. En l'obra tracta d'unificar l'aritmètica i l'anàlisi dintre d'una teoria general de classes o extensions de conceptes. Les classes eren considerades objectes lògics per excel·lència i els nombres naturals eren considerats classes particulars dintre d'un univers més ampli d'objectes lògics. A partir de les definicions era possible obtenir els primers axiomes o lleis bàsiques de l'aritmètica com a teoremes dintre de la teoria de classes. Entre aquests axiomes es trobava la *llei bàsica V* que ens diu que si dues funcions tenen el mateix conjunt de valors per al mateix argument és equivalent a que les dues funcions són iguals i que en llenguatge modern s'escriuria com:

$$\{x|\Phi x\} = \{x|\Psi x\} \leftrightarrow \forall x(\Phi x \leftrightarrow \Psi x)$$

Bertrand Russell va llegir i analitzar el contingut de l'obra de Frege, doncs ell mateix estava redactant la seva obra sobre els principis de la matemàtica, i el dia 16 de juny de 1902 va escriure a Frege un carta on li exposava que estava d'acord en tot lo essencial,

[11]Traducció pròpia de la traducció a l'anglès feta per J.V. Heijenoort inclosa en el llibre *From Frege to Gödel*.

principalment en treure de les veritats lògiques qualsevol supeditació a proves empíriques així com en la necessitat de crear una ideografia que fonamenti les matemàtiques i la lògica formal. No obstant, també afirma "haver trobat una dificultat" en el fet de poder considerar una funció com un element indeterminant i li enuncia la famosa paradoxa, coneguda com la paradoxa de Russell:

(...)"Sigui w el predicat: ésser un predicat que no pot predicar–se d'ell mateix. Pot w ser predicat d'ell mateix?"(...)

Si es respon a la pregunta amb un sí, s'arriba a una contradicció, i si es respon amb un no, també. Sis dies després de rebre la carta, Frege redactava la seva resposta a Russell, on li agraeix l'atenció mostrada en la seva obra i entre d'altres li fa saber que la seva observació suposa "un gran avanç en lògica, desagradable com sembla a primer vista". Frege es va adonar que aquesta inconsistència era possible per la llei bàsica V i, en particular, per la implicació de dreta a esquerra que suposa la "transformació de la generalització d'una igualtat –de funcions– en una igualtat dels recorreguts –o conjunts dels valors– de les funcions". Així, d'acord amb Neil Tennant ("Logicism and Neologicism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition)), aquesta llei va comprometre Frege a afirmar que corresponent a qualsevol predicat definitori Ψ, existeix la classe de totes i sols aquelles coses que satisfan Ψ. El segon volum de *Grundgesetze der Arithmetik* es trobava en la imprenta i Frege va poder afegir un apèndix indicant l'observació de Russell i les seves conclusions.

Aquest fet va suposar per Frege el fracàs de l'objectiu que perseguia i poc temps després abandonaria el seu treball definitivament. A més, els detalls de l'obra *Grundgesetze* van quedar relegats i la comunitat acadèmica va haver d'esperar molt de temps per obtenir una traducció completa a l'anglès de l'obra. En paraules de Tennant "això va ser lamentable, donada la seva importància per al renaixement neofregeà que va començar als anys 60".

Bertrand Rusell i Alfred North Whithead

Bertrand Russell[12] i Alfred Whithead[13] compartien la visió de Frege en relació amb quina era l'essència de les matemàtiques: la lògica. Per aquest motiu van tractar de crear un sistema axiomàtic consistent i complet. Complet en el sentit que no existís una afirmació en el llenguatge del sistema de la que hom no fos capaç d'establir-ne la seva validesa o falsedat, i consistent en el sentit que no existissin contradiccions, tal i com havia posat en evidència la paradoxa de Russell en el sistema formulat per Frege.

L'any 1898, Whitehead va publicar *A treatise of universal algebra*, un tractat d'àlgebra universal, on l'objectiu era la creació d'un mètode uniforme per a varies àlgebres que no va aconseguir completar i que tenia pendent de concloure en un segon volum. L'any 1903, Russell publicà el primer volum de *The principles of mathematics*, els principis matemàtics, on destaca la importància de l'estudi de la lògica simbòlica donat el fet que les matemàtiques són reduïbles a aquesta i també exposa la seva famosa paradoxa citada anteriorment, entre d'altres.

Finalment, Whitehead va ser persuadit per a treballar en el segon volum de *The prin-*

[12]Bertrand Arthur William Russell (Monmouthshire, 18 de maig de 1872 – Gwynedd, 2 de febrer de 1970) fou un filòsof, matemàtic, lògic y escriptor britànic, guardonat amb el Premi Nobel de Literatura. Considerat un dels filòsofs més influents del segle XX.

[13]Alfred North Whitehead (Ramsgate, 15 de febrer de 1861 – Cambridge, 30 de dsesembre de 1947) fou un matemàtic y filòsof anglès responsable d'importants aportacions en aquests camps.

ciples of mathematics i va abandonar el seu propi treball. Aquest segon volum, tampoc arribaria a veure la llum; però, fruit de la col·laboració entre ambdós matemàtics va sorgir l'obra *Principia mathematica*, publicada entre els anys 1910 i 1913. L'obra, que consta de tres volums, és un detallat estudi sobre lògica i teoria de conjunts i de la construcció basada en aquests de la matemàtica clàssica. Aquesta obra suposà una important aportació per aquests camps i per l'establiment d'una fonamentació matemàtica. En el seu treball també aporten un model axiomàtic, anomenat *teoria de tipus*, on mitjançant la creació d'una jerarquia on cada *tipus* era creat a partir d'un *tipus* d'un nivell inferior aconseguia evitar paradoxes com la continguda en el sistema de Frege.

Aquesta teoria va ser desplaçada durant la dècada del 1920 per la teoria de conjunts de Zermelo i Fraenkel, que va ser presentada de manera independent a la de Russell i Whitehead i que serà explicada a continuació, doncs aquesta última permetia codificar formalment de manera més fàcil la útil matemàtica cantoriana. No obstant, tal i com va observar Gödel, la teoria de Zermelo i Fraenkel "no és més que una generalització natural de la teoria de *tipus*, o més aviat, és el que passa amb la teoria de *tipus* si s'eliminen unes certes restriccions supèrflues".

Zermelo i Fraenkel

Ha estat comentada anteriorment la implicació del principi de bona ordenació en la fonamentació de la teoria de conjunts. Aquest principi no va ser demostrat fins l'any 1904, per Zermelo, en una carta dirigida a Hilbert; no obstant la demostració gaudia de simplicitat, ho feia per l'ús d'una axioma que passava a posar–se en dubte: l'axioma d'elecció. L'axioma d'elecció afirma que, per a cada conjunt x format per conjunts no buits i disjunts dos a dos, existeix un altre conjunt que conté exactament un element de cada conjunt d'x. Bàsicament, Zermelo demostrava que l'axioma d'elecció implicaba el principi de bona ordenació i, és clar, calia ara preguntar–se per la validesa de l'axioma. Aquest, usat sense ésser expressat formalment de manera habitual durant anys en arguments matemàtics, introduït i descartat per Peano[14] l'any 1890, reconegut com un principi matemàtic per Beppo Levi[15] l'any 1902, gaudia ara de l'atenció i l'estudi de gran part de la comunitat matemàtica. La validesa, o no, de l'ús d'aquest axioma així com les seves implicacions seran analitzades més endavant.

Finalment, l'any 1908, Zermelo publicà *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Investigacions sobre els fonaments de la teoria de conjunts I, considerada com el primer sistema axiomàtic per a la teoria de conjunts. En la seva obra, Zermelo redueix tota la teoria creada per Cantor –i Dedekind[16]–, a 7 axiomes i algunes definicions; on, entre els axiomes s'hi troba l'axioma de l'elecció.

Més tard, l'any 1922, Fraenkel[17] va publicar *The notion "definite" and the indepen-*

[14]Giuseppe Peano (27 d'agost de 1858 - 20 d'abril de 1932) fou un matemàtic, lògic i filòsof italià. Cal destacar l'obra *The principles of arithmetic, presented by a new method* (1889), per versar sobre el tema que ens ocupa, on utilitza la lògica de Boole i Shröder –desconeixia les aportacions de Frege– i que va suposar un important avenç del que varen nodrir–se els seus predecessors En particular, el seu sistema d'axiomes per a l'aritmètica on defineix els nombres naturals.

[15]Beppo Levi (14 de maig de 1875 – 28 d'agost de 1961) fou un matemàtic italià nacionalitzat argentí, profesor emèrit de la universitat de Bolonia.

[16]Zermelo el considerava, juntament amb Cantor, creador de la teoria de conjunts. L'any 1888 va considerar una llista de principis sobre els conjunts, però va ser desqualificada per considerar–se fragmentada i per la seva justificació no matemàtica de l'existència d'un conjunt infinit.

[17]Abraham Halevi "Adolf" Fraenkel (17 de febrer de 1891 – 15 d'octubre de 1965) fou un matemàtic i

dence of the axiom of choice on, fent ús del model axiomàtic creat per Zermelo amb petites variacions[18], demostrà la independència de l'axioma de l'elecció del sistema. No obstant, aquesta demostració presentava certs inconvenients que seran comentats en el darrer capítol.

Actualment, els axiomes de Zermelo-Fraenkel són els utilitzats per a formular la teoria de conjunts. Aquests, expressats informalment, són:

1. Extensionalitat: Si dos conjunts tenen els mateixos elements, són iguals.

2. Conjunt de potència: Per a cada conjunt x hi ha un conjunt $\mathrm{P}(x)$ els elements del qual són tots els subconjunts de x.

3. Infinit: Existeix un conjunt infinit.

4. Substitució: Si x és un conjunt i f és una funció definible restringida a x, aleshores hi ha un conjunt $y = \{f(z) : z \in x\}$.

5. Unió: Per a cada conjunt x, existeix un conjunt $\cup x$ els elements del qual són tots els elements dels elements de x.

6. Regularitat: Si x és un conjunt, aleshores existeix un y que pertany x tal que $x \cap y = \emptyset$.

7. Axioma d'elecció: Per a cada conjunt x format per conjunts no buits i disjunts dos a dos, existeix un altre conjunt que conté exactament un element de cada conjunt d'x.

Ha estat comentat amb anterioritat que la finalitat última d'aquesta axiomatització era disposar d'un sistema complet i consistent. Caldrà saber ara si el sistema de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma de l'elecció (ZFC), que és usat actualment i que fonamenta tota la matemàtica, gaudeix d'aquestes propietats. La resposta a aquesta pregunta serà considerada al llarg del present treball.

2.3 Formalisme

L'any 1899 Hilbert[19] va proporcionar una axiomatització satisfactòria de la geometria mitjançant la transformació dels axiomes d'Euclides en "veritats algebraiques". Així, per exemple, un *punt* significava un parell de nombres en els eixos cartesians i una *recta* era una relació entre nombres expresada a través d'una equació de primer grau amb dues incògnites. Utilitzant aquest sistema, la consistència dels postulats euclidians és demostrable a través d'un model algebraic, i.e., la geometria euclidiana serà consistent si es demostra que l'àlgebra corresponent ho és i, aquesta, alhora, depèn de la consistència de la teoria dels nombres reals.

Un any més tard va proporcionar un conjunt d'axiomes per a la teoria dels nombres reals i, aquell mateix any, en el congrés internacional de matemàtics del 1900 celebrat a

lògic alemany nacionalitzat israelià.

[18]Es mantenen gairebé inalterats tots el axiomes excepte el tercer: l'axioma de separació. No obstant, actualment, l'axiomatització de la teoria de conjunts acostuma a estar vinculada amb el càlcul lògic i s'usa l'aproximació feta per Weyl i Skolem per a definir aquest axioma.

[19]David Hilbert (23 de gener de 1862 – 14 de febrer de 1943) fou un matemàtic prolífic, reconegut com un dels més influents del segle XX. Destaca, entre d'altres, per la creació o desenvolupament de la teoria d'invariants i la noció de l'espai de Hilbert, així com importants aportacions per al desenvolpament de la mecànica quàntica, la relativitat general, la lògica i la teoria de la demostració, de la qual és considerat fundador.

París, va presentar una llista de 10 problemes que desafiaven al món matemàtic, entre els quals buscava resposta sobre com es podria afirmar la consistència del sistema dels nombres reals. La llista va constar finalment de 23 problemes; alguns van ser resolts ràpidament, d'altres han sigut discutits al llarg del segle XX i, d'altres, continuen esperant a que algú trobi la seva resposta.

L'any 1904 publicà l'article *On the foundations of logic and arithmetic* que pot ser considerat com el text fundacional de la corrent formalista. En l'article, Hilbert és distancia de les corrents anteriors, logicisme i intuicionisme[20], per a presentar un concepte diferent de l'essència primitiva de la ciència matemàtica. Segons Hilbert, les matemàtiques no són res més que una col·lecció de fórmules –d'una existència fora de la lògica, com un número concret– i les seves possibles combinacions, i d'una construcció lògica paral·lela amb l'estudi d'aquestes combinacions. Així, les matemàtiques es redueixen als objectes que tenim en el nostre pensament, que ell anomena *thought-objects* i que nosaltres denotem amb un símbol, per exemple "1". Després, hom pot dur a terme un seguit de combinacions amb aquest objectes mentals, que poden ser arbritaris –i aleshores els podem designar amb una x–, i que expressem fent ús de fórmules. De manera que, les matemàtiques, no serien res més que un joc amb regles establertes on intervé una determinada notació i on, a diferència dels logicistes, no cal fer definicions explícites dels termes primitius –com punt o línia–, doncs la seva definició o implicació en el sistema queda determinada pels axiomes on es troben continguts. Com ell mateix explica en el seu article *The foundations of mathematics* (1927):

(...)"Amb aquesta nova manera de proporcionar una base per a les matemàtiques, que podríem anomenar adequadament teoria de la demostració, persegueixo un objectiu important, ja que m'agradaria eliminar d'una vegada per totes les qüestions relatives als fonaments de les matemàtiques, en la forma en què són plantejades ara, convertint cada proposició matemàtica en una fórmula que es pugui exposar concretament i derivar-se de manera estricta, reformulant així les definicions i les inferències matemàtiques de manera que siguin inquebrantables i alhora proporcionin una imatge adequada de tota la ciència. Crec que puc assolir aquest objectiu completament amb la meva teoria de la demostració, no obstant encara s'ha de fer molta feina abans que estigui completament desenvolupada."(...)

Durant la dècada dels anys 1920, Hilbert va escriure un sèrie d'articles sobre la fonamentació de les matemàtiques que va concloure amb l'anomenat *programa de Hilbert*. Els formalistes creien, igual que els logicistes, que una propietat essencial necessària per a construir un sistema matemàtic adequat era la consistència. Hilbert opinava que no podien existir dubtes raonables sobre la solidesa de l'aritmètica de Peano clássica, o almenys sobre la solidesa d'un subsistema d'aquesta que s'anomena aritmètica recursiva primitiva (Tait 1981). També creia que era possible arribar a les diferents afirmacions de les distintes branques de les matemàtiques mitjançant aquesta aritmètica traslladant els corresponents postulats a un llenguatge aritmètic (o, més encertadament, fent ús dels símbols de l'aritmètica). Per això, va tractar de provar la consistència dels postulats estandards emprats en el camp de l'anàlisi matemàtic fent ús del llenguatge aritmètic –recordem que anteriorment havia elaborat amb èxit una axiomatització de la geometria euclidiana a partir de l'àlgebra.

[20] Iniciat amb el treball del matemàtic L.E.J Brouwer (27 de febrer de 1881 – 2 de desembre de 1966) on s'inspira en les idees de Kant (22 d'abril de 1724 – 12 de febrer de 1804), l'intuïcionisme considera que les matemàtiques són una activitat de construcció; els elements dels que està composta la matemàtica no són més que construccions mentals.

La convicció de que era possible la demostració de la consistència de l'aritmètica de manera finitaria estava fonamentada en el fet que qualsevol demostració en un sistema formal no és res més que un objecte combinatori finit i que, codificat mitjançant nombres naturals, pot ésser considerat com un nombre natural. Per als formalistes, les matemàtiques és reduïen a un joc de símbols, i.e., combinacions d'aquests, i conseqüentment els enunciats consistents de l'anàlisi eren enunciats aritmètics, codificats aritmèticament. No obstant, Hilbert i el seus estudiants es van trobar amb importants dificultats i, de fet, ni tan sols van poder demostrar la consistència dels axiomes de l'aritmètica de Peano dins de la pròpia aritmètica de Peano. El motiu del fracàs del programa de Hilbert va ser descobert per Gödel amb la demostració de dos teoremes que van posar en evidència les limitacions de la ciència matemàtica i que ocupen el següent capítol del present treball. Cal destacar que el fracàs del programa de Hilbert no suposa en cap cas un fracàs complet de la visió formalista de les matemàtiques, fet que serà desenvolupat en el darrer capítol.

3 Teoremes d'incompletesa de Gödel

En la primera secció s'ha mostrat un resum del període anomenat com *la crisis dels fonaments*, que va finalitzar amb els teoremes d'incompletesa publicats per Gödel l'any 1931. S'ha detallat que les dues corrents, el logicisme i el formalisme, perseguíen l'objectiu d'elaborar un model axiomàtic complet i consistent, si bé els descubriments de Gödel van posar fi a aquest objectiu, mostrant–ne la seva impossibilitat. A continuació es presenten els elements necessaris per a enunciar i demostrar aquest primer teorema tal i com ho va fer Gödel originalment, no obstant petits canvis de notació.

3.1 Nocions Prèvies

3.1.1 Definició els signes primitius:

3.1.1.1. Constants:

" 0 " Número zero

" f " El successor de

" $\neg$ " Negació, també es pot representar amb "Neg"

" $\vee$ " Disjunció

" $\forall$ " Per a tot

" (" i ") " Parèntesis

3.1.1.2. Variables del tipus 1 (números individuals, incloent el zero): x_1, y_1, z_1, ...

3.1.1.3. Variables del tipus 2 (classes de variables del tipus 1): x_2, y_2, z_2,...

3.1.1.4. Variables del tipus 4 (clases de classes del tipus 1): x_3, y_3, z_3, ...

Així:

- Un signe del tipus 1 serà de la forma: a, fa, ffa,...amb a essent el zero o una variable del tipus 1.

- Un signe del tipus n, amb $n > 1$, serà una variable del tipus n; això és una combinació de la forma $a(b)$, on b és un signe de tipus n i a és un signe de tipus *n+1*. Per definició anomenarem aquesta combinació de signes "fórmula elemental".

3.1.2. Definicions

3.1.2.1. **Fórmula sentencial**: Fórmula que no té cap variable lliure.

3.1.2.2. **Conseqüència immediata**: Direm que la fórmula c és una *conseqüència immediata* de les fórmules a i b si a és la fórmula: $\bar{b} \vee c$; i serà considerada una *conseqüència immediata* d'a si tenim $v \forall a$, per a qualsevol variable v.

3.1.2.3. **Classe de *fórmules demostrables***: la classe més petita de fórmules que conté els axiomes i les relacions de *conseqüència immediata.*

3.1.2.4. **Ax (y)** significa que y és un axioma.

3.1.2.5. **Fl(*x,y,z*)** significa x és una conseqüència immediata de y i z.

3.1.2.6. **Flg($\boldsymbol{k}$) (Conjunt de conseqüències de $\boldsymbol{k}$):** És el conjunt més petit de fórmules que conté totes les fórmules de k i tots els axiomes i les relacions d'immediata conseqüència, essent k qualsevol classe de fórmules.

3.1.2.7. ***v Gen a***: És la generalització de la fórmula a respecte de la variable v, i.e., és la fórmula ϕ amb $\phi = \forall v\ a$.

3.1.2.8. ***x*B*y*** significa x és una demostració de la formula y.

3.1.2.9. **Sb(x^v_y)**: Fórmula resultant d'x si en x substituïm v per y on: x és una fórmula, v és una variable i y és també una variable del mateix tipus de v. En cas que v no sigui una variable o que x no sigui una fórmula tenim Sb(x^v_y)=x. Escriurem Sb($x^{v\ w}_{y\ z}$) per expressar Sb[Sb(x^v_y)^w_z] i de forma similar per al cas on hi hagin més de dues variables.

3.1.3. Assignació numèrica:

-Els signes primitus tenen assignat el següent número:

Assignació numèrica als signes primitius			
Signe	Número	Signe	Número
0	1	$\vee$	7
f	3	$\forall$	9
$\neg$	5	(	11
		)	13

- A les variables del tipus n els hi assignem números de la forma p^n on p és un primer més gran que 13. Amb aquesta assignació aconseguim un correspondència 1 a 1 entre tota seqüència finita de signes primitius (i entre cada fórmula) amb una seqüència finita de nombres naturals. Ara podem fer l'associació 1 a 1 de la forma 2^{n_1}, 3^{n_2}, ..., $p_k^{n_k}$ obtenint que cada signe primitiu o seqüència finita d'aquests signes té assignat un número natural.

3.1.4. Altres definicions:

3.1.4.1. $\boldsymbol{\phi(a)}$ és, per definició, el número assignat al signe primitiu (o a la seqüència de signes primitius) a.

3.1.4.2. ***R(a$_1$, a$_2$, ..., a$_n$)*** és la relació –o classe– dels signes primitius o seqüències de signes primitius a_i.

3.1.4.3. **Associació de relacions o classes**: Sigui $R(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ un relació. Associem la relació $R'(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ entre els nombres naturals que obtenim entre x_1, x_2,...,x_n si, i només si, existeixen a_1, a_2,..., a_n tals que x_i=$\phi(a_i)$ (i=1,2,...,n) i $R(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ es dona.

3.1.4.4. Un funció teòrico-numèrica[21] $\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ es diu que és **recursivament definida en termes de** $\psi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ i $\mu(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ si, per tot $x_2, ..., x_n, k$, tenim:

[21] Per definició, una funció teòrico-numérica és tota funció que té per domini de definició els enters no negatius o n-tuples d'enters no negatius. Una n-tupla és una seqüència o llista ordenada de n elements.

$$\phi(0, x_2, ..., x_n) = \psi(x_2, ..., x_n),$$

$$\phi(k+1, x_2, ..., x_n) = \mu(k, \psi(k, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n) \tag{3.1}$$

Gödel utilitza com a definició recursiva una extensió del mètode de definició per inducció matemàtica per al qual els nombres es defineixen pas a pas: començant pel 0, 1 es defineix com l'immediat successor de 0; 2 com l'immediat successor de 1; i així, successivament, es van obtenint tots el nombres. Per tant, aquesta definició és la especificació de cada nombre en una seqüència de nombres a partir d'una especificació del primer nombre i d'una regla que especifica el (k+1)-èssim nombre en termes del k-èssim nombre i del mateix k.

3.1.4.5. Una funció teòrico-numèrica ϕ direm que és **recursiva** si existeix una seqüència finita de funcions teòrico-numèriques ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n que acaba a ϕ i on tota funció ϕ_k compleix, per tot k=1,...n, alguna de les següents propietats:

- És definida recursivament en termes de dues de les funcions precedents.
- Prové d'alguna de les funcions anteriors per substitució.
- És una constant.
- És la funció successora de x+1.

3.1.4.6. Una relació R($x_1, ..., x_n$) entre números naturals direm que és recursiva si existeix una funció recursiva $\phi(x_1, ..., x_n)$ tal que, per tot $x_1, ..., x_n$,

R($x_1, ..., x_n$) és equivalent a [$\phi(x_1, ..., x_n)$=0]

3.1.4.7. ***l(x)*** és, per definició, la longitud de la seqüència numèrica assignada a la variable x.

3.1.4.8. **n Gl x** significa l'n-èssim terme de la seqüència numèrica de la variable x.

3.1.4.9. **Bew(*x*)** significa x és una fórmula demostrable.

3.1.4.10. Es farà un ús habitual dels simbols "$\boldsymbol{\equiv}$" , "$\boldsymbol{\varepsilon}$", "$\boldsymbol{\sim}$" , "$\boldsymbol{\rightarrow}$" , "$^{-}$" i " $\exists$ " que signifiquen, respectivament, "igualtat per definició", "pertany", "equivalència lògica", "implica", negació (i.e., $\bar{x}$ és no x, també pot ser utilitzat Neg(x)) i "existeix".

3.1.4.11. Sigui k qualsevol classe de fórmules. Direm que k és **$\boldsymbol{\omega}$-consistent** si no existix cap fórmula a amb una variable lliure v tal que

$$\forall n[Sb(a^{v}_{Z(n)}) \; \varepsilon \; Flg(k)] \;\; \& \;\; [Neg(v \; Gen \; a)] \; \varepsilon \; Flg(k)$$

És a dir, que no existeixi un fórmula a tal que, per tot n, si intercanviem en a la variable v pel numeral que denota a n aleshores la fórmula resultant pertany al conjunt de conseqüències de k i, també succeeix que, la negació de la generalització de v en a, pertany al conjunt de conseqüències de k. Recordem que un sistema és consistent si no conté un parell de fórmules demostrables de la forma a, Neg(a) i per tant es pot observar que ω-consistent implica consistent però el recíproc no és cert fet que es veurà al final de la demostració del primer teorema d'incompletesa.

3.1.5. Teoremes:

Teorema 3.1.5.1. Tota funció –relació– obtinguda a partir de funcions –relacions– per substitució de funcions recursives per a les variables és recursiva; per tant tota funció és obtinguda mitjançant funcions recursives d'acord amb les definicions 3.1.4.4. de l'apartat anterior i el seu esquema (3.1).

Teorema 3.1.5.2. Si R i S són funcions recursives també ho són $\overline{R}$ i R $\vee$ S.

Teorema 3.1.5.3. Si les funcions $\varphi(\xi)$ i $\psi(\eta)$ són recursives, aleshores és certa la relació $\varphi(\xi) = \psi(\eta)$ on ξ i η són n-tuples de variables arbitràries.

Teorema 3.1.5.4. Si la funció $\varphi(\xi)$ i la relació $R(x, \eta)$ són recursives, també ho són les relacions T i S definides per

$$S(\xi, \eta) \sim \exists x[x \leqq \varphi(\xi) \ \& \ R(x, \eta)]$$
$$T(\xi, \eta) \sim \forall x[x \leqq \varphi(\xi) \rightarrow R(x, \eta)]$$

Així com la funció ψ definida per:

$$\psi(\xi, \eta) = \varepsilon x[x \leqq \varphi(\xi) \ \& \ R(x, \eta)]$$

on εx[x $\leqq \varphi(\xi)$ & $R(x, \eta)$] significa el darrer x per al qual $[x \leqq \varphi(\xi) \ \& \ R(x, \eta)]$ és cert.

Teorema 3.1.5.5. Per a tota relació recursiva R(x_1, x_2,..., x_n) existeix una funció r (amb les variables lliures u_1, u_2, ..., u_n[22]) tal que per a totes les n-tuples de nombres (x_1, x_2,..., x_n) tenim:

$$R(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow Bew[Sb(r^{u_1 \ \dots \ u_n}_{Z(x_1)\dots Z(x_n)})] \tag{3.2}$$
$$\bar{R}(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow Bew[Neg(Sb(r^{u_1 \ \dots \ u_n}_{Z(x_1)\dots Z(x_n)}))] \tag{3.3}$$

Aquest teorema afirma que per tota relació recursiva R(x_1, x_2,..., x_n) on x_i són signes primitius (això és: constants, números individuals o fórmules) existeix una fórmula r amb n variables lliures (u_i), de forma que la relació recursiva R(x_1, x_2,..., x_n) implica que si en r intercanviem les u_i per els numerals que denoten a les x_i obtenim una fórmula demostrable dintre del sistema. I, si aquesta relació recursiva no es dona, aleshores la fórmula demostrable és la negació de la fórmula resultant d'r un cop intercanviades les variables (u_i) per els numerals que denoten les x_i. Aquest teorema és, per tant, una conseqüència del fet que per a qualsevol relació recursiva R es pot, per a totes les n-tuples de números, decidir en base amb els axiomes del sistema si aquesta relació R s'obté o no.

3.2 Primer teorema d'incompletesa

La versió actual del primer teorema d'incompletesa ens diu, informalment, que en qualsevol teoria axiomatitzable consistent T en la que es troba contingut un fragment d'aritmètica existeix alguna afirmació θ tal que la teoria T no pot demostrar ni l'afirmació de θ ni la seva negació. És a dir, que qualsevol sistema axiomatitzable consistent és incomplet. A continuació es presenta l'enunciat original de Gödel d'aquest teorema així com la seva demostració –tret de, com ja ha estat comentat, petits canvis notacionals:

[22] Aquestes variables poden ser escollides arbitràriament doncs sempre existeix algun r amb les varibles lliures 17, 19, 23, 29, etc., i per a les quals (3.2) i (3.3) es compleix.

Primer teorema d'incompletesa: Per a tota classe de fórmules recursives ω-consistents k existeix una fórmula r amb una variable lliure v tal que ni vGen$r$ ni Neg(vGen$r$) pertany a Flg(k).

Demostració:

Gödel va fer una demostració constructiva d'aquest teorema. Partint de les funcions recursives x+y (suma), x·y (producte) i x^y (potència) així com les relacions x<y (x inferior a y) i x=y estableix 45 funcions, definides cadascuna d'elles mitjançant funcions precedents, fent ús dels procediments descrits en els teoremes 3.1.5.1. fins a 3.1.5.4. inclosos al cinquè apartat de les nocions prèvies. Algunes d'aquestes funcions són usades en la demostració i, per tant, la seva recursivitat ja es troba justificada.

Sigui k qualsevol classe de fórmules recursives ω-consistents. Definim:

$$Bw_k(x) \equiv \forall n[n \leqq l(x) \rightarrow Ax(nGlx) \vee (nGlx)\varepsilon k \vee$$

$$\exists p, q\{0 < p, q < n \,\&\, Fl(nGlx, pGlx, qGlx)\}] \,\&\, l(x) > 0 \tag{3.4}$$

Recordem que tal i com s'ha mostrat en el subapartat 3 de nocions prèvies, tot els elements que configuren el sistema tenen assignat un número natural (o cadena de números). Així, en paraules, la fórmula (3.4) ens diu que el fet que x sigui una fórmula demostrable dintre del sistema recursiu k és equivalent a que, per a tot nombre natural n, si n és inferior a la longitud de la seqüència numèrica d'x aleshores l'enèssim terme de la seqüència numèrica d'x és o bé un axioma; o bé pertany a k; o bé existeixen p i q, menors que n i majors que zero, tals que l'enèssim terme és una conseqüència immediata dels precedents p-èssim i q-èssim termes de la seqüència. I, a més, la longitud de la seqüència numèrica d'x ha de ser més gran que zero.

També definim:

$$xB_ky \equiv Bw_k(x)\&[l(x)]Glx = y \tag{3.5}$$

$$Bew_k(x) \equiv \exists y(yB_kx) \tag{3.6}$$

Per tant, que x sigui una demostració de la fórmula y és equivalent a que x sigui una demostració en k i que l'últim terme de la seqüència numèrica formada per x sigui igual a y (3.5) i x serà una fórmula demostrable de k si existeix un y que sigui la seva demostració (3.6).

Les equivalències (3.4) i (3.5) es troben incloses en les 45 funcions obtingudes de forma recursiva per Gödel i (3.6) no està dintre de les 45 fórmulas comentades i, tal i com ens diu Gödel, "és la única fórmula que no podem garantir que sigui recursiva"[23].

[23]Gödel defineix les 45 fórmules recursives de forma restringida per a que només s'utilitzin un número finits d'entitats, i.e. sempre que aparegui un quantificador universal o existencial s'inserta una "clàusula" en el quantificador per tal d'asegurar que la quantificació finalitza en un número finit de valors. Per exemple, la primera definició és "x és divisible per y", que ell defineix com *hi ha un z menor o igual a x tal que x=y.z* per tant x=y.0 o x=y.1 o ... o x=y.x és una funció amb un número finit (x+1) d'igualtats. No obstant, per la fórmula Bew no va poder aplicar aquest sistema i per això el teorema té com a hipòtesis la w-consistència del sistema (en comptes de la consistència). Actualment, la definició de recursivitat és com segueix: un funció ϕ és recursiva si és recursivament enumerable (r.e.) i el seu complement també ho és. Un funció és recursivament enumerable si és existencial (Σ_1) definible en el model. En el cas de la fórmula Bew, tenim que és r.e. però no recursiva (degut a que el seu complementari no és Σ_1).

D'aquí tenim que:

$$\forall x[Bew_k(x) \sim x\varepsilon Flg(k)] \tag{3.7}$$
$$\forall x[Bew(x) \rightarrow Bew_k(x)] \tag{3.8}$$

Doncs, per tot x èsser una fórmula demostrable en k és equivalent a pertànyer al conjunt de fórmules que pertànyen a k (axiomes fins a relacions d'immediata conseqüència) i, si per tot x, x és una fórmula demostrable ho serà també en la classe de fórmules k.

Definim ara la relació

$$Q(x,y) \equiv \overline{xB_k[Sb(y^{19}_{Z(y)}]} \tag{3.9}$$

Observem que $\overline{xB_k[Sb(y^{19}_{Z(y)}]}$ significa que x no és una demostració en k de $Sb(y^{19}_{Z(y)})$. A més, com $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ forma part de les 45 fórmules desenvolupades per Gödel, i xB_ky també ho és per (3.4) i (3.5), tenim que *Q(x,y)* és també recursiva.

Aleshores, aplicant el teorema 3.1.5.5. i tenint en compte (3.8), existeix una fórmula q, amb variables lliures 17 i 19, tal que:

$$\overline{xB_k[Sb(y^{19}_{Z(y)}]} \rightarrow Bew_k[Sb(q^{17}_{Z(x)}\,^{19}_{Z(y)})] \tag{3.10}$$
$$xB_k[Sb(y^{19}_{Z(y)}] \rightarrow Bew_k[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\,^{19}_{Z(y)}))] \tag{3.11}$$

Ara, definim

$$p = 17\; Gen\; q \tag{3.12}$$

Com q és una fórmula amb les variables lliures 17 i 19, p és una fórmula amb la variable lliure 19. Aquesta fórmula es pot entendre que denota la classe a la qual pertany una fórmula y amb una variable lliure –en aquest cas 19– si, i només si, el numeral que denota aquesta fórmula, Z(y), no és demostrable.

També definim:

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{3.13}$$

Com que r s'obté de la fórmula recursiva q mitjançant la substitució d'una variable pel número definit p, obtenim que r és una fórmula recursiva amb la variable lliure 17. Aquesta fórmula es pot entendre que denota la classe de cadenes de números que no són demostracions de Z(p).

Tenint en compte les darreres definicions, podem concloure que

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) \underset{(3.12)}{=} Sb([17\; Gen\; q]^{19}_{Z(p)}) \underset{(*)}{=} 17\; Gen\; Sb(q^{19}_{Z(p)}) \underset{(3.13)}{=} 17\; Gen\; r \tag{3.14}$$

(*) Les operacions *Gen* i *Sb* sempre poden ser intercanviades en el cas que es refereixin a variables diferents.

Cal observar que per construcció 17 Gen r no té cap variable lliure i afirma la seva pròpia indemostrabilitat i.e. que res no és una demostració de Z(p).

I també tenim:

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}\,{}^{19}_{Z(p)}) \underset{(3.13)}{=} Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{3.15}$$

Si ara substituim p per y en (3.10) i (3.11) i considerant les igualtats obtingudes a (3.14) i (3.15), obtenim:

$$\overline{xB_k(17\ Gen\ r)} \to Bew_k[Sb(r^{17}_{Z(x)})] \tag{3.16}$$

$$xB_k(17\ Gen\ r) \to Bew_k[Neg(Sb(r^{17}_{Z(x)}))] \tag{3.17}$$

Això implica:

1. 17 Gen r no és k-demostrable.

Demostració: Si ho fos, existiria, per (3.6), un n tal que nB_k (17 $Gen\ r$), i.e., n seria la demostració de la generalització del terme 17 a r. Ara, d'una banda, per (3.17) tindriem $Bew_k[Neg(Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$, però, d'altra banda, com que estem suposant que 17 $Gen\ r$ és k-demostrable, aleshores també ho és $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Així, si 17 Gen r fos k-demostrable, el sistema recursiu k seria inconsistent (i amb més motiu ω-inconsistent), però per hipòtesi és consistent, i per tant 17 Gen r no és k-demostrable.

2. Neg(17 Gen r) no és k-demostrable.

Demostració: Acabem de demostrar que 17 Gen r no és k-demostrable. Això implica, per (3.6), que tenim $\forall n, \overline{nB_k(17\ Gen\ r)}$. Ara aplicant (3.16) obtenim $\forall n, Bew_k[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$ i, si Neg(17 Gen r) fos k-demostrable seria equivalent a que $Bew_k(Neg(17\ Gen\ r))$, fet incompatible amb la ω-consistentència de k. Obtenim doncs que Neg(17 Gen r) no és k-demostrable. Per tant, Neg(17 Gen r) és indecidible dintre del sistema recursiu w-consistent k.

Tenint en compte tot plegat, obtenim que 17 Gen r és una fórmula indecidible en k.

□

Observem que si en comptes de considerar que k és w-consistent només asumim que és consistent no obtenim l'existència d'una proposició indecidible, però si que existeix una propietat r per a la qual no és possible donar un contraexemple ni demostrar que és certa per a tots els números[24]. Ara, si afegim Neg(17 Gen r) a k, obtenim una classe de fórmules *k'* que és consistent però no és w-consistent:

- *k'* és consistent, doncs, si no ho fos, 17 Gen r seria k-demostrable.

- *k'* no és w-consistent perquè de $\overline{Bew_k}$(17 Gen r) i (3.16) tenim $\forall x, Bew_k(\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})$ i per tant $\forall x, Bew_{k'}(\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})$, mentre que per hipòtesi $Bew_{k'}[Neg(17\ Gen\ r)]$ és cert doncs *k'* és k afegint-hi la fórmula Neg(17 Gen r).

Gödel demostra, més endevant, que si k consisteix en un nombre finit de fórmules aleshores també és recursiu i això implica que fins i tot amb l'ajut d'axiomes addicionals, no totes les proposicions són decidibles, sempre que s'assumeixi la w-consistència. També observa que per la demostració del primer teorema d'incompletesa no s'ha utilitzat cap

[24]Per demostrar que 17 Gen r no és k-demostrable només hem utilitzat la consistència de k –per demostrar que Neg(17 Gen r) no és demostrable la w-consistència de k. Així, de $\overline{Bew_k}$(17 Gen r) se segueix, per (3.16) $\forall x$, $\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})$ és k-demostrable i conseqüentment $\mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})$ no és k-demostrable per a tots els números.

propietat del sistema que s'obté quan es superposa la lógica dels *Principa mathematica* de Russell amb els axiomes de Peano –en endevant sistema P– més enllà de les dues següents:

1-. La classe d'axiomes i regles d'inferència, i.e., la relació d'immediata conseqüència, són recursivement definibles.

2-. Qualsevol relació recursiva és definible –en el sentit del teorema 3.1.5.5 – en el sistema P.

Per tant, conclou, " (...) en qualsevol sistema formal que satisfaci 1 i 2 i sigui w-consistent hi haurà proposicions indecidibles de la forma $\forall x F(x)$, on F és un definició recursiva dels números naturals, així com també a cada extensió del sistema per una classe d'axiomes w-consistents recursivament definibles. Com fàcilment pot ser verificat, inclosos dintre dels sistemes que satisfan 1 i 2 hi ha els sistemes axiomàtics de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel i de Von Neumann així com el sistema axiomàtic de teoria de nombres que consisteix en els axiomes de Peano (...)"

Conseqüències:

Després de la demostració del teorema, i dels comentaris que el segueixen, Gödel enuncia i demostra els següents teoremes:

Teorema 3.2.1. Qualsevol relació recursiva és aritmètica.

Teorema 3.2.2. En qualsevol del sistemes formals esmentats en el primer teorema d'incompletesa[25] hi ha proposicions aritmètiques indecidibles.

Teorema 3.2.3. En qualsevol sistema formal amb les característiques anteriors, hi hauran problemes del càlcul funcional restringit[26] que són indecidibles.

3.3 Segon teorema d'incompletesa

Per a demostrar el segon teorema de Gödel ens caldrà alguna definició més:

3.3.1. Form(x) significa x és una fórmula.

3.3.2. Wid(k) significa k és consistent i és pot definir com:

$$Wid(k) \equiv \exists x\,(Form(x)\ \&\ \overline{Bew_k}(x)).$$

Pot observar–se que aquesta definició és una conseqüència del primer teorema d'incompletesa, doncs si k és un sistema consistent, pel primer teorema d'incompletesa existirà una fórmula no demostrable dintre del sistema.

3.3.3 Sistema P: Essencialemnt el sistema P és el sistema que s'obté quan és superposa la lógica dels *Principia Mathematica* de Russell amb els axiomes de Peano.

3.3.4 x Imp y significa $\bar{x} \vee y$ (això és x implica y).

Segon teorema d'incompletesa: Sigui k qualsevol classe de fórmules recursives. Aleshores, la fórmula sentencial que afirma que k és consistent no és k-demostrable; en particular, la consistencia del sistema P no és demostrable en P, considerant P un sistema consistent.

[25] Els sistemes w-consistents que resulten del sistema P quan s'afageixen classes d'axiomes recursivament definibles.

[26] Per fórmulas del càlcul funcional restringit entenem expressions formada per signes primitius, variables i predicats i varibles relacionals.

Demostració:

Gödel presenta una demostració, breument descrita, com segueix:

Siqui k qualsevol classe recursiva de fórmules. En el primer teorema d'incompletesa, per demostrar que 17 Gen r no és k-demostrable només hem utilitzat la consistència de k; per tant, tenim:

$$Wid(k) \rightarrow \overline{Bew_k}(17\,Gen\,r) \tag{3.18}$$

que, aplicant (3.6) és

$$Wid(k) \rightarrow \forall x\,\overline{x\ B_k(17\,Gen\,r)}$$

Doncs per qualsevol x, com 17 Gen r no és una fórmula demostrable, x no serà la seva demostració.

Ara, per (3.14), sabem que

$$17\,Gen\,r = Sb(p^{19}_{Z(p)})$$

Per tant, substituint queda

$$Wid(k) \rightarrow \forall x\,\overline{x\ B_k\ Sb(p^{19}_{Z(p)})}$$

A on, si apliquem (3.9) on hem definit Q(x,y) $\equiv \overline{xB_k[Sb(y^{19}_{Z(y)}]}$, resulta

$$Wid(k) \rightarrow \forall x\ Q(x,p) \tag{3.19}$$

Ara, totes les definicions (o declaracions demostrades) fins ara són expressables –o demostrables– en P. En particular k és definible a P. Sigui w la fórmula mitjançant la qual Wid(k) s'expressa a P:

D'acord amb (3.9), (3.10) i (3.11) la relació Q(x,y) és expressable per la fórmula q i per tant Q(x, p)=$\overline{xB_k[Sb(p^{19}_{Z(p)}]}$ és expressable per r (doncs, per (3.13), r=Sb($q^{19}_{Z(p)}$)) i la proposició $\forall x$Q(x,p) per 17 Gen r.

Per tant, per (3.19) w Imp (17 Gen r) és demostrable en P (i amb més motiu k-demostrable), i.e., $\bar{w} \vee$ 17 Gen r és k-demostrable.

Si ara w fos k-demostrable aleshores, d'una banda, per la definició (3.1.2.2) de conseqüència immedita (diem que la fórmula c és una *conseqüència immediata* de les fórmules a i b si a és la fórmula: $\bar{b} \vee c$), 17 Gen r també seria k-demostrable però d'altra banda, per (3.18), 17 Gen r no és k demostrable i per tant, si w fos k-demostrable implicaria la inconstència de k.

□

Tal i com el mateix Gödel indica, aquesta demostració pot ser traslladada "paraula per paraula al sistema axiomàtic de la teoria de conjunts (M) i al de les matemàtiques clàssiques (A) obtenint: No existeix una demostració de consistència en M, o A, que pugui ser formalitzada en M, o en A, respectivament".

3.4 Avanços posteriors

L'any 1936, J. Barkley Rosser[27] va elaborar una millora destacada amb la qual es podria canviar la hipòtesi de w-consistència del primer teorema de Gödel per la consistència. Per aconseguir–ho Rosser, tal i com explica Panu Raatikainen "va afegir un nou predicat de demostrabilitat quelcom artificial *Bew** que va ser construit, informalment, com segueix:

No existeix y tal que y és el número de Gödel d'una demostració de la fórmula amb el número de Gödel x i no existeix z més petit que y tal que z és el número de Gödel de la demostració de la fórmula amb número de Gödel x".

Daltra banda, cal mencionar que Gödel va presentar aquests resultats per a la seva publicació el 17 de novembre de 1930 i finalment van ser publicats a principis de 1931. No obstant, Alonzo Church[28] l'any 1936 i Alan turing[29] al 1936-1937 van presentar, de forma independent, unes altres propostes per a la definició exacte de funcions computables i, per tant, de conjunts decidibles. És destacable l'anàlisi conceptual elaborat per Turing mitjançant màquines de computació abstracta, on fa un anàlisi de la noció de decidibilitat –necessària per a poder caracteritzar un sistema formal arbitrari– és a dir, aporta una explicació matemàtica precisa d'aquesta noció carent en el treball de Gödel. Com el mateix Gödel va deixar patent en una nota afegida al seu treball el 28 d'agost del 1963:

"Com a conseqüència dels darrers avenços, en particular dels referits al treball de A.M. Turing, una definició precisa i inqüestionable de la noció general de sistema formal pot ser donada i una versió general dels teoremes d'incompletesa és possible. Això és, pot domostrar–se rigurosament que en tot sistema formal consistent que conté una quantitat de teoria de números finita existeixen proposicions aritmètiques indecidibles i que, també, la consistència de qualsevol sistema no pot ésser provada dintre del sistema".

[27]John Barkley Rosser (6 de desember de 1907 – 5 de september de 1989) fou un lògic estatunidenc conegut pel teorema de Church-Rosser (relacionat amb el càlcul lambda) i la paradoxa de Kleene-Rosser (mostra la inconsistència de certs sistemes lògics).

[28]Alonzo Church (14 de juny de 1903 - 11 d'agost de 1995), matemàtic i lògic estatunidenc considerat un dels fundadors de la lògica matemàtica tal i com es va desenvolupar després de Cantor, Frege i Russell.

[29]Alan Mathison Turing (23 de juny de 1912 - 7 de juny de 1954) fou un matemàtic lògic i informàtic teoric. El seu article publicat al 1936-1937 "Sobre els números computables" és considerat el document fundacional de l'informàtica moderna.

4 Després dels teoremes d'incompletesa de Gödel

Els teoremes d'incompletesa van suposar un abans i un després per a la ciència matemàtica. Carl Hempel[30] explica com va viure el descubriment:

"Vaig fer un curs amb Von Neumann que tractava sobre els intents de Hilbert de demostrar la consistència de les matemàtiques clàssiques per mitjans finits. Recordo que a meitat de curs va venir Von Neumann i va anunciar que acabava de rebre un treball de ... Kurt Gödel que mostrava que els objectius que Hilbert perseguia i sobre els quals havia escoltat el curs de Hilbert a Göttingen no podíen aconseguir–se en absolut. Von Neumann, per tant, va abandonar la recerca i dedicar la resta del curs a la presentació dels resultats de Gödel. Els seus descobriments provocaren una enorme commoció."

4.1 El programa de Hilbert i el formalisme

No obstant pugui semblar el contrari, els descobriments de Gödel no varen suposar la fi de la corrent formalista. Tal i com afirma Leon Horsten "inclús enfront dels teoremes d'incompletesa és coherent sostenir que les matemàtiques són la ciència dels sistemes formals". Curry[31] va proposar una versió d'aquesta afirmació on considerava que les matemàtiques consistirien en col·leccions de sistemes formals carents de tema i interpretació –amb excepció de les metamatemàtiques[32]. Així, en paraules seves:

"El criteri de coherència ha estat subratllat per Hilbert. Probablement la raó d'això és que ell, com els intuïcionistes, busca una justificació prèvia. Però a banda del fet que per a la física la qüestió d'una justificació a priori és irrellevant, sostinc que una prova de coherència no és una condició necessària ni suficient per a l'acceptabilitat. Evidentment no és suficient. Pel que fa a la necessitat, mentre no es conegui cap incoherència, una prova de consistència, encara que ens aporta coneixement sobre el sistema, no altera la seva utilitat. Encara que es descobrís una incoherència, això no significava l'abandonament total de la teoria, sinó la seva modificació i perfeccionament. De fet, essencialment això ha passat en el passat; sabem, per exemple, que les matemàtiques del segle XVIII són inconsistents, però no hem abandonat els resultats dels matemàtics del segle XVIII (...) L'acceptabilitat és relativa a un propòsit, i un sistema acceptable per a un propòsit pot no ser-ho per a un altre."[33]

És a dir, per a Curry, tots els sistemes formals serien equiparables i l'acceptació o elecció d'un sistema o un altre pot estar determinada, en tot cas, per un aspecte pragmàtic. Dels teoremes d'incompletesa sabem que un sistema inconsistent pot demostrar totes les declaracions i per tant la seva poca utilitat implica que sigui necessari canviar–lo, però un sistema consistent suficientment fort no podrà demostrar la seva consistència.

No obstant, molts matemàtics difereixen de Curry en basar l'elecció del sistema formal en el seu caràcter pragmàtic i volen mantenir que l'elecció està supeditada en última

[30]Carl Gustav Hempel (8 de gener de 1905 – 9 de novembre de 1997) filòsof defensor de l'enfocament conegut com positivisme lògic o empirisme lògic.

[31]Haskell Brooks Curry (12 de setembre de 1900 – 1 de setembre de 1982) fou una matemàtic i lògic estatunidenc. Doctorant de Hilbert, va defensar les tesis formalistes. Va treballar en lògica combinatòria durant tota la seva carrera, camp del que és considerat fundador i principal exponent.

[32]Metamatemàtica és la teoria que tracta l'estudi de les propietats del diferents sistemes, com per exemple: no contradicció, consistència, etc. Aquest terme va ser introduït per Hilbert.

[33]Benacerraf, P. i Putnam, H., 1983, "Philosopy of mathematics, Selected readings" pp. 205-206

instància a la capacitat del sistema per descriure correctament –o incorrectament– determinats temes.

Detlefsen[34], al 1986, afirma que el teoremes d'incompletesa no suposen que no hi hagin parts de les matemàtiques superiors utilitzades a la pràctica i que tenen interés pels matemàtics la consistència de les quals pugui ser establerta aritmèticament.

Georg Kreisel[35], al 1958 va afirmar: la primera hipòtesi bàsica criticable del programa de Hlbert és "que la reducció a mètodes finitistes és possible almenys en el sentit d'una consistència finitista". Però proposa:

"Primer, en lloc de tenir un únic tipus de raonament elemental pel qual entenem l'ús de símbols transfinits, ara hi haurà mètodes de raonament que impliquen una jerarquia de concepcions com, per exemple, concepcions cada cop més abstractes d'una "construcció", i tenim un jerarquia de programes de Hilbert per descobrir la complexa adequació d'aquests mètodes que es necessita per entendre l'ús de símbols transfinits en un sistema donat (programa Hilbert modificat)"[36]

Per a ell, "el programa de Hilbert incloent la modifició i el problema d'independència[37] és una rica línia de recerca dels fonaments".

Isaacson[38], al 1987, va defensar que l'aritmètica de Peano pot ser completa. El seu argument estava basat en el fet que per demostrar les oracions certes indecidibles en l'arimètica de Peano cal fer ús de conceptes d'ordre superior. Per exemple, utilitzant inducció fins a un cert número ordinal transfinit la consistència de l'aritmètica de Peano pot ésser demostrada[39]. No obstant, la noció d'ordinal és un concepte de la teoria de conjunts i no aritmètic. Per tant, Isaacson considera que si les úniques formes de demostrar la consistència de l'aritmètica de Peano és fent ús d'elements que pertànyen a les matemàtiques d'ordre superior, tot i que el problema de la consistència pugui expressar–se en un llenguatge aritmètic, no és aritmètic.

4.2 Logicisme

D'acord amb Neil Tennant, la doctrina logicista "(...) s'ha caracteritzat per canvis abruptes pel que fa a mètodes i materials, fins i tot si la meta s'ha mantingut relativament constant a través de tals canvis."

Recordem que Frege en la seva obra fa una definició de nombre en la qual són consi-

[34]Michael Detlefsen (20 d'octubre de 1948 – 21 d'octubre de 2019) fou un filòsof estatunidenc especialitzat en lògica i filosfia de les matemàtiques.

[35]Georg Kreisel (15 de Setembre 1923 – 1 de març 2015) fou un matemàtic i lògic. Escollit membre de la *Royal Society* al 1966.

[36]Benacerraf, P. i Putnam, H., 1983, "Philosopy of mathematics, Selected readings" pp. 210-212

[37]El problema d'independència podria ser formulat com segueix: Donada una branca del coneixement que està tan desenvolupada com per ser axiomatitzada, el problema és tenir una visió clara de la relació lògica dels enunciats de la teoria axiomàtica. Com afirma Kreisel "Hilbert va posar èmfasi en el problema de la consistència que és, per dir-ho així, el resultat de no derivabilitat més feble, ja que és el problema de demostrar que existeix almenys un enunciat que no és derivable. Però en escrits posteriors el problema de la consistència es va associar amb el problema d'entendre el concepte d'infinit".

[38]Eugene Isaacson (1919 – 2008) fou un matemàtic estatunidenc considerat un dels pioners de les matemàtiques numèriques modernes.

[39]Demostrat per Gentzen al 1938 si s'assumeix el principi d'inducció transfinit. Observem que, com a conseqüència del segon teorema d'incompletesa, tenim que el mateix principi d'inducció transfinit no pot ser demostrat en l'aritmètica de Peano.

derats com a classes particulars dintre d'un univers més ampli d'objectes lògics. Aquesta definició està motivada per un objectiu encara més ambiciós que fonamentar l'aritmètica en un sistema purament lògic. Frege cercava un principi que mostrés la naturalesa metafísica dels nombres. Així la seva definició de nombre es justificava perquè, segons el seu punt de vista, aconseguia resoldre el que ell va definir com *el problema de Juli Cesar* i que tracta sobre com una correcta definició de nombre hauria de permetre'ns concloure que Juli Cèsar no és un nombre.

Ha estat comentat com el descubriment de la paradoxa de Russell va provocar que el treball de Frege quedés relegat a un cert obscurantisme durant gairabé cent anys. Dacord amb Tennant, "el moviment neofregeà té el seu inici a partir d'una afirmació feta per Charles Parsons al 1965". Aquesta afirmacó és la següent:

"(...)podem posar –el procediment de Frege– en la manera de definir els tres primitius "0", "nombre natural" i "successor" de Peano, i provar els axiomes de Peano.(...)no és necessari usar cap axioma d'existència de conjunts excepte introduir termes de la forma *NxFx* –el nombre de Fx– i provar el principi de Hume, de manera que l'argument podria dur-se a terme prenent el principi de Hume com un axioma".

El principi de Hume podria ser definit com segueix:

$$\#xFx = \#xGx \leftrightarrow \exists R\ (R\ assigna\ cada\ element\ de\ F\ amb\ un\ element\ de\ G)$$

És a dir, que el nombre de Fx és igual al nombre de Gx si, i només si, existeix una bijecció (correspondència 1 a 1) entre les Fx i les Gx. Aquest principi ja apareixia en l'obra de Frege si bé les dues parts del condicional estaven separades.

L'afirmació feta per Parsons és el que avui es coneix com Teorema de Frege i afirma que els axiomes de Peano de l'aritmètica poden ser derivats mitjançant la lògica de segon ordre a partir del principi de Hume. No obstant, l'afirmació de Parsons no va rebre gairé resó i el moviment neofregeà va aparèixer de forma rellevant amb Wright, que al 1983 va detallar el mètode per derivar els axiomes de Dedekind-Peano mitjançant el principi de Hume.

Una altre corrent neologicista és la coneguda com logicisme constructiu, que es basa en establir regles inferencials de deducció i on el significat dels termes s'ajusta a la visió de l'antirealisme semàntic[40].

Així, el neologicisme no adopta la definició de nombre elaborada per Frege; ara, els nombres, passen a formar part del sistema gràcies als principis d'abstracció utilitzats, que pels neologicistes *wrightians* és el principi de Hume i pels logicistes constructius són les regles que permetin la introducció del zero i els successors en el sistema. Si bé, l'estratègia de deducció general usada per Frege per a obtenir els postulats es manté.

Cal destacar, fent una reflexió concreta sobre les conseqüències dels teoremes d'incompletesa envers les premises defensades pels logicistes, que d'acord amb Neil Tennant "A la llum dels fenòmens d'incompletesa, seria difícil complir amb l'afirmació que *totes* les veritats matemàtiques són veritables només en virtut de les consideracions *lògiques* que poden captar–se en els sistemes de demostració formal. Així, si quan considerem els principis inicials de la aritmètica obtenim una axiomatització en essència incompleta els logicistes hauran de justificar la incorporació d'un nou principi bassant-se en aspectes estrictament lògics".

[40]L'antirealisme semàntic afirma que totes les veritats poden ser conegudes, però no considera cert que disposem d'un mètode efectiu per determinar la certesa o falsedat d'un enunciat matemàtic. La caracterització de realisme semàntic i antirealisme semàntic va ser donada per Micheal Dummet al 1982.

El neologicisme pretén mostrar que una quantitat significativa de matemàtiques és analítica i també afirma que partint de principis analítics (o definitoris) i aplicant la lògica és com s'obtenen *gran part* de les matemàtiques. Inicialment, tal i com va ser mostrat a l'apartat 2.2., els logicistes sostenien que almenys l'aritmètica –en la seva totalitat– és analítica. D'acord amb Putnam, pels teoremes de Gödel i considerant una comprensió natural de "analític" hi han d'haver veritats sintètiques en les matemàtiques. De fet, explica Raatikainen, "el mateix Gödel va fer comentaris amb un esperit molt similar que fins i tot la teoria dels nombres enters és demostrablement no analítica (Gödel 1944)".

Encara queden molts aspectes per resoldre en aquesta doctrina. Tennant presenta una llista de 11 "problemes" que encara no han estat resolts per la corrent logicista, alguns d'ells enfronten les diferents visions que hi ha dintre de la mateixa. Aquesta llista s'adjunta com annex, donat que com afirma Tennant "El lector que es recordi d'ells estarà en condicions d'examinar els detalls de qualsevol proposta neologicista nova amb una mirada més crítica".

4.3 Alguns enunciats indecidibles

Els desè problema de la llista de Hilbert

El desè problema de la llista de Hilbert consistia en trobar un mètode de decisió per a les equacions diofàntiques, i.e., un mètode "mecànic" per a trobar solucions enteres d'equacions amb una o més variables i amb coeficients enters que impliquin únicament suma i producte.

L'anàlisi de Turing de la noció del mètode de decisió va fer sospitar que potser aquest problema no tenia solució.

Julia Robinson i Martin Davis van treballar en aquest problema a principis de 1950 i més tard s'hi va unir Hilary Putnam. Tots tres van poder demostrar que si considerem un equació diofàntica exponencial, on és possible que tant les constants com les variables puguin aparèixer com a exponents (a més de com a suma i producte), i tractem de cercar un mètode de generació de solucions enteres ens trobem amb un problema indecidible.

Uns anys després, al 1970, Yuri Matiyasevich va conseguir aportar l'element que faltava i va demostrar que el problema de la resolució de les equacions diofàntiques, tal i com havia estat considerat per Hilbert, és indecidible.

Per demostrar-ho van demostrar que a tots els conjunts semidecidibles (o recursivament enumerables, veure peu de pàgina 23) se'ls pot donar una representació diofàntica i com que existeixen conjunts semidecidibles (recursivament enumerables) que no són decidibles (recursius) s'obté finalment el teorema:

No existeix un mètode general per a decidir si una equació diofàntica donada té o no una solució.

Teorema de Paris-Harrington

Aquest teorema publicat al 1977 és considerat com el primer expemple d'un enunciat certa sobre els nombres enters que pot expressar–se en el llenguatge de l'aritmètica però que no pot ser demostrat a partir de l'aritmètica de Peano.

En particular el teorema afirma la impossibilitat de demostrar una versió finita del teorema de Ramsey que tracta sobre les possibilitats de coloració de grafs. L'enunciat del *teorema de Ramsey finit reforçat* és el següent:

"Per a enters positius *n, m, k* tals que m≥n es pot trobar un N amb la següent propietat: si acolorim cada un dels subconjunts de n elements de s=$\{1, 2, 3, ..., N\}$ amb algun dels k colors, aleshores podem trobar un subconjunt Y de S amb almenys m elements tal que tots els subconjunts de n elements de Y tinguin el mateix color, i el nombre d'elements de Y sigui almenys l'element més petit de Y."

El teorema de Paris-Harrington estableix que el teormea de Ramsey finit reforçat no és demostrable a l'aritmètica de Peano.

La hipòtesi del continu i l'axioma d'elecció

Després del cinquè axioma dels elements d'Euclides, l'axioma d'elecció podria considerar–se com el següent axioma més discutit de les matemàtiques. Tal com afirma John L. Bell "Encara que la utilitat de l'axioma d'elecció va quedar clara ràpidament, van quedar dubtes sobre la seva solidesa. Aquests dubtes es van veure reforçats pel fet que tenia unes certes conseqüències sorprenentment contràries a la intuïció. La més espectacular d'elles va ser la descomposició paradoxal de l'esfera de Banach i Tarski (Banach i Tarski 1924): qualsevol esfera sòlida es pot dividir en un nombre finit de peces que es poden tornar a ajuntar per a formar dues esferes sòlides de la mateixa grandària; i qualsevol esfera sòlida es pot dividir en un nombre finit de peces de tal manera que es puguin tornar a ajuntar per a formar una esfera sòlida de grandària arbitrària". Aquest principi, no obstant, permet obtenir conseqüències rellevants, moltes d'elles indispensables, i per tant la seva verificació era necessària. Malgrat la necessitat, se succeïen els intents infructuosos per trobar una demostració plenament acceptada. Ha estat comentat a l'apartat 2.2 que Fraenkel havia presentat una demostració de la independència d'aquest axioma. No obstant, d'acord amb J. V. Heijenoort[41]:

"La prova d'independència de Fraenkel es realitza per a un sistema en el qual es pot suposar sense contradicció l'existència d'una quantitat no numerable infinita d'objectes que no són classes. (...) Però, des d'una perspectiva més àmplia, aquestes no classes són insatisfactòries. En teoria de conjunts, després de tot, totes les nocions matemàtiques (nombres naturals, nombres reals, funcions, etc.) haurien de resultar ser conjunts o, en el pitjor dels casos, classes".

D'altra banda, tampoc s'aconseguia obtenir respostes sobre la validesa de la hipòtesi del continu, fet sobre el que varen treball molts matemàtics i que fins i tot va encapçalar la famosa llista de problemes de Hilbert.

Els primers pasos sòlids per a trobar una resposta a aquests dos problemes van ser donats per Gödel. En els seus treballs (1938a, 1938b, 1939, 1940) va aconseguir provar que si considerem el sistema axiomàtic de Zermelo-Fraenkel (ZF) consistent, aleshores el sistema de ZF més l'axioma d'elecció (ZFC) també és consistent. A més, si considerem ZFC consistent, aleshores ZFC més la hipòtesi del continu també és consistent. Així semblava que, d'alguna manera, podria quedar justificat l'ús d'aquests principis doncs la seva consideració no generava inconsistències en el sistema.

[41] Jean Louis Maxime van Heijenoort (23 de juliol de 1912 – 29 de març de 1986) fou un matemàtic considerat pioner en història de la lògica matemàtica.

Anys més tard, al 1963, Paul Cohen[42] va demostrar que, si considerem ZF consistent, aleshores ZF més la negació de l'axioma d'elecció també és consistent. Així mateix, si considerem ZFC com un sistema consistent, aleshores ZFC més la negació de la hipòtesi del continu també és consistent.

Tenint en compte les aportacions fetes pels dos matemàtics, Gödel i Cohen, obtenim que tant l'axioma d'elecció com la hipotèsi del continu son afirmacions indecidibles en el sistema axiomàtic de ZF. D'aquest descobriment va sorgir la pregunta natural de com podien ser resoltes les declaracions que eren indepentents del sistema i que va dividir a la comunitat matemàtica. Els *pluralistes*, entre els que es trobava Cohen, defensaven que els resultats havien aconseguit resoldre la pregunta mostrant que *no tenia resposta* i que, per tant, era igual de vàlid un sistema on es considerés, per exemple, la hipòtesis del continu com un axioma que un sistema on l'axioma considerat sigui la seva negació. Els *no pluralistes*, entre els que es trobava Gödel, consideraven en canvi que conèixer que hi ha principis independents en un sistema només demostra la incapacitat de les eines de les que disposem per a delimitar la veritat matemàtica. Per tant el que cal és la incorporació de nous axiomes, suficientment justificats i útils per apropar–nos a la veritat matemàtica. El mateix Gödel va fer una proposta anomenada "axiomes de grans cardinals" conjecturant que permetrien resoldre la hipòtesi del continu. Si bé els *axiomes de grans cardinals* van aconseguir resoldre molts del enunciats que incialment havien estat considerats indecidibles, no eran capaços d'aportar llum sobre la hipòtesi del continu.

Actualment, el debat entre pluralistes i no pluralistes continua viu. La majoria de matemàtics es situa en una posició intermèdia, adoptant el no pluralisme en certs àmbits –com l'aritmètica de primer ordre– i un visió pluralista per a nivells de matemàtiques superiors. El debat actualment està centrat principalment en la teoria descriptiva de conjunts clàssica. Com explica Peter Koellner "En primer lloc, una visió popular accepta el no pluralisme per a l'aritmètica de primer ordre, però rebutja la cerca de nous axiomes per a l'aritmètica de segon ordre i la teoria de conjunts i accepta el pluralisme en aquests nivells. Les qüestions de la teoria descriptiva de conjunts són importants referent a això, ja que moltes d'elles són enunciats d'aritmètica de segon ordre que són independents dels axiomes estàndard, ZFC. Per tant, representa una conjuntura crítica en el debat entre el pluralista i el no pluralista (...) per a questions d'aritmètica de tercer ordre i superior, l'assumpte espera encara desenvolupaments matemàtics".

[42]Paul Joseph Cohen (2 d'abril de 1934 – 23 de març de 2007) fou un matemàtic i lògic estatunidenc.

5 Conclusions

El descobriment de la geometria hiperbòlica així com els avanços aportats per Cantor sobre l'nfinit van desencadenar un replantejament transversal de tota la ciència matemàtica. L'etapa anomenada com "la crisi dels fonaments", tot i la connotació negativa de la paraula *crisi*, va ser un període molt fèrtil per al desenvolupament del coneixament matemàtic. Actualment, hi ha reptes als quals van tractar de fer front alguns dels protagonistes d'aquest període que encara continuen sent una incògnita.

Els teoremes d'incompletesa de Gödel van permetre resoldre alguns dels problemes mencionats en el paràgraf anterior. Hi ha tres aspectes clau en la demostració d'aquests teoremes: el primer, la codificació dels elements que formen part del sistema; el segon, la capacitat del sistema per expressar les diferents fórmules (teorema 3.1.5.5.); i, el tercer, l'existència d'autoreferències (fórmules que indiquen quelcom sobre el seu propi número de Gödel).

El programa de Hilbert, un dels reptes sorgit durant "la crisi dels fonaments", va resultar ser un projecte impossible de dur a terme tal com havia estat considerat inicialment. Tanmateix, hi ha autors que encara opinen que és vàlida un consideració del mateix amb matisos.

El logicisme és el corrent que ha rebut més acceptació. Actualment, el model de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció és l'usat per a fonamentar la major part de les matemàtiques amb les que treballem. Se sap que el model ZF és incomplet –si considerem ZF consistent– i que, per tant, existeixen afirmacions per a les quals el sistema no és capaç de determinar la seva validesa o refutació. També sabem que la pròpia consistència de ZF és indecidible a ZF; així com l'axioma d'elecció, si considerem ZF consistent.

Els teoremes d'incompletesa de Gödel van mostrar les nostres mancances –actuals– per delimitar la veritat matemàtica. El mateix Gödel sosté que aquestes limitacions podrien ser temporals i que futurs descobriments ens anirien aproximant a la solució d'aquells problemes per als quals encara no s'ha trobat resposta. Caldrà esperar.

6 Annex

Els problemes als quals s'enfronta la corrent neologicista definits per Neil Tennant són els següents:

1. El 'problema de conceptualització" de Frege:

Com aprenem els números, si estem convençuts que l'aritmètica no es basa en la "forma pura d'intuïció del temps" de Kant? Com va dir Frege en Grundlagen, punt 62: "Com... ens seran donats els números, si no podem tenir cap idea o intuïció d'ells?"

2. El "problema de Juli Cèsar" de Frege:

Com es pot demostrar que, donada una explicació lògica de la naturalesa dels números, Juli Cèsar no és un número? De manera més general: com es pot demostrar, per tal motiu, que cap número ś un individu concret?

3. El "problema d'aplicabilitat":

Pot el logicista explicar (i) com es poden aplicar els nombres naturals en comptar col·leccions finites, i (ii) com es poden aplicar els nombres reals en mesurar magnituds que varien contínuament, com a longituds, períodes de temps, etc.?

4. El "problema d'inclusió":

Com es demostra que el nombre natural n és el mateix objecte abstracte que el nombre enter n, el nombre racional n i el nombre real n ?

5. El "problema de l'abstracció":

Quina és la forma correcta dels principis d'abstracció de nombres (que han d'adoptar aquells que sostenen que els nombres són abstractes lògics)?

6. El "problema de la analiticidad":

Es pot demostrar que els principis d'abstracció numèrica triats són analítics?

7. El "problema de l'existència":

Pot la lògica comprometre'ns amb l'existència de qualsevol cosa o tipus de cosa?

8. El "problema de l'infinit":

Se li permet al logicista simplement postular un Axioma de l'infinit, en el sentit que hi ha infinites coses (potser d'un cert tipus)?

9. El "problema de demarcació":

Què fa que alguna cosa sigui una constant lògica? Quines nocions comunament considerades matemàtiques es poden definir, implícitament o d'una altra manera, en una lògica adequadament formulada per al logicisme?

10. ”Males companyies” o ”Vergonya de riqueses”:

Alguns principis d’abstracció són inconsistents. No obstant això, uns altres, encara que són individualment consistents, són mútuament inconsistents. Llavors, com podem saber, de qualsevol principi d’abstracció proposat, si hem d’acceptar-lo?

11. ”Invariància teòrica”:

Els nombres naturals són universalment aplicables; gaudeixen de les seves propietats aritmètiques i entren en les seves relacions aritmètiques necessàriament, independentment de quines altres classes de coses puguin haver-hi, i de com puguin ser aquestes coses. Llavors, els principis d’abstracció dels nombres naturals han de ser consistents amb qualsevol teoria consistent sobre qualsevol domini del discurs. Ho són?

Referències

[1] Frege, F.L.G. Frege (1879) *Begriffsschrift*, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a ed. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 1-82. ISBN 0674324491

[2] Russell, B. Russell (1902) Letter to Frege. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a ed. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 124-125. ISBN 0674324491

[3] Frege, F.L.G. Frege (1902) Letter to Russell. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a ed. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 126-128. ISBN 0674324491

[4] Hilbert, D. Hilbert (1927) The foundations of mathematics. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a ed. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 126-128. ISBN 0674324491

[5] Russell, B. Russell (1908a) Mathematical logic as based on the theory of types. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a ed. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 150-182. ISBN 0674324491

[6] Gödel, K. Gödel (1930b, 1931 i 1931a). Some metamethical results on completeness and consistency, On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems I, *and* On completeness and consistency. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 592-617. ISBN 0674324491

[7] Fraenkel, A.H. Fraenkel(1922b) The notion "definite" and the independence of the axiom of choice. A: van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel.* 3^a. EUA: Harvard University Press, 1977, p. 592-617. ISBN 0674324491

[8] Nagel, E. i Newman, J.R. *El teorema de Gödel.* 2^a ed. Madrid: Editorial Tecnos, 1994, 140 p. ISBN 8430925902

[9] Kreisel, G. Hilbert's programme. A: Benacerraf, P. i Putnam, H. *Philosophy of mathematics.* 2^a ed. EUA: Press Sydnicate of the University of Cambridge, 1983, p. 207-238. ISBN 0521227968

[10] Curry, H.B. Remarks on the definition and nature of mathematics. A: Benacerraf, P. i Putnam, H. *Philosophy of mathematics.* 2^a ed. EUA: Press Sydnicate of the University of Cambridge, 1983, p. 202-206. ISBN 0521227968

[11] Bagaria, Joan, "Set Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/set-theory/`

[12] Bagaria, Joan, "Set Theory", revised and expanded version of the article published in: The Princeton Companion to Mathematics. Edited by Timothy Gowers. June Barrow-Green and Imre Leader, associate editors. Princeton University Press, 2008.

[13] Horsten, Leon, "Philosophy of Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/philosophy-mathematics/`

[14] Raatikainen, Panu, "Gödel's Incompleteness Theorems", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/goedel-incompleteness/

[15] Zach, Richard, "Hilbert's Program", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/

[16] von Plato, Jan, "The Development of Proof Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/

[17] Weir, Alan, "Formalism in the Philosophy of Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/formalism-mathematics/

[18] Tennant, Neil, "Logicism and Neologicism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/logicism/

[19] Kennedy, Juliette, "Kurt Gödel", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/goedel/

[20] Zalta, Edward N., "Gottlob Frege", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/frege/

[21] Koellner, Peter, "The Continuum Hypothesis", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/continuum-hypothesis/

[22] Bell, John L., "The Axiom of Choice", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/axiom-choice/