Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

UNA PROVA ANALÍTICA DEL TEOREMA DELS NOMBRES PRIMERS

Autor: Ignasi Vergés de Orovio

Director: Dr. Francesc Xavier Massaneda Clares
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

The Prime number Theorem states that the function $\pi(x)$, which counts the number of primes smaller or equal to x, is asymptotically equivalent to $x/\ln x$ as $x \to \infty$, that is,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

In this project we give the necessary steps to prove this theorem according to the proof provided by D.J.Newman [New] and modified by J.Korevaar. [Kor].

Resum

El Teorema dels nombres primers afirma que la funció $\pi(x)$ que compta el nombre de primers mes petits o igual que x, es comporta asimptòticament a l'infinit com la funció $x/\ln x$, és a dir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

En aquest treball donem els passos necessaris per demostrar aquest teorema i donem la demostració que va fer D.J Newman[New] modificada per J.Korevaar[Kor].

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agraïments

Primer de tot agraïr enormement al Dr. Xavier Massaneda per accedir a dirigir aquesta memòria així com l'ajuda constant que he rebut per part seva.

Seguidament agraïr a la meva família el suport constant i diari que sempre m'han donat.

En especial, agraïr als meus amics i companys de classe, Àngel, Jesús, Youwei, Àlex, Adrià i Jordi per tota la ajuda rebuda i tants bons moments junts.

I per últim i més important, l'ajuda rebuda per part del meu pare, la meva parella Cristina i el meu amic Pau, que sense ells no haguès estat possible obtenir el Grau en Matemàtiques.

Índex

Capítol 1

Introducció

1.1 El projecte

Aquest projecte intenta assolir dos objectius. El primer objectiu d'aquest treball és analitzar i entendre alguns dels resultats que es necessiten per poder demostrar el teorema dels nombres primers i establir unes eines bàsiques que ens ajudin a presentar aquesta prova de manera clara.

El segon objectiu d'aquest projecte és escriure de forma detallada, entenedora , precisa i ordenada les demostracions d'aquests resultats i ,sobretot, la demostració del teorema dels nombres primers.

1.2 Una mirada cap enrere

El Teorema fonamental de l'artimètica diu que tot enter positiu es pot escriure de manera única com a producte de nombres primers; els nombres primers són els "átoms"dels nombres enters.

Teorema fonamental de l'Aritmètica. *Tot nombre enter $n > 1$ pot ser representat de manera única (llevat de l'ordre) com un producte de potències de numeros primers:*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

on $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ son primers i α_i enters positius.

Degut a la seva importància, sempre s'ha volgut entendre quina distribució segueixen aquests nombres primers. De seguida es veu que no segueixen cap patró evident. Un primer pas per a entendre aquesta distribució és entendre el comportament de la funció $\pi(x)$ que assigna a cada x positiu el nombre de primers més petits o iguals que x:

$$\pi(x) = \#\{p \,\mathrm{primer} \mid p \leq x\}.$$

Segurament la primera propietat de $\pi(x)$ de la que tenim constància va aparèixer al llibre dels Elements de Euclides.

Teorema. *Hi ha infinits nombres primers; és a dir*

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty.$$

Demostració. Suposem que la quantitat de nombres primers és finita i arribarem a contradicció. Escrivim $p_1, p_2, \ldots, p_n$ la llista dels nombres primers. Considerem ara N, el producte de tots ells més 1, és a dir,

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Aquest nombre no pot ser un primer ($N > p_j$ per a qualsevol $j = 1, \ldots, n$), per tant N ha de ser compost i s'ha de poder dividir per algun primer de la llista. Però per a p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tenim

$$\frac{N}{p_i} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n + 1}{p_i} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{p_i} + \frac{1}{p_i} = p_1 p_2 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_n + \frac{1}{p_i}.$$

Arribem doncs a contradicció, ja que $1/p_i$ no és un nombre enter i es dedueix que el número de primers és infinit. $\square$

Aquesta demostració és una de les moltes que s'han fet posteriorment sobre la infinitat dels nombres primers, però no va ser fins al 1737 quan el matemàtic i físic Leonard Euler va establir un resultat més precís que mostrem a continuació.

Teorema. *La sèrie dels inversos dels nombres primers*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots ,$$

divergeix.

Aquesta sèrie es coneix sovint com la "sèrie harmònica dels nombres primers".

Donarem tot seguit una demostració semblant a la que va fer Euler al 1737, deguda al matemàtic James A. Clarkson [Cla].

Demostració. Suposarem que la sèrie convergeix i arribarem a una contradicció. Si la sèrie convergeix existeix un nombre enter k tal que

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}.$$

Sigui $Q = p_1 \cdots p_k$ i considerem els nombres $1 + nQ$ per $n = 1, 2, \ldots$ Cap d'aquests nombres és divisible per cap primer $p_1, \ldots, p_k$. Per tant, tots els factors primers de $1 + nQ$ han de estar en $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ Llavors per cada $n \geq 1$ tenim

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{1 + nQ} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} \right)^t ,$$

ja que la suma de la dreta inclou entre els seus termes tots els termes de l'esquerra. Però la part de la dreta de la desigualtat està dominada per la sèrie geomètrica convergent

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1.$$

Llavors la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nQ}$$

està acotada i per tant convergeix. Però això es una contradicció ja que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+nQ}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{Q},$$

i pel criteri de comparació pel pas al límit la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+nQ)$ té el mateix caràcter que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, és a dir, és divergent. □

Tal com hem explicat anteriorment, els principals objectius del treball és descriure el comportament assimptòtic de $\pi(x)$. El resultat principal d'aquest treball és el següent.

Teorema dels Nombres Primers. *La funció $\pi(x)$ es comporta asímptòticament com la funció $\frac{x}{\ln x}$:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

Aquest creixement de $\pi(x)$ s'intueix en la vinent taula:

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\pi(x)/\frac{x}{\ln x}$
10	4	$4,3$	$0,93$
10^2	25	$21,7$	$1,15$
10^3	168	$144,8$	$1,16$
10^4	1229	1086	$1,13$
10^5	9592	8686	$1,10$
10^6	78498	72382	$1,08$
10^7	664579	620420	$1,07$
10^8	5761455	5428681	$1,06$
10^9	50847534	48254942	$1,05$
10^{10}	455052511	434294482	$1,048$

Taula 1.1:

Examinant aquesta taula per x menor que 10^{10}, Gauss i Legendre van conjecturar, de manera independent, el teorema dels nombres primers. Tant Gauss com Legendre van intentar demostrar-lo, però no ho van poder aconseguir, probablement per no estar prou avançat el coneixement de l'època, tant en Teoria de Nombres com en Anàlisi Complexa.

Notem que pel que fa al teorema de Euler que hem demostrat anteriorment que el Teorema dels Nombres Primers l'implica, ja que aquest equival a dir que per a n prou gran

$$p_n \sim n \log n,$$

i per tant, pel criteri de comparació pel pas al límit, la sèrie

$$\sum_n \frac{1}{p_n}$$

té el mateix caràcter que la sèrie

$$\sum_n \frac{1}{n \log n},$$

és a dir, és divergent.

El problema de decidir la veritat o la falsedat de la conjectura va cridar l'atenció d'eminents matemàtics durant gairebé 100 anys. El 1851 el conegut matemàtic rus Pafnuti Lvóvitx Txebixov [Txe] va fer un important pas endavant en la prova del Teorema dels Nombres Primers, demostrant que si la proporció $\pi(x)\big/\frac{x}{\ln x}$ té límit, aquest ha de ser necessàriament 1. Tanmateix no va poder demostrar que la proporció té límit.

El 1859 el matemàtic Georg Friedrich Bernhard Riemann [Rie] va atacar el problema amb mètodes analítics, usant la fòrmula descoberta per Euler al 1737 (de la que parlarem més endevant) que relaciona els nombres primers amb la funció zeta de Riemann. La funció zeta es defineix, per a $z \in \mathbb{C}$ amb Re $z > 1$, per la sèrie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Riemann va descriure un mètode enginyós per relacionar la distribució de nombres primers amb propietats de la funció $\zeta(z)$. Les matemàtiques necessàries per dur a terme tots els detalls del seu mètode no s'havien desenvolupat completament en aquells temps i Riemann no va poder resoldre completament el problema abans de la seva prematura mort, a Itàlia, el 1866.

Trenta anys més tard ja es tenien totes les eines analítiques necessàries i el 1896 el matemàtic francès Jaques Hadamard [Had] i el matemàtic belga Charles-Jean de la Vallé Poussin [Val] van demostrar finalment, de manera independent i gairebé simultània, el resultat. Aquest resultat notable és el Teorema dels Nombres Primers i la seva demostració va representar un dels èxits més importants de la teoria analítica dels nombres.

1.3 Estructura de la Memòria

La memòria està estructurada de la manera següent. La primera part, els preeliminars, es dedica a introduïr eines de analisi complexa bàsiques però necessàries per poder dur a terme les demés parts del projecte.

A la segona part, introduïm la funció ζ de Riemann i algunes de les seves propietats analítiques rellevants, que són fonamentals per la demostració del Teorema dels Nombres Primers que presentem en aquesta memòria. La demostració pròpiament del teorema, que és el cor del treball, és la que ocupa tota la part final del treball. Aquesta part s'estructura en dos blocs:

1) Formulació equivalent en termes de la funció de Van Mongolt ψ (Secció 4.1).

2) Demostració del Teorema dels Nombres Primers (secció 4.2).

Principalment hem utilitzat de guia el llibre Complex Variables de R. B. Ash i W. P. Novinger [A-N]. Aquest llibre representa una revisió substancial de la primera edició que es va publicar el 1971. Hem seguit l'estructura del Capítol 7, The Prime Number Theorem, afegint informació dels capítols anteriors i explicant tots els punts que ens semblava que no quedaven prou clars.

Capítol 2

Preliminars

L'objectiu d'aquesta secció és introduir definicions i resultats que farem servir al llarg del treball.

Començarem donant alguns resultats elementals i anirem especialitzant-nos cada cop més, tocant principalment una de les branques més importnats de les matemàtiques, l'anàlisi complexa.

2.1 Funcions holomorfes

Recordem que donada una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida a un obert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i donat $z_0 \in \Omega$, es diu que f és holomorfa al puntz_0 si existeix el següent límit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_0} = \lambda = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Aquest límit, quan existeix, es denota com $f'(z_0)$. Diem que f és holomorfa a Ω, denotat com $f \in H(\Omega)$, si f és holomorfa a tot $z_0 \in \Omega$. A les funcions holomorfes també se les anomena funcions analítiques. Si f és holomorfa en tot $\mathbb{C}$ es diu que f és una funció entera.

Un resultat fonamental per a les funcions holomorfes, és el Teorema de Cauchy, que es pot entendre com la versió del Teorema de Green per aquest tipus de funcions. Abans de donar aquest resultat, recordem alguns conceptes bàsics.

Una funció *argument*, denotada $\arg z$, és una funció

$$\arg z : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

tal que $z = |z|e^{i \arg z}$ per a $z \in \mathbb{C}$. Una funció argument té sempre una semirecta de discontinuïtats (on l'argument fa un salt de 2π). Diem $\arg_\theta z$ a l'argument que té discontinuïtats a la semirecta $e^{i\theta}[0, \infty)$, és a dir, a l'argument que és contínu a $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta}, r \geq 0\}$.

Diem *argument principal*, denotat $\operatorname{Arg} z$, a l'argument que té discontinuïtats al semieix real negatiu i compta els angles entre $-\pi$ i π. Així, $\operatorname{Arg} z \in \mathcal{C}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ i $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$.

A partir de l'expressió $z = |z|e^{i \arg z}$ veiem que cada argument defineix un logaritme de z:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z.$$

El logaritme és continu allà on és continu l'argument associat, i de fet també defineix una funció holomorfa.

Diem *logaritme principal*, denotat Log z, al logaritme associat a Arg z. Aleshores Log $z \in H(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.

Un *corba* en $\mathbb{C}$ és una aplicació contínua γ en el interval tancat $[a, b]$ amb imatge a $\mathbb{C}$. Si γ és diferenciable a trossos aleshores, γ es diu *camí*. Un camí amb $\gamma(a) = \gamma(b)$ es diu *camí tancat*. Finalment diem que la imatge de γ es denota com $\gamma*$.

Amb aquests conceptes definim *índex*.

Definició 2.1.1. *Sigui $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camí tancat. Si $z_0 \notin \gamma^*$, sigui θ_{z_0} el argument continu de $\gamma - z_0$. L'índex de z_0 respecte de γ, denotat per $n(\gamma, z_0)$ és*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{\theta_{z_0}(b) - \theta_{z_0}(a)}{2\pi}.$$

Amb aquests conceptes previs enunciem el Teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy. *Sigui γ un camí tancat a Ω tal que $n(\gamma, z) = 0$ per tot $z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$. Aleshores es compleix el següent:*

(i) $\int_\gamma f(w)dw = 0$ *per tota funció f analítica a Ω.*

(ii) Si $z \in \Omega \backslash \gamma^*$, aleshores

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{1}$$

La representació donada per (1) serà important a la prova del Teorema del nombre primer.

El Teorema de Cauchy té un recíproc, anomenat Teorema de Morera.

Teorema de Morera. *Sigui f una funció continua en un conjunt obert Ω i tal que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ per a cada triangle $T \subseteq \Omega$. Aleshores f és analítica a Ω.*

Aplicació: Sigui $F \in L^1[0, \infty]$, és a dir, $\int_0^\infty |F(t)|dt < \infty$. La funció

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

(transformada de Laplace de F) és holomorfa al semiplà $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Demostració. La funció G és contínua a tot $z_0 \in \Pi_0$, ja que pel Teorema de la convergència dominada

$$\lim_{z \to z_0} (G(z) - G(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \int_0^\infty F(t)(e^{-zt} - e^{-z_0 t})dt = \int_0^\infty F(t)\, 0\, dt = 0.$$

Per altra part, donat T un triangle qualsevol contingut a Π_0, tenim, pel teorema de Fubini i el teorema de Cauchy aplicat a la funció entera $H_t(z) = e^{-zt}$

$$\int_{\partial T} G(z)dz = \int_0^\infty F(t) \left(\int_{\partial T} e^{-zt} \right) dt = \int_0^\infty F(t)\, 0\, dt.$$

El teorema de Morera permet concloure doncs que $G(z) \in H(\Pi_0)$.

□

Enunciem el següent lema, que és conseqüencia del Teorema de la Convergència Dominada i que també serà necessari ens els resultats que veurem més endavant.

Lema 2.1.2. *Suposem* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *i sigui* ϕ *una funció amb valors complexos i continua a* $\Omega \times [a, b]$ *tal que per cada* $t \in [a, b]$*, la funció* $z \to \phi(z, t)$ *és analítica a* Ω*. Sigui* $F(z) = \int_a^b \phi(z, t)dt, z \in \Omega$*. Aleshores* F *és analítica sobre* Ω *i*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial z}(z, t)dt, z \in \Omega.$$

2.2 Funcions meromorfes

Anem a fer un repàs d'algunes propietats de les funcions analítiques i meromorfes.

Zeros de funcions analítiques. Suposem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una funció analítica en el obert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i que $c \in \Omega$. Sabem que la sèrie de Taylor de $f(z)$ centrada a c convergeix cap a $f(z)$, almenys en tot disc $D(c;r)$ centrat a c i contingut en Ω. Per tant, tenim

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k \qquad \text{per} \qquad |z-c| < r.$$

Si $f^{(k)}(c) = 0$ per tot k, aleshores $f(z)$ és identicament 0. D'altra banda, si f no és zero, existeix un nombre enter no negatiu n tal que $f^{(n)}(c) \neq 0$. Si n és 0, aleshores $f(c) \neq 0$. Si $n > 0$, llavors $f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ pero $f^{(n)}(c) \neq 0$. En aquest cas direm que f te un *zero de ordre* n a c. Aleshores, a partir de la sèrie, tenim

$$f(z) = (z-c)^k g(z)$$

amb g holomorfa a Ω.

Diem que f té una *singularitat aïllada* al punt c si existeix $r > 0$ tal que $f \in H(D(c,r) \setminus \{c\})$. Definim *pol* com una singularitat aïllada amb part negativa de la sèrie de Laurent finita.

Definició 2.2.1. *Una funió f es diu meromorfa a Ω si f és analítica a Ω excepte possiblement per un conjunt discret de singularitats que són pols.*

Els pols es poden detectar mirant el comportament de la funció a l'entorn de la singularitat.

Proposició 2.2.2. *Sigui f una funció analítica en Ω amb una singularitat aïllada z_0. Aleshores z_0 és un pol simple, si i nomès si, $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ existeix i és diferent de 0. En tal cas, el límit serà igual al residu de f a z_0.*

Per a acabar aquesta secció, i amb vista a tractar, més endevant, els productes infinits, recordem les definicions següents.

Definició 2.2.3. *Una successió de funcions $f_n : S \to \Omega$ definides en conjunt $S \subset \Omega$ es diu que convergeixen puntualment, quan per tot $x \in S$ la successió $f_n(x)$ és convergent.*

Es diu que f_n convergeix uniformement a la funció f definida en S si, i només si per tot $\epsilon > 0$ existeix un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ es verifica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall x \in S.$$

Finalment es diu que una successió de funcions f_n és uniformement de Cauchy a S quan verifica el següent:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \ \longrightarrow \ |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon \ \forall x \in S.$$

Finalment donem dos teoremes que utlitzarem més endevant en la demostració de la prova. El primer fa referència al comportament de successions de funcions, i el segon és una acotació elemental, però que apareixerà moltes vegades.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Vitali). *Sigui f_n una successió de funcions en $A(\Omega)$ on Ω és connex. Suposem que f_n convergeix puntualment en $S \subseteq \Omega$ i S té un punt d'acumulació en Ω. Aleshores, f_n és uniformement de Cauchy en subconjunts compactes de Ω, i per tant, convergeix uniformement en subconjunts compactes de Ω cap a alguna $f \in A(\Omega)$.*

Teorema 2.2.5 (Teorema M-L). *Sigui f una funció coninua en la corba γ i sigui $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ per tot $z \in \gamma^*$. Si L indica la longitud de la corba γ, aleshores*

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq ML.$$

2.3 Productes infinits

Com ja hem dit anteriorment l'objectiu principal d'aquest projecte és demostrar analíticament el teorema dels nombres primers a partir de la zeta de Riemann.

Com veurem més endevant la funció zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad z \in \mathbb{C} \ \text{amb} \operatorname{Re} z > 1,$$

coincideix amb el producte d'Euler

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-z}}.$$

Per aquest motiu ens interessa fer un petit estudi sobre els productes infinits i les seves principals propietats.

Anem a començar donant una primera definició elemental sobre la convergència dels productes parcials.

Definició 2.3.1. *Sigui z_n una successió de números complexos i sigui $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ el producte parcial fins a n. Diem que el producte $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ convergeix, si la successió P_n convergeix cap a un número complex P. En aquest cas, escriurem $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.*

Aquesta definició en particular sobre la convergència de productes infinits no deixa de ser la definició estàndard de convergència de successions. Molts autors consideren que aquesta definició no és la adequada per almenys dues raons:

1. Si un dels factors és zero aleshores el producte convergeix cap a zero, sense importar com són els altres factors.
2. És possible que un producte convergeixi a 0 sense la necessitat que un dels factors sigui 0, a diferència d'un producte finit.

Farem doncs un enfoc natural per a l'estudi d'un producte infinit, que és el de convertir formalment el producte en una suma prenent logaritmes. De fet, aquest enfocament és força fructífer, ja que mostra el resultat següent.

Lema 2.3.2. *Suposem que $z_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ llavors $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ convergeix a un límit diferent de zero, si i només si, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ convergeix. (Aquí Log z designa el logaritme principal)*

Demostració. Sigui $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ i $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k$. Aleshores $P_n = e^{S_n}$, ja que

$$e^{S_n} = e^{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k} = e^{(\operatorname{Log} z_1 + \cdots + \operatorname{Log} z_n)}$$

$$= z_1 \cdots z_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = P_n.$$

Per tant, si $S_n \to S$ aleshores, $P_n \to e^S \neq 0$.

D'altra banda, suposem $P_n \to P \neq 0$. Escollim un θ tal que $\arg_\theta$ és contínua a P. Llavors,

$$\log_\theta P_n = \ln|P_n| + i\arg_\theta(P_n) \to \ln|P| + i\arg_\theta(P) = \log_\theta P.$$

Com que $e^{S_n} = P_n$, tenim que $S_n = \log_\theta P + 2\pi i l_n$ per algun enter l_n. Però

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Log} z_k \\ &= \operatorname{Log} z_n \to \operatorname{Log} 1 = 0. \end{aligned}$$

Conseqüentment,

$$\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} + 2\pi i(l_n - l_{n-1}) \to 0.$$

Com que $\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} = \log_\theta P - \log_\theta P = 0$ i $l_n - l_{n-1}$ és un enter, resulta que $l_n - l_{n-1}$ és eventualment 0, per a n prou gran. Per tant l_n és eventualment una constant l i en conseqüència

$$S_n \to \log_\theta P + 2\pi i l.$$

□

Per productes d'una determinada forma la condició de convergència es simplifica.

Lema 2.3.3. *Sigui $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ amb $a_n \geq 0$ per qualsevol n, llavors $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ convergeix, si i només si, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix.*

Demostració. Com que $a_n \geq 0$, aleshores

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)\cdots(1 + a_n), \;\; \forall n = 1, 2, \ldots.$$

I com que $1 + x \leq e^x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, aleshores per qualsevol $n = 1, 2, \ldots$, tenim,

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)\cdots(1 + a_n) \leq e^{a_1 + \cdots + a_n},$$

d'on deduïm directament el resultat. □

Definició 2.3.4. *Sigui $z_n \in \mathbb{C}$; es diu que el producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ convergeix absolutament si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ convergeix.*

Pel Lema 2.3.3, la convergencia absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ és equivalent a la convergència absoluta de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Amb aquesta definició i els anteriors lemes, afirmem i demostrem el conegut lema que ve a continuació.

Lema 2.3.5. *Si el prodcute infinit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ convergeix absolutament, aleshores $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ convergeix.*

Demostració. Per el Lema 2.3.3, la convergència de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ implica la convergència de $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, en particular, tenim $|z_n| \to 0$. Aleshores podem suposar que $|z_n| < 1$ per tot n. Per $|z| < 1$, tenim

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = zh(z)$$

on $h(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3}\frac{z^3}{4} + \cdots \to 1$ quan $z \to 0$. Consegüentment, per $m \leq p$,

$$\Big|\sum_{n=m}^{p} \mathrm{Log}(1+z_n)\Big| \leq \sum_{n=m}^{p} |z_n||h(z_n)|.$$

Com que $\{h(z_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ és un conjunt acotat i $\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|$ convergeix, aleshores quan $m, p \to \infty$ tenim

$$\Big|\sum_{n=m}^{p} \mathrm{Log}(1+z_n)\Big| \to 0.$$

Per tant, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}(1+z_n)$ és convergent i pel Lema 2.3.2 implica que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ conevergeix. □

Arribem a la part final d'aquesta secció, on donarem la següent proposició que ens servirà per demostrar el teorema que la segueix.

Proposició 2.3.6. *Siguin $g_n : S \to \mathbb{C}$ funcions acotades. Si la sèrie de funcions $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ convergeix uniformement en S, aleshores el producte $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n)$ convergeix absolutament i uniformement en S. Altrament, si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z)), z \in S$, llavors $f(z) = 0$ per algun $z \in S$ si i només si $1 + g_n(z) = 0$ per algun n.*

Demostració. La convergència absoluta es demostra directament a partir del Lema 2.3.2.

Si $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ convergeix uniformement en S, existeix N tal que $n \geq N$ implica $|g_n(z)| < 1$ per tot $z \in S$. Ara, per qualsevol $r \geq N$,

$$\prod_{n=1}^{r}(1+g_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+g_n(z)) \prod_{n=N}^{r}(1+g_n(z)).$$

Utilitzant el mateix que la demostració del Lema 2.3.5, amb $h(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3}\frac{z^3}{4} + \cdots$ i $m, p \geq N$,

$$\Big|\sum_{n=m}^{p} \mathrm{Log}(1+g_n(z))\Big| \leq \sum_{n=m}^{p} |g_n(z)||h(g_n(z))| \to 0 \tag{2.3.1}$$

uniformement en S quan $m, p \to \infty$. Per tant, $\sum_{n=N}^{\infty}\mathrm{Log}(1+g_n(z))$ convergeix uniformement en S. Com que les funcions $g_N, g_{N+1}, \cdots$ estan acotades, llavors la sèrie

$$\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(z)||h(g_n(z))|$$

està acotada en S i per (2.3.1)

$$\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1+g_n(z))$$

també està acotat en S. Però la funció exponencial és uniformement contínua en conjunts acotats de $\mathbb{C}$ i aleshores podem deduir que

$$\exp\left\{\sum_{n=N}^{r} \operatorname{Log}(1+g_n(z))\right\} \to \exp\left\{\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1+g_n(z))\right\} \neq 0$$

uniformement en S quan $r \to \infty$. Això prova la convergència uniforme en S de $\prod_{n=N}^{\infty}(1+g_n(z))$.

Per altra part, $1+g_n(z)$ mai és 0 en S per $n > N$. Aleshores si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$, tenim que $f(z) = 0$ per algun $z \in S$, si i només si, $1+g_n(z) = 0$ per alguna $n < N$.

□

Teorema 2.3.7. *Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ analítiques. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ convergeix uniformement en subconjunts compactes de Ω, llavors $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ defineix una funció f que és analítica sobre Ω. A més, per qualsevol $z \in \Omega$ tenim que $f(z) = 0$ si i nomes si $f_n = 0$ per algun n.*

Demostració. Utilitzant la Proposició 2.3.6 i amb $g_n = f_n - 1$, tenim que el producte $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ convergeix absolutament i uniformement en subconjunts compactes de Ω i per tant f és analítica sobre Ω. Es veu clarament que utilitzant una altre vegada la Proposició 2.3.6 i $g_n = f_n - 1$, es demostra l'última afirmació d'aquest lema. □

Capítol 3

La funció Zeta de Riemann. Propietats analítiques

La funció zeta de Riemann es defineix, per a $z \in C$ amb Re $z > 1$,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

on $n^z = e^{z \ln n}$.

Observem que $|n^z| = n^{\operatorname{Re} z}$, ja que

$$|n^z| = |n^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}| = |n^{\operatorname{Re} z}||n^{i \operatorname{Im} z}| = |n^{\operatorname{Re} z}||e^{i \ln \operatorname{Im} z}| = |n^{\operatorname{Re} z}| = n^{\operatorname{Re} z}.$$

Aleshores la sèrie convergeix absolutament en Re $z > 1$ i ho fa uniformement als semiplans $\{z : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$, per tot $\delta > 0$.

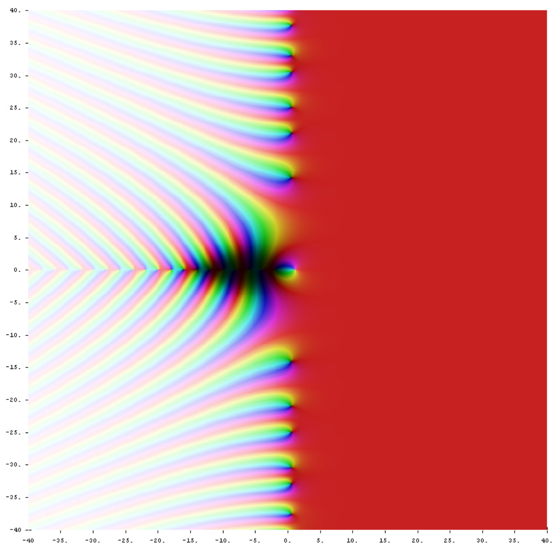


Figura 3.1: Funció zeta de Riemann [Zeta]

Fòrmula del producte d'Euler. Per Re $z > 1$, la funció zeta de Riemann $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ ve donada pel producte

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-z}}$$

on p_j és la successó creixent dels nombres primers.

Demostració. Sigui $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la successió formada pels números primers. Emprant la sèrie geomètrica veiem que per cada $j = 1, 2, \ldots$ i Re $z > 1$ tenim

$$\frac{1}{1 - 1/p_j^z} = 1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + \cdots .$$

Considerem el següent producte parcial

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - 1/p_j^z} = \prod_{j=1}^{m} (1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + \cdots) = \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{kz}} \right).$$

Si multipliquem les sèries absolutament convergents de la dreta, les ordenem i apliquem el Teorema Fonamental de l'Aritmètica, ens queda finalment que el producte és el mateix que $\sum_{n \in P_m} \frac{1}{n^z}$, on P_m és el conjunt format per 1, juntament amb tots els naturals els quals la seva factorització està formada per números primers del conjunt $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Aleshores, per a $z \in \mathbb{C}$ amb Re $z > 1$

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_j^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

□

Observació 3.0.1. L'anterior sèrie i producte convergeixen uniformement en subconjunts compactes amb Re $z > 1$, per tant ζ és analítica a Re $z > 1$. Aquesta demostració, que defineix la zeta de Riemann com un producte de fraccions amb nombres primers, la va demostrar Euler al 1737 i va obrir les portes a la moderna teoria de nombres.

Proposició 3.0.2. *La funció zeta de Riemann* $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ *no té zeros al semiplà* $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Demostració. Directe de la Fórmula del producte d'Euler i el Teorema 2.3.7. □

A la demostració del Teorema dels Nombres Primers necessitarem certes propietats addicionals de ζ. La primera és la extensió meromorfa, amb pol simple, al punt $z = 1$, al semiplà $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

En la prova utilitzarem la Fórmula de sumació parcial d'Abel: siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sèries de nombres complexos. Si $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$, aleshores

$$\sum_{n=r}^{s} a_n \Delta b_n = a_{s+1} b_{s+1} - a_r b_r - \sum_{n=r}^{s} b_{n+1} \Delta a_n. \tag{3.0.1}$$

Teorema de Extensió de la Zeta de Riemann. *La funció*

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

té una extensió analítica al semiplà $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. *Per tant* ζ *és una funció meromorfa a* Π_0 *amb un únic pol, d'ordre* 1 *i residu* 1*, al punt* $z = 1$.

Demostració. Utilitzem la Fórmula de sumació parcial d'Abel agafant $a_n = n, b_n = 1/n^z$(amb Re $z > 1$), $r = 1$ i $s = k-1$ tenim

$$\sum_{n=1}^{k-1} n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right] = k\frac{1}{k^z} - 1\frac{1}{1^z} - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z}(n+1-n) = \frac{1}{k^{z-1}} - 1 - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z}.$$

Per tant

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{n=1}^{k-1} n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right].$$

Però

$$n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right] = -nz\int_n^{n+1} t^{-z-1}dt = -z\int_n^{n+1}[t]t^{-z-1}dt,$$

on $[t]$ es la part entera de t. Per tant, tenim

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z} &= 1 + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{n=1}^{k-1} n\left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right] \\ &= \frac{1}{k^{z-1}} + z\sum_{n=1}^{k-1}\int_n^{n+1}[t]t^{-z-1}dt = \frac{1}{k^{z-1}} + \int_1^k [t]t^{-z-1}dt.\end{aligned}$$

Fent tendir $k \to \infty$ obtenim la següent fórmula

$$\zeta(z) = z\int_1^\infty [t]t^{-z-1}dt \tag{3.0.2}$$

per $z \in \Pi_0$. Considerem la següent integral, que té un creixement molt semblant a l'anterior però que és inmediata de calcular,

$$z\int_1^\infty tt^{-z-1}dt = z\int_1^\infty t^{-z}dt = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}.$$

Combinant això amb (3.0.2) tenim que

$$\begin{aligned}\zeta(z) - 1 - \frac{1}{z-1} &= z\int_1^\infty [t]t^{-z-1}dt - z\int_1^\infty tt^{-z-1}dt \\ &= 1 + z\int_1^\infty ([t]-t)t^{-z-1}dt.\end{aligned}$$

Ara fixem $k > 1$ i considerem la integral

$$\int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt.$$

Pel Lema 2.1.2 tenim que aquesta integral és una funció $f(z)$ entera. A més, com que $0 \leq ([t]-t) < 1$, si $z \in \Pi_0$, tenim

$$\left|\int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt\right| \leq \int_1^k |[t]-t||t^{-z-1}|dt \leq \int_1^k t^{-\operatorname{Re}(z+1)}dt$$
$$\leq \int_1^\infty t^{-1-\operatorname{Re} z}dt = -\left[\frac{t^{-\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{\operatorname{Re} z}.$$

Això prova que la successió de funcions

$$f_k(z) = \int_1^k ([t]-t)t^{-z-1}dt$$

definides a Π_0 són analítiques i acotades uniformement en subconjunts compactes de Π_0. Pel teorema de Vitali 2.2.4, la funció límit

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z) = \int_1^\infty ([t]-t)t^{-z-1}dt$$

és analítica i per tant la funció

$$1 + f(z) = 1 + z\int_1^\infty ([t]-t)t^{-z-1}dt$$

també és analítica a Π_0. Recordem que aquesta funció concorda amb $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$, per tant, $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ té una extensió analítica a Re $z > 0$ i consegüentment ζ té una extensió analítica a Re $z > 1$. □

Hem vist, per la Proposició 3.0.2, conseqüència del producte d'Euler, que ζ no té zeros quan Re $z > 1$. Ens podem preguntar ara què passa amb els zeros quan $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$ en l'extensió de ζ. El proper teorema ens diu que en la recta Re $z = 1$ la funció ζ no té cap zero.

Teorema 3.0.3. *La funció zeta de Riemann no té cap zero a la recta vertical Re $z = 1$; per tant $(z-1)\zeta(z)$ és analítica i no te zeros en un entorn del semiplà $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z \geq 1\}$.*

Demostració. Fixem un nombre real $y \neq 0$ i considerem la següent funció auxiliar:

$$h(x) = \zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+i2y)$$

on $x \in \mathbb{R}$ i $x > 1$. Si Re $z > 1$, utilitzant la Fórmula del producte d'Euler tenim que

$$\ln|\zeta(z)| = \ln\left|\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}\right| = \ln\left|\prod_{j=1}^\infty \frac{1}{1-p_j^{-z}}\right| = \sum_{j=1}^\infty \ln\left|\frac{1}{1-p_j^{-z}}\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \ln 1 - \ln|1 - p_j^{-z}| = -\sum_{j=1}^{\infty} \ln|1 - p_j^{-z}| = -\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-z}).$$

Sigui $f(z) = \operatorname{Log}(1 - z)$. Aleshores la seva derivada

$$(\operatorname{Log}(1-z))' = \frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Integrant tenim

$$\operatorname{Log}(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

On $C = 0$ ja que quan $z = 0$, Log(1)$= 0 = -0 + C$. Utilitzant doncs, que $-\operatorname{Log}(1 - w) = \sum_{n=1}^{\infty} w^n/n$, per $|w| < 1$, tenim

$$-\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_j^{-z}) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nz}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\ln|h(x)| &= \ln|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+i2y)| = 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+iy)| + \ln|\zeta(x+i2y)| \\ &= 3\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx} + 4\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx-iny} + \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx-i2ny} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_j^{-nx} \operatorname{Re}(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny}).\end{aligned}$$

Veiem que $p_j^{-iny} = e^{-iny\ln p_j}$ i $p_j^{-i2ny} = e^{-i2ny\ln p_j}$. Llavors utilitzant la fòrmula d'Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ amb $\theta = ny\ln p_j$, veiem que $\operatorname{Re}(3 + 4p_j^{-iny} + p_j^{-i2ny})$ té la forma següent

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0$$

Per tant, $\ln|h(x)| \geq 0$ i consegüentment

$$|h(x)| = |\zeta^3(x)||\zeta^4(x+iy)||\zeta(x+i2y)| \geq 1.$$

Aleshores

$$\frac{|h(x)|}{x-1} = |(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 |\zeta(x+i2y)| \geq \frac{1}{x-1}.$$

Utilitzant la Proposició 3.0.2 i que

$$\zeta'(1+iy) = \lim_{x\to 1} \frac{\zeta(x+iy) - \zeta(1+iy)}{x-1},$$

veiem que si tinguessim $z = 1 + iy$ amb $\zeta(1 + iy) = 0$, llavors utilitzant que $\zeta(z)$ té un pol d'ordre 1 i residu 1 a $z = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{|h(x)|}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} |(x-1)\zeta(x)|^3 \left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 |\zeta(x+i2y)| \\ &= \lim_{x\to 1^+} |\zeta'(1+iy)|^4 \zeta(x+i2y)|\end{aligned}$$

seria finit. Però

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$$

no és finit i per tant, contradiu la desigualtat. Concluïm que $\zeta(1 + iy) \neq 0$ i que ζ no té zeros a Re $z = 1$. □

Observació 3.0.4. El que ens permet demostrar aquest teorema és l'enginyosa funció auxiliar $h(x)$ deguda a Franz Mertens. Mertens va ser un matemàtic d'origen polonès que va fer moltes contribucions a la teoria de nombres, àlgebra i anàlisi matemàtica i va formular la conjectura que porta el seu nom, i que si haguès estat certa implicaria la certesa de la hipotèsis de Riemann.

La idea per demostrar el Teorema dels nombres primers és, en primer lloc, reformular-lo en termes d'una nova funció (l'objectiu és arribar al Teorema 4.1.1). Per fer-ho, definim la següent funció.

3.1 La funció de von Mangoldt

Donats p primer i $n, m \in \mathbb{N}$ es defineix la funció de von Mangoldt com

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^m \text{ per algun m,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Sigui $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida per

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n). \tag{1}$$

Equivalentment tenim

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} m_p(x) \ln p,$$

on $m_p(x)$ és el enter més gran tal que $p^{m_p(x)} \leq x$. Per exemple,

$$\psi(16,5) = 4\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 + \ln 13.$$

La funció ψ s'utilitzarà primerament per obtenir la representació integral de ζ'/ζ. Definim abans la següent transformació.

Definició 3.1.1. *Sigui $f(t)$ una funció localment integrable en $(0, +\infty)$, és a dir, $\int_p^T f(t)dt$ existeix per a tot p i T tal que $0 < p < T < \infty$. la transformada de Mellin de $f(t)$ es defineix com*

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)t^{-z-1}dt.$$

Observem que, de manera anàloga a l'Aplicació (després del T. de Morera) es comprova que $g(z)$ és una funció holomorfa a Re $z > 1$.

Teorema 3.1.2. *Si Re $z > 1$ llavors*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z\int_1^\infty \psi(t)t^{-z-1}dt. \tag{2}$$

Demostració. Recordem que quan tenim una funció $f(x)$ definida mitjançant un prodcute

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

aleshores la seva derivada s'expressa com

$$f'(x) = \sum_{i=1} f_i'(x)\prod_{i\neq j} f_j(x).$$

En aquesta demostració p i q són primers. Utilitzant la Fórmula del producte d'Euler, si Re $z > 1$, tenim

$$\begin{aligned}\zeta'(z) &= \sum_p \frac{-p^{-z}\ln p}{(1-p^{-z})^2}\prod_{q\neq p}\frac{1}{1-q^{-z}} = \sum_p \frac{-p^{-z}\ln p}{(1-p^{-z})^2}\prod_{q\neq p}\frac{1}{1-q^{-z}}\frac{1-p^{-z}}{1-p^{-z}} \\ &= \zeta(z)\sum_p \frac{-p^{-z}\ln p}{(1-p^{-z})^2}(1-p^{-z}) = \zeta(z)\sum_p \frac{-p^{-z}\ln p}{(1-p^{-z})}.\end{aligned}$$

Aleshores, utilitzant de nou la sèrie geomètrica $\frac{1}{1-p^{-z}} = \sum_{k=1}^\infty (p^{-z})^k$,

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{p^{-z}\ln p}{(1-p^{-z})} = \sum_p\sum_{n=1}^\infty p^{-nz}\ln p.$$

Com que els sumatoris anteriors son absolutaments convergents per Re $z > 1$, podem reordenar la suma i escriure

$$\sum_{(p,n),n\geq 1} (p^n)^{-z}\ln p = \sum_k k^{-z}\ln p$$

on $k = p^n$ per qualsevol n. Consegüentment, utilitzan les definicions de Λ i ψ

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{k=1}^\infty k^{-z}\Lambda(k) = \sum_{k=1}^\infty k^{-z}(\psi(k)-\psi(k-1)).$$

Usant de nou la Fórmula de sumació parcial d'Abel, amb $a_k = k^{-z}, b_{k+1} = \psi(k), r = 1, s = M$ i $b_1 = \psi(0) = 0$ obtenim

$$\sum_{k=1}^{M} k^{-z}(\psi(k) - \psi(k-1)) = (M+1)^{-z}\psi(M) + 1^{-z}\psi(0) + \sum_{k=1}^{M} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z})$$

$$= (M+1)^{-z}\psi(M) + \sum_{k=1}^{M} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z}).$$

De la definició $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ obtenim $\psi(x) \leq x \ln x$. Per tant si Re $z > 1$ aleshores $\psi(M)(M+1)^{-z} \to 0$ quan $M \to \infty$.

Per altra part podem escriure $\sum_{k=1}^{M} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z})$ de la següent manera

$$\sum_{k=1}^{M} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z}) = \sum_{k=1}^{M} \psi(k) z \int_{k}^{k+1} t^{-z-1} dt.$$

És clar, per definició, que $\psi(t)$ es constant en el interval $[k, k+1]$, llavors

$$\sum_{k=1}^{M} \psi(k) z \int_{k}^{k+1} t^{-z-1} dt = \sum_{k=1}^{M} z \int_{k}^{k+1} \psi(t) t^{-z-1} dt = z \int_{1}^{M} \psi(t) t^{-z-1} dt.$$

Per tant, fent el límit de $M \to \infty$, obtenim finalment

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_{1}^{\infty} \psi(t) t^{-z-1} dt.$$

$\square$

Capítol 4

Prova del teorema dels nombre primers

4.1 Formulació equivalent en termes de la funció de Van Mangoldt

Arribem al últim capítol del treball, i el més important de tots. Abans de començar la demostració del Teorema dels Nombres Primers nem a donar dos resultats necessaris per a la prova. El primer tracta sobre una equivalència entre el Teorema dels Nombres Primers i un límit semblant, però en termes de la funció ψ(tal com haviem dit anteriorment). Tot es deu en part a las aportacions del matemàtic rus Txebixov.

Teorema 4.1.1. *El límit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$$

val 1 *si i només si el límit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

també val 1.

Demostració. Recordem que

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p \leq \sum_{p\leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p$$

$$= \ln x \sum_{p\leq x} 1 = (\ln x)\pi(x).$$

Tenim doncs que

$$\psi(x) \leq (\ln x)\pi(x). \tag{3}$$

Però, si $1 < y < x$, aleshores

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y<p\le x} 1 \le \pi(y) + \sum_{y<p\le x} \frac{\ln p}{\ln y}$$
$$< y + \frac{1}{\ln y} \sum_{y<p\le x} \ln p \le y + \frac{1}{\ln y}\psi(y).$$

Si prenem $y = x/(\ln x)^2$ en la darrera desigualtat obtenim el següent

$$\pi(x) \le \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{1}{\ln x - 2\ln\ln x}\psi(x).$$

Multiplicant per $\ln x$ i dividint per x a les dues bandes, ens queda

$$\pi(x)\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln\ln x}\frac{\psi(x)}{x}.$$

Utilitzant (3) tenim

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \pi(x)\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln\ln x}\frac{\psi(x)}{x}. \tag{4}$$

Com que, per la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/x - (2/\ln x)x} = 1,$$

Veiem de (4) que si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

aleshores

$$1 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \le \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln\ln x}\frac{\psi(x)}{x}\right] = 1.$$

Recíprocament, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

aleshores

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \le 1 \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln\ln x}\frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

tal com voliem demostrar. □

A partir d'ara l'obejctiu serà demostrar que $\psi(x)/x \to 1$ quan $x \to \infty$. Per fer-ho comencem provant que $\psi(x)/x$, amb $x > 0$, és acotada.

Lema 4.1.2. *Existeix $C > 0$ tal que $\psi(x) \le Cx, x > 0$. Ho designarem com $\psi(x) = O(x)$.*

Demostració. Fixem $x > 0$ i sigui m l'enter tal que $2^m < x \leq 2^{m+1}$. Aleshores, com que ψ és creixent

$$\psi(x) \leq \psi(2^{m+1}) = \sum_{p\leq 2^m} \left[\frac{\ln 2^m}{\ln p}\right] \ln p + \sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}} \left[\frac{\ln 2^{m+1}}{\ln p}\right] \ln p.$$

Per qualsevol enter positiu n tenim

$$\sum_{n<p\leq 2n} \ln p = \ln \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

També tenim que per qualsevol p primer tal que $n < p \leq 2n$, aleshores p divideix $(2n)!/n! = ((2n)!n!)/(n!n!) = n!\binom{2n}{n}$. És clar veure que p divideix a $\binom{2n}{n}$, ja que p no divideix a $n!$. Així doncs utlitzant que

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

obtenim

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

i finalment aplicant ln arribem a

$$\ln \prod_{n<p\leq 2n} p = \sum_{n<p\leq 2n} \ln p < 2n \ln 2.$$

Llavors

$$\sum_{p\leq 2^m} \ln p = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{2^{k-1}<p\leq 2^k} \ln p \right) < \sum_{k=1}^{m} 2^k \ln 2 < 2^{m+1} \ln 2$$

i també

$$\sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}} \ln p < 2^{m+1} \ln 2.$$

Però si $p \leq x$ tal que $[\frac{\ln x}{\ln p}] > 1$, llavors $\frac{\ln x}{\ln p} \geq 2$ i també llavors $x \geq p^2$. De manera que $\sqrt{x} \geq p$. Aleshores, aquells termes de la suma $\sum_{p\leq x}[\frac{\ln x}{\ln p}] \ln p$ quan $[\frac{\ln x}{\ln p}] > 1$ només es sumen quan $p \leq \sqrt{x}$ i per tant podem escriure

$$\sum_{p\leq\sqrt{x}} [\frac{\ln x}{\ln p}] \ln p \leq \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(\sqrt{x}) \ln x.$$

Aleshores si $2^m < x \leq 2^{m+1}$,

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq 2^{m+1} \ln 2 + 2^{m+1} \ln 2 + \pi(\sqrt{x}) \ln x \\ &= 2^{m+2} \ln 2 + \pi(\sqrt{x}) \ln x \\ &< 4x \ln 2 + \pi(\sqrt{x}) \ln x\end{aligned}$$

$$\leq 4x \ln 2\sqrt{x} \ln x$$
$$= (4 \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x)x$$

Com que $\frac{1}{\sqrt{lnx}} \to 0$ quan $x \to \infty$, podem concloure que $\psi(x) = O(x)$, que demostra el lema.

□

4.2 Demostració del Teorema dels Nombres Primers

Fins aquí, en el plantajament del Teorema dels Nombres Primers hem seguit les línies tradicionals. En aquest capítol però volem donar la demostració alternativa (que hem dit en la introducció) que va fer al 1980 D.J Newman [New] modificada per J.Korevaar [Kor]. L'enfocament de Korevaar consisteix en aplicar les idees de Newman per obtenir propietats de les integrals de Laplace que porten al teorema dels nombres primers.

La idea és deduïr el teorema dels nombres primers a partir dels següents dos teoremes.

Teorema 4.2.1 (Teorema auxiliar Tauberià)**.** *Sigui F una funció acotada i contínua a trossos a $[0, +\infty]$, aleshores la seva transformada de Laplace*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt$$

existeix i és analítica en Re $z > 0$. A més, si G té una extensió analítica en un entorn de Re $z = 0$,aleshores $\int_0^\infty F(t)dt$ existeix com a integral impròpia i es igual a $G(0)$.

Demostració. Utilitzant l'Aplicació definida en la introducció tenim que $G(z)$ és convergent i defineix una funció analítica al semiplà Π_0.

Com que F està acotada, podem suposar que $|F(t)| \leq 1, t \geq 0$, ja que si $|F(t)| \leq M$ aleshores podem definir $H(t) = F(t)/M$ i anomenar $H(t) = F(t)$. Per $0 < \lambda < \infty$, definim

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t)e^{-zt}dt.$$

Per el teorema de Fubini i pel teorema de Morera tenim

$$\int_{\partial\Delta} G_\lambda(z)dz = \int_0^\infty F(t)(\int_{\partial\Delta} e^{-zt}dz)dt = 0$$

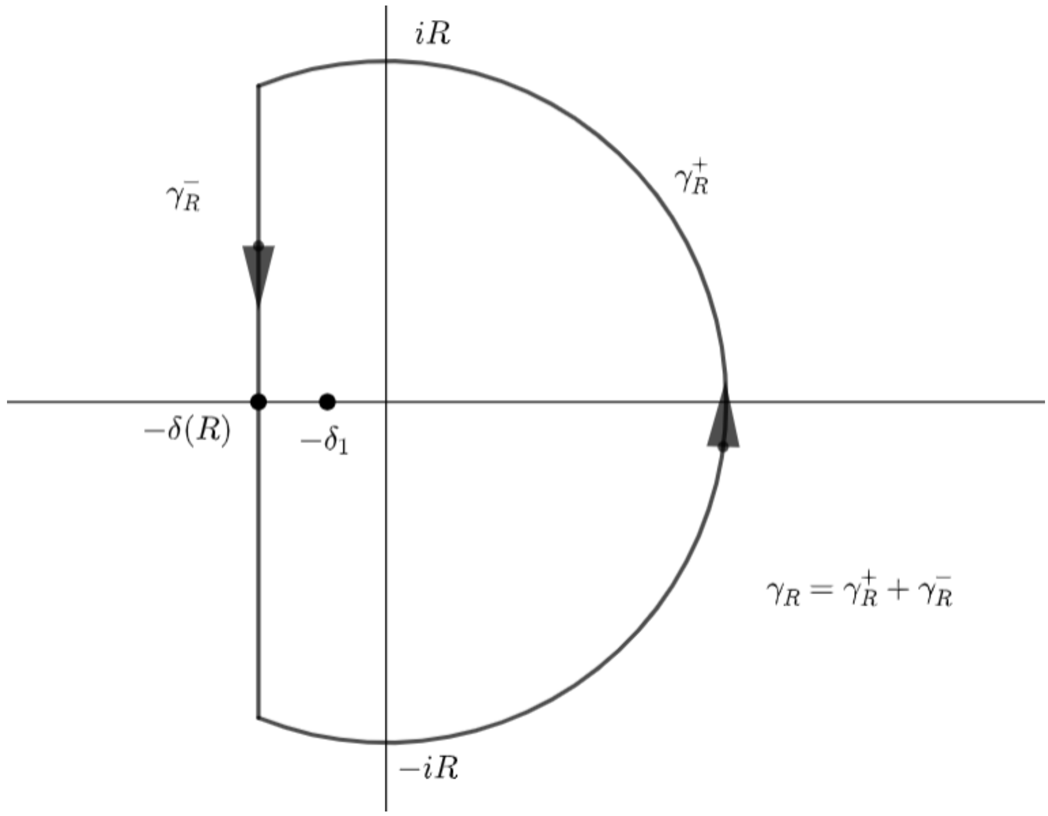
per tant G_λ existeix i és holomorfa en tot $\mathbb{C}$, és a dir, és una funció entera.

Expressem la conclusió del teorema com

$$\lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0) = G(0).$$

Això és el mateix que la integral impròpia $\int_0^\infty F(t)dt$ existeixi i convergeixi cap a $G(0)$. Començarem per utilitzar la fórmula integral de Cauchy per donar una primera estimació de $|G_\lambda(0) - G(0)|$.

Per cada $R > 0$, sigui $\delta(R) > 0$ tan petita tal que G sigui analítica dins i en el camí tancat γ_R. Sigui γ_R^+ la part de γ_R que es troba a Re $z > 0$, i γ_R^- la part que es troba a Re $z < 0$. Ho mostrem en el següent dibuix.



Llavors, utlitzant la fórmula integral de Cauchy,

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{G(z)}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{G_\lambda(z)}{z}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} (G(z) - G_\lambda(z))\frac{1}{z}dz.$$

Considerem ara les conseqüències d'estimar $|G(0) - G_\lambda(0)|$ aplicant directament el Teorema 2.2.5 a la integral de la dreta de la igualtat. Comencem per estimar l'integral per a $z \in \gamma_R^+$. Diem $x = \mathrm{Re}\, z$. Tenim doncs el següent:

$$\left|\frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\int_0^\infty F(t)e^{-zt}dt - \int_0^\lambda F(t)e^{-zt}dt\right|$$
$$= \left|\frac{1}{z}\int_\lambda^\infty F(t)e^{-zt}dt\right|$$

utilitzant que $|z| = R$, $R > 0$ i $x = \operatorname{Re} z$ obtenim

$$\left|\frac{1}{z}\int_\lambda^\infty F(t)e^{-zt}dt\right| = \frac{1}{R}\left|\int_\lambda^\infty F(t)e^{-zt}dt\right| \leq \frac{1}{R}\int_\lambda^\infty |F(t)|e^{-xt}dt,$$

i com que $|F(t)| \leq 1$ acabem tenint

$$\left|\frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{R}\int_\lambda^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{R}\frac{e^{-\lambda x}}{x} \tag{1}$$

$$\leq \frac{1}{R}\frac{1}{x} = \frac{1}{R}\frac{1}{\operatorname{Re} z}.$$

Ens donem compte que $1/\operatorname{Re} z$ no està acotat a γ_R^+ i per tant necessitem fer les estimacions amb mes cura si volem provar que $G(0) - G_\lambda(0) \to 0$ si $\lambda \to \infty$.

Aquí es quan arriba l'enginy de Newman, que ens proporciona una petita modificació de la representació integral anterior per $G(0) - G_\lambda(0)$. I això farà que tinguem la apropiada estimació. La idea de Newman és canviar el factor $1/z$ per $(1/z) + (z/R^2)$ en la integral de Cauchy que representa $G(0)$ i $G_(0)$. És clar veure que $(G(0) - G_\lambda(0))z/R^2$ és analítica. A més també modifiquem $G(z)$ i $G_\lambda(z)$ multiplicant-les per $e^{\lambda z}$. Com que $e^{\lambda z}$ és entera i val 1 quan $z = 0$, per Cauchy a la funció $G(z)e^{\lambda z}$, tenim

$$G(0)e^0 = G(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{G(z)e^{\lambda z}}{z}dz,$$

i també, com que $G(z)e^{\lambda z}(z/R^2)$ és analítica

$$0 = \int_{\gamma_R} G(z)e^{\lambda z}\frac{z}{R^2}dz = 0.$$

Aleshores

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} G(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} G_\lambda(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}(G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz.$$

Utilitzant que $z\bar{z} = |z|^2$ i $|z| = R$, ja que $z \in \gamma_R^+$, obtenim

$$(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) = (\frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{R^2}) = \frac{(2\operatorname{Re} z)}{R^2}.$$

Utilitzant (1),

$$|(G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})| \leq \frac{e^{-\lambda\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}e^{\lambda\operatorname{Re} z}\frac{2\operatorname{Re} z}{R^2} = \frac{2}{R^2}.$$

Conseqüentment utilitzant de nou, el Teorema 2.2.5 ,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^+}(G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R}.$$

Tinguem en compte que aquesta estimació que fem de la integral a través de la corba γ_R^+ és independent de λ.

Considerem ara l'altra part de la corba γ_R, és a dir, $z \in \gamma_R^-$. Primer de tot usem la desigualtat triangular per acotar separadament les integrals de G i G_λ:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) dz \right| \\ \leq &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G(z) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) dz \right| \\ &= |I_1(R)| + |I_2(R)|. \end{aligned}$$

Acotem primer $I_2(R)$. Com que G és una funció entera, podem canviar el camí de integració γ_R^- per la corba semicircular desde iR fina a $-iR$ en semiplà esquerra. Sigui $x = \operatorname{Re} z$, tenim

$$\begin{aligned} \left| G_\lambda(z) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) \right| &= \left| (\int_0^\lambda F(t) e^{-zt} dt)(e^{\lambda z} \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2}) \right| \\ &\leq (\int_0^\infty |F(t)| e^{-|x|t} dt) |e^{\lambda z}| \left| \frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2} \right|. \end{aligned}$$

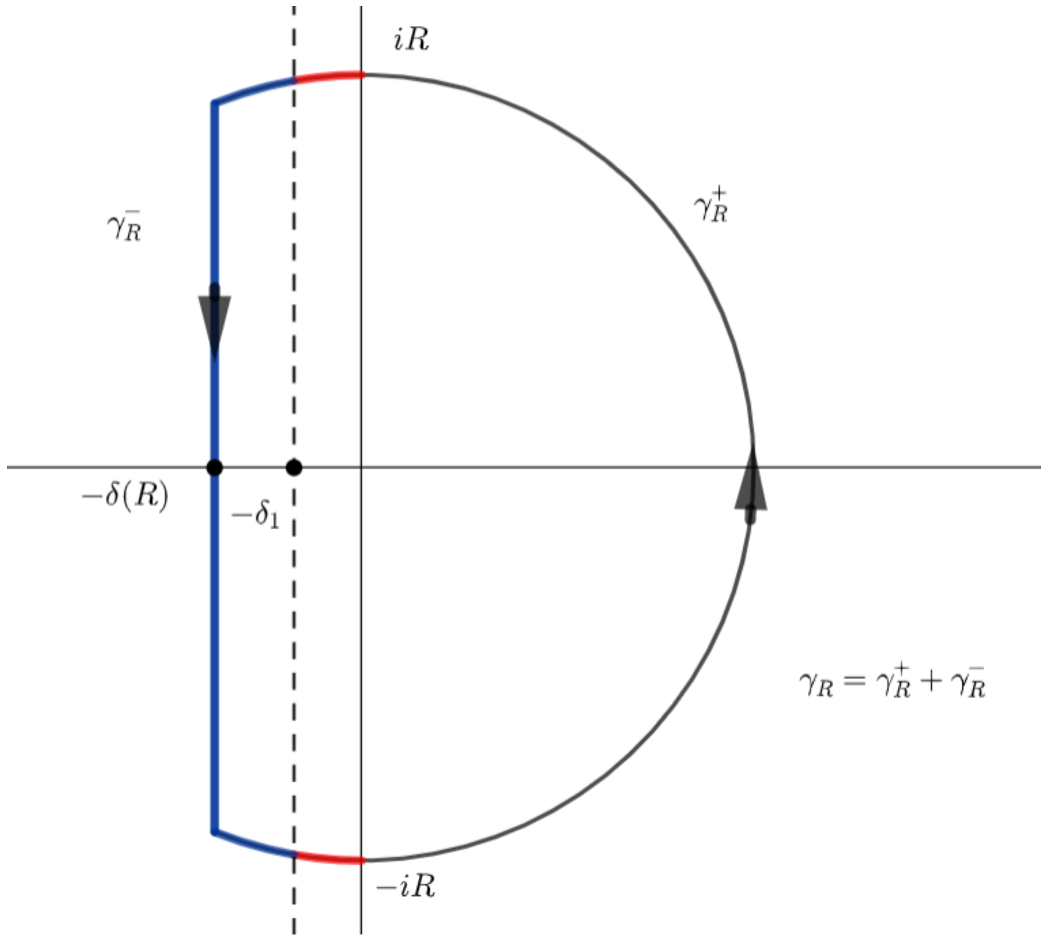
Hem pogut canviar el límit de la integral λ per ∞ ja que $|F(t)|e^{-|x|t} > 0$. Finalment utilitzant que $|F(t)| < 1$, $e^{\lambda x} \leq 1$ tenim

$$\begin{aligned} (\int_0^\infty |F(t)| e^{-|x|t} dt) |e^{\lambda z}| |\frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2})| &\leq \int_0^\infty e^{-|x|t} dt |\frac{2 \operatorname{Re} z}{R^2}| \\ &= \frac{1}{|\operatorname{Re} z|} \frac{2|\operatorname{Re} z|}{R^2} = \frac{2}{R^2}. \end{aligned}$$

Utilitzant el Teorema 2.2.5 obtenim

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} |G_\lambda(z) e^{\lambda z} (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})| |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R^-} \frac{2}{R^2} |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \pi R = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Finalment, considerem $|I_1(R)|$. Aquesta part serà la més complicada ja que en γ_R^- la funció G és tan sols una extensió analítica de la G definida en Re $z \geq 0$. Per poder tractar aquest cas, primerament utilitzarem el teorema de Weierstrass, per poder agafar una constant $M(R) > 0$ tal que $|G(z)| \leq M(R)$ per cada $z \in \gamma_R^-$. Escollim ara un δ_1 tal que $0 < \delta_1 < \delta(R)$ i separem la integral definida en $|I_1(R)|$ en dues parts, que corresponen a Re $z < -\delta_1$ i Re $z \geq -\delta_1$ tal com es mostra en el dibuix següent.



Anomenem $\gamma_{R_1}^-$ a la part de color blau i $\in \gamma_{R_2}^-$ a la part de color vermell. Acotem primer $\gamma_{R_1}^-$, utlitzant que $e^{\lambda z} \leq e^{-\lambda \delta_1}$ i que $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{\delta(R)}$ tenim

$$\left| G(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}) \right| \leq M(R)e^{-\lambda \delta_1}(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R}).$$

Fent servir el Teorema 2.2.5 de nou, obtenim

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}^-} G(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} M(R)e^{-\lambda \delta_1}(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})\pi R$$
$$= \frac{1}{2} RM(R)(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})e^{-\lambda \delta_1}.$$

Observem que per R i δ_1 fixades, el límit d'aquest darrer terme quan $\lambda \to \infty$ és 0.

Anem ara a acotar la segona part de la corba (color vermell). Aquest tros correspon al tros de circumferència $|z| = R$ amb angles θ tals que

$$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\delta_1}{R}) \cup (\frac{3\pi}{2} - \arcsin\frac{\delta_1}{R}, \frac{3\pi}{2}).$$

Aleshores utilitzant que $e^{\lambda z} \leq 1$ tenim

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_2}^-} G(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}M(R)(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})2R\arcsin\frac{\delta_1}{R}$$
$$= \frac{1}{\pi}M(R)(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})R\arcsin\frac{\delta_1}{R},$$

per tant, per R i $\delta(R)$ fixades, podem fer que l'expressió anterior sigui tan petita com volguem, agafant δ_1 lo suficientment aprop de 0.

Per fi ja estem en disposició de concloure aquest Teorema. Sigui $\epsilon > 0$, agafem $R = 4/\epsilon$ i fixem $\delta(R)$ tal que $0 < \delta(R) < R$, ja que G és analtítica dintre i a sobre de γ_R. Aleshores per tot λ

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz\right| \leq \frac{1}{R} = \frac{\epsilon}{4}$$

i també

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z)e^{\lambda z}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})dz\right| \leq \frac{1}{R} = \frac{\epsilon}{4}.$$

Ara agafem δ_1 tal que $0 < \delta_1 < \delta(R)$ i que compleixi

$$\frac{1}{\pi}M(R)(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})R\arcsin\frac{\delta_1}{R} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Com que

$$\frac{1}{2}RM(R)(\frac{1}{\delta(R)} + \frac{1}{R})e^{-\lambda\delta_1} < \frac{\epsilon}{4},$$

per λ suficientment gran, posem $\lambda \geq \lambda_0$, finalment resulta

$$|G(0) - G_\lambda(0)| < \epsilon, \;\; \lambda \geq \lambda_0,$$

Tal i com voliem demostrar.

□

Aquest Teorema tauberià que acabem de demostrar ens permetrà veure que la *transformada de Mellin* de $\psi(x)$, que definirem en el pròxim teorema, té unes propietats que impliquen en particular, que

$$\lim_{\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Teorema 4.2.2. *Sigui $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ una funció contínua a trossos i creixent tal que $f(x) = O(x)$. Llavors la seva transfotrmada de Mellin*

$$g(z) = z \int_1^\infty f(x) x^{-z-1} dx$$

existeix en Re $z > 1$ i defineix una funció analítica en aquest mateix semiplà. Suposem que per alguna constant c, la funció

$$g(z) - \frac{c}{z-1}$$

te una extensió analítica en un entorn de Re $z = 1$. Aleshores

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Com que $\psi(x)$ és una funció no negativa, contínua a trossos i creixent en $[1, \infty)$ i a més pel Lema 4.1.2 éstà acotada ($\psi(x) = O(x)$), veiem que podem considerar la $f(x)$ de l'enunciat per $\psi(x)$.

Recordem tambe que pel Teorema 3.1.2, $g(z) = -\zeta'(z)/\zeta(z)$ i $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$ té una extensió analítica en un entorn de Re $z = 1$ pel Teorema 3.0.3, per tant

$$g(z) - \frac{1}{z-1}$$

també té una extensió analítica en un entorn de Re $z = 1$. Conseqüentment tal com hem dit abans, pel Teorema 4.2.2

$$\lim_{\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

que pel Teorema 4.1.1 és equivalent al Teorema dels Nombres Primers.

Anem a demostrar el Teorema 4.2.2.

Demostració. Siguin $f(x)$ i $g(x)$ definides en el enunciat. Definim F en $[0, +\infty]$ com

$$F(t) = e^{-t} f(e^t) - c.$$

Aleshores F està acotada i es contínua a trossos. Per tant, compleix la primera part de les hipòtesis del Teorema 4.2.1, per tant podem considerem la seva transformada de Laplace,

$$G(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt = \int_0^\infty (e^{-t} f(e^t) - c) e^{-zt} dt.$$

Fent el canvi de variables $x = e^t, dt = \frac{dx}{x}$ obtenim

$$G(z) = \int_1^\infty (\frac{1}{x} f(x) - c) x^{-z} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_1^\infty f(x)x^{-z-2}dx - c\int_1^\infty x^{-z-1}dx$$
$$= \int_1^\infty f(x)x^{-(z+1)-1}dx - \frac{c}{z}$$
$$= \frac{g(z+1)}{z+1} - \frac{c}{z}\frac{(z+1)}{(z+1)}$$
$$= \frac{1}{z+1}[g(z+1) - \frac{c}{z} - c].$$

Com que $g(x)$ compleix les hipotesis del Teorema 4.2.2, $g(z+1)-(c/z)$ té una extensió analítica en un entorn de Re $z=0$ i consegüentment la funció G també té una extensió analítica en un entorn de Re $z=0$. Aleshores totes les hipotesis del Teorema 4.2.1 es compleixen i per tant, la integral impropia $\int_0^\infty F(t)dt$ existeix i convergeix a $G(0)$. Tenim doncs que $\int_0^\infty (e^{-t}f(e^t)-c)dt$ existeix i equivalentment, fent el canvi de variables que hem fet abans,

$$\int_1^\infty (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x}$$

existeix. Recordem que f és una funció no decreixent i per tant podem deduïr que $f(x)/x \to c$ quan $x \to \infty$. Anem a provar-ho per contradicció. Sigui $\epsilon > 0$, i suposem que per alguna $x_0 > 0$, $[f(x_0)/x_0] - c \geq 2\epsilon$. Aleshores per $x_0 \leq x \leq (\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon})x_0$ obtenim

$$x(c+\epsilon) \leq x_0(c+2\epsilon) \leq f(x_0) \leq f(x).$$

Com que $\frac{f(x)}{x} - c \geq \epsilon$

$$\int_{x_0}^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}x_0} (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x} \geq \int_{x_0}^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}x_0} \frac{\epsilon}{x}dx = \epsilon \ln(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}).$$

Però la integral de 1 a ∞ és convergent, llavors

$$\int_{x_1}^{x_2} (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x} \to 0 \ \text{ si } x_1, x_2 \to \infty.$$

I per tant, per un x_0 suficientment gran,

$$\int_{x_0}^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}x_0} (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x} < \epsilon \ln(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}).$$

Tanmateix, partint del supòsit que $[f(x_0)/x_0] - c \geq 2\epsilon$ hem deduït la desigualtat contrària, és a dir, per x_0 prou gran s'ha de complir $[f(x_0)/x_0] - c < 2\epsilon$.

Anàlogament, suposem ara que $[f(x_0)/x_0] - c \leq -2\epsilon$, aleshores per $(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon})x_0 \leq x \leq x_0$.

$$x(c-\epsilon) \geq x_0(c-2\epsilon) \geq f(x_0) \geq f(x)$$

Per tant,

$$\int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}x_0}^{x_0} (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x} \leq \int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}x_0}^{x_0} \frac{-\epsilon}{x}dx = -\epsilon \ln(\frac{c-\epsilon}{c-2\epsilon}).$$

Però per un x_0 suficientment gran

$$\int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}x_0}^{x_0} (\frac{f(x)}{x} - c)\frac{dx}{x} > -\epsilon \ln(\frac{c-\epsilon}{c-2\epsilon}).$$

Arribem doncs a la conclusió que $[f(x_0)/x_0] - c > -2\epsilon$. Tot plegat, per x_0 prou gran, $-2\epsilon < [f(x_0)/x_0] - c < 2\epsilon$, i per tant, $f(x)/x \to c$ quan $x \to \infty$. Això acaba la demostració del teorema i del Teorema dels Nombres Primers.

□

Capítol 5

Conclusions

Aquesta memòria constitueix una demostració analítica del Teorema dels Nombres Primers. Primer de tot podem concloure que s'han assolit els dos objectius plantejats inicialment al treball: Pel que fa al primer objectiu, s'han analitzat algunes de les eines per poder demostrar el Teorema dels Nombres Primers, com per exemple algunes de les propietats analítiques de la funció zeta de Riemann.

Pel que fa al segon objectiu, les demostracions dels resultats necessaris per la demostració del teorema s'han intentat descriure de forma clara i ordenada per tal que estiguin a l'abast del màxim nombre de lectors possible, introduint i explicant cada concepte nou que hem fet servir. I finalment s'ha demostrat el Teorema dels Nombres Primers de la manera més senzilla possible.

Bibliografia

[A-N] Ash, Robert B. ; Novinger, W.P.: Complex Variables (Second Edition) Dover Books on Mathematics (2007)

[BCA] Jerrold, E. Marsden ; Michael J. Hoffman,: Basic Complex Analysis (Third Edition). BEDFORD ST MARTINS PR 3PL; 003 edición (1 diciembre 1998

[Cla] Clarkson, James A.: On the series of prime reciporcals. Proc. Amer. Math. (1966).

[Zeta] Función zeta de Riemann. (22 enero 2022). En wikipedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci

[Had] Hadamard, J.(1896): Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences aritmétiques. Bull. Soc. Math. France. 199–220.

[Kor] Korevaar, J.: On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem, *Intelligencer 4* (1982), 108–115.

[New] Newman, D.J.: Simple analytic proof of the prime number theorem, *American Math. Monthly*, 87 (1980), 693–696.

[Rie] Riemann, B.(1859): Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse. Monatsber. Akad. Berlin, 671–680.

[ANT] Tom M. Apostol.: Introduction to Analytic Number Theory. Springer; Softcover reprint of hardcover 1st ed. 1976 edición (4 diciembre 2010)

[Txe] Chebyshev, P.L.: Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inferieures à une limite donée. (a)(1851) Mem. Ac. Sc. St. Pétersbourg.6: 141–157.

[Val] Vallée Poussin. Ch. de la (1896): Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Ann. Soc. Sci. Bruxelles: 183–256, 281–297.