



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRADO EN MATEMÀTICAS
Trabajo final de grado

**DINÀMICA DE LA FAMILIA
EXPONENCIAL COMPLEJA**

Autor: Rubén Musoles Roca

Director: Dr. Xavier Jarque i Ribera

Realizado en: Dept. de Matemàtiques i Informàtica, UB

Barcelona, 24 de enero de 2022

*Las matemáticas puras son, en su
forma, la poesía de las ideas lógicas.*

A. Einstein

Dedicatoria y agradecimientos

Al meu pare, qui em va brindar els primers coneixements matemàtics

Al yayo, quien habría estado enormemente orgulloso de mi esfuerzo

A la Mercè J., qui em va enamorar de les matemàtiques

A en Xavier Jarque, tutor d'aquest treball, per les hores invertides en mi

A Gamboa, mi máximo referente en lo que a la matemática se refiere

A mi compañero Aitor, el matemático con la mente más brillante que he conocido

Però sobretot,

A la meva mare, perquè la millor càtedra és la de viure, i tu ets qui m'ha ensenyat el més important: tot allò que no s'ensenyava a cap universitat. A tu no et dedico el treball, a tu t'estic agraint la vida.

Resum

Aquest treball pretén estudiar la dinàmica de la família exponencial complexa $E_\lambda(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. En primera instància explicarem els conceptes bàsics d'anàlisi complexa i dinàmica holomorfa, especialment en funcions enteres trascendents. Posteriorment posarem de manifest el comportament de la funció e^z i estudiarem els punts fixos de E_λ per a $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalment, definirem de manera general els conjunts de Julia i de Fatou i demostrarem dos resultats de M. Misiurewicz (1980) i R. Devaney (1994) respectivament. El primer resultat prova que $\mathcal{J}(E_1) = \mathbb{C}$ i, per tant, $\mathcal{F}(E_1) = \emptyset$. El segon resultat prova que $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ tal que $\mathcal{F}(E_{\lambda_n}) \neq \emptyset$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Resumen

Este trabajo pretende estudiar la dinámica de la familia exponencial compleja $E_\lambda(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. En primera instancia explicaremos los conceptos básicos de análisis complejo y dinámica holomorfa, especialmente en funciones enteras trascendentes. Posteriormente, pondremos de manifiesto el comportamiento de la función e^z y estudiaremos los puntos fijos de E_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalmente, definiremos de manera general los conjuntos de Julia y de Fatou y demostraremos dos resultados de M. Misiurewicz (1980) y R. Devaney (1994) respectivamente. El primer resultado prueba que $\mathcal{J}(E_1) = \mathbb{C}$ y, por tanto, $\mathcal{F}(E_1) = \emptyset$. El segundo resultado prueba que $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ tal que $\mathcal{F}(E_{\lambda_n}) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Abstract

The aim of this project is to study the dynamics of the complex exponential family $E_\lambda(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. In the first instance, we are going to explain the background of complex analysis and holomorphic dynamics, specially in transcendental entire functions. Then, we will expose the behaviour of the function e^z and we are going to study the fixed points of E_λ for $\lambda \in \mathbb{R}$. Finally, we are going to define, in general terms, the Julia and Fatou sets respectively and prove two results of M. Misiurewicz (1980) and R. Devaney (1994) respectively. The first result shows that $\mathcal{J}(E_1) = \mathbb{C}$ and, for this reason, $\mathcal{F}(E_1) = \emptyset$. The second result shows that $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ such that $\mathcal{F}(E_{\lambda_n}) \neq \emptyset$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	6
2.1. Análisis complejo	6
2.2. Sistemas dinámicos	11
3. Función exponencial compleja	14
4. Sobre los puntos fijos de E_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$	20
5. Conjuntos de Julia i de Fatou	25
6. Sobre los iterados de e^z	28
7. Dinámica de E_λ en un entorno concreto de $\lambda = 1$	35
8. Conclusiones	40
A. Plano de parámetros y plano dinámico	41
Referencias	47

Capítulo 1

Introducción

Primero de todo, debemos situar cuál es la rama del árbol de las matemáticas donde trabajaremos. Dentro de la matemática aplicada (que no la aplicación de las matemáticas), se estudian los sistemas dinámicos. Estos son sistemas que evolucionan en el tiempo de manera *discreta* (normalmente \mathbb{N} o \mathbb{Z}) o *continua* (normalmente \mathbb{R} o \mathbb{C}). Nuestro caso está dentro de lo discreto, concretamente en la comúnmente llamada *dinámica holomorfa*.

La dinámica holomorfa tiene una base muy sencilla de explicar. Tomamos un número complejo z_0 y una función holomorfa. Entonces generamos la sucesión

$$\{f^n(z_0)\}_{n \geq 0} = \{z_0, f(z_0), (f \circ f)(z_0), \dots, \overbrace{(f \circ \dots \circ f)}^n(z_0), \dots\}.$$

De esta sucesión surgen preguntas naturales como: ¿Existen sucesiones periódicas? ¿Cada cuantos iterados ocurre? ¿Qué diferencias hay tomando puntos diferentes? ¿Hay patrones comunes para puntos próximos? ¿Y para funciones del mismo *tipo*?

El estudio de la dinámica holomorfa es relativamente reciente si lo comparamos con otras ramas de la matemática como la geometría clásica, el cálculo infinitesimal o el álgebra. No obstante, cada vez son más los matemáticos que investigan acerca de los sistemas dinámicos (sean de dinámica holomorfa o no) por su aplicación en múltiples disciplinas como la física, la biología o la economía.

El origen del estudio de la iteración de funciones holomorfas lo encontramos en el método de Newton. Aunque en un inicio fue diseñado para funciones de variable real, no fue hasta los alrededores de los años 1870 y 1879 que los matemáticos Ernst Schröder (1841-1902) y Arthur Cayley (1821-1895) lo estudiaron para funciones holomorfas. Se dieron cuenta que el método de Newton podía tener una interpretación dinámica sobre la iteración de funciones. Dada una función f holomorfa, definimos la función $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$. Entonces,

$$z_0 \text{ es raíz de } f \iff z_0 \text{ es un punto fijo (atractor) de } N(z).$$

También se interesaron por ver, en el caso polinomial (donde había más de una raíz), cuales eran las cuencas de atracción de cada punto fijo o raíz. Anecdóticamente sólo pudieron resolver el caso $n = 2$ ya que el caso $n = 3$ resultó ser demasiado complicado para las herramientas matemáticas de la época. En las propias palabras de Cayley encontramos la siguiente cita:

...La división [del plano en cuencas diferentes] se hace sin dificultad en el caso cuadrático; pero en el caso siguiente, el de una ecuación cúbica, no es en absoluto obvio cuál es la división; y el autor no ha conseguido encontrarla...

Actualmente, sabemos que para el caso cúbico (y de cualquier polinomio de grado mayor o igual a 3) las cuencas de atracción constituyen formas geométricas fractales totalmente inimaginables en ese entonces. Otros matemáticos de renombre como Henri Poincaré (1854-1912), Léopold Leau (1868-1943) o Carl Ludwig Siegel (1896-1981) dieron primeros resultados sobre la temática, pero todos a nivel local, es decir, en entornos de puntos fijos.

No fue hasta la década de 1920 donde Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia (1893-1978) estudiaron la iteración de funciones holomorfas en la esfera de Riemann, es decir, las funciones racionales. Fatou, en 1906, demostró la existencia del, a día de hoy, conocido como conjunto de Julia. En 1915 la Academia de la Ciencia Francesa ofrecía el *Grand Prix des Sciences mathématiques de 1918* (un premio otorgado entre finales del siglo XVIII y principios del siglo XX a grandes matemáticos como Fourier (1768-1830) o Cauchy (1789-1857)) al mejor estudio sobre iteración de carácter global. El ganador fue Julia. Fatou no llegó a concursar debido a que los resultados que habían demostrado en diciembre de 1917 ya habían sido demostrados por Julia anteriormente. Se dice que Julia llegó a acusar a Fatou por robar sus resultados, aunque no hay evidencias de ello.

Sus trabajos emprendieron el inicio de caminos como la geometría fractal, la autosimilitud, y el uso de *familias normales* para la división del plano complejo en dos conjuntos complementarios: el conjunto *estable* o de Fatou y el conjunto *caótico* o de Julia. No obstante, dejaron multitud de problemas abiertos, algunos sin resolver a día de hoy.

Fatou, en 1926, extendió algunos de los resultados de funciones racionales para funciones enteras trascendentes en [2]. Demostró que el conjunto de Julia era cerrado y el conjunto de Fatou era abierto y que ambos eran totalmente invariantes. No obstante, murió dejando muchas preguntas abiertas como si los puntos periódicos repulsivos eran densos en Julia, posteriormente demostrado en 1968 por Henry Frederick Baker (1866-1956). Por otra parte, Julia no contribuyó en la investigación de las mismas. (Para información más amplia sobre la historia de los resultados de dinámica holomorfa para funciones enteras trascendentes dirigimos al lector a [13]).

Cabe destacar que el nacimiento y avance de los ordenadores permitieron la visualización representaciones del conjunto de Julia y otros objetos fractales antes nunca vistos de manera tan precisa. A continuación presentamos dos ilustraciones de diferentes épocas del conjunto de Mandelbrot. Dicho conjunto es, de modo simplificado, el resultado de *pintar* de color (en este caso) negro los valores de $c \in \mathbb{C}$ tales que la órbita de 0 por la función $f(z) = z^2 + c$ tiende a infinito. Numéricamente, el algoritmo asigna el color negro a un valor de c si la órbita de 0, eventualmente, sale de una circunferencia de radio R suficientemente grande.

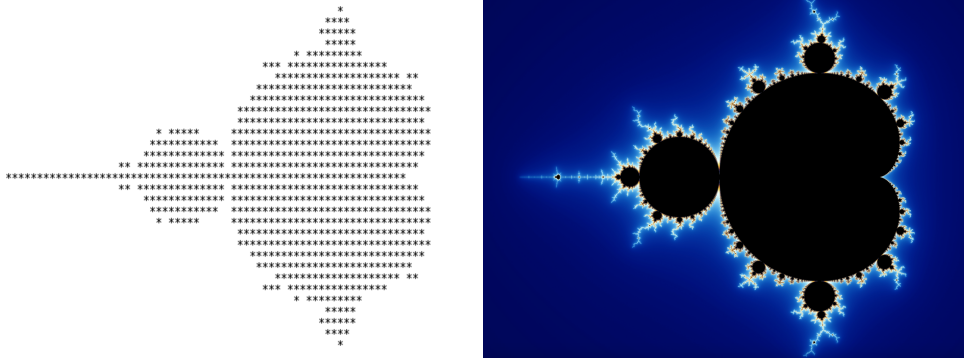


Figura 1.1: A la izquierda, la primera representación por ordenador del conjunto de Mandelbrot. A la derecha, una imagen moderna del mismo.

Este texto pretende estudiar, como bien el título del mismo indica, la dinámica de la familia exponencial compleja.

Definición 1.1. *Definimos la **función exponencial compleja** como*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

A la familia de funciones $E_\lambda(z) := \lambda e^z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ la llamamos **familia exponencial compleja**.

Abordar la dinámica de E_λ de manera general es algo absolutamente inalcanzable. Basta ver la cantidad de artículos científicos (algunos muy recientes) que se pueden encontrar en la literatura sobre el tema, por lo que en este trabajo nos centramos en la dinámica para el caso $\lambda = 1$ y algunos otros valores del parámetro en un entorno de $\lambda = 1$.

En el *capítulo 2* se darán de manera rigurosa y formal los conceptos de análisis complejo y sistemas dinámicos discretos necesarios para la comprensión posterior de los resultados. Constantemente se hace referencia a la familia exponencial compleja concluyendo, entre muchas otras cosas, que E_λ (apartando el caso $\lambda = 0$) es una familia de funciones enteras o analíticas trascendentes, es decir, holomorfas en todo \mathbb{C} , con una singularidad esencial en infinito, con únicamente 2 valores singulares (0 e ∞), ambos asintóticos y por consiguiente de tipo finito. En este capítulo también brindamos algunas nociones topológicas necesarias para la comprensión de los capítulos 6 y 7.

En el *capítulo 3* se estudia en profundidad las propiedades principales de la función exponencial compleja, su comportamiento sobre conjuntos, y sus principales implicaciones, haciendo énfasis en las implicaciones trigonométricas, ya que es bien sabido que la trigonometría y todas sus propiedades se desprenden de manera sencilla de la función exponencial compleja. Dejamos a continuación una cita de Jacques Hadamard acerca de la relación entre lo real y lo complejo.

«El camino más corto entre dos verdades del campo real pasa a través del campo complejo».

Jacques Hadamard.

En este capítulo también se estudia como se comporta la función exponencial compleja sobre conjuntos. De hecho, esta parte es imprescindible para entender los dos últimos capítulos del texto donde se demuestran los dos resultados de más peso del trabajo.

En el *capítulo 4* se indaga sobre los puntos fijos de la familia exponencial compleja. Aplicando técnicas analíticas básicas de los primeros cursos de cálculo se llega a saber cuáles son los puntos fijos reales de E_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, se demuestra la inexistencia de puntos fijos complejos atractores y neutrales en el caso $\lambda = 1$ y la existencia de infinitos puntos fijos en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ para todo $\lambda \neq 0$.

$\lambda \in \mathbb{R}$	$\#\{\text{Puntos fijos en } \mathbb{R}\}$	$\#\{\text{Puntos fijos en } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$
$(-\infty, -e)$	1 (repulsor) en $(-\infty, -1)$	∞
$-e$	1 (neutral) en $x = -1$	∞
$(-e, 0)$	1 (atractor) en $(-1, 0)$	∞
0	1 (superatractor) en 0	0
$(0, 1/e)$	1 (atractor) en $(0, 1)$ y 1 (repulsor) en $(1, +\infty)$	∞
$1/e$	1 (neutral)	∞
$(1/e, +\infty)$	0	∞
1	0	∞ (repulsores)

Cuadro 1.1: Resumen de resultados sobre puntos fijos de E_λ .

En el *capítulo 5* se definen de forma general y rigurosa los conjuntos de Julia y de Fatou a partir de las familias normales. Se enuncian también algunas propiedades para funciones enteras trascendentes y, en específico, para la familia exponencial compleja. Es importante poner énfasis a la siguiente propiedad:

Propiedad 1.2. *Sea f una función entera trascendente. Los puntos periódicos atractores y sus cuencas de atracción pertenecen al conjunto de Fatou.*

Esta propiedad nos permite afirmar, gracias al capítulo 4, muchos valores de λ para los cuales el conjunto de Fatou es no vacío. Además, es necesaria para la demostración de uno de los teoremas más importantes del trabajo.

El *capítulo 6* es uno de los dos capítulos con más importancia debido a su complejidad matemática en las demostraciones. Fatou, en 1926, conjeturó el siguiente resultado en [2]:

Teorema 1.3.

$$\mathcal{J}(E_1) = \mathbb{C}$$

Diversos matemáticos como Hans Töpfer y Baker publicaron resultados sobre el tema en cuestión sin llegar a demostrarlo completamente en 1940 y 1970 respectivamente (ver [4] y [3]). No fue hasta 1980 cuando Michal Misiurewicz (nacido en 1948) demostró la conjetura descrita por Fatou de manera totalmente diferente y sin usar ninguno de los intentos fallidos de Töpfer y Baker.

Finalmente, en el *capítulo 7* se muestra el siguiente resultado de Robert Luke Devaney (nacido en 1948):

Teorema 1.4. *Existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a 1 tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{J}(E_{\lambda_n}) \neq \mathbb{C}$$

Este teorema pone de manifiesto la disparidad de resultados diferentes para valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ muy cercanos. En el capítulo anterior se demuestra que si $\lambda = 1$ entonces el conjunto de Julia es todo \mathbb{C} , mientras que en este capítulo se prueba que hay valores infinitamente cercanos a $\lambda = 1$ tal que su conjunto de Julia no es todo \mathbb{C} .

También se ha incluido como apéndice un apartado en el que se explica, brevemente, lo que es el espacio de parámetros y el espacio dinámico. Se muestran algunos ejemplos donde se *pintan* en diferentes colores órbitas periódicas de diferentes periodos y, en el caso $\lambda = 1$, las distintas velocidades en las que los puntos escapan a infinito en parte real.

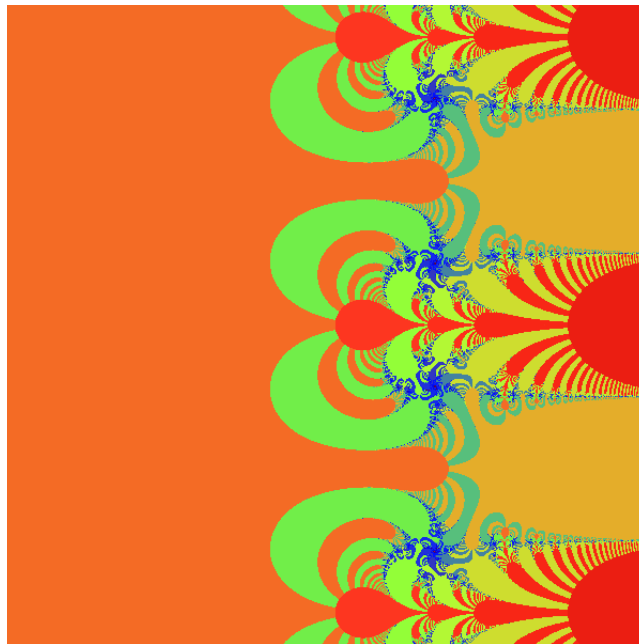


Figura 1.2: Plano dinámico de la función E_1 , donde el conjunto de Julia es todo \mathbb{C} .

Por último, queremos poner de manifiesto que en este texto abordarán los sistemas dinámicos desde un punto de vista meramente matemático, otorgándole así un valor propio dentro de la matemática y no en su aplicación. Más aún, nos centraremos en la vertiente analítica, dejando (prácticamente) de lado la estrecha relación con otros entes como la fractalidad o el *caos*.

Capítulo 2

Preliminares

Para la realización de este trabajo, ha sido necesario reconectar conceptos vistos en asignaturas como *Anàlisi Complexa* o *Models Matemàtics i Sistemes Dinàmics* para poder, a posteriori, ampliarlos hasta tener las herramientas necesarias para la comprensión de los resultados de Misiurewicz y Devaney. En esta sección se hará un repaso de los conocimientos que cualquier estudiante del grado debería haber visto acerca de Análisis Complejo y Sistemas Dinámicos y los ampliaremos haciendo especial remarque en todo aquello que nos será útil más adelante.

2.1. Análisis complejo

Empezaremos definiendo la función exponencial compleja, que será el objeto de estudio principal de todo el trabajo.

Definición 2.1. *Definimos la **función exponencial compleja** como*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

A la familia de funciones $E_\lambda(z) := \lambda e^z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ la llamamos **familia exponencial compleja**.

La serie es absolutamente convergente ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} < \infty$$

por lo que también es convergente. Por lo tanto, está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$.

A partir de ahora expondremos algunos conceptos de análisis poniendo siempre como ejemplo la familia exponencial compleja para así clasificarla y podernos aprovechar de sus propiedades.

Definición 2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **holomorfa en z_0** si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Una función es **holomorfa en Ω** y escribimos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si lo es en todos los puntos de Ω . Si la función es holomorfa en \mathbb{C} decimos que la función es **entera**.

Proposición 2.3. Una función holomorfa en z_0 es continua en z_0 .

Demostración. Debemos ver que:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |z - z_0| < \delta \text{ entonces } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Supongamos $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Como f es holomorfa en z_0 , se tiene

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta' > 0 \text{ tal que si } |z - z_0| < \delta' \text{ entonces } \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \epsilon.$$

La desigualdad anterior cumple

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \epsilon \iff |f(z) - f(z_0)| < \epsilon |z - z_0| < \epsilon \cdot \delta'.$$

Esta última desigualdad es menor o igual que ϵ si $\delta' \leq 1$. Finalmente, tomando $\delta = \min\{\delta', 1\}$ tenemos que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. \square

Definición 2.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica en z_0** si existe un entorno U de z_0 tal que $f(z)$ se puede expresar como una serie de potencias convergente centrada en z_0 para todo $z \in U$. Si la función es analítica en todos los puntos de su dominio, decimos que f es **analítica**.

Teorema 2.5. Sean f y z_0 igual definidas que en las dos definiciones anteriores. Entonces

$$f \text{ es holomorfa en } z_0 \iff f \text{ es analítica en } z_0$$

Ejemplo 2.6. La familia exponencial compleja es entera (o analítica) por definición.

Definición 2.7. Definimos la **esfera de Riemann** como $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

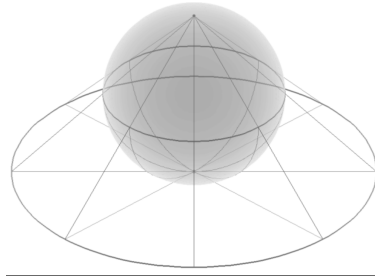


Figura 2.1: Esfera de Riemann pensada como la proyección estereográfica del plano complejo extendido con el punto del infinito.

Las nociones de holomorfía y singularidades se pueden extender para funciones definidas en $\hat{\mathbb{C}}$, aunque no entraremos en detalles.

Ejemplo 2.8. Las funciones $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ polinómicas y racionales son holomorfas en $\hat{\mathbb{C}}$. Para ese tipo de funciones utilizamos la esfera de Riemann como espacio de iteración.

Ejemplo 2.9. La familia exponencial compleja no es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$. La razón es que no está bien definida en ∞ ya que $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{R}^+}} \lambda e^z = \infty$ y $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{R}^-}} \lambda e^z = 0$, lo que nos da un límite discontinuo. Luego, no es holomorfa en ∞ .

A continuación daremos una definición algebraica de función entera trascendente y dos enunciados equivalentes.

Definición 2.10. Una función entera es **trascendente** (f.e.t.) si no existe $p \in \mathbb{C}[z, w]$ tal que $p(z, f(z)) = 0$.

Teorema 2.11. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entera. Entonces son equivalentes:

- (i) f es trascendente
- (ii) f no es polinómica
- (iii) f tiene una singularidad esencial en ∞ .

En la literatura se pueden encontrar como definición cualquiera de las tres nociones equivalentes anteriormente descritas. No obstante, en los textos de matemática aplicada se suele usar (ii) o (iii).

Ejemplo 2.12. La familia exponencial compleja es entera trascendente para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por ende, debemos considerar \mathbb{C} en vez de $\hat{\mathbb{C}}$ como plano de iteración.

Definición 2.13. Sea una f una f.e.t. Definimos como **valores asintóticos de f** los $w \in \hat{\mathbb{C}}$ tales que existe una curva continua $\gamma(t)$ cumpliendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma(t)) = w$$

Definición 2.14. Llamaremos **valores singulares** a los valores que sean críticos, es decir, imágenes de puntos críticos ($f'(p) = 0$) o asintóticos. Además, si f tiene un número finito de valores singulares, diremos que f es de **tipo finito**.

Proposición 2.15. E_λ es de tipo finito si $\lambda \neq 0$. De hecho, tiene solo 2 valores singulares, ambos asintóticos.

Demostración. Si $\lambda \neq 0$, entonces $E'_\lambda(z) = E_\lambda(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ por lo que no tiene puntos críticos. Por otro lado, $z = 0$ e infinito son los únicos valores asintóticos. En efecto, 0 lo es, ya que cualquier curva tal que $\operatorname{Re} z \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$ cumple $E_\lambda(\gamma(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} w$. Infinito lo es, ya que cualquier curva tal que $\operatorname{Re} z \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ cumple $E_\lambda(\gamma(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$.

Pasemos a ver que son los únicos. Tomemos $\gamma(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$. Basta ver que no existe $w \neq \{0, \infty\}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\lambda(\gamma(t)) = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re}(\gamma(t))} e^{i \operatorname{Im}(\gamma(t))} = w$. Distinguiremos tres casos.

Si existe $\{t_n\}_{n \geq 0}$ tal que la curva $\gamma(t)$ cumple $\operatorname{Re}(\gamma(t_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, entonces la imagen de tal curva cumplirá $\lim_{t_n \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re}(\gamma(t_n))} e^{i \operatorname{Im}(\gamma(t_n))} = \infty$.

Análogamente, si existe $\{t'_n\}_{n \geq 0}$ tal que la curva $\gamma(t)$ cumple $\operatorname{Re}(\gamma(t'_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$, entonces la imagen de tal curva cumplirá $\lim_{t'_n \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re}(\gamma(t'_n))} e^{i \operatorname{Im}(\gamma(t'_n))} = 0$.

Si no existe ninguna sucesión tal que la curva sobre esos puntos tiende a infinito en parte real, entonces significa que la curva esta acotada por las rectas $x = \pm R$ donde $R \in \mathbb{R}$.

Por hipótesis, $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$, por lo que se deduce que $\operatorname{Im}(\gamma(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \{\infty, -\infty\}$. En ambos casos, la curva cortará infinitas rectas horizontales

$$\begin{aligned} y &= 2k\pi i - \arg(\lambda)i \\ y &= (2k + 1)\pi i - \arg(\lambda)i \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, los puntos de intersección entre la curva y dichas rectas serán de la forma $x + 2k\pi i$ e $x + (2k + 1)\pi i$ respectivamente, por lo que su imagen por E_λ será

$$\begin{aligned} |\lambda| e^{\arg(\lambda)i} e^x e^{((2k+1)\pi - \arg(\lambda))i} &= |\lambda| e^x e^{(2k+1)\pi i} \in \mathbb{R}^- \\ |\lambda| e^{\arg(\lambda)i} e^x e^{(2k\pi - \arg(\lambda))i} &= |\lambda| e^x e^{2k\pi i} \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que hemos escrito $\lambda = |\lambda| e^{i \arg(\lambda)}$. Por tanto, la imagen de la curva no convergirá a ningún punto, ya que toma valores negativos y positivos alternadamente, lo que imposibilita un límite. \square

Ejemplo 2.16. Otras f.e.t. de tipo finito serían $\lambda \sin z$ y $\lambda \cos z$ para $\lambda \neq 0$, mientras que $z + \lambda \sin z$ y $z + \lambda \cos z$ no lo son.

Definición 2.17. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de f.e.t.

(a) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente a f en Ω** si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall z \in \Omega.$$

(b) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge a f uniformemente sobre compactos** si $\forall K \subset \Omega$ compacto $f|_K$ converge uniformemente a f .

(c) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente a ∞ en Ω** si

$$\forall R > 0 \exists n_0 : |f_n(z)| > R, \forall n \geq n_0, \forall z \in \Omega.$$

El concepto de convergencia uniforme es más fuerte que el de convergencia puntual, ya que el n_0 que escogemos no depende de z sino únicamente de ε . Dicho concepto es fundamental para la posterior definición general de los conjuntos de Julia y de Fatou.

Por otra parte, cuando tenemos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen uniformemente a una función g , podemos encontrar un n_0 suficientemente grande para el cual muchas propiedades acerca del comportamiento de la función g se cumplan también para las f_n para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 2.18. La sucesión de iterados de la función exponencial compleja $\{E^n\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente a ∞ en $(1, \infty)$. En efecto, si $R > 0$, se tiene que $n_0 = \lceil R \rceil$ cumple $|E^n(z)| > R$ para todo $n \geq n_0$ y para todo $z \in (1, +\infty)$.

Terminaremos este capítulo poniendo de manifiesto algunos conceptos y resultados topológicos que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Definición 2.19. Sea $X \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que $A \subseteq X$ es **denso en X** si para todo $z \in X$ y para todo $r > 0$ se tiene $B(z, r)$ contiene algún punto de A .

Proposición 2.20. Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ y sea $A \subseteq X$ es equivalente:

- (i) A es denso en X .
- (ii) Para todo abierto no vacío $V \subseteq X$ se cumple $A \cap V \neq \emptyset$.
- (iii) $\bar{A} = X$

Definición 2.21. Sea $f : X \rightarrow Y$ donde X y Y son espacios topológicos. Entonces f es un **homeomorfismo** si:

- (1) f es biyectiva
- (2) f es continua
- (3) f^{-1} es continua

Nota 2.22. Fijado $\lambda \in \mathbb{C}$, la función $E_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no es un homeomorfismo ya que no es inyectiva. En efecto, $E_\lambda(0) = E_\lambda(\pi i) = \lambda$. De hecho, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, la función E_λ tiene grado infinito, es decir, para todo $z \neq 0$ existen infinitos $w \in \mathbb{C}$ tales que $E_\lambda(w) = z$. Además, si $w \in \mathbb{C}$ es tal que $E_\lambda(w) = z$, entonces $E_\lambda(w + 2k\pi i) = z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.23. Sea f una f.e.t. Si f es inyectiva y holomorfa, entonces es un homeomorfismo sobre su imagen.

Teorema 2.24 (Teorema de la intersección de Cantor en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). Sea $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots$ una sucesión infinita de compactos encajados de \mathbb{C} . Entonces $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

Teorema 2.25 (Teorema de la función abierta). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω , donde Ω es un subconjunto conexo y abierto de \mathbb{C} . Entonces, la función f es abierta, es decir, la imagen de cualquier abierto es un abierto.

Teorema 2.26 (Gran Teorema de Picard). Sea f una función analítica que tiene una singularidad esencial en $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces, en cualquier entorno abierto perforado de w , $f(z)$ adquiere todos los valores de \mathbb{C} menos, a lo sumo, un punto. Además, adquiere tales valores infinitas veces.

2.2. Sistemas dinámicos

En este apartado abordaremos los conceptos de sistemas dinámicos para las funciones enteras trascendentes (*f.e.t.*) y su correspondiente dominio de iteración, \mathbb{C} , visto en el Ejemplo 2.12. No obstante, la mayoría de conceptos se pueden tratar para muchos tipos de funciones en diferentes dominios.

Definición 2.27. Sea f una *f.e.t.* y $z_0 \in \mathbb{C}$. Diremos que la sucesión de iterados $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0) := f(f(z_0)), \dots\}$ es la **órbita** de z_0 . Al primer elemento de la sucesión, z_0 , lo llamaremos **semilla**.

También se puede considerar la órbita negativa como las preimágenes de z_0 , es decir, $\mathcal{O}^-(z_0) = \{w \in \mathbb{C} : \exists n > 0 \text{ tal que } f^n(w) = z_0\}$.

Observación 2.28. No existe órbita negativa de $z = 0$ para E_λ con $\lambda \neq 0$.

Definición 2.29. Un conjunto D es **positivamente (resp. negativamente) invariante** para $\{f^n\}_{n \geq 0}$ si contiene la órbita positiva (resp. negativa) de todos sus puntos. Decimos que D es **totalmente invariante** si es positivamente y negativamente invariante.

Ejemplo 2.30. \mathbb{R} es positivamente invariante para e^z pero no negativamente, ya que $e^{i\pi} \in \mathbb{R}$. De hecho, $E_1(x + k\pi i) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.31. Si se cumple que $f^p(z_0) = z_0$ y $f^m(z_0) \neq z_0 \quad \forall 0 < m < p$, entonces diremos que $\mathcal{O}(z_0)$ es una **órbita periódica de periodo p** y que los puntos de la sucesión, $z_m = f^m(z_0)$ son **puntos periódicos de periodo p** dado que $\mathcal{O}(z_j) = \mathcal{O}(z_0) \quad \forall j = 1, \dots, p-1$. Si $p = 1$, es decir, $f(z_0) = z_0$, llamaremos a z_0 **punto fijo**. Si z_0 no es periódico pero $\exists k$ tal que $f^k(z_0)$ es periódico, diremos que z_0 es **preperiódico**.

Observación 2.32. Geométricamente, los puntos fijos de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son los puntos de intersección entre las curvas $y = f(x)$ e $y = x$.

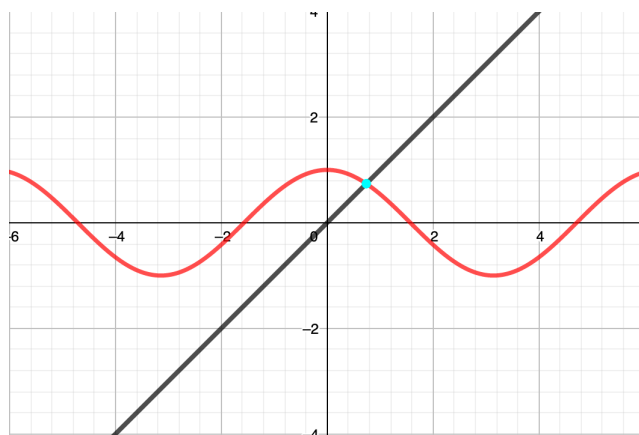


Figura 2.2: La función $\cos(x)$ tiene un único punto fijo, visualizable mediante la intersección de las curvas $y = f(x)$ e $y = x$.

Observación 2.33. Sea $\{\overline{z_0 z_1 z_2 \cdots z_{p-1}}\}$ una órbita periódica (O.P.). Aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$(f^p)'(z_i) = f'(f^{p-1}(z_i))(f^{p-1})'(z_i) = \cdots = \prod_{j=0}^{p-1} f'(z_j) = f'(z_0)f'(z_1)\cdots f'(z_{p-1})$$

$\forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. A este valor lo llamaremos **multiplicador de la O.P.**

A partir de ahora, por simplicidad de las definiciones, hablaremos de puntos fijos en vez de puntos periódicos de periodo p en general. No obstante, todos los conceptos que se expondrán a continuación se pueden generalizar para puntos periódicos de cualquier periodo p sin grandes dificultades.

Definición 2.34. Sea f una f.e.t. y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto fijo de f . Diremos que

- (a) z_0 es **atractor** si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon \implies f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z_0$
- (b) z_0 es **repulsor** si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \varepsilon \implies |f^k(z) - z_0| > \varepsilon$ para algun k .

Teorema 2.35. Sea f una f.e.t. y sea z_0 un punto fijo de f . Entonces:

- (1) Si $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es atractor.
- (2) Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es repulsor

Demostración.

- (1) Sea f una f.e.t. tal que $|f'(z_0)| < 1$. Entonces existe un entorno abierto U de z_0 tal que para cada $z \in U$

$$|f'(z_0)| < 1 \Leftrightarrow \exists \mu \text{ tal que } \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \mu < 1 \Rightarrow |f(z) - z_0| < \mu|z - z_0|$$

Es decir, $f(z)$ pertenece a U , ya que es más próximo a z_0 que z . Volviendo a aplicar el mismo argumento (sobre $f(z)$ en vez de z), tenemos que

$$|f(f(z)) - z_0| < \mu|f(z) - z_0| < \mu^2|z - z_0| \Rightarrow \cdots \Rightarrow |f^n(z) - z_0| < \mu^n|z - z_0|.$$

Luego, la parte derecha de la desigualdad tiende a 0 cuando n tiende a infinito, por lo que, por el Teorema del Sándwich, en U , $f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$.

- (2) Sea f una f.e.t. tal que $|f'(z_0)| > 1$. Entonces, existe un entorno abierto V de z_0 tal que para cada $z \in V$

$$|f'(z_0)| > 1 \iff \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} > \mu > 1 \Rightarrow |f(z) - z_0| > \mu|z - z_0|$$

Esto se traduce en que $f(z)$ es más lejano a z_0 que z para todo z en V . Iterando n veces obtenemos $|f^n(z) - z_0| > \mu^n|z - z_0|$. Como $\mu^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, existe un n tal que $f^n(z) \notin V$.

□

Observación 2.36. *El recíproco también. No obstante, nosotros no lo demostraremos, ya que se requiere de herramientas más avanzadas. También cabe remarcar que en el caso real el recíproco es falso. Por ejemplo, la función $f(x) = -x + x^3$ tiene el 0 como atractor pero $|f'(0)| = 1$. No obstante, en el caso real si un punto z_0 es atractor, entonces $f'(z_0) \leq 1$. En efecto, si existiera un punto tal que su derivada fuera mayor que 1, tendríamos que es repulsor, contradicción. El caso repulsor es análogo.*

Definición 2.37. *Sea f una f.e.t. y z_0 un punto fijo de f .*

- (a) *La cuenca de atracción de z_0 es $A(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : f^{pn}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0\}$*
- (b) *La cuenca inmediata de atracción de z_0 , $A^*(z_0)$, es la componente conexa de $A(z_0)$ que contiene z_0 .*

Proposición 2.38. *$A(z)$ y $A^*(z)$ son conjuntos abiertos.*

Demostración. En efecto, para cada $w \in A(z)$, por continuidad existe un entorno U de w tal que los puntos de U tienden a z . Luego, $A(z)$ es abierto. El argumento es el mismo para $A^*(z)$. □

Definición 2.39. *Sea E_λ la familia exponencial compleja. Definimos los **parámetros hiperbólicos** como los valores de λ tales que la función E_λ contiene algún punto periódico atractor.*

Definición 2.40. *Sea f una f.e.t. y z_0 un punto fijo de f con multiplicador μ . Diremos que:*

- (a) z_0 es **superatractor** si $|\mu| = 0$
- (b) z_0 es **neutral** si $|\mu| = 1$

La dinámica de los puntos neutrales es delicada y diversa. Se pueden dar diferentes casuísticas que dan pie a la definición de diferentes objetos matemáticos como los *puntos parabólicos*, los *puntos de Siegel* o los *puntos de Cremer*. Las diferencias entre estos conceptos se basan en otros como la linealización y la racionalidad. No obstante, su comprensión se desvía del propósito de este texto y no procederemos a abordarla, ya que los capítulos posteriores son totalmente entendibles sin la necesidad de definir dichos conceptos.

Capítulo 3

Función exponencial compleja

Esta sección pretende dar una visión intuitiva sobre como se comporta la función e^z . Enunciaremos y demostraremos algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas así como daremos algunas ideas intuitivas sobre cómo son las imágenes de algunas regiones de plano complejo por la función en cuestión.

Recordamos que definíamos la función exponencial compleja como

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Empezaremos viendo que e^z es una función entera con $(e^z)' = e^z$ a partir de la definición.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^z \cdot \frac{(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^z \cdot \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^z \cdot \frac{h + o(h^2)}{h} = e^z.$$

Propiedad 3.1. $e^z e^w = e^{z+w}$.

Demostración. Para $a \in \mathbb{C}$ fijado consideramos $f_a(z) = e^z e^{a-z}$. Como es producto de funciones enteras, la función f_a también lo será y $f'_a(z) = e^z e^{a-z} + e^z (-e^{a-z}) = 0$. Luego, $f_a(z)$ es constante por lo que $e^z e^{a-z} = f_a(z) = f_a(a) = e^a$. Tomando $a = w + z$ obtenemos el resultado que queríamos. \square

Propiedad 3.2. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. De la propiedad anterior deducimos $e^z e^{-z} = 1$. Si hubiera un z_0 tal que $e^{z_0} = 0$, tendríamos que $e^{z_0} e^{-z_0} = 0$, contradicción. \square

Propiedad 3.3. $|e^{ix}| = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. De la Propiedad 3.1 se sigue

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1 \Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{1} = 1.$$

\square

La función exponencial compleja tiene una importante relevancia en la trigonometría. Gracias a ella se pueden definir de manera formal las identidades trigonométricas $\cos x$ y $\sin x$ para números reales y también se pueden obtener muchas relaciones trigonométricas, aunque no entraremos en lo último.

Definición 3.4. Sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

De lo que se desprende de la propia definición la siguiente fórmula

Teorema 3.5 (Fórmula de Euler).

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

El caso particular $x = \pi$ se le conoce como **Identidad de Euler**.

Propiedad 3.6 (Identidad de Euler).

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Por tanto, podemos escribir cualquier número complejo $z = re^{i\theta}$ como $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ donde r es el módulo de z y θ su argumento.

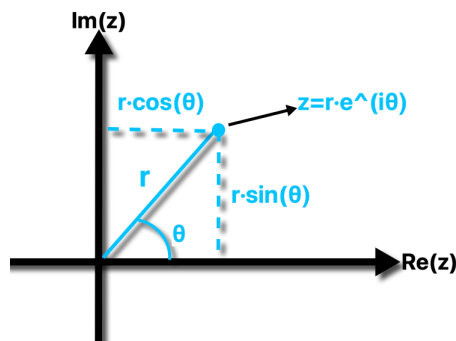


Figura 3.1: Representación de un número complejo.

Una manera alternativa de obtener la fórmula de Euler es expresando las funciones e^x , $\cos(x)$ y $\sin(x)$ a partir de sus respectivas series de Taylor alrededor del 0. Luego, calculando e^{ix} a partir de su expansión de Taylor y reordenando aparece la fórmula buscada.

De la Identidad de Euler es fácil observar que, a diferencia de \mathbb{R} , en \mathbb{C} podemos calcular el logaritmo de números negativos. Por ejemplo, como $-5 = 5e^{\pi i} = e^{\ln 5} e^{\pi i} = e^{\ln 5 + \pi i}$, entonces $\log(-5) = \ln 5 + \pi i + 2k\pi i = \ln 5 + (2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propiedad 3.7. La función exponencial compleja es periódica de periodo $2\pi i$.

Demostración. En efecto, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (e^{\pi i})^2 = e^z$. Por tanto, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen infinitas preimágenes de z , y todas ellas son de la forma $w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ donde $e^w = z$. \square

Propiedad 3.8. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

Propiedad 3.9. Sea $x \in \mathbb{R}$. Podemos expresar las funciones $\cos(x)$ y $\sin(x)$ definidas anteriormente a partir de la función exponencial de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

Demostración. De la Fórmula de Euler y de la paridad de las funciones seno y coseno se sigue

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x\end{aligned}$$

Sumando y restando ambas igualdades se tiene

$$\begin{aligned}e^{ix} + e^{-ix} &= 2 \cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} &= 2i \sin x\end{aligned}$$

siendo las dos igualdades buscadas. \square

Ahora, podemos extender las funciones trigonométricas seno y coseno para números complejos.

Definición 3.10. Sea $z \in \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

Para terminar con las implicaciones trigonométricas de las propiedades de la función exponencial compleja, mostraremos una sencilla demostración de la Identidad Fundamental de la Trigonometría.

Teorema 3.11 (Identidad Fundamental de la Trigonometría). Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Demostración.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1.$$

\square

A continuación daremos algunas claves sobre como se comporta e^z sobre ciertos conjuntos. Esto nos dará algunas ideas intuitivas respecto a la geometría de sus iterados.

Tenemos que tener en cuenta que $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ por lo que no se puede representar en un gráfico, ya que no se pueden dibujar de manera estándar $2 + 2 = 4$ dimensiones. Por tanto, para hacer interpretaciones geométricas necesitaremos dos gráficas en \mathbb{R}^2 .

Propiedad 3.12. *Dados $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \in \mathbb{C}$, podemos interpretar el producto $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2)i}$, como el resultado de multiplicar el módulo de z_1 por el módulo de z_2 y rotar z_1 exactamente θ_2 grados. En particular, cuando $r_2 = 1$ podemos pensarlo simplemente como la rotación de θ_2 grados de z_1 .*

Propiedad 3.13. *La imagen de rectas verticales son circunferencias centradas en 0. Más concretamente, la imagen de $x = a$ es la circunferencia de centro 0 y radio e^a . De hecho, cualquier segmento de una recta vertical de altura 2π tiene como imagen la misma circunferencia. Por tanto, la imagen de toda la recta recorre la circunferencia infinitas veces.*

Demostración. En efecto, la imagen de los puntos con $x = a$ expresados en forma cartesiana del plano complejo son $(e^a \cos(y), e^a \sin(y))$. Observamos que variando la variable y , las dos coordenadas van desde e^a hasta $-e^a$ de manera continua. Además, estos puntos tienen módulo $\sqrt{(e^a)^2(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^a$ para todo y . \square

Por tanto, la imagen de cualquier punto $z \in \mathbb{C}$ es un punto de la circunferencia de radio $e^{\text{Re}(z)}$. En particular, la imagen por e^z de la recta $x = 0$ (eje imaginario) es la circunferencia S^1 . Consecuentemente con lo dicho hasta el momento, la imagen por e^z de las rectas verticales $x = a > 0$ son circunferencias de radio $r = e^a > 1$ mientras que la imagen por e^z de las rectas verticales $x = a < 0$ son circunferencias de radio menor a 1.

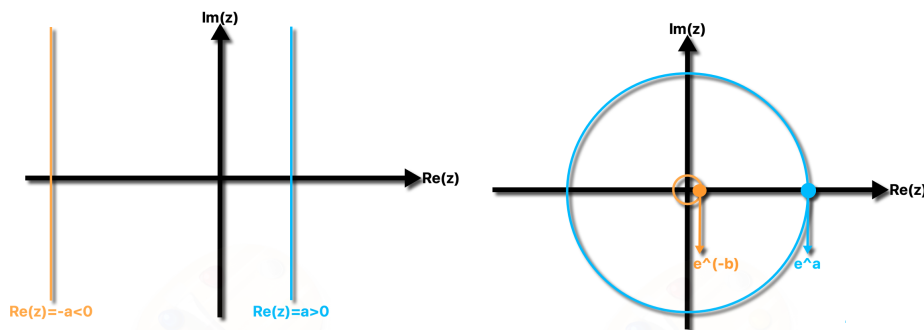


Figura 3.2: Imagen de rectas verticales por la función exponencial.

Propiedad 3.14. *La imagen de rectas horizontales de la forma $y = a$ son semirrectas oblicuas con extremo en el 0 (sin tocarlo) y pendiente $\tan(a)$. Además, el ángulo que forma la imagen con \mathbb{R}^+ es exactamente a .*

Demostración. La imagen de la recta horizontal $y = a$ es $e^z = e^x \cos a + ie^x \sin a$. Como $e^x \neq 0$ tenemos que el cociente entre la parte imaginaria y la parte real es constante e igual a $\tan(a)$. Además, el ángulo que forma una recta con \mathbb{R}^+ es la arcotangente de su pendiente, es decir, $\arctan(\tan(a)) = a$. \square

Observación 3.15. *En la demostración anterior hemos de tener en cuenta que al calcular $\frac{e^x \sin a}{e^x \cos a}$ el denominador se anula en todos los puntos de la forma $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con*

$k \in \mathbb{Z}$. En estos casos simplemente consideramos que las semirrectas tienen «pendiente infinito» y, por tanto, son semirrectas verticales, es decir, cuyo ángulo con \mathbb{R}^+ es $\pm \frac{\pi}{2}$.

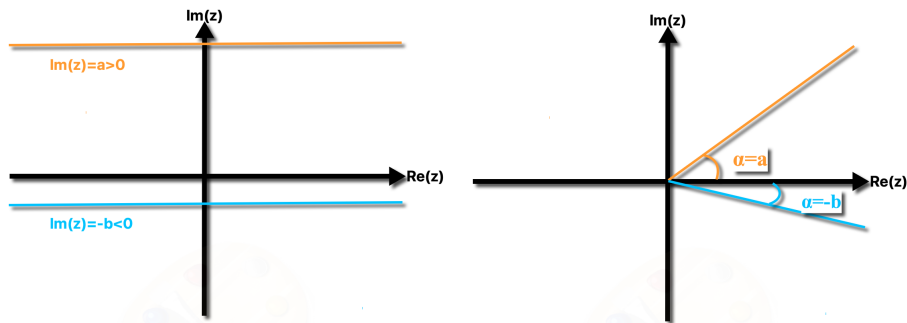


Figura 3.3: Imagen de rectas horizontales por la función exponencial.

Propiedad 3.16. *La imagen de rectas oblicuas con pendiente positivo (resp. negativo) son espirales que crecen en sentido antihorario (resp. horario).*

Demostración. Si $z = x+iy$, entonces, expresando en forma cartesiana del plano complejo, $e^z = e^x(\cos y, \sin y)$. Si x, y fueran constantes, sería una espiral de Arquímedes (se aleja del centro a velocidad constante). En nuestro caso, y aumenta (resp. disminuye) linealmente a medida que aumenta (resp. disminuye) x . Como $|e^z| = e^x$, la imagen de los puntos de la recta se alejan exponencialmente en módulo del centro de la espiral a medida que aumenta (resp. disminuye) x . Por otra parte, a medida que aumenta (resp. disminuye) x , aumenta (resp. disminuye) y , por lo que disminuirá (resp. aumentará) el periodo del coseno y el seno, es decir, aumentará (resp. disminuirá) la velocidad a la que gira la espiral a medida que nos alejemos de su centro. □

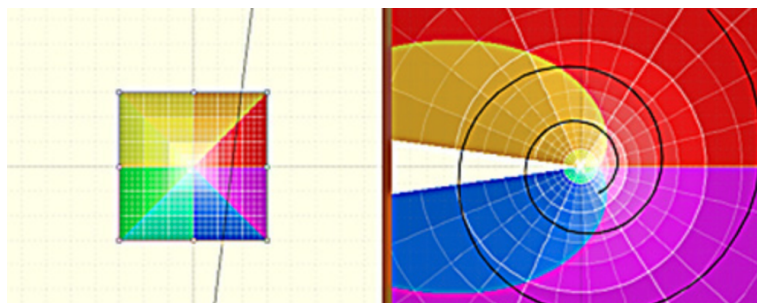


Figura 3.4: Imagen de rectas oblicuas por la función exponencial.

Propiedad 3.17. *De la Propiedad 3.14 se deduce que la imagen de cualquier strip de altura 2π es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además, ahora podemos ampliar la propiedad 3.2 diciendo que 0 es el único punto que no tiene preimagen.*

Finalmente, expondremos una propiedad que dificulta en muchas ocasiones el estudio de la dinámica de la función exponencial compleja, ya que cambia la tendencia a crecer de los iterados de e^z , por lo que se tiene que tener muy presente.

Propiedad 3.18. *Sea z un número complejo con $\text{Im}(z) = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $e^z \in \mathbb{R}^-$ y $E^n(z) \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \geq 2$.*

Debido a que la función exponencial hace crecer su parte real muy rápidamente, la situación que suele suceder es que, dada una semilla, sus iterados aumentan muy rápidamente su parte real sucesivamente. Si para algún $n > 0$ tenemos que $E^n(z) = \psi + k\pi i$ para alguna $z \in \mathbb{Z}$, entonces $e^z \in \mathbb{R}^-$ con módulo muy grande. Consecuentemente, su segundo iterado es un número positivo muy cercano a 0. A partir de ahí, como \mathbb{R} es invariante para la función e^z y la sucesión $\{E^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $z_0 \geq 0$ es estrictamente creciente y no acotada superiormente, la órbita tiende a $+\infty$.

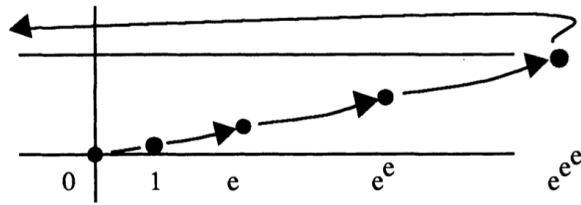


Figura 3.5: Comportamiento de los iterados de e^z .

Por continuidad de la función exponencial, todas las propiedades anteriormente descritas se mantienen para puntos *parecidos*. Por ejemplo, así como los puntos de \mathbb{R} van a \mathbb{R} , los puntos cercanos a \mathbb{R} van a puntos cercanos a \mathbb{R} . Ese tipo de intuición puede ser muy útil en situaciones como las que se tratarán en este texto como por ejemplo el estudio de la dinámica de E_λ cuando $\lambda \approx 1$ ya que vienen a ser, al fin y al cabo, perturbaciones de la función exponencial.

Capítulo 4

Sobre los puntos fijos de E_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$

En esta sección haremos una primera indagación acerca de la dinámica de E_λ . Estudiaremos la existencia de puntos fijos y daremos algunos conjuntos donde se encuentran estos puntos fijos en el caso de existir. Veremos que dependiendo del valor de λ , tendremos casuísticas totalmente diferentes. Abordaremos el caso donde $\lambda \in \mathbb{R}$ con E_λ restringida a \mathbb{R} y el caso $\lambda = 1$ con $z \in \mathbb{C}$.

Empezaremos encontrando los puntos fijos reales. Para ello, distinguiremos diferentes casos.

1. $\lambda = 1/e$. Claramente, $x_0 = 1$ es un punto fijo, ya que $E_{\frac{1}{e}}(x) = \frac{1}{e}e^x = x$ cuando $x = 1$. Como $E'_{\frac{1}{e}}(x_0) = \frac{1}{e}e^1 = 1$ es un punto fijo neutral. Veamos que x_0 es el único punto fijo. Es inmediato ver que la curva $y = x$ es tangente en $x_0 = 1$ a la curva $y = \frac{1}{e}e^x$, por lo que no puede haber más puntos fijos.

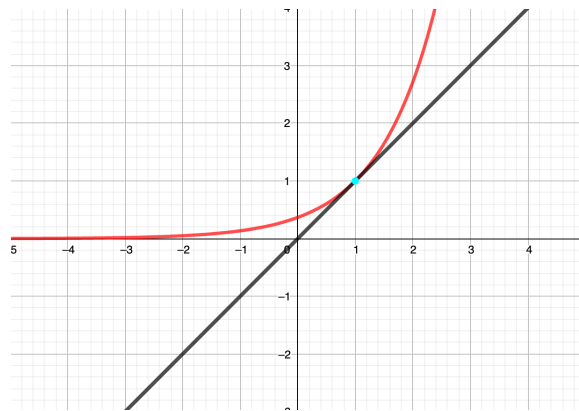


Figura 4.1: Visualización de los puntos fijos de la función $E_{\frac{1}{e}}$.

2. $\lambda > 1/e$. En este caso demostraremos la inexistencia de puntos fijos. Para ello, probaremos que la ecuación $f_\lambda(x) = \lambda e^x - x = 0$ no tiene soluciones reales. Es fácil observar que $f_\lambda(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0)$. Nos queda por ver que no tiene soluciones

en $[0, +\infty)$. Para ello, calculemos la derivada.

$$f'_\lambda(x) = \lambda e^x - 1 = \lambda \left(e^x - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Por tanto, para $x \in [0, +\infty)$ se tiene

$$f'_\lambda(x) = \lambda \left(e^x - \frac{1}{\lambda} \right) > 0 \iff 0 \leq x < \log \frac{1}{\lambda}$$

$$f'_\lambda(x) = \lambda \left(e^x - \frac{1}{\lambda} \right) < 0 \iff x > \log \frac{1}{\lambda}$$

Luego, $\log \frac{1}{\lambda}$ es un mínimo absoluto de la función f_λ en $[0, +\infty)$. Finalmente, por la definición de mínimo absoluto se sigue $f_\lambda(x) \geq f_\lambda(\log \frac{1}{\lambda}) = 1 - \log \frac{1}{\lambda} > 0$, por lo que f_λ tampoco tiene raíces en $[0, +\infty)$.

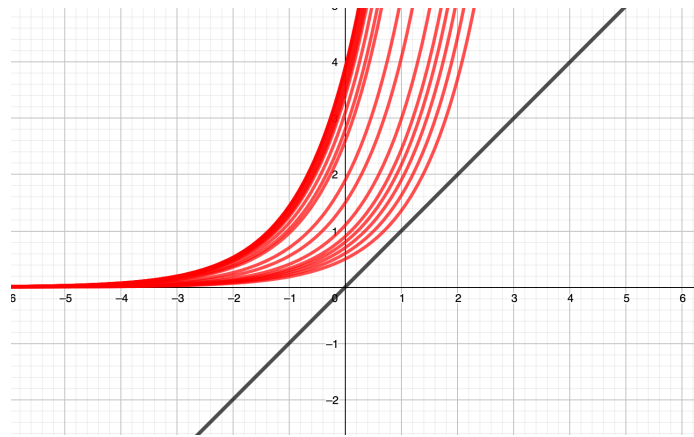


Figura 4.2: Visualización de los puntos fijos de la función E_λ para $\lambda > \frac{1}{e}$.

3. $\lambda < 0$. En este caso $f'_\lambda(x) = \lambda e^x - 1 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que f_λ es estrictamente decreciente. Por otra parte, como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

entonces la curva $y = f(x)$ solo cortará con $y = x$ en un único punto, es decir, habrá un único punto fijo. Dentro del caso $\lambda < 0$ distinguiremos 3 situaciones diferentes, ya que el comportamiento del punto fijo cambia en función del valor de λ .

- (a) $-e < \lambda < 0$. En este caso $f_\lambda(0) = \lambda < 0$ y $f_\lambda(-1) = \lambda e^{-1} + 1 > 0$. Luego, por el Teorema de Bolzano se tiene que la raíz de $f_\lambda(x) = 0$, es decir, el punto fijo de $E_\lambda(x)$ está en $(-1, 0)$. Además, visualmente se puede observar que el punto es atractor.

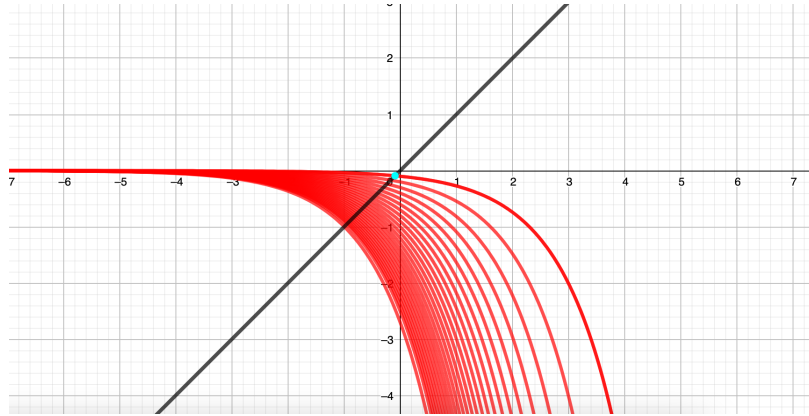


Figura 4.3: Visualización de los puntos fijos de la función E_λ para $-e < \lambda < 0$.

- (b) $\lambda < -e$. Ahora $f_\lambda(-1) = \lambda e^{-1} + 1 < 0$ pero $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Luego, aplicando el Teorema de Bolzano se concluye que la raíz está en $(-\infty, -1)$. Además, visualmente se puede observar que el punto es repulsor.

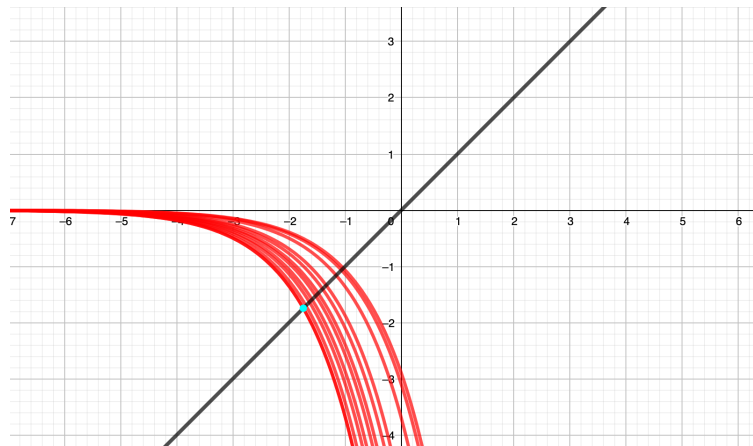
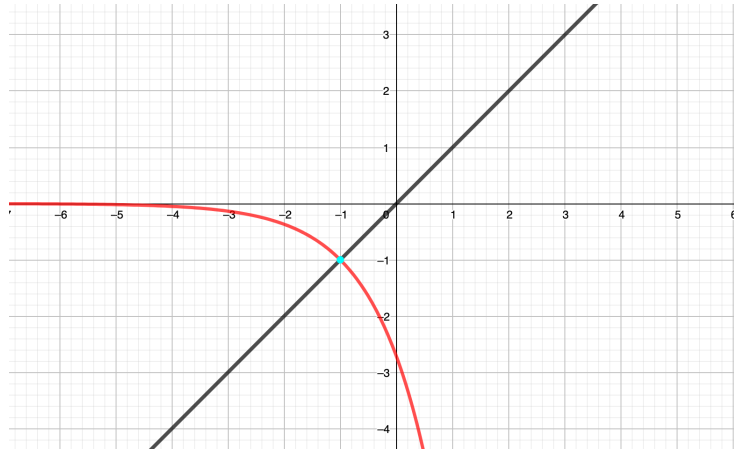


Figura 4.4: Visualización de los puntos fijos de la función E_λ para $\lambda < -e$.

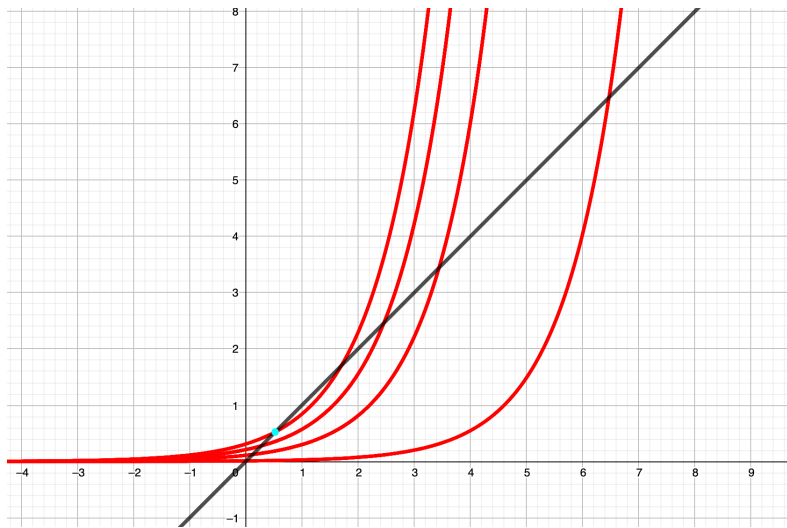
- (c) $\lambda = -e$. En este caso tenemos $E_{-e}(x) = -e^{x+1}$. Se obtiene de manera inmediata que el punto fijo es $x_0 = -1$ y que $|E'_{-e}(-1)| = 1$, por lo que es un punto fijo neutral.


 Figura 4.5: Visualización de los puntos fijos de la función E_λ para $\lambda = -e$.

4. $0 < \lambda < 1/e$. Visualmente se observa que las curvas $y = E_\lambda(x)$ e $y = x$ cortan en 2 puntos x_1 y x_2 . Debido a que

$$f(0) = \lambda > 0, \quad f(1) = \lambda e - 1 < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se deduce que $x_1 \in (0, 1)$ y $x_2 > 1$. Además, gráficamente se observa que x_1 es atractor y x_2 repulsor.


 Figura 4.6: Visualización de los puntos fijos de la función E_λ para $0 < \lambda < 1/e$.

Hasta ahora hemos clasificado todos los casos puntos fijos reales de las funciones de la familia E_λ con $\lambda \in \mathbb{R}$. En (2) hemos visto que si $\lambda > 1/e$, entonces las funciones E_λ no tienen puntos fijos reales. Podemos afirmar entonces que el caso particular $\lambda = 1$ no presenta la existencia de ningún punto fijo real. Veamos a continuación que, en este caso particular, no existen puntos fijos complejos atractores ni neutrales.

Para ello, basta ver que sólo pueden existir puntos fijos repulsivos. Supongamos pues que $z = x + iy$ es un punto fijo atractor o neutral para E_1 , es decir, $e^z = z$ y $E'_1(z) \leq 1$. Esta igualdad es equivalente al sistema

$$\left. \begin{aligned} e^x \cos(y) &= x \\ e^x \sin(y) &= y \end{aligned} \right\}$$

Supongamos que $|E'_1(z)| = e^x < 1$. Entonces $x < 0$. Además, de la segunda ecuación obtenemos que $|y| < 1$ ya que $e^x < 1$ y $\sin(y) \leq 1$.

Por otra parte, como $e^x \neq 0$, dividiendo la segunda ecuación entre la primera se obtiene $\frac{y}{x} = \tan(y)$. Debido a lo esmentado anteriormente, se concluye que como $|y| < 1$, entonces $\tan(y)$ e y tienen el mismo signo (basta ver la gráfica de la función tangente), pero esto es imposible, ya que $x < 0$.

Supongamos que $|E'_1(z)| = e^x = 1$, es decir, que es neutral. Entonces $x = 0$ y, sustituyendo en el sistema anterior, concluye en un sistema incompatible.

El caso $\lambda = 0$ no tiene especial relevancia, ya que es inmediato que $E_0 = 0$ y por tanto, $z = 0$ es el único un punto fijo y es, claramente, superatractor.

Por último, veamos que E_λ tiene infinitos puntos fijos complejos no reales para $\lambda \neq 0$. En efecto, definiendo $g_\lambda(z) = e^z - z$, podemos interpretar los puntos fijos de E_λ como las preimágenes de 0 por g_λ . Debido a que g_λ es una función entera trascendente por ser no polinómica, tiene una singularidad esencial, por lo que podemos aplicar el Gran Teorema de Picard. Además, como $g(z + 2\pi i) = g(z) + 2\pi i$, si evitara un valor $c \in \mathbb{C}$, entonces también evitaría el punto $c + 2\pi i$. En efecto, si $g(z) \neq c \forall z \in \mathbb{C}$, entonces $g(z + 2\pi i) = g(z) + 2\pi i \neq c + 2\pi i \forall z \in \mathbb{C}$. Sea $w \in \mathbb{C}$, entonces $w = z + 2\pi i$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Luego, $g(w) = g(z + 2\pi i) \neq c + 2\pi i$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Por consiguiente, no evita ningún punto. Luego, existen infinitas preimágenes de 0 por g_λ , es decir, infinitos puntos fijos de E_λ .

Finalmente, veamos en una tabla los resultados obtenidos en esta sección:

$\lambda \in \mathbb{R}$	$\#\{\mathbf{Puntos fijos en } \mathbb{R}\}$	$\#\{\mathbf{Puntos fijos en } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$
$(-\infty, -e)$	1 (repulsor) en $(-\infty, -1)$	∞
$-e$	1 (neutral) en $x = -1$	∞
$(-e, 0)$	1 (atractor) en $(-1, 0)$	∞
0	1 (superatractor) en 0	0
$(0, 1/e)$	1 (atractor) en $(0, 1)$ y 1 (repulsor) en $(1, +\infty)$	∞
$1/e$	1 (neutral)	∞
$(1/e, +\infty)$	0	∞
1	0	∞ (repulsivos)

Cuadro 4.1: Resumen de resultados sobre puntos fijos de E_λ .

Capítulo 5

Conjuntos de Julia i de Fatou

En esta sección definiremos los conjuntos de Julia y Fatou de manera general utilizando, para ello, las familias normales. Enunciaremos algunas propiedades para las funciones enteras trascendentes y el Teorema de Montel.

Definición 5.1. Sea \mathfrak{F} una familia de f.e.t. y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que \mathfrak{F} es una **familia normal en Ω** si toda sucesión de funciones de \mathfrak{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de Ω a una función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Para el estudio dinámico de las funciones se considera $\mathfrak{F} = \{f^n\}_{n \geq 0}$.

Definición 5.2. Sea $\mathfrak{F} = \{f^n\}_{n \geq 0}$ la familia de iterados de f (f.e.t). Decimos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un **punto normal de f** si existe un entorno U abierto y conexo de z_0 donde \mathfrak{F} es normal.

El concepto de normalidad es, en esencia, lo que nos permite definir los conjuntos de Julia y de Fatou de manera general y rigurosa como se ilustra en la siguiente definición.

Definición 5.3. Definimos los conjuntos de Julia y de Fatou como:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(f) &= \{z \in \mathbb{C}, \text{ no son puntos normales de } f\} \\ \mathcal{F}(f) &= \{z \in \mathbb{C}, \text{ son puntos normales de } f\}\end{aligned}$$

Al conjunto de Julia se le suele llamar conjunto caótico y al conjunto de Fatou conjunto estable. Eso es porque, intuitivamente, podemos pensar los puntos normales como aquellos que, en un entorno del punto, se comportan de manera similar bajo iteración de f mientras que a los no-normales como los puntos que se comportan de manera distinta o caótica.

Observación 5.4. $\mathcal{J}(f)$ y $\mathcal{F}(f)$ son conjuntos complementarios en \mathbb{C} .

Teorema 5.5 (Teorema de Montel). Sea $\mathfrak{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de funciones enteras trascendentes. Si existen un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y dos puntos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f_\alpha(z) \neq \{a, b\} \forall z \in U$ y $\forall \alpha \in \Gamma$, entonces \mathfrak{F} es normal en U .

Proposición 5.6 (Propiedades de \mathcal{J} y \mathcal{F} para f.e.t.). Sea f una función entera trascendente de tipo finito

- (1) Los puntos periodicos atractores y sus cuencas de atracción pertenecen a $\mathcal{F}(f)$

- (2) $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.
- (3) Los puntos periódicos neutrales pertenecen a $\mathcal{J}(f)$ excepto los puntos de Siegel.
- (4) Los puntos periódicos repulsores pertenecen a $\mathcal{J}(f)$ y forman un conjunto denso. Esto es, $\mathcal{J}(f) = \overline{\{\text{puntos periódicos repulsores}\}}$.
- (5) Si $f(z) = e^z$, $\mathcal{J}(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f^n(z)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty\}}$.
- (6) Si $z \in \mathcal{J}(f)$ y U es un entorno de z , entonces $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ recubre toda la esfera de Riemann con la excepción de, a lo sumo, dos puntos.
- (7) $z \in \mathcal{J}(f)$ y $\#\{f^{-n}(z)\} = \infty \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z)$ es denso en $\mathcal{J}(f)$.
- (8) $\mathcal{J}(f)$ es perfecto, i.e., todos sus puntos son de acumulación.
- (9) \mathcal{J} es cerrado y, por tanto, \mathcal{F} es abierto.
- (1) $\mathcal{J}(f)$ y $\mathcal{F}(f)$ son totalmente invariantes, i.e., $z \in \mathcal{J}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(f)$) $\Rightarrow f(z) \in \mathcal{J}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(f)$) y $f^{-1}(z) \in \mathcal{J}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(f)$) o no está definida.

Demostración. Demostraremos solo algunas de las propiedades dado que la dificultad de las demás superan la pretendida por este texto.

- (1) Consideraremos el caso de z_0 punto fijo atractor. El caso periódico se deduce de forma similar. Sea $A(z_0)$ la cuenca de atracción de un punto fijo z_0 de f . Como $A(z_0)$ es abierto, para todo $w \in A(z_0)$ existe un entorno U de w tal que los iterados de los puntos de U convergen a z_0 por f^p . Luego, todas sus subsucesiones convergerán a la función holomorfa $g(z) = z_0$. Por tanto, hemos encontrado un entorno de w donde la familia de iterados de f^p es normal, por lo que z_0 es normal y pertenece a $\mathcal{F}(f)$.
- (4) Demostraremos únicamente que los puntos periódicos repulsores pertenecen al conjunto de Julia. Sea z_0 un punto periódico repulsor de periodo $p \geq 1$. Si z_0 perteneciera al conjunto de Fatou, existiría un entorno tal que la familia de iterados de f^p tendría una subsucesión que convergería sobre compactos a una función g holomorfa. Además, $g(z_0) = z_0$, ya que z_0 es un punto periódico. Por continuidad de g tendríamos $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = z_0$, cosa que contradice que z_0 sea repulsor.
- (6) Si la familia de iterados evitara 3 o más puntos, entonces habríamos encontrado un entorno U de z donde, aplicando el Teorema de Montel, la sucesión sería normal y, por tanto, z pertenecería al conjunto de Fatou.
- (7) Sea $z \in \mathcal{J}(f)$ y U un entorno arbitrario de z . Basta ver que U contiene alguna preimagen de z . En efecto, por la propiedad (6) se tiene que los iterados de U recubren todo \mathbb{C} menos, a lo sumo, dos puntos. Luego, existe un $N > 0$ tal que $z \in f^N(U)$. Esto significa que U contiene algún punto que bajo N iteraciones es enviado a z , es decir, una preimagen de z .
- (9) Se deduce de la propiedad (4).

- (10) Sea $z \in \mathcal{F}(f)$. Como z es normal y \mathcal{F} es abierto, existe un entorno abierto $U \subset \mathcal{F}$ de z tal que $\{f^n|_U\}_n$ es normal. Como f es entera trascendente, f es abierta por el Teorema de la función abierta. Luego $f(U)$ es abierto. Tomamos $\{f^{n_k}\}_k$ en $f(U)$. Entonces $\{f^{n_k+1}\}_k$ es una parcial de U (donde la familia $\{f^n\}_n$ es normal) que admite una subparcial uniformemente convergente sobre compactos de U . Llamemos $\{f^{n_{k_j}}\}_j$ a tal subparcial. Entonces $f(z)$ tiene un abierto $f(U)$ tal que $\{f^n\}_n$ es normal, por lo que $f(z) \in \mathcal{F}(f)$.

Análogamente, tomando $\{f^{n_k-1}\}_k$ y teniendo en cuenta que $f^{-1}(U)$ es abierto por ser la función f continua (hemos aplicado la definición topológica de continuidad) obtenemos que $f^{-1}(z) \in \mathcal{F}(f)$. Finalmente, como \mathcal{J} es complementario a \mathcal{F} en \mathbb{C} , entonces \mathcal{J} será también totalmente invariante.

□

Corolario 5.7. Si $\lambda \in (-e, 1/e)$, entonces $\mathcal{F}(E_\lambda) \neq \emptyset$.

Demostración. Se deduce de manera inmediata de lo visto en el capítulo anterior y segunda propiedad de (5.6). □

Dentro del conjunto de Fatou, podemos encontrar diferentes tipos de componentes conexas. Entre ellas encontramos los *anillos de Herman*, *dominios errantes*, *discos de Siegel*, *dominios de Leau*, *dominios de Baker*, etc. Esto tiene una especial relevancia, ya que según el tipo de función que estemos estudiando (polinomiales, meromorfas, enteras trascendentes...) existe una clasificación diferente de las componentes de Fatou. En el caso que nos ocupa, el de las funciones enteras trascendentes de tipo finito, hay una relación entre los valores singulares y las componentes de Fatou. No obstante, en este texto no abordaremos dichos conceptos, ya que se desvían de nuestro propósito. Si se quiere indagar más en el tema se recomienda consultar [7] y [10].

Capítulo 6

Sobre los iterados de e^z

En esta sección se expondrá un resultado conjeturado por Fatou en *Sur l'itération des fonctions transcendentales Entières (1926)* y casi 60 años después demostrado por Michal Misiurewicz en [1] que afirma que $\mathcal{J}(E_1) = \mathbb{C}$ y, por tanto, $\mathcal{F}(E_1) = \emptyset$. De aquí en adelante denotaremos $E(z) = E_1(z)$.

Empezaremos probando un lema que nos muestra la relación entre la parte imaginaria de los iterados de e^z y su derivada.

Lema 6.1. *Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|\operatorname{Im}((E^n(z)))| \leq |(E^n)'(z)|$.*

Demostración. Sea $z = x + iy$ un número complejo. Entonces $E(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Como $|\sin y| \leq |y|$, se obtiene de manera inmediata que para todo $w \in \mathbb{C}$

$$|\operatorname{Im}(E(w))| \leq |\operatorname{Im}(w)||E(w)| = |\operatorname{Im}(w)||E'(w)| \quad (6.1)$$

Si $E^n(z) \in \mathbb{R}$, la desigualdad del enunciado es obvia.

Si $E^n(z) \notin \mathbb{R}$ entonces $E^1(z), \dots, E^{n-1}(z) \notin \mathbb{R}$. Utilizando (6.1) para $w = E(z), E^2(z), \dots, E^{n-1}(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(E(E(z)))| &\leq |\operatorname{Im}(E(z))||E'(E(z))| \\ |\operatorname{Im}(E(E^2(z)))| &\leq |\operatorname{Im}(E^2(z))||E'(E^2(z))| \\ &\vdots \\ |\operatorname{Im}(E(E^{n-1}(z)))| &\leq |\operatorname{Im}(E^{n-1}(z))||E'(E^{n-1}(z))|. \end{aligned}$$

Multiplicando las inecuaciones tenemos

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^k(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^k(z))|} \leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^k(z))| \quad (6.2)$$

Desarrollando la parte izquierda de la desigualdad se tiene

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^k(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^k(z))|} = \frac{|\operatorname{Im}(E(E(z)))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^2(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^2(z))|} \dots \frac{|\operatorname{Im}(E(E^{n-1}(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^{n-1}(z))|}$$

Eliminando términos y sustituyendo en (6.2) obtenemos

$$\frac{|\operatorname{Im}(E(E^{n-1}(z)))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} \leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^k(z))|. \quad (6.3)$$

Como $|\operatorname{Im}(a)| \leq |a| \forall a \in \mathbb{C}$ y $E(z) = E'(z)$, podemos reescribir (6.3) cómo

$$|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq |E'(z)| \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))| = \prod_{i=0}^{n-1} |E'(E^i(z))| = |(E^n)'(z)|.$$

Donde la última igualdad se desprende de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} (E^n)'(z) &= [E(E(\dots E(z)))]' = E'(E^{n-1}(z))(E^{n-1})'(z) \\ &= E'(E^{n-1}(z))E'(E^{n-2}(z))(E^{n-2})'(z) = \dots \\ &= E'(E^{n-1}(z))E'(E^{n-2}(z)) \dots E'(E(z))E'(z) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} |E'(E^i(z))|. \end{aligned}$$

□

Sea $S := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{1}{3}\}$. En este lema veremos una propiedad que nos será fundamental para acercarnos a lo que la intuición nos dice acerca de los iterados de e^z para puntos de S .

Lema 6.2. *Si $z \in S$, entonces $\operatorname{Re}(e^z) \geq \operatorname{Re}(z) + (1 - \ln 2)$.*

Demostración. Sea $z = x + iy \in S$. Si $y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, entonces $\cos y \geq \frac{1}{2}$ y por tanto

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \geq \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}e^x - x + x = e^x - x + \operatorname{Re}(z).$$

Consideremos $\varphi(x) = e^x - x \in C^w(\mathbb{R})$. Es fácil ver que $\min_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) = 1 - \ln 2$, por lo que $\operatorname{Re}(e^z) \geq \operatorname{Re}(z) + (1 - \ln 2)$. □

A continuación veremos que cualquier número complejo no real abandona S bajo los iterados por la función $E(z)$. La hipótesis de que no sea real es necesaria, ya que la recta real es invariante por e^z .

Lema 6.3. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $\exists n \geq 0$ tal que $E^n(z) \notin S$.*

Demostración. Argumentamos por contradicción. Supongamos $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tal que $E^k(z) \in S$ para todo $k \geq 0$. Si $z \in S$ entonces $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y tenemos $|\sin y| \geq \frac{2|y|}{\pi}$. Por tanto, para todo $k \geq 0$ se tiene

$$|\operatorname{Im}(E(E^k(z)))| = |e^{\operatorname{Re}(E^k(z))} \sin(\operatorname{Im}(E^k(z)))| \geq \frac{2}{\pi} e^{\operatorname{Re}(E^k(z))} |\operatorname{Im}(E^k(z))|.$$

Por otro lado, el Lema 6.2 implica que $\operatorname{Re}(E^k(z)) \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$. Luego existe un k_0 tal que $\frac{2}{\pi} e^{\operatorname{Re}(E^{k_0}(z))} > 2$, es decir, $|\operatorname{Im}(E^{k_0+1})| > 2|\operatorname{Im}(E^{k_0})|$. Esto es una contradicción ya que implicaría $|\operatorname{Im}(E^k)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ y, por tanto, saldríamos de S . □

El siguiente lema se puede leer como una versión conocido Koebe 1/4-Theorem en el caso que nos ocupa.

Lema 6.4. *Sea $\mathcal{B} = B(b, r)$. Sea $n \geq 0$ tal que $E^n|_{\mathcal{B}}$ es un homeomorfismo. Luego, $E^n(\mathcal{B})$ contiene un disco de centro $E^n(b)$ y radio $r \cdot \inf_{z \in \mathcal{B}} |(E^n(z))'|$.*

Demostración. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva de menor longitud que une $E^n(b)$ y $\partial(E^n(\mathcal{B}))$. Entonces $\sigma := (E^n|_{\mathcal{B}})^{-1}(\gamma)$ une b con $\partial\mathcal{B}$ por ser homeomorfismo y como es diferenciable (ya que la inversa de una función biyectiva y holomorfa es holomorfa) $\ell(\sigma) = \int_0^1 |\sigma'(t)| dt \geq r$. Por tanto,

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |[E^n(\sigma(t))]'| dt = \int_0^1 |[E^n(\sigma(t))]'| \cdot |\sigma'(t)| dt.$$

Por definición de ínfimo tenemos que $[E^n(\sigma(t))]' \geq \inf_{\mathcal{B}} |(E^n)'|$ y no depende de t . Luego

$$\ell(\gamma) \geq \inf_{\mathcal{B}} |(E^n)'| \int_0^1 |\sigma'(t)| dt \geq r \cdot \inf_{\mathcal{B}} |(E^n)'|$$

□

Lema 6.5. *Sea V un conjunto abierto no vacío y conexo de \mathbb{C} . Entonces solo un número finito de imágenes de V por E puede ser disjunto de S .*

Demostración. Argumentamos por absurdo. Supongamos que existe $\{n_j\}_{j \geq 1}$ creciente tal que $E^{n_j}(V) \cap S = \emptyset$ para todo j . Veamos por inducción que $(\frac{\pi}{3})^j \leq \inf_{z \in V} |(E^{n_j})'(z)|$.

El caso $j = 1$ se deduce del Lema 6.1, ya que como $E^{n_j}(z) \notin S$, tenemos que $\frac{\pi}{3} < |\operatorname{Im}(E^{n_j}(z))| \leq \inf_{z \in V} |(E^{n_j})'(z)|$. Supongamos que la igualdad es cierta para n y veamos que se cumple para $n + 1$. La hipótesis de inducción es

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^j \leq \inf_{z \in V} |(E^{n_j})'(z)|.$$

Entonces se tiene $|E^{n_{j+1}}(z)| = |(E^a \circ E^{n_j})(z)|$. Luego $|[E^a]'(E^{n_j}(z))| \cdot |(E^{n_j})'(z)|$.

Por una parte, $|(E^{n_j})'(z)| \geq (\frac{\pi}{3})^j$ por hipótesis de inducción. Por otra parte, el Lema 6.1 concluye

$$|[E^a]'(E^{n_j}(z))| \geq |\operatorname{Im}(E^a(E^{n_j}(z)))| = |\operatorname{Im}(E^{n_{j+1}}(z))| > \frac{\pi}{3}.$$

Siguiendo con la demostración, distinguiremos dos casos.

Si $E^{n_j}|_V$ es homeomorfismo para todo j , tomamos $D(b, r) \subset V$. Por el Lema 6.4 $E^{n_j}(D(b, r))$ contiene $D(E^{n_j}(b), r \cdot \inf_{z \in D(b, r)} |(E^{n_j}(z))'|) \supseteq D(E^{n_j}(b), r(\frac{\pi}{3})^j)$. Como $\lim_{j \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{3})^j = \infty$, existe un k tal que $E^{n_j}(D(b, r))$ contiene un disco de radio suficientemente grande como para intersectar $\mathbb{R} + 2\pi im \ \forall j \geq k$.

Si alguno de los $E^{n_j}|_V$ no es homeomorfismo, por el Teorema 2.23 no es inyectiva. Luego existen $z \neq w \in V$ tales que $E^{n_j}(z) = E^{n_j}(w)$. Por consiguiente, $E^{n_{j+1}}(z) = E^{n_{j+1}}(w) + 2\pi im$. Si $m \neq 0$ ya hemos terminado, ya que $E^{n_{j+1}}|_V$ es conexo y cortará $\mathbb{R} + 2\pi im$. Si $m = 0$, $E^{n_{j+2}}(z) = E^{n_{j+2}}(w) + 2\pi im$. Si $m \neq 0$ ya hemos acabado. Si $m = 0$ procedemos iterativamente hasta encontrar un $m \neq 0$. Notamos que no puede ocurrir que todos sean 0, ya que entonces en el último iterado tendríamos $e^z = e^w$. Luego $z = w + 2\pi im$ y, por tanto, tendríamos la contradicción $w = z$. Se concluye que existe un k tal que $E^{n_j}(V)$ corta $\mathbb{R} + 2\pi im \ \forall n_j \geq k$.

En ambos casos cortan $\mathbb{R} + 2\pi im$ y, por tanto, $E^{n_j}(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \ \forall n_j \geq k + 1$. □

Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\pi\} \\ W_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(e^z)| \leq 2\pi\} \\ W &:= W_1 \cap W_2. \end{aligned}$$

Visualicemos en el siguiente gráfico W_1 y ∂W_2 . El conjunto W corresponde a la parte izquierda de la frontera de W_2 que está dentro de la franja verde (W_1).

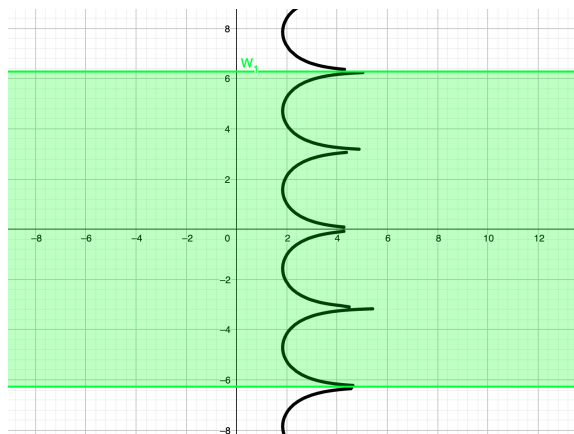


Figura 6.1: Visualización gráfica de los conjuntos W_1 , W_2 y W .

Lema 6.6. *Sea $V \neq \emptyset$ un conjunto abierto y conexo de \mathbb{C} tal que infinitas de sus imágenes están contenidas en $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 4\}$. Entonces alguna imagen de V interseca el eje \mathbb{R} .*

Demostración. Supongamos que ninguna imagen de V interseca \mathbb{R} . Entonces tampoco interseca ∂W . En efecto, utilizando que $\partial(W_1 \cap W_2) \subseteq \partial W_1 \cup \partial W_2$ se tiene que si ocurriera, existiría $z \in E^n(V)$ tal que $|\operatorname{Im}(z)| = 2\pi$ o $|\operatorname{Im}(E(z))| = 2\pi$. Ambos casos implican que $e^z \in \mathbb{R}$ o $e^{e^z} \in \mathbb{R}$, respectivamente, y eso es una contradicción.

Si un conjunto A es disjunto de W , entonces A o $E(A)$ es disjunto de S . En efecto, cojamos $z \in A$ y supongamos que $z \in S$. Como $z \notin W$, entonces o bien $|y| > 2\pi$ (imposible ya que entraría en contradicción con $z \in S$) o bien $|\operatorname{Im}(e^z)| > 2\pi$. Luego $e^z \notin S$. Por tanto, solo un número finito de imágenes de V pueden ser disjuntas de W , ya que si hubiera infinitas, por el párrafo anterior habría infinitas imágenes de V disjuntas de S y eso contradeciría el Lema 6.5.

Eso implica que existe un n_0 tal que $E^n(V) \not\subseteq W \forall n \geq n_0$, ya que habíamos visto que las imágenes de V no cortaban la frontera de W . En particular, por la hipótesis del lema infinitas imágenes de V están contenidas en $W \cap H$. Por otro lado, si $z \in \partial S \cap H$, entonces

$$|\operatorname{Im}(E(z))| = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(|\operatorname{Im} z|) \geq e^4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} > 2^4 \cdot \frac{1}{2} > 2\pi$$

Luego, $\partial S \cap H$ es disjunto de W y por tanto ∂S es disjunto de $W \cap H$. Entonces se tiene que cualquier subconjunto conexo de $W \cap H$ esta dentro de S o fuera de S .

Entonces por el Lema 6.5 como casi todas las imágenes intersecan S , hay infinitas imágenes contenidas en $W \cap H \cap S$. Para cada una de ellas aplicamos el Lema 6.3 y en algún momento esas imágenes saldrán de S . Éstas serán infinitas, y contradice el Lema 6.5. \square

Veamos ahora un refinamiento del lema anterior en el que prescindimos de la hipótesis de que haya infinitas imágenes contenidas en H .

Lema 6.7. *Sea $V \neq \emptyset$ un conjunto abierto y conexo de \mathbb{C} . Entonces alguna imagen de V interseca \mathbb{R} .*

Demostración. Argumentamos por absurdo. Supongamos que ninguna imagen de V interseca \mathbb{R} . Por el Teorema de Montel (5.5) la sucesión $\{E^n|_V\}_{n \geq 0}$ es normal. Sea f_0 el límite de la subparcial $\{E^{n_\ell}|_V\}_{\ell \geq 0}$. Sea $z \in f_0(V)$.

Si $z \in \mathbb{R}$ por el Lema 6.2 existe un k tal que $E^k(z) \in H$. Entonces la sucesión $\{E^{n_\ell+k}|_V\}_{\ell \geq 0}$ converge a $f_1 := (E^k \circ f_0)$ y existe $w_1 \in V$ tal que $f_0(w_1) = z$ que cumple $f_1(w_1) \in H$.

Si $z \notin \mathbb{R}$, por el Lema 6.3 existe m tal que $E^m(z) \notin S$. Entonces la sucesión $\{E^{n_\ell+m}|_V\}_{\ell \geq 0}$ converge a $f_2 := (E^m \circ f_0)$ y existe $w_2 \in V$ tal que $f_0(w_2) = z$ que cumple $f_2(w_2) \notin S$.

En ambos casos existe $w \in V$ y un entorno abierto $U \subset V$ de w tal que $f_1(U) \subset H$ o $f_2(U) \cap S = \emptyset$ y, por tanto, hay infinitos iterados tales que $E^n(U) \subset H$ o $E^n(U) \cap S = \emptyset$. Finalmente, si hay infinitas imágenes en H por el Lema 6.6 alguna imagen de U (y por tanto de V) intersecará \mathbb{R} , y si hay infinitas imágenes fuera de S entraríamos en contradicción del Lema 6.5 y, por tanto, alguna imagen de V intersecaría \mathbb{R} . \square

Veamos ahora que el conjunto de puntos que intersecan \mathbb{R} en algunas de las imágenes de V son densos en U .

Lema 6.8. *Sea V un conjunto que cumple las hipótesis del lema anterior y sea $A = \{z \in V : E^k(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \text{ para algún } k\}$. Entonces A es denso en U .*

Demostración. Por el Lema 6.7 sabemos que A es no vacío. Si A no fuera denso en V , existiría $U \subseteq V$ abierto tal que $U \cap A = \emptyset$. Aplicando el Lema 6.7 a U tenemos que $\exists a \in U \subseteq V / E^k(a) \in \mathbb{R}$. Luego $a \in A$ por definición de A . Esto es contradicción, ya que $a \in U$, $a \in A$ y $U \cap A = \emptyset$. \square

Lema 6.9. *Sea U un conjunto abierto y conexo. Sea $A \subset U$ un subconjunto denso de U . Sea $\{f^n\}_n$ una sucesión que converge puntualmente a ∞ en A . Si $\{f^n\}_n$ es normal en U entonces converge uniformemente a infinito en U .*

Demostración. Primero demostraremos que para toda parcial de $\{f^n|_U\}_n$ existe una subparcial uniformemente convergente sobre compactos de U a ∞ . Luego, por contrareciproco, veremos que eso implica que $\{f^n|_U\}_n$ converge uniformemente a ∞ .

En efecto, por ser $\{f^n\}_n$ normal en U , para toda parcial $\{f^{n_k}|_U\}_{n_k}$ existe una subparcial $\{f^{n_{k_j}}|_U\}_{n_{k_j}}$ uniformemente convergente sobre compactos de U a una función $g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa. Además, como $f^n|_A \rightarrow \infty$ sabemos que $g|_A \equiv \infty$. Por tanto, como $g \in \mathcal{H}(U)$ (y en particular $g \in \mathcal{C}^0(U)$) tenemos que $g|_U \equiv \infty$.

Vayamos a la segunda parte. Supongamos que $\{f^n|_U\}_n$ no converge uniformemente sobre compactos de U a ∞ . Debemos encontrar un compacto y una subparcial tal que no converja uniformemente a ∞ en ese compacto. Como $\{f^n|_U\}_n$ no converge uniformemente sobre compactos de U a ∞ existe un compacto $K \subset U$ tal que $f^n|_K$ tiene una parcial acotada. Luego, esta parcial no tendrá ninguna subparcial convergente uniformemente sobre K a ∞ . \square

Finalmente, procedemos a demostrar el que es el objetivo de esta sección.

Teorema 6.10 (M. Misiurewicz, 1980).

$$\mathcal{J}(E_1) = \mathbf{C}$$

Demostración. Argumentamos por contradicción. Supongamos que $\mathcal{J}(E) \neq \mathbf{C}$. Sea $x \in \mathcal{F}(E)$ y sea U un entorno (abierto y conexo) de x tal que $\{E^n|_U\}_{n=0}^\infty$ es normal. Aplicando el Lema 6.8 a U tenemos que A (el conjunto de puntos que en algún momento intersecan \mathbb{R} por iteración de E) es denso en U . También por el Lema 6.2 se cumple que $E^n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ para todo $a \in A$. Por tanto, por el Lema 6.9 tenemos que $\{E^n|_U\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a ∞ .

Como $E^n|_U$ converge uniformemente a ∞ , existe N_1 tal que $\forall n \geq N_1$ se cumple $|E^n(z)| > e^4 \forall z \in U$ y, por tanto, $|E^{n-1}(U)| \subseteq H$.

Por otro lado, por el Lema 6.7 alguna imagen de U interseca \mathbb{R} y como \mathbb{R} es invariante por $E(z)$, todas las siguientes imágenes también intersecarán \mathbb{R} . En otras palabras, existe N_2 tal que $E^n(U)$ interseca $\mathbb{R} \forall n \geq N_2$.

Además, también existe N_3 tal que $E^n(U) \not\subseteq S$ si $n \geq N_3$. En efecto, como $E(z)$ es abierta (ya que es holomorfa) y U es abierto, todas sus imágenes son abiertos, por lo que no hay ninguna imagen que esté contenida en \mathbb{R} , ya que \mathbb{R} es cerrado en \mathbf{C} . Ahora ya tenemos la hipótesis del Lema 6.3 y, por tanto, $\exists N_3$ tal que $\forall n \geq N_3 E^n(U) \not\subseteq S$.

Definimos $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$. A continuación se muestran los conjuntos S, H, W_1 y ∂W_2 .

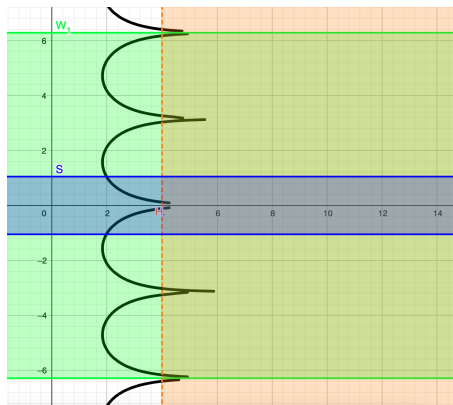


Figura 6.2: Visualización gráfica de todos los conjuntos utilizados en los lemas anteriores.

El conjunto $E^n(U)$ es conexo, ya que U es conexo y $E(z)$ es continua. Habíamos visto que, para $n \geq N$, $E^n(U)$ tenía al menos un punto en \mathbb{R} y al menos un punto fuera de S (todos ellos contenidos en H), por lo que para todo $n \geq N$ existe al menos un camino entre ambos puntos. Estos infinitos caminos por fuerza tienen que cortar ∂S en infinitos puntos z_N, z_{N+1}, \dots y como ∂S es disjunto de los picos de $W \cap H$ (visto en el Lema 6.6), entonces $z_N, z_{N+1}, \dots \notin W \cap H$. Luego $z_N, z_{N+1}, \dots \notin W$. Estos infinitos puntos o bien no están en W_1 o bien no están en W_2 .

A continuación veremos que existen infinitos k tales que $E^k(U)$ tiene un punto w_k que no está en W_1 .

Sean $B_1 := \{k : z_k \notin W_1\}$ y $B_2 := \{k : z_k \notin W_2\}$. Tenemos $\#(B_1 \cup B_2) = \infty$, por lo que $\#B_1 = \infty$ o $\#B_2 = \infty$.

Si $\#B_1 = \infty$, para cada k basta definir $w_k := z_k$. Si $\#B_2 = \infty$, definimos para cada k de B_2 $w_k := E(z_k)$. Se cumple $w_k \in E^{k+1}(U)$. Como $k \in B_2$, i.e., $z_k \notin W_2$, $|\operatorname{Im}(E(z_k))| = |\operatorname{Im}(w_k)| > 2\pi$. Luego $w_k \notin W_1$. Por tanto, para cada k hemos encontrado un w_k tal que pertenece a $E^{k+1}(U)$ y $w_k \notin W_1$.

Sea ahora $C := \{k : \exists w_k \in E^k(U) \wedge w_k \notin W_1\}$. Para todo $k \in C$, $E^k(U)$ es conexo. Además, tiene un punto en \mathbb{R} y otro punto con módulo de la parte imaginaria mayor que 2π . En consecuencia, existe un camino que corta $\mathbb{R} + i\pi$ en un punto $t_k = r_k + i\pi$, $r_k \in \mathbb{R}$. Es inmediato ver que la imagen de esos puntos es negativa y luego la segunda imagen está acotada por $(0, 1)$. Esto es contradicción, ya que como $E^n|_U$ converge uniformemente a ∞ , para $R = 2 \exists n_0 : |E^n(z)| > 2 \forall n \geq n_0, \forall z \in U$, pero como $t_k \in U \forall k$ y son infinitos, definiendo n' como el mínimo k tal que $k \geq n_0$ y $n' \in C$ se cumple $E^2(t_{n'}) \not> 2$. \square

Capítulo 7

Dinámica de E_λ en un entorno concreto de $\lambda = 1$

En el capítulo anterior demostramos que si $\lambda = 1$ la familia exponencial compleja tenía como conjunto de Julia todo el plano complejo. En este capítulo vamos a indagar más sobre la dinámica de E_λ para valores distintos de λ . En concreto, para algunos valores de la forma $\lambda = e^{i\theta}$ con $\theta \gtrsim 0$. Estos son números complejos con módulo 1 (situados en el disco unidad) que se aproximan a $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ por arriba. En otras palabras, si tomamos (x, y) como coordenadas del plano complejo, serían algunos (x, y) cumpliendo $x^2 + y^2 = 1$ con $x \lesssim 1$ y $y \gtrsim 0$. Este resultado fue probado por R. Devaney en [5].

A lo largo de esta sección, por comodidad trataremos E_θ en vez de E_λ donde $\lambda = e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$. A lo largo de este capítulo también consideraremos la región

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2 \wedge 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}.$$

Definimos $z_0 = x_0 + iy_0$ y $z_1 = E_\theta(z_0) = x_1 + iy_1$. Observamos que z_0 no depende de θ sea cual sea θ , pero z_1 sí.

Lema 7.1. *Existe un $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ tal que si $\theta \leq \theta_1$ y $z_0, z_1 \in S$ entonces se cumple:*

- (i) $x_1 > 2x_0 + 1$
- (ii) $y_1 > 2y_0$

Observamos que la hipótesis de que $z_0, z_1 \in S$ implica que z_0 tiene que estar en una región muy determinada de S donde a medida que x_0 crece, y_0 tiene que disminuir notablemente. Esto es debido a lo rápido que crece la función exponencial. Por ejemplo, si $x_0 = 2$, entonces $y_1 = \operatorname{Im}(E_\theta(z_0)) = e^2 \sin(\theta + y_0)$, por lo que y_0 tendrá que ser menor que $\frac{\pi}{8}$ sea cual sea θ . Si en vez de $x_0 = 2$ tomamos $x_0 = 10$, entonces y_0 tendrá que ser menor que $\frac{\pi}{500}$. Como vemos, un pequeño aumento de x_0 provoca una reducción brutal de y_0 .

Demostración. Consideremos el caso $\theta = 0$. Este caso no es de interés por sí mismo, ya que hemos impuesto $\theta_1 > 0$, pero encontrar unas cotas de x_1 e y_1 en este caso nos servirá posteriormente para nuestro objetivo. Observamos que $y_0 < \frac{\pi}{2}$. En efecto, podemos pensar $z_1 = e^{x_0 + iy_0}$ como el número complejo que surge de rotar de $e^{x_0} \in \mathbb{R}$ exactamente y_0 grados. Entonces, si $y_0 \geq \frac{\pi}{2}$ entraríamos en la contradicción de que $z_1 \notin S$, ya que $x_1 \leq 0$.

Por otra parte, como $y_1 = e^x \sin y_0 \leq \pi$ y $x_0 \geq 2$ entonces $\sin y_0 \leq \frac{\pi}{e^{x_0}} \leq \frac{\pi}{e^2}$. Por la identidad fundamental de la trigonometría esto implica que $\cos y_0 > 0,8$. En consecuencia de todo lo mencionado,

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{x_0} \cos y_0 > 0,8e^{x_0} > 2x_0 + 1,5 \\ y_1 &= e^{x_0} \sin y_0 > e^{x_0} \cdot \frac{y_0}{2} > y_0 \cdot \frac{e^2}{2} > 3y_0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Abordemos ahora el caso $\theta > 0$. Observamos que $E_\theta(z) = e^{i\theta} E_0(\theta)$. Para ver (i) utilizaremos que

$$x_1 > 2x_0 + 1 \iff \operatorname{Re}(E_\theta(z_0)) + \frac{1}{2} > 2x_0 + 1,5 \iff \frac{1}{2} > 2x_0 + 1,5 - \operatorname{Re}(E_\theta(z_0)).$$

Como en (7.1) hemos visto que $\operatorname{Re}(E_0(z_0)) > 2x_0 + 1,5$ lo anterior es equivalente a

$$\operatorname{Re}(E_0(z_0) - E_\theta(z_0)) < \frac{1}{2}. \quad (7.2)$$

Para ello, probemos primero que si $E_\theta(z_0) \in S$ entonces

$$\operatorname{Re}(E_0(z_0)) < \frac{\pi}{\sin(\theta)}. \quad (7.3)$$

En efecto, si

$$E_\theta(z_0) = e^{i\theta} E_0(z_0) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\operatorname{Re}(E_0(z_0)) + i \operatorname{Im}(E_0(z_0))) \in S$$

entonces su parte imaginaria debe ser menor o igual a π , es decir,

$$\operatorname{Im}(E_\theta(z_0)) = \cos(\theta) \operatorname{Im}(E_0(z_0)) + \sin(\theta) \operatorname{Re}(E_0(z_0)) < \pi.$$

Pasando la parte izquierda al otro lado de la desigualdad y teniendo en cuenta que $\cos(\theta) \operatorname{Im}(E_0(z_0)) \geq 0$ se obtiene el resultado buscado

$$\sin(\theta) \operatorname{Re}(E_0(z_0)) < \pi - \cos(\theta) \operatorname{Im}(E_0(z_0)) < \pi.$$

Volviendo a (7.2) veamos que $\operatorname{Re}(E_0(z_0) - E_\theta(z_0)) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ que nos implica lo que queríamos probar.

$$\begin{aligned} 0 &< \operatorname{Re}(E_0(z_0) - E_\theta(z_0)) = \operatorname{Re}(E_0(z_0)) - \operatorname{Re}(e^{i\theta} E_0(z_0)) \\ &= \operatorname{Re}(E_0(z_0)) - [\cos(\theta) \operatorname{Re}(E_0(z_0)) - \sin(\theta) \operatorname{Im}(E_0(z_0))] \\ &= \operatorname{Re}(E_0(z_0))(1 - \cos \theta) + \operatorname{Im}(E_0(z_0)) \sin \theta < \frac{\pi}{\sin \theta}(1 - \cos \theta) + \pi \sin \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene de (7.3) y de que $\operatorname{Im}(E_0(z_0))$ no es más que y_1 en el caso $\theta = 0$ por lo que pertenece a $[0, \pi]$. Por lo probado, existe θ'_1 tal que para $0 < \theta'_1 < \frac{\pi}{2}$ se cumple (i).

Pasemos a ver (ii). Si encontramos un θ_1 tal que para todo $\theta < \theta_1$ se cumple $\operatorname{Im}(E_\theta(z_0)) > \operatorname{Im}(E_0(z_0))$ ya habremos terminado, ya que $\operatorname{Im}(E_0(z_0))$ es z_1 cuando $\theta = 0$ y en (7.1) hemos visto que es mayor que $3y_0$. En otras palabras, buscamos un ángulo θ''_1 tal que si rotamos los puntos $E_0(z_0)$ exactamente θ''_1 grados en sentido antihorario, la parte imaginaria de sea mayor. En efecto, estos puntos son los puntos z_1 cuando $\theta = 0$ por lo que pertenecen a S . Usando trigonometría observamos que para cualquier $\theta''_1 < 2 \arctan(\frac{2}{\pi})$ se cumple lo dicho anteriormente (ver Figura 7.1).

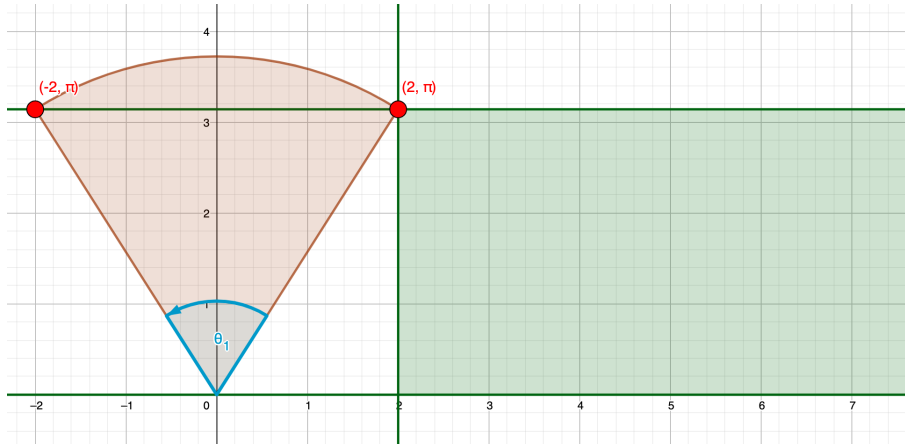


Figura 7.1: Rotación de ángulo θ_1 del punto $2+i\pi$.

Finalmente tomando $\theta_1 = \min\{\theta'_1, \theta''_1\}$ terminamos la demostración. □

Observamos que existe $\theta_2 > 0$ tal que $E_\theta^2(0) \in S$. Definimos el conjunto $G_n(\theta) = E_\theta^n(0)$ con $0 \leq \theta < \min\{\theta_1, \theta_2\}$. Observamos que $G_1(\theta) = E_\theta(0) = e^{i\theta}e^0$ que es un arco de la circunferencia de radio 1 centrada en 0. $G_2(\theta) = E_\theta^2(0)$ es una curva que corta $y = 0$ en $G_2(0) = E_\theta^2(0) = e^{e^0} = e$.

Sea $\gamma_n(\theta)$ la componente conexa de $S \cap G_n(\theta)$ que contiene $E_0^n(0)$. Observamos que $\gamma_n(\theta)$ tiene infinitos puntos para todo $n \leq 2$. Intuitivamente, los conjuntos γ_n son curvas que parten de $y = 0$ cuyos valores de x están cada vez más separados a medida que n aumenta. Debido a este hecho, las curvas van siendo cada vez más verticales como se observa en la Figura 7.2, ya que dado un valor de θ , como el lado adyacente al ángulo es cada vez mayor, el efecto de la rotación afecta cada vez menos.

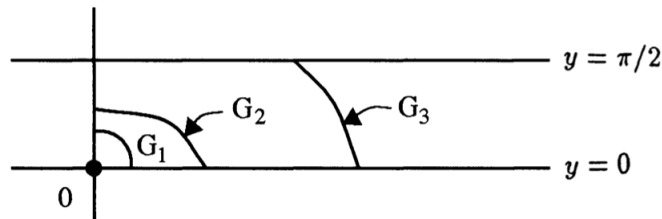


Figura 7.2: Visualización gráfica de un trozo de $G_1(\theta)$, $G_2(\theta)$ y $G_3(\theta)$.

Notamos que para n suficientemente grande $\gamma_n(\theta)$ une las rectas $y = 0$ e $y = \pi$. Claramente, $\exp(\gamma_n(\theta))$ conecta \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^- . Además, como $\theta < 2 \arctan \frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{2}$, entonces $E_\theta(\gamma_n(\theta)) = e^{i\theta} \exp(\gamma_n(\theta))$ interseca \mathbb{R}^- .

Redefinimos θ_n como el ángulo tal que $E_{\theta_n}(\gamma_n(\theta_n)) \in \mathbb{R}^-$. Denotamos este punto como $z_{n+1} := E_{\theta_n}(0)$. De igual manera definimos los puntos predecesores $z_j := E_{\theta_n}^j(0) = x_j + iy_j$ para $0 \leq j \leq n$. Observamos que $z_0 = 0$, $|z_1| = 1$ y $z_{n+1} \in \mathbb{R}^-$. Obviamente, $z_j \in S \forall 2 \leq j \leq n$ para n suficientemente grande.

Lema 7.2. Para cada n , se cumple la desigualdad

$$2 + \sum_{j=1}^n (x_j + 1) < e^{x_n}$$

Demostración. Como $x_2 \geq x_1 + 1$ ya que $z_2 \in S$ (luego $x_2 \geq 2$) y $|z_1| \leq 1$ (luego $x_1 \leq 1$) se tiene

$$2 + \sum_{j=1}^n (x_j + 1) = 2 + \sum_{j=2}^{n-1} (x_j + 1) + (x_1 + 1) + (x_n + 1) \leq 3 + \sum_{j=2}^{n-1} (x_j + 1) + x_2 + x_n$$

Como $z_j \in S$ para todo $2 \leq j \leq n$, entonces si $2 \leq j \leq n - 1$ estamos en las hipótesis del Lema 7.1, por lo que $x_{j+1} \geq 2x_j + 1$. Luego $x_{j+1} - x_j \geq x_j + 1$. Tenemos entonces

$$3 + \sum_{j=2}^{n-1} (x_j + 1) + x_2 + x_n \leq 3 + \sum_{j=2}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) + x_2 + x_n = 3 + (x_n - x_2) + x_2 + x_n = 3 + 2x_n$$

Finalmente, $3 + 2x_n < e^{x_n}$ ya que $x_n \geq 2$. \square

Construyamos ahora una sucesión de radios de discos que posteriormente definiremos. Primeramente $r_{k+1} = 1$. Definimos otros $k + 1$ discos recursivamente hacia atrás con radios $r_k = r_{k+1}/e^{x_k}e$ para $0 \leq k \leq n$. Observamos que $r_j < r_j + 1$ y $r_j < 1$ para $j \leq n$. Sean $B_j = D(z_j, r_j)$ con $j = 1, \dots, n$ cerrados.

Proposición 7.3. Si $z \in B_0$, entonces $E_\theta^j(z) \in \mathring{B}_j$ para $0 \leq j \leq n + 1$. Además,

$$|(E_\theta^{n+1})'(z)| < e^{n+1} \prod_{j=0}^n e^{x_j} = \frac{1}{r_0}. \quad (7.4)$$

Demostración. Basta ver que si $z \in D(z_j, r_j)$, entonces $E_\theta(z) \in \mathring{B}_{j+1} = \mathring{D}(z_{j+1}, r_{j+1})$. Supongamos $|z - z_j| \leq r_j$. Sea $M_j = \sup_{z \in B_j} |E'_\theta(z)|$. Entonces, para $j \leq n$, tenemos que por el Teorema del valor medio

$$|E_\theta(z) - z_{j+1}| = |E_\theta(z) - E_\theta(z_j)| \leq M_j |z - z_j| = M_j r_j.$$

Calculemos explícitamente M_j . Tenemos $E'_\theta(z) = \lambda e^z$, por lo que $|E'_\theta(z)| = e^x$. Queremos encontrar el $z \in B_j$ tal que maximice e^x , o sea x , es decir, la parte real de z . Éste será el extremo derecho del disco: $z = x_j + r_j$. Volviendo a la desigualdad anterior, se concluye

$$M_j r_j \leq e^{x_j + r_j} \cdot r_j < e^{x_j} e \cdot r_j = r_{j+1}$$

donde la última desigualdad se obtiene de que $r_j < 1$ para todo $j \leq n$.

Veamos ahora (7.4). Calculemos la parte de la izquierda a partir de la regla de la cadena

$$(E_\theta^{n+1})'(z) = E'_\theta(E_\theta^n(z))(E_\theta^n)'(z) = E_\theta(E_\theta^{n+1}(z))(E_\theta^n)'(z) = \dots = E_\theta^{n+1}(z) \cdot \dots \cdot E_\theta(z).$$

Por otra parte, como $E_\theta^j(z) = e^{i\theta} e^{E_\theta^{j-1}(z)} \in \mathbb{C}$, tenemos

$$|(E_\theta^{n+1})'(z)| = \prod_{j=1}^{n+1} |E_\theta^j(z)| = \prod_{j=1}^{n+1} e^{\operatorname{Re}(E_\theta^{j-1}(z))} = \prod_{j=0}^n e^{\operatorname{Re}(E_\theta^j(z))}$$

Aplicando lo visto anteriormente, tenemos que $\operatorname{Re}(E_\theta^j(z)) < x_j + r_j$, por lo que, como $r_j < 1$, entonces

$$(E_\theta^{n+1})'(z) = \prod_{j=0}^n e^{\operatorname{Re}(E_\theta^j(z))} < \prod_{j=0}^n e^{x_j+r_j} < \prod_{j=0}^n e \cdot \prod_{j=0}^n e^{x_j} = e^{n+1} \prod_{j=0}^n e^{x_j}.$$

□

Teorema 7.4 (R.L. Devaney, 1994).

$$\mathcal{J}(E_{\theta_n}) \neq \mathbf{C}$$

Demostración. Para demostrarlo, basta ver que E_{θ_n} tiene un punto periódico atractor de periodo $n+2$ en B_0 . Volvamos a usar la notación $\theta = \theta_n$. De la Proposición 7.3 se extrae que $E_\theta^{n+1}(B_0) \subsetneq B_{n+1}$. Procedamos a ver que $E_\theta(B_{n+1}) \subsetneq B_0$. Sea $z \in B_{n+1}$. Basta ver que $|E_\theta(z)| < r_0$. Como $r_j \leq 1$ para todo j , $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z_{n+1}) + 1 = x_{n+1} + 1$. Además, como

$$|z_{n+1}| = |E_\theta(z_n)| = |e^{i\theta} e^{x_n+iy_n}| = |e^{x_n}|,$$

se tiene que $\operatorname{Re}(z) \leq -e^{x_n} + 1$. Aplicando el Lema 7.2 a $-e^{x_n}$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |E_\theta(z)| &= |e^{\operatorname{Re}(z)}| \leq \exp(-e^{x_n} + 1) = e \cdot \exp(-e^{x_n}) < e \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^n (x_j + 1) - 2\right) \\ &= e \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^n x_j - n\right) e^{-2} = e^{-1} \left(\prod_{j=0}^n e^{x_j}\right)^{-1} e^{-n} = r_0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Anteriormente generamos una sucesión infinita de discos compactos encajados. Por el Teorema de la intersección de Cantor sabemos que la intersección será no vacía. Escogemos un punto w de esta intersección. Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$|(E_\theta^{n+2})'(w)| = |(E_\theta^{n+1}(E_\theta))'(w)| = |(E_\theta^{n+1})'(E_\theta(w))E_\theta'(w)| < \frac{1}{r_0} r_0 = 1.$$

donde la última desigualdad se obtiene de la Proposición 7.3 y (7.5). Este punto será atractor y, por tanto, de la propiedad 5.6 (2) podemos concluir que $\mathcal{F}(E_{\theta_n}) \neq \emptyset$. □

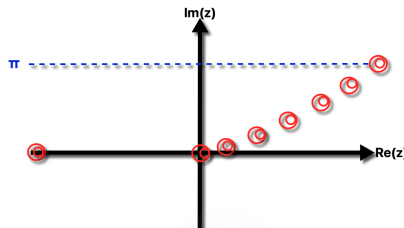


Figura 7.3: Visualización intuitiva de la construcción de discos compactos encajados.

Capítulo 8

Conclusiones

La dinámica holomorfa se estudia durante el grado de matemáticas de forma superficial. Una de las principales causas es que la asignatura donde se estudian (*Models matemàtics i sistemes dinàmics*) es anterior a la asignatura de *Anàlisi Complexa*. Después de unos meses indagando sobre esta rama y elaborando este trabajo, pudimos constatar que tiene una componente interdisciplinar dentro de los distintos campos en matemáticas y por ello resultó ser una magnífica elección a la hora de escoger la temática para el trabajo de fin de grado.

Otro de los aspectos positivos de haber trabajado en dinámica holomorfa es lo muy reciente que esta rama. Como muy acertadamente me comentó una vez un gran profesor, por desgracia, la totalidad de las matemáticas que se estudian en el grado son matemáticas muertas, matemáticas que ya están resueltas y trabajadas desde hace mucho. En cambio, sin ir más lejos, los dos grandes resultados que se demuestran en este trabajo son relativamente recientes y fueron probados por matemáticos vivos a día de hoy.

No obstante, se quiere poner de manifiesto que, en la actualidad, lo que se sabe sobre la familia exponencial compleja es más de lo que se expone en este trabajo. De hecho, hay resultados mucho más generales como el que se puede encontrar en [7]:

Teorema 8.1. *Sea $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Entonces una de las siguientes condiciones se cumple para el conjunto de Julia de esta función:*

1. *Si la órbita de 0 tiende a infinito, entonces el conjunto de Julia es \mathbb{C}*
2. *Si 0 es preperiódico, entonces el conjunto de Julia es \mathbb{C}*
3. *Si existe una O.P. atractora o neutral, entonces $\text{Int}(\overline{\mathcal{J}(E_\lambda)}) = \emptyset$.*

Observamos que el resultado que demostramos en el capítulo 6 es un caso particular de la primera afirmación, ya que $\mathcal{O}(0) = \{0, 1, e, e^e, e^{e^e}, \dots\}$ que tiende, naturalmente, a infinito. De ahí que la riqueza de este trabajo no se encuentra en la importancia actual de los resultados sino en la que tuvieron en el momento de su publicación y, sobre todo, en la profundidad en la que se abordan.

Además, resulta *matemáticamente bonito* que los resultados que se han escogido para este trabajo, se demuestran rigurosamente sin la necesidad de uso de objetos matemáticos que son actualmente estudiados en profundidad en el entorno de la dinámica holomorfa como son los discos de Siegel, dominios de Baker, etc.

Apéndice A

Plano de parámetros y plano dinámico

Este anexo tiene como propósito ilustrar los resultados demostrados durante el trabajo de manera visual e intuitiva, especialmente en el capítulo 7. Para dicho objetivo, se mostrarán imágenes obtenidas a partir del programa *It*. Este programa permite visualizar los planos de parámetros y planos dinámicos de funciones pudiendo modificar el nivel de precisión. Procedamos a explicar, brevemente, qué son el plano de parámetros y el plano dinámico.

El **Plano de Parámetros** es un plano cartesiano en el que sus puntos corresponden a los diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. Los puntos del plano se *pintan* de diferentes colores en función de lo que queramos mostrar acerca del comportamiento de la función. De color negro, pintamos los puntos (es decir, los $\lambda \in \mathbb{C}$) tales que, para ese valor de λ existe una órbita periódica atractora. En azul, los puntos tales que existe una órbita periódica de periodo k previamente fijado. Los puntos en rojo corresponden a los puntos donde no podemos concluir que existe una órbita periódica.

Se puede observar que en los planos de parámetros que mostraremos en esta sección hay una curva muy fina en forma de círculo. Éste se corresponde con el círculo unidad y vemos que interseca con las líneas azules que, como hemos comentado previamente, coinciden con los valores de λ tal que existe una órbita periódica de periodo k . Esto ilustra visualmente el resultado de R. Devaney que afirma la existencia de órbitas periódicas de diferentes periodos en determinados valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para demostrar que $\mathcal{F}(E_\lambda) \neq \emptyset$ para dichos valores de λ .

El **Plano Dinámico** es un plano en el que, fijado un valor de λ , los puntos corresponden a los valores de todas las semillas $z \in \mathbb{C}$. Nosotros hemos escogido los valores de λ para los cuales existe una órbita periódica de periodo k previamente fijado, y hemos obtenido el respectivo plano dinámico. En este, hemos pintado en color azul los puntos periódicos o preperiódicos, es decir, que pertenecen Fatou.

Queremos hacer énfasis en que estas imágenes han estado obtenidas a partir de un programa (*It*) que genera las imágenes a partir de métodos numéricos con precisión finita. Por lo tanto, son aproximaciones con un nivel finito de precisión. A continuación presentaremos los planos de parámetros y dinámicos de periodos 3, 4, 5, 6 y 7.

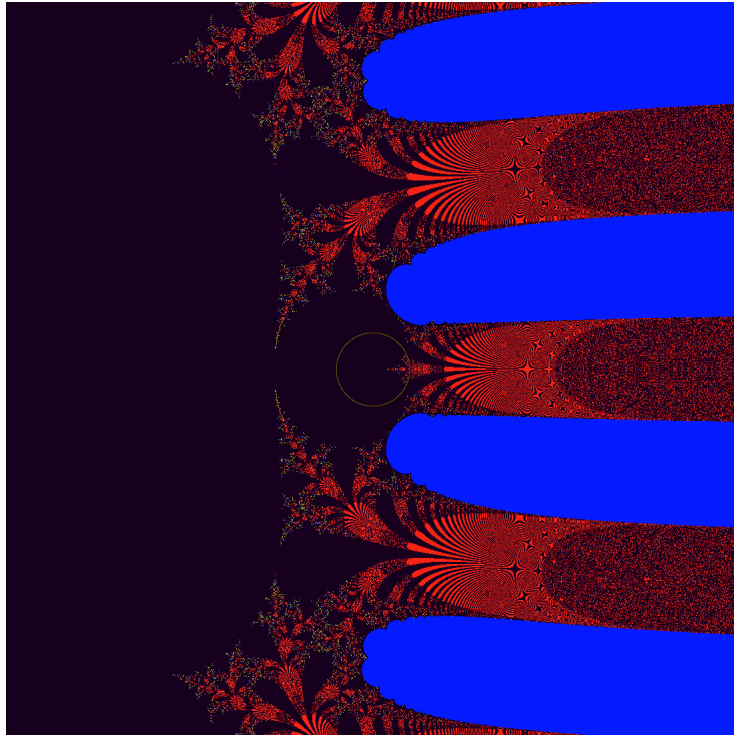


Figura A.1: Plano de parámetros de E_λ tomando $k = 3$.

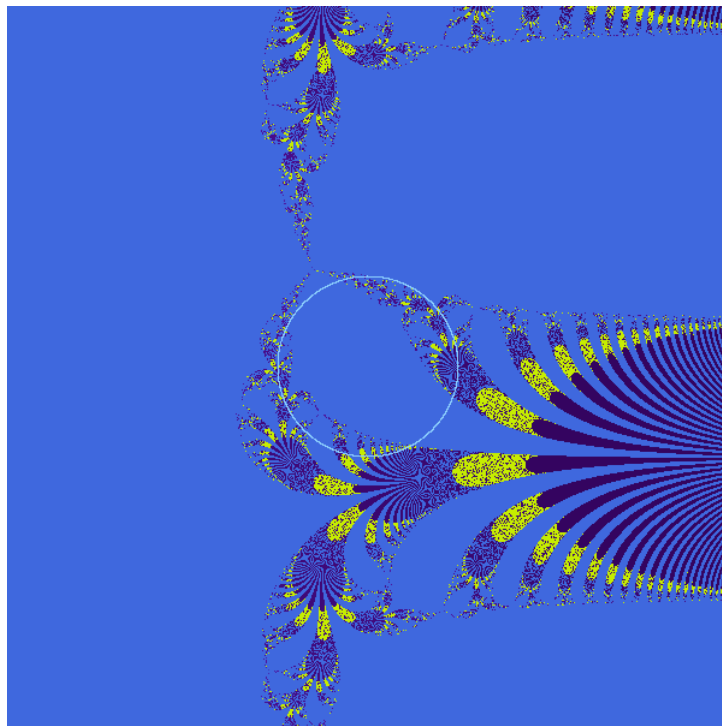


Figura A.2: Plano dinámico de E_λ para λ tal que existe O.P. de periodo 3.

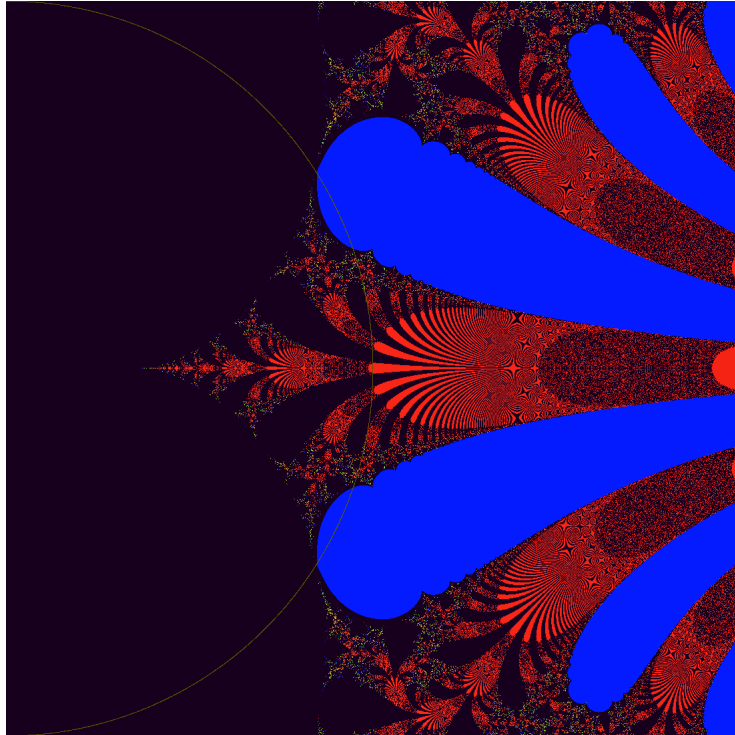


Figura A.3: Plano de parámetros de E_λ tomando $k = 4$.

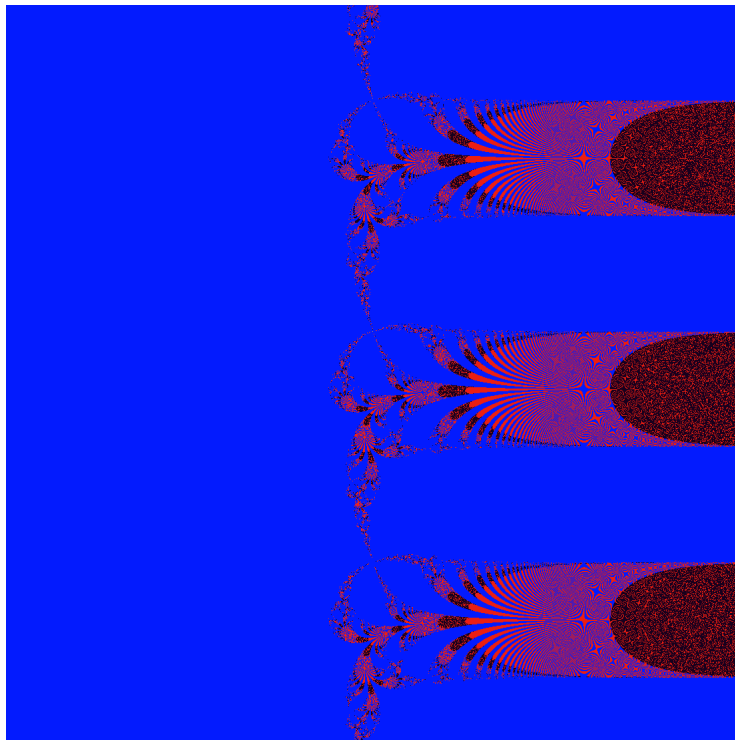


Figura A.4: Plano dinámico de E_λ para λ tal que existe O.P. de periodo 4.

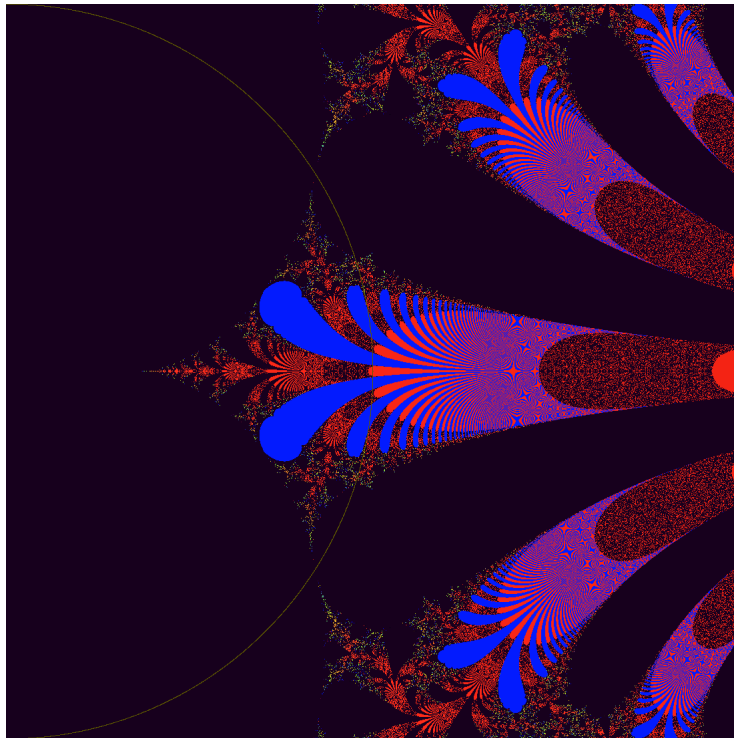


Figura A.5: Plano de parámetros de E_λ tomando $k = 5$.

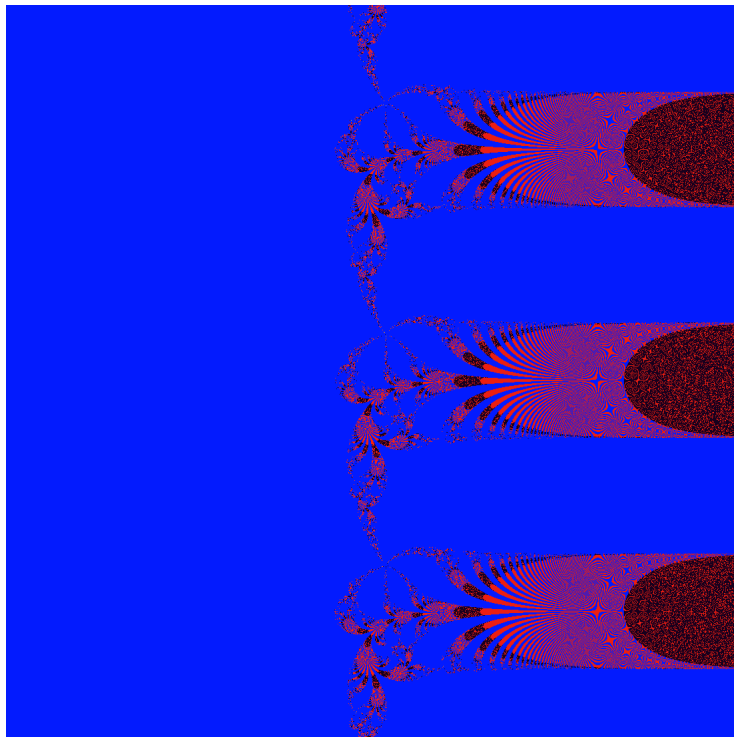


Figura A.6: Plano dinámico de E_λ para λ tal que existe O.P. de periodo 5.

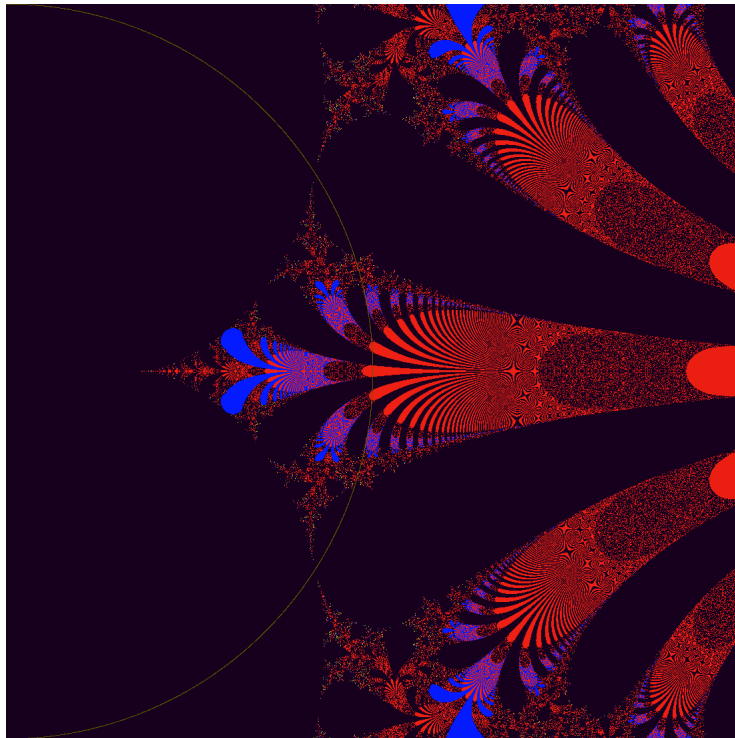


Figura A.7: Plano de parámetros de E_λ tomando $k = 6$.

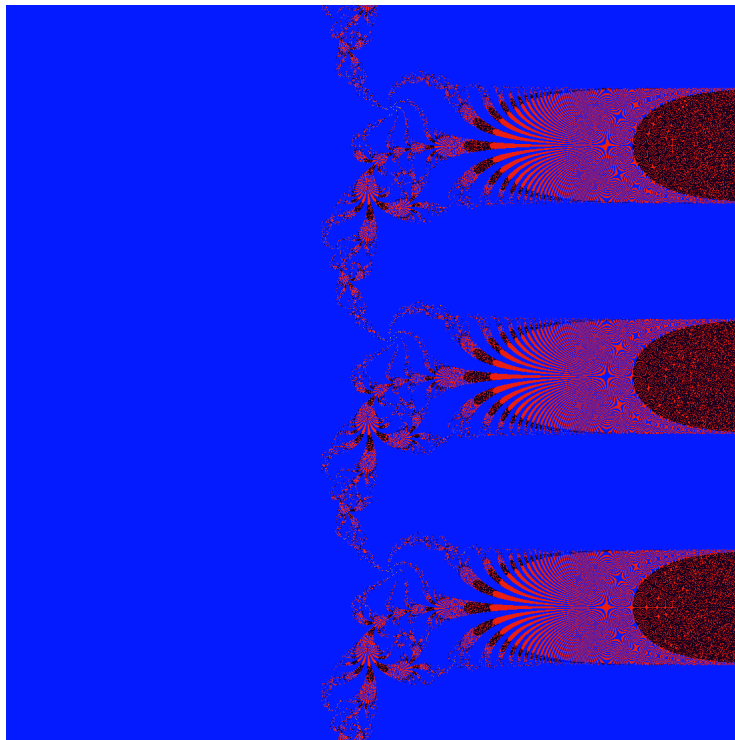


Figura A.8: Plano dinámico de E_λ para λ tal que existe O.P. de periodo 6.

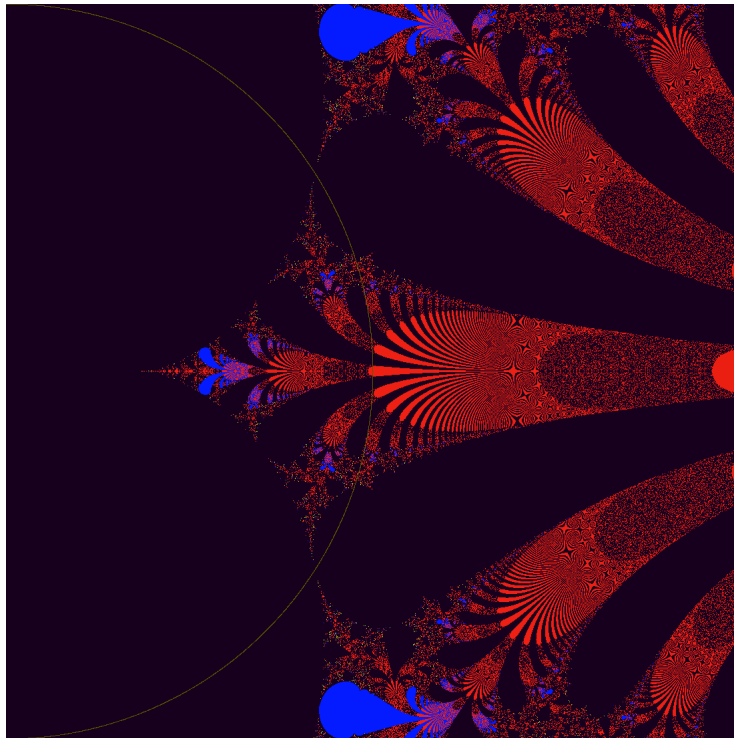


Figura A.9: Plano de parámetros de E_λ tomando $k = 7$.

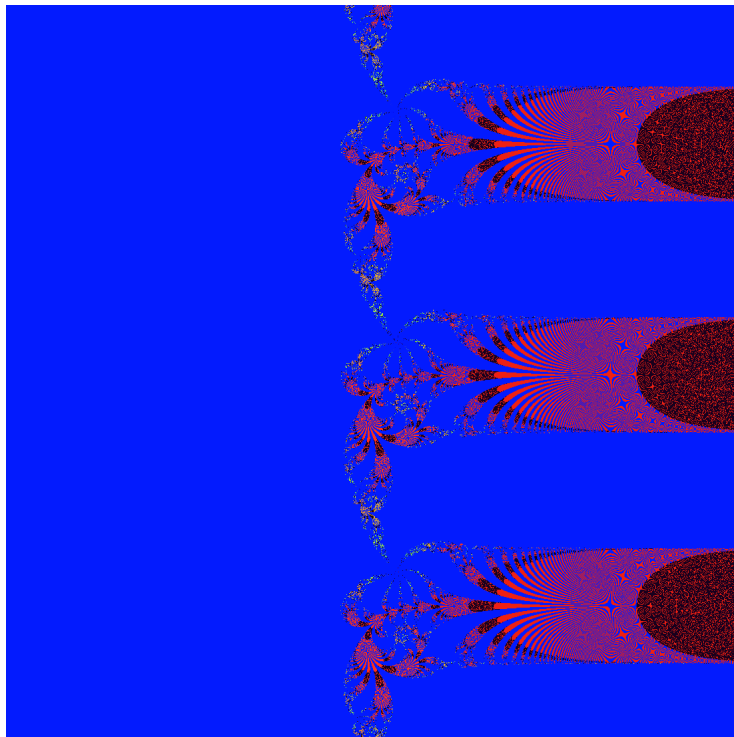


Figura A.10: Plano dinámico de E_λ para λ tal que existe O.P. de periodo 7.

Por último, representamos el espacio dinámico para $\lambda = 1$. En el capítulo 6 demostramos que para ese valor Julia era todo el plano. Luego, por la Propiedad 5.6 (5), todos los puntos escapan a infinito en parte real. Lo que hemos hecho es pintar en distintos colores los puntos que tienden a velocidades diferentes hacia infinito.

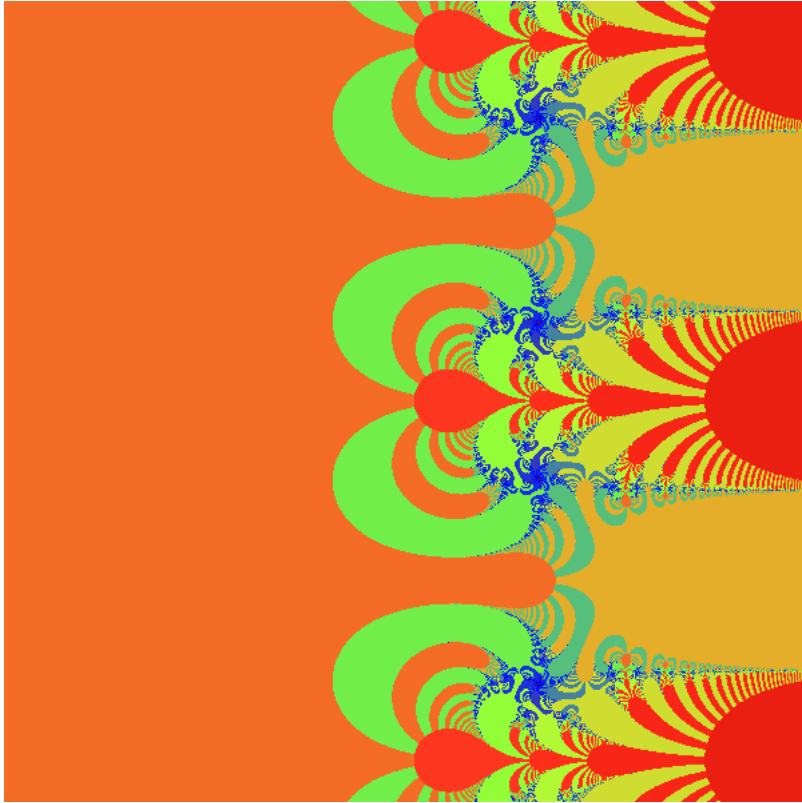


Figura A.11: Visualización intuitiva de la construcción de discos compactos encajados.

Referencias

- [1] Misiurewicz M., *On iterates of e^z* , *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **1** (1981), 103-106.
- [2] Fatou P., *Sur l'itération des fonctions transcendentes Entières*, *Acta Math.* **47** (1926), 337-370.
- [3] I.N. Baker. *Limit functions and sets of non-normality in iteration theory*. *Ann. Acad. Scie. Fennicae, Ser. A.I. Math.* **467** (1970)
- [4] H. Töpfer. *Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von \sin and \cos* . *Math. Ann.* **117** (1940), 65-84.
- [5] Robert L. Devaney, *Complex dynamics and entire functions*. In *Complex Dynamical systems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1994), 181-206.
- [6] Núria Fagella y Xavier Jarque. *Iteración Compleja y Fractales*, volumen 1. (2007).
- [7] M. A. Montes de Oca, *Un primer entrón a la familia $f_{\lambda,\mu} = \lambda e^z + \frac{\mu}{z}$* , (2012).
- [8] T.W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer, (2001).
- [9] J.R. Munkres, *Topología. 2^a edición*, Massachusetts Institute of Technology, (2002).
- [10] W. Bergweiler *Iteration of meromorphic functions*, American Mathematical Society, Volume **29** Number 2 (1993), 151-188.
- [11] C. Piñeiro, Universidad de Huelva. https://www.uhu.es/gem/meeting/CIDC/files/CursoDinamica_presentacion_I.pdf.
- [12] <http://www.matematicasvisuales.com/html/complejos/functions/expC.html>
- [13] Iván Hernandez Orzuna, *Un estudio de la dinámica de la clase de funciones meromorfas \mathcal{K}* , Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2015).