Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

SUBHASTES DE VICKREY I COMPATIBILITAT D'INCENTIUS

Autor: Marc Martínez Canela

Director: Dra. Marina Nuñez Oliva

Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica Financera i Actuarial

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

This monograph presents a type of auctions that have the property known as “incentive compatibility”, that meaning that no buyer has incentives to make a bid different than his or her real valuation for the object (or objects) on sale. In game theoretical terms we say that in the auction game, it is a dominant strategy for the buyers to report their true valuations. The simplest auction with this property is the sealed-bid second price auction of a single object. When there are several identical objects on sale, and also when the objects on sale are heterogeneous, the Vickrey auction generalizes the second price auction and is incentive compatible. These sealed-bid auctions also have a sequential or open format known as the English auction and the Ausubel Auction.

Resum

Aquest treball presenta un tipus de subhastes amb una propietat que es coneix amb el nom de ”compatibilitat d’incentius”, que vol dir que cap comprador té incentius per fer una oferta diferent de la seva valoració real de l’objecte (o dels objectes) en venda. En el vocabulari de la teoria de jocs, diem que en el joc d’una subhasta és una estratègia dominant pels jugadors dir la veritat sobre la seva valoració. La subhasta més simple amb aquesta propietat és la subhasta a sobre tancat a segon preu. Quan hi ha molts objectes idèntics a la venda, i també quan els objectes a la venda són heterogenis. La subhasta de Vickrey generalitza la de segon preu i té la propietat de compatibilitat d’incentius. Aquestes subhastes d’oferta simultània també tenen un format obert o seqüencial conegut com la subhasta anglesa o la subhasta d’Ausubel.

2020 Mathematics Subject Classification. 91-00, 91A12, 91A80,91B26

Agraïments

Vull agrair a la meva tutora, la Marina, que m'ha guiat durant tot el semestre per fer aquest treball.

Índex

1 Introducció

Una subhasta és un mecanisme de venda, és a dir, un conjunt de regles que donades les ofertes dels potencials compradors estableixen qui s'emporta els objectes en venda i quin preu han de pagar a canvi. Ja en l'antiguitat, Horòdot descriu que les subhastes es feien servir a Babilònia al voltant de l'any 500 abans de Crist.

En l'actualitat, les subhastes es fan servir per múltiples tipus de vendes: objectes d'art, flors o peix a les llotges, o lletres del Tresor per finançar els governs. També són útils per traspassar actius de mans públiques a mans privades, per exemple en l'adjudicació del dret d'explotació de línies de transport urbà a Londres, o de l'ús de bandes de l'espectre electromagnètic en els EEUU i molts altres països.

Què s'entén per una subhasta? És un mecanisme de venda, és a dir, un conjunt de regles, que determinen qui guanya cadascún dels objectes a la venda i quina quantitat paga per ell. I la subhasta determina això només a partir de les ofertes dels compradors, és a dir, sense fer diferències segons el tipus d'objecte o la identitat del comprador, només a partir de les ofertes rebudes.

Per posar un exemple, la Loteria de Nadal no és una subhasta ja que tot i que adjudica un premi, no ho fa només a la vista de les ofertes dels participants (quantes butlletes ha comprat cadascú) sinó que fa servir un mecanisme d'atzar per determinar el guanyador.

Quan hi ha un únic objecte en venda, les subhastes més conegudes són les de sobre tancat a primer preu i a segon preu. Les dues assignen l'objecte al comprador que fa l'oferta més alta (les ofertes es fan en un sobre tancat i per tant quan un comprador fa la seva oferta desconeix les ofertes dels competidors). En la subhasta a primer preu, el guanyador paga la quantitat que ha ofert. En canvi, en la subhasta a segon preu, el guanyador paga no la seva oferta sinó la segona oferta més alta. En tots dos casos la resta de compradors no paga res.

En tota subhasta hem de diferenciar entre el valor que l'objecte (o els objectes) tenen pels compradors, i les ofertes que fan. Fixeu-vos que mai és profitós oferir per sobre de la pròpia valoració, ja que si guanyem l'objecte tindrem un benefici negatiu. Però la pregunta és quant per sota de la valoració ha d'estar la nostra oferta.

L'estudi teòric de les subhastes analitza quina és la oferta òptima que els compradors han de fer. Observeu que la resposta depèn del tipus de subhasta. En la subhasta a primer preu els compradors es troben amb un dilema ja que quan més ofereixin, més probabilitat tenen de guanyar però menor és el profit que obtenen quan guanyen, ja que gairebé no hi ha diferència entre valor i oferta. En la subhasta de segon preu, això no succeeix, ja que quan es guanya, el preu que es paga no depèn de la meva oferta sinó de la segona oferta més alta, que correspon a la d'un altre comprador.

Aquesta és la propietat més important de la subhasta a segon preu i va ser assenyalada per Vickrey en el seu article de 1961, i també extesa a situacions més complexes on hi ha més objectes que es venen simultàniament.

L'article de Vickrey és el punt de partida per l'estudi de la teoria de subhastes i també per aquesta monografia. Ens centrem en subhastes que són *estàndar*, és a dir que adjudiquen els objectes a qui més ofereix per ells, i de *valoració privada* que significa que cada comprador coneix només la seva valoració dels objectes en venda, però no les valoracions de la resta de compradors. Considerarem subhastes simultànies i també les seves versions seqüencials. Quan la subhasta és simultània o de sobre tancat, els compradors no només no coneixen les valoracions dels competidors sinó que tampoc coneixen les seves ofertes. Quan la subhasta és seqüencial o de format obert, a mesura que avança la subhasta veiem les ofertes dels competidors i això també ens revela certa informació sobre com valoren l'objecte o objectes en venda.

Una propietat important per un mecanisme de subhasta és la *compatibilitat d'incentius*. Aquesta propietat diu que és estrategia dominant per cada comprador que la oferta que faci per cada objecte sigui exactament la seva valoració de l'objecte, perquè no tindrà més benefici per oferir per sota de la valoració real. Aquesta propietat és important no només perquè dóna seguretat als compradors, ja que no cal actuar estratègicament, sinó també perquè garanteix al venedor que assignar els objectes als qui més ofereixen significa assignar-los a qui més els valoren i per tant el resultat de la subhasta és *eficient* socialment.

La definició de mecanisme amb *compatibilitat d'incentius* és que cada agent pot assolir el millor per ell mateix simplement actuant d'acord a les seves veritables preferències. Aquesta noció s'aplica no només a mecanismes de subhasta sinó també a mecanismes d'altres tipus, com per exemple mecanismes de votació o d'elecció social.

La següent secció, la Secció 2, està dedicada a l'estudi de les subhastes d'un únic objecte, en particular la subhasta a segon preu i la seva versió ascendent, la subhasta anglesa. Demostrarem que la subhasta a segon preu té la *compatibilitat d'incentius*, és a dir, que ens dóna incentius a revelar la nostra veritable valoració. I observarem que això no passa en la subhasta a primer preu (la versió oberta de la qual es la subhasta descendent o subhasta holandesa).

En la Secció 3 s'estudien dues subhastes de múltiples objectes idèntics o homogenis que generalitzen la subhasta de segon preu: la subhasta de Vickrey i la subhasta uniforme. Només la primera té la propietat de compatibilitat d'incentius. Cadascuna d'aquestes dues subhastes té una versió oberta o seqüencial, respectivament la subhasta de Ausubel i la subhasta anglesa.

La Secció 4 estudia el cas en què els objectes són heterogenis i cada comprador vol com a molt un objecte. Per això cal analitzar un joc coalicional que es coneix com a joc d'assignació. En aquest cas, la subhasta de Vickrey també té la propietat de compatibilitat d'incentius. Es presenta també un mecanisme ascendent que assoleix el mateix resultat.

Finalment, en la Secció 5, s'estudia la subhasta de Vickrey per vendre objectes possiblement heterogènis, on està permès fer ofertes per paquets d'objectes. La propietat de compatibilitat d'incentius es preserva, és encara una estrategia dominant revelar la nostra veritable valoració dels paquets d'objectes, però quan existeixen complementarietats entre els objectes apareixen d'altres efectes no desitjats. Per exemple, els ingresos del subhastador poden ser molt baixos, o el mecanisme dóna incentius als compradors a actuar estratègicament i simular el desdoblament en dos o més compradors.

2 Subhasta d'un objecte a segon preu

Suposem que n compradors participen en la subhasta d'un objecte. Cada comprador $i \in N$ valora l'objecte en una quantitat $x_i \geq 0$, que només ell coneix. La subhasta és a sobre tancat i per tant quan un comprador fa la seva oferta, no sap què oferiran els altres compradors. Denotem per $b_i \geq 0$ l'oferta que fa el comprador i. Observem que l'oferta pot ser diferent a la seva valoració. La subhasta ha de determinar qui s'emporta l'objecte i quin preu paga per ell. La majoria de subhastes, les que es coneixen com subhastes estàndar, adjudiquen l'objecte al comprador que ha fet l'oferta més gran. El que canvia entre els diferents tipus de subhastes és el preu que es fa pagar al guanyador (i potser a la resta de compradors).

Saber quina és la millor oferta que un comprador pot fer depèn de quin es el tipus de subhasta en el que participa. En el nostre cas estem analitzant una subhasta a segon preu, és a dir, qui fa l'oferta més gran guanya l'objecte i paga per ell la segona oferta més gran.

Una subhasta és un joc d'estratègia i per tant ve determinat pels següents elements:

- el conjunt de jugadors N (els compradors),
- les estratègies de cada jugador que són ofertes que depenen del perfil de valoracions $b_i(x)$ per tot $i \in N$
- i el guany o utilitat u_i de cada comprador $i \in N$ en cada combinació d'ofertes $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Noteu que la funció de guanys u_i no només depèn de l'oferta del comprador i sinó també de les ofertes de la resta de compradors:
$$u_i(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots b_n) = \begin{cases} x_i - max_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < max_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

Definició 2.1. *Una oferta b_i del jugador i és dominant si donada qualsevol combinació estratègica b_{-i} de la resta de jugadors i qualsevol altra estratègia b'_i es compleix $u_i(b_i, b_{-i}) \geq u_i(b'_i, b_{-i})$ i existeix una combinació b'_{-i} tal que $u_i(b_i, b'_{-i}) > u_i(b'_i, b'_{-i})$*

Proposició 2.2. *En una subhasta a sobre tancat a segon preu, la oferta sincera és una estratègia dominant. És a dir, $b_i(x) = x_i$ per tot $i \in N$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $p_1 = max_{j \neq 1} b_j$ és la oferta màxima de la competència del jugador 1, és a dir, de tota la resta de jugadors. Si el jugador 1 ofereix la sea valoració x_1, aquest hi sortirà guanyant només si el preu de l'objecte és més petit, és a dir, si $x_1 > p_1$ (si $x_1 = p_1$, tant farà si el jugador 1 guanya o perd). Suposem, però, que decideix oferir $z_1 < x_1$, una oferta més baixa que la seva valoració. Si $p_1 \leq z_1 < x_1$, segueix guanyant, amb un benefici de $x_1 - p_1$. Si $p_1 > x_1 > z_1$, segueix perdent. Però si $x_1 > p_1 > z_1$, ell perd, tot i que si hagues ofert x_1, hi hauria sortit guanyant. Això vol dir que oferint menys que x_1, no hi sortim mai guanyant i a vegades hi sortim perdent. No hi ha cap motiu doncs, per oferir menys que x_1. Anàlogament, el jugador 1 tampoc hi guanyaria res oferint més que la seva valoració ($x_1 < z_1$) però a vegades hi sortiria perdent (si $x_1 < p_1 < z_1$, guanya l'objecte però té un benefici negatiu de $p_1 - z_1$) $\square$

Fixeu-vos que quan cada comprador ofereix la seva valoració, com que cadascú juga una estrategia dominant la combinació estratègica $(b_i)_{i \in N} = (x_i)_{i \in N}$ constitueix un equilibri de Nash del joc de subhasta. Però és més que un equilibri, és un equilibri en estratègies dominants.

Aquesta proposició mostra que en una subhasta a segon preu els compradors no tenen incentius a falsejar la seva valoració de l'objecte perquè no guanyaran més.

Això no passa amb la subhasta d'un objecte a sobre tancat i de primer preu, com mostra l'exemple següent.

Exemple 2.3. Suposem una subhasta d'un objecte amb tres compradors que el valoren, respectivament, en $v_1 = 4, v_2 = 2, v_3 = 1$. Si cada comprador ofereix la seva valoració, $b = (b_1, b_2, b_3) = (4, 2, 1)$, aleshores el comprador 1 guanya l'objecte i paga 4, el que li dona un benefici o utilitat de $v_1 - p = 4 - 4 = 0$. En canvi, si hagués ofert $b_1 = 2.1$, també guanya l'objecte però paga 2.1 i li queda un benefici de 1.9: $u_1(4, 2, 1) = 0 < 1.9 = u_1(2.1, 2, 1)$.

Tot i això, $b_1 = 2.1$ no és millor resposta del comprador 1 quan els altres ofereixen $b_2 = 2$ i $b_1 = 1$, ja que oferint 2.05 estarà estrictament millor.

Com mostra l'exemple, la subhasta de primer preu no te compatibilitat d'incentius, ja que els compradors no tenen incentius a revelar la seva veritable valoració. Com a conseqüència, la cerca de ofertes d'equilibri en aquesta subhasta és més complicat, no te equilibri en estratègies dominants, s'ha de tractar com a joc d'informació incompleta i no és l'objectiu d'aquest treball.

Cadascuna de les dues subhastes d'aquesta secció, la de segon preu i la de primer preu tenen un format equivalent en obert, és a dir un mecanisme seqüencial.

La *subhasta anglesa* és el format de subhasta més conegut i més antic. És el que veiem a les pel·lícules on el subhastador d'una obra d'art comença amb un preu i algun dels compradors assistents oferixen un preu superior, que al seu torn pot ser superat per un altre comprador. La subhasta finalitza quan ningú està disposat a pagar més que la darrera oferta que s'ha fet.

Una versió equivalent consisteix a començar amb un preu baix i anar-lo incrementant amb el temps. Els compradors seguiran en el joc mentre el preu sigui acceptable per ells (això serà quan aquest encara estigui per sota de la seva valoració de l'objecte) i abandonaran tan bon punt el preu superi la seva valoració. Quan queden només dos compradors i un d'ells abandona, el darrer comprador guanya l'objecte i paga el preu, que és aproximadament la valoració de l'últim comprador que ha sortit. En aquest sentit la subhasta anglesa es diu que es equivalent a la subhasta a sobre tancat de segon preu. En la versió oberta, a mida que te lloc la subhasta els particpants van obtenint informació sobre les valoracions dels seus competidors, ja que qui abandona dona una senyal de quina era la seva valoració.

La *subhasta holandesa* s'anomena així perquè és la que es fa encara servir a Holanda per la venda de flors. També es fa servir en le llotges de peix de molts llocs del món. En aquest cas el subhastador comença amb un preu molt alt i va baixant fins que un comprador aixeca la ma per detenir la baixada del preu i comprar el lot de flors o de peix. Fixeu-vos que el comprador guanyador esperarà que el preu estigui per sota de la seva valoració.

3 Subhasta de múltiples objectes homogenis

En aquesta secció s'analitzen subhastes de múltiples objectes idèntics (o homogenis). Podem pensar en la subhasta de litres d'oli d'oliva o de lletres del Tresor. També pot ser que els objectes no siguin idèntics però que en tot cas siguin substituts, com apartaments d'un mateix edifici o obres d'art similars d'un mateix autor. Això vol dir que el valor marginal d'adquirir una segona unitat és menor que el valor de la primera unitat.

El subhastador pot decidir vendre cada unitat en una subhasta separada, o bé fer una subhasta múltiple.

Estudiarem dos models de subhasta de múltiples objectes a sobre tancat que són una generalització de la subhasta de segon preu, és a dir, que quan s'apliquen a la venda d'un sol objecte coincideixen amb la subhasta de segon preu. També presentarem les seves respectives versions obertes o seqüencials.

A continuació, establim la notació que necessitarem per desenvolupar els mecanismes.

Un venedor vol vendre M objectes homogenis a N compradors. Cada comprador presenta un vector d'ofertes, indicant el preu que està disposat a pagar per cada unitat. El vector $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{iM})$ és el vector d'ofertes del comprador i, on b_{ij} indica la quantitat que el comprador i està disposat a pagar per la j-èssima unitat. Com que suposem que els objectes són substituts, els vectors d'ofertes han de satisfer les desigualtats $b_{i1} \geq b_{i2} \geq \cdots \geq b_{iM}$. Denotarem per $x_i : x_1^i \geq x_2^i \geq \cdots \geq x_M^i$ les veritables valoracions dels jugadors $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

El vector d'ofertes es pot considerar una funció de demanda inversa del comprador i, i per tant la podem invertir per obtenir la demanda d'aquest comprador. Donat un preu p, el comprador i demanda $d_i(p)$ unitats, on

$$d_i(p) = \max\{j \mid p \leq b_{ij}\}.$$

Per exemple, si en una subhasta de tres objectes, un comprador té ofertes $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}) = (6, 4, 2)$, aleshores $d_i(p = 6) = 1$, $d_i(p = 4) = 2$ i $d_i(p = 2) = 3$.

Un altre concepte important és el de la demanda agregada, i això ho mostrarem amb l'exemple següent.

Exemple 3.1. Considerem una subhasta de tres objectes on participen dos compradors que fan ofertes $b_1 = (6, 4, 2)$ i $b_2 = (5, 3, 1)$, que mostrem en la taula següent:

	b_{1j}	b_{2j}
$j = 1$	6	5
$j = 2$	4	3
$j = 3$	2	1

El venedor ordena totes les ofertes en ordre decreixent, en aquest cas $b = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$. Aleshores, la Figura 1 presenta la demanda agregada dels compradors i la seva intersecció amb la oferta fixada d'objectes, $M = 3$, determina qui s'emporta els objectes. En aquest cas, les ofertes guanyadores són b_{11}^*, b_{21}^* i b_{12}^*, és a dir el comprador 1 s'emporta dues unitats i el comprador 2 se n'emporta una.

D'aquesta manera el venedor resol el problema de a qui assignar els objectes. Quin preu paga cada comprador pels objectes que li assignen depén del tipus de subhasta. Mostrem ara com es determinen els preus en la subhasta uniforme i en la subhasta de Vickrey.

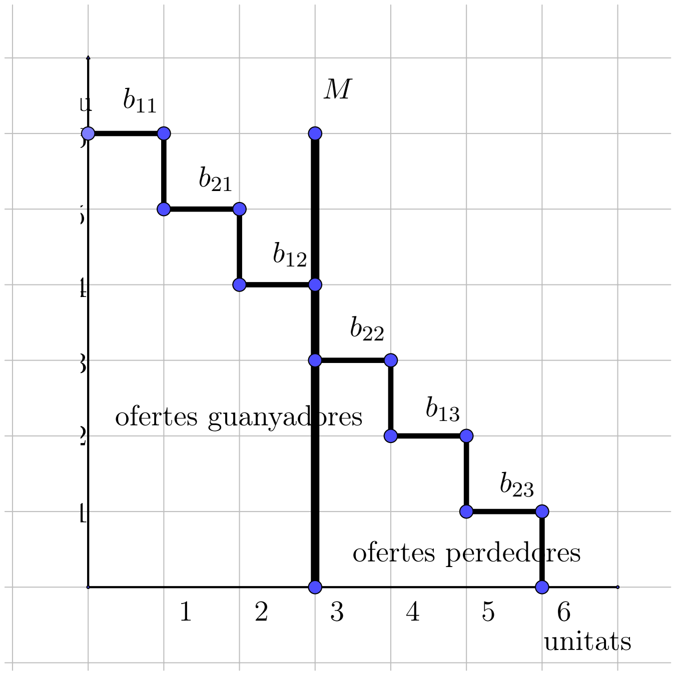

Figura 1: Gràfic de la demanda agregada

3.1 Subhasta de Vickrey

En una subhasta de Vickrey de M objectes idèntics i N compradors, els guanyadors paguen el cost d'oportunitat pels objectes guanyats. Això vol dir que si el jugador i guanya q_i^* unitats, ell pagarà les q_i^* ofertes rebutjades més altes de la competència., és a dir, les ofertes no guanyadores més altes sense incloure les seves.

Per calcular el pagament, primer trobarem el vector d'ofertes de la competència d'un cert jugador i, $C\_i = (c_{-i,1}, c_{-i,2}, \dots, c_{-i,M})$, que és l'M-vector de les ofertes més altes fetes pels seus rivals. Per tant, $c_{-i,1}$ denotarà l'oferta més alta dels rivals, $c_{-i,2}$ la segona oferta més alta i així successivament. Aquest vector l'obtenim reordenant les $(N-1) \times M$ ofertes de tots el jugadors excepte el jugador i en ordre decreixent i sel.leccionant les M ofertes més altes. Aquestes serien les M ofertes guanyadores en cas que el jugador i no jugués. Llavors hem de determinar si l'oferta més alta del jugador i és més gran que l'oferta més baixa de totes les incloses en C_i, és a dir, si $b_{i,1} > c_{-i,M}$. Si això passa, el jugador i guanya un objecte i paga $c_{-i,M}$, que és l'oferta més baixa de C_i. Perquè el jugador i guanyi el segon objecte, la seva segona oferta més alta haurà de ser més gran que la segona oferta més baixa de C_i. Llavors, el jugador i pagaria $c_{-i,M-1}$ pel segon objecte. El procés continua fins que la j-èssima oferta més alta del jugador i és més baixa que la j-èssima oferta més baixa de C_i. El jugador i paga les q_i^* ofertes més altes dels rivals pels q_i^* objectes guanyats. El pagament total del jugador i es calcula de la següent manera:

$$P_i^* = \sum_{j=1}^{q_i^*} c_{-i,M-q_i^*+j} \tag{3.1}$$

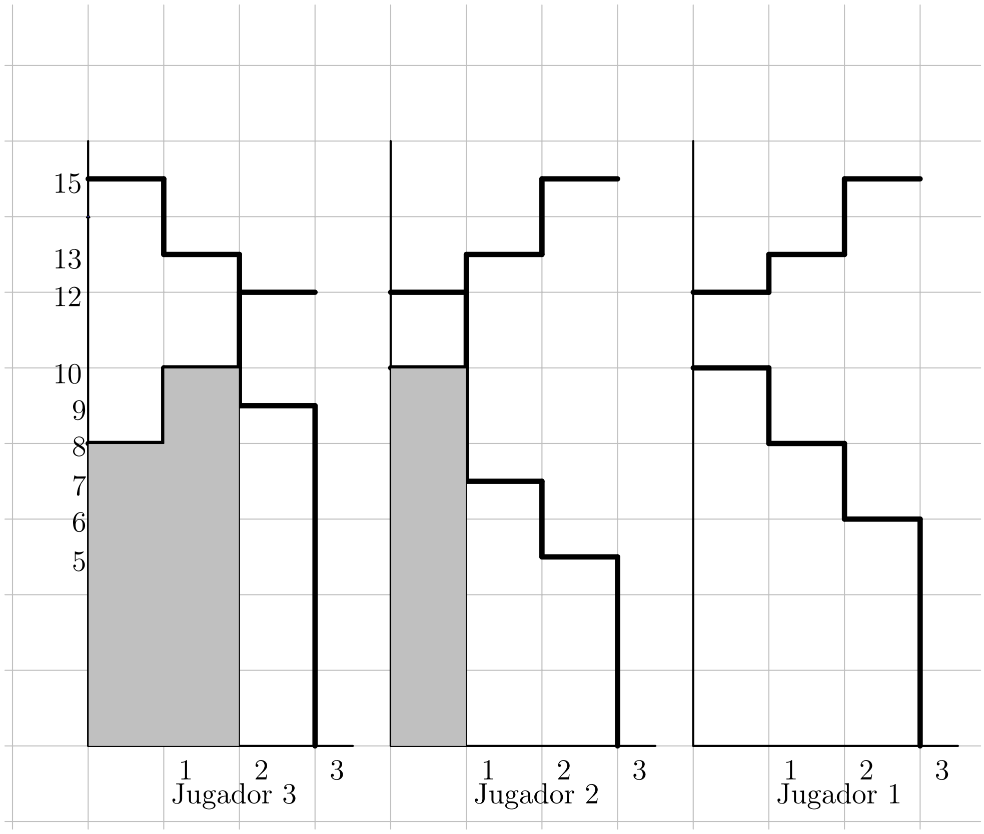

Figura 2: Subhasta Vickrey

L'ingrés del jugador i és igual a la suma dels valors dels objectes guanyats:

$$I_i = \sum_{j=1}^{q_i^*} v_{i,j} \tag{3.2}$$

El benefici del jugador i és la diferència entre l'ingrés i el cost:

$$B_i^* = I_i^* - P_i^* \tag{3.3}$$

L'ingrés total del venedor és igual a la suma dels pagament de tots els jugadors:

$$R^* = \sum_{i \in W} P_i^* \tag{3.4}$$

Exemple 3.2. Considerem el següent exemple en el qual hi ha tres jugadors ($N = 3$) i es subhasten tres objectes idèntics ($M = 3$). Suposem que les ofertes de cada jugador són les següents: $B_1 = (10, 8, 6)$, $B_2 = (12, 7, 5)$, $B_3 = (15, 13, 9)$. La següent taula mostra les ofertes fetes per tots els jugadors en ordre decreixent. La segona taula mostra el vector de les ofertes de la competència de cada jugador, el nombre d'objectes guanyats, i el pagament total de la subhasta. Per determinar si el primer jugador guanya un objecte, primer obtenim les tres ofertes més altes de la competència: $C_{-1} = (15, 13, 12)$. Després, comprovem si l'oferta més alta feta pel primer jugador és més alta que l'oferta més baixa dels rivals, és a dir, si es compleix $b_{1,1} > c_{-1,3}$. Aquesta condició no es compleix perquè $b_{1,1} = 10 < 12 = c_{-i,3}$, per tant el primer jugador no guanya cap objecte. Seguim el

mateix procediment pel segon jugador, on $C_{-2} = (15, 13, 10)$.Aquest jugador guanya un objecte perquè la seva oferta més alta és més gran que la oferta més baixa dels seus rivals, $b_{2,1} = 12 > 10 = c_{-2,3}$. Pel primer objecte el jugador 2 paga una quantitat igual a la oferta més baixa feta pels altres: 10. Aquest jugador ja no guanya més objectes, ja que $b_{2,2} = 7 < 13 = c_{-2,2}$. Per últim, el vector d'ofertes de la competència del tercer jugador és $C_{-3} = (12, 10, 8)$.Aquest jugador guanya dos objectes perquè les seves dues ofertes més altes són més grans que les dues ofertes més baixes del vector de la competència: $b_{3,1} = 15 > 8 = c_{-3,3}$ i $b_{3,2} = 13 > 10 = c_{-3,2}$. Aquest jugador paga 8 pel primer objecte i 10 pel segon objecte. Els ingressos del venedor són $R^* = 10 + 18 = 28$.
La Figura 2 mostra el preu que paga cada jugador en aquesta subhasta de Vickrey.

Ofertes	15	13	12	10	9	8	7	6	5
Jugadors	3	3	2	1	3	1	2	1	2

Jugadors	b	b	b	c	c	c	q	P
i = 1	10	8	6	15	13	12	0	0
i = 2	12	7	5	15	13	10	1	10
i = 3	15	13	9	12	10	8	2	18

En cas en què es subhasta un sol objecte (N=1), la subhasta de Vickrey coincideix amb la subhasta a sobre tancat a segon preu. Per tant, la subhasta de Vickrey és una extensió de la subhasta a sobre tancat a segon preu, i com veurem, és la extensió més apropiada.

Proposició 3.3. *En una subhasta de Vickrey, la oferta sincera és una estratègia dèbilment dominant, és a dir, oferir la pròpia valoració $b_i(x) = x_i$.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem el jugador i i el vector d'ofertes b^{-i} de la resta de jugadors. Sigui c^{-i} el vector de les K ofertes més altes dels altres jugadors. Suposem també que quan el jugador i ofereix d'acord amb la seva pròpia valoració $b_i = x_i$, és a dir, fa oferta sincera, ell guanya k^i unitats. D'acord amb el funcionament de la subhasta de Vickrey, el preu que paga per cada unitat k ve donat per $c^{-i}_{K-k^i+k}$ i per cada $k \leq k^i, x^i_k \geq c^{-i}_{K-k^i+k} = p^i_k$ mentre que per cada $k > k^i, x^i_k \leq c^{-i}_{K-k^i+k} = p^i_k$.
Ara suposem que el jugador i no fa oferta sincera, i que per tant $b_i \neq x_i$. Suposarem primer que després d'haver canviat les seves ofertes, el nombre d'unitats que guanya no canvia, és a dir, segueix guanyant k^i unitats. Com que en el sistema de les subhastes de Vickrey, el preu que paga cada jugador no depèn de les ofertes fetes per ell (que les ha canviat), sinó de les de la resta de jugadors, el preu que pagarà el jugador i serà el mateix que si hagués fet oferta sincera, i també el seu benefici.
Suposem però, que després d'haver ofert diferent a la seva pròpia valoració, el jugador i guanya l^i unitats, amb $l^i > k^i$. En haver guanyat més unitats que quan oferia d'acord amb la seva pròpia valoració, el preu de les k^i primeres unitats no cambiarà, però el preu de les $l^i - k^i$ unitats que s'han guanyat de més serà superior a la pròpia valoració, i per tant el jugador i tindrà un benefici negatiu per aquestes unitats. Com a conseqüència el benefici total del jugador serà menor que si hagués ofert sincerament.
Finalment, suposem que el jugador i guanya un nombre d'unitats menor $l^i < k^i$ que el que hauria guanyat amb la oferta sincera. el preu de les primeres l^i unitats guanyades serà el mateix, i també el benefici obtingut per cada una d'elles. Però el benefici de les $k^i - l^i$ unitats que ara ha deixat de guanyar també era positiu. Per tant, el benefici total també acabarà sent menor que si hagués ofert sincerament.

Proposició 3.4. *La subhasta de Vickrey reparteix els objectes de forma eficient.*

La justificació és immediata. Com que els objectes s'assignen a qui fa la oferta més gran i en aquest cas les ofertes coincideixen amb les veritables valoracions dels compradors, podem dir que la subhasta de Vickrey assigna els objectes a qui més els valora i per tant de forma eficient.

3.2 Subhasta uniforme

En la subhasta uniforme, tots els jugadors paguen el mateix preu pels objectes guanyats. El preu que paguen és la oferta més alta de totes les que s'han rebutjat. Per tant, si el jugador i guanya q_i^* objectes, el seu pagament és:

$$P_i^* = p_i^* \times q_i^* \tag{3.5}$$

El jugador i ingressa la suma dels valors dels objectes guanyats:

$$I_i^* = \sum_{j=1}^{q_i^*} x_j^i \tag{3.6}$$

El benefici B_i de cada comprador i és la diferència entre el seu ingrés i el seu pagament:

$$B_i = I_i - P_i \tag{3.7}$$

El benefici del venedor és la suma de tots els pagaments.

$$R = \sum_{i \in W} P_i \tag{3.8}$$

On W és el conjunt de tots els compradors que guanyen algun objecte.

Exemple 3.5. Considerem el següent exemple en el qual hi ha tres jugadors ($N = 3$) i es subhasten tres objectes idèntics ($M = 3$). Suposem que les ofertes de cada jugador són les següents: $B_1 = (10, 8, 6)$, $B_2 = (12, 7, 5)$, $B_3 = (15, 13, 9)$, el mateix exemple que s'ha fet servir abans aplicat a la subhasta de Vickrey. Com en l'exemple de la subhasta de Vickrey, la següent taula mostra les ofertes fetes per tots els jugadors en ordre decreixent. La segona taula mostra el vector de les ofertes de la competència de cada jugador, el nombre d'objectes guanyats, i el pagament total de la subhasta. El pagament, si ara l'apliquem a la subhasta uniforme, és molt més senzill de calcular. Només ens caldrà saber quina és la primera oferta no guanyadora, que en aquest cas és 10, i aquest serà el pagament que tindran sempre tots els jugadors per cada unitat guanyada. Per tant, el tercer jugador, que en el nostre cas guanya dos unitats, pagarà 20, i el segon, que guanya una unitat, pagarà 10.
La Figura 3 mostra el preu que paga cada jugador en aquesta subhasta uniforme.

Ofertes	15	13	12	10	9	8	7	6	5
Jugadors	3	3	2	1	3	1	2	1	2

Jugadors	b	b	b	c	c	c	q	P
i = 1	10	8	6	15	13	12	0	0
i = 2	12	7	5	15	13	10	1	10
i = 3	15	13	9	12	10	8	2	20

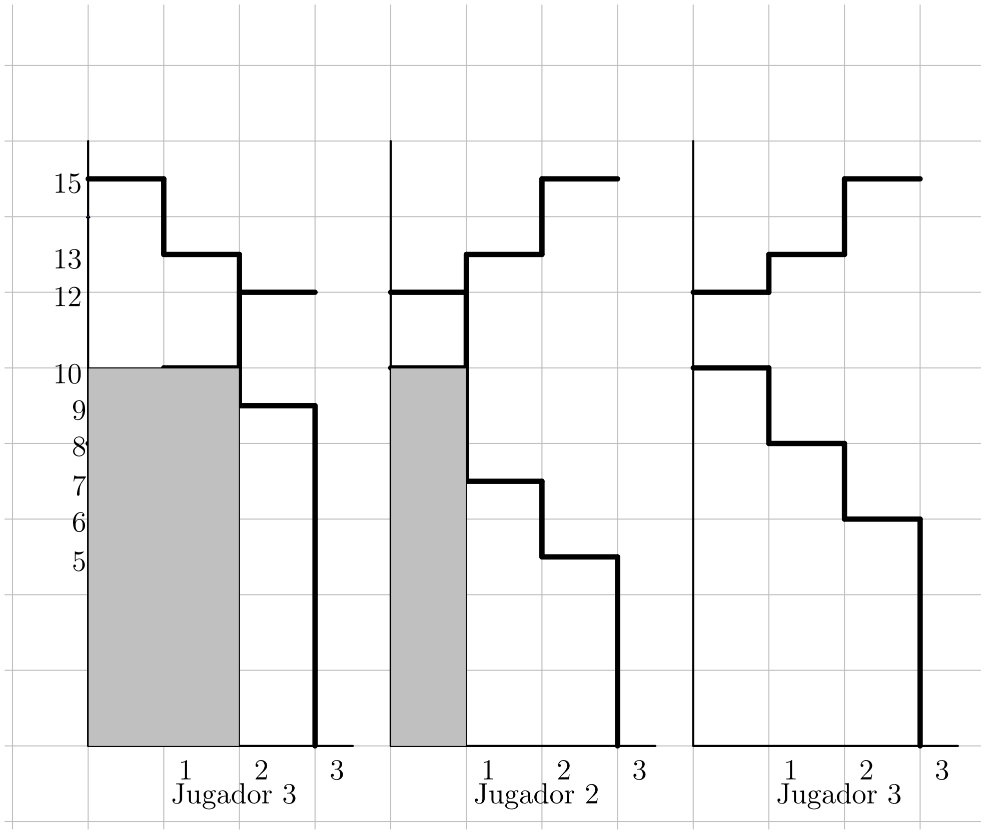

Figura 3: Subhasta uniforme

En cas en què es subhasta un sol objecte (N=1), la subhasta uniforme coincideix també amb la subhasta a sobre tancat a segon preu. Per tant, la subhasta uniforme és també una extensió de la subhasta a sobre tancat a segon preu.
Però la subhasta uniforme no té la propietat de compatibilitat d'incentius. En ocasions, un jugador que guanya algun objecte és tamé qui determina el preu uniforme i en aquest cas té incentius per disminuir aquesta darrera valoració.

3.3 Subhasta anglesa

En la subhasta anglesa de múltiples objectes, s'inicia a partir d'un preu base que després es va augmentant gradualment en el temps. Cada jugador indica el nombre d'objectes que està disposat a comprar al preu que hi ha en aquell moment, és a dir, la seva demanda. Com que el preu serà cada vegada més alt, a mesura que passi el temps els jugadors voldran cada vegada menys objectes.

3.4 Subhasta Ausubel

La subhasta Ausubel és un cas particular de les subhastes ascendents multi-objecte. S'inicia amb un preu inicial a la ronda t=0. A les rondes següents, el preu puja, i els jugadors indiquen el nombre d'objectes que estan disposats a comprar pel preu que hi ha en aquell moment (q_i^t) Òbviament els jugadors volen comprar menys objectes quan el preu és més alt, per tant la demanda total tendeix a baixar a mesura que el preu puja . A cada ronda,

el venedor calcula la demanda agregada $Q^t = \sum_{i=1}^{N} q_i^t$, és a dir, la suma de les demandes de tots els jugadors, i si aquesta és més gran que la oferta ($Q^t > M$, s'eleva el preu. La subhasta acaba a la ronda T quan la demanda agregada de tots els venedors no és més gran que la oferta ($Q^T <= M$).
La diferència entre aquesta subhasta i la subhasta anglesa múltiple radica en el preu que paga cada jugador pels objectes guanyats al final. Cada jugador ha de pagar per cada objecte guanyat el preu que tenia aquest en la ronda en què el va obtenir, i no el preu que tenien tots al final. Es considera que un jugador guanya un objecte en el moment en què la demanda agregada de tots els altres jugadors és menor a la oferta, però la demanda total segueix sent més gran que la oferta. Per exemple, si en una subhasta de tres jugadors s'ofereixen 5 objectes i els jugadors en volen comprar 2, 2 i 3, el tercer ja té guanyat un dels 5 objectes perquè entre els altres 2 ara només en voldrien quatre. La oferta residual del tercer seria 1.
Calculem la oferta residual del jugador i restant a la oferta total la demanda dels rivals:

$$M_i^t = M - \sum_{i \neq k} q_k^t. \tag{3.9}$$

Per tant, un jugador ja ha guanyat almenys un objecte quan la seva oferta residual és positiva. El nombre d'objectes que el jugador i ha guanyat fins a la ronda t és igual al màxim entre zero i la seva oferta residual.

$$C_i^t = max\{0, M_i^t\} \tag{3.10}$$

El nombre total d'objectes guanyats a la ronda t és:

$$c_i^t = C_i^t - C_i^{t-1} \tag{3.11}$$

Al final de la subhasta, el nombre d'objectes que guanya el jugador i val $q_i^* = C_i^T$. Per cada objecte, el preu que es paga és el preu que tenia en el moment en què es va guanyar. Per tant, el pagament total del jugador i en acabar la subhasta és:

$$P_i^* = \sum_{t=0}^{T} p^t \times c_i^t \tag{3.12}$$

L'ingrés del jugador i és igual a la suma dels valors dels objectes:

$$I_i^* = \sum_{j=1}^{q_i^*} x_j^i \tag{3.13}$$

El benefici és la diferència entre l'ingrés i el pagament:

$$B_i^* = I_i^* - P_i^* \tag{3.14}$$

El benefici del venedor és la suma de tots els pagaments.

$$R_i^* = \sum_{i \in W} P_i^* \tag{3.15}$$

On W es el conjunt de compradors que guanya algun objecte.

4 Subhasta de Vikrey de múltiples objectes heterogenis a segon preu

Per descriure la subhasta de Vikrey de múltiples objectes heterogenis, necessitarem introduir un joc coalicional conegut com a joc d'assignació i algunes dde les seves propietats.

4.1 El joc d'assignació

Tenim dos conjunts finits disjunts P i Q, que contenen n i m jugadors. Els conjunts P i Q representaran els conjunts de n compradors i m venedors que hi ha en el nostre joc. Cada comprador vol adquirir com a molt un objecte i cada venedor vol vendre un objecte. Reservarem les variables i i j per referir-nos als conjunts de compradors i de venedors P i Q, respectivament. Associarem cada possible coalició (i, j) amb un nombre real no negatiu a_{ij}, que representarà el valor que li donem a la coalició entre el comprador i i el venedor j. el valor que donem a coalicions més grans dependrà de les combinacions de parelles (i, j) que poden formar els membres de la coalició. Així doncs el valor d'una coalició S, on $S \subseteq P \times Q$ és: $w(S) = \max_{\mu \in \mathcal{M}(S,T)} \sum_{(i,j)\in\mu} a_{ij}$. Observem que si $S = \varnothing$ i $T = \varnothing$, $w(S \cup T) = 0$

Definició 4.1. *Donat un joc d'assignació $(P \cup Q, v)$, un repartiment $(u, v) \in \mathbb{R}^P_+ \times \mathbb{R}^Q_+$ és estable si és eficient, $\sum_{i\in P} u_i + \sum_{j\in Q} v_j = v(P \cup Q)$ i a més $u_i + v_i \geq a_{ij} \forall (i, j) \in P \times Q$*

Observació 4.2. Notem que si (u, v) és un repartiment estable i μ es una assignació òptima, aleshores $u_i + v_j = a_{i,j}, \forall (i, j) \in \mu$.

Per què és important que un repartiment (u, v) sigui estable? Perquè si no ho és, és a dir, si $\exists i \in P$ i $\exists j \in Q$ tals que $u_i + vj < a_{ij}$, aquests dos jugadors deixaran l'assignació μ i preferiran anar junts i guanyar més.

Exemple 4.3. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ L'assignació òptima és $\mu = \{(1, 1'), (2, 2')\}$ amb $v(1, 2, 1', 2') = 6 + 4 = 10$, $v(1) = v(2) = v(1') = v(2') = 0 = v(1, 2) = v(1', 2')$, $v(1, 2, 1') = 6$, $v(1, 2, 2') = 5$, $v(1, 1', 2') = 6$, $v(2, 1', 2') = 4$ El conjunt de repartiments estables són els $(u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0)$ tal que
$u_1 + v_1 = 6$, $u_1 + v_1 \geq 5$, $u_1 + v_1 \geq 5$, $u_1 + v_1 = 4$. Es pot dibuixar al pla (u_1, u_2), com mostra la figura 4.

Shapley i Shubik (1972) van demostrar que el conjunt de repartiments estables coincideix amb el que es coneix com a nucli del joc coalicional i que té estructura de reticle. Per això hem de considerar un ordre parcial entre el conjunt de repartiments $(u, v) \in \mathbb{R}^P_+ \times \mathbb{R}^Q_+$. Diem que $(u, v) \geq_P (u', v')$ si $u_i \geq u'_i$ per tot $i \in P$. Anàlogament, es pot definir l'ordre $\geq_Q$

Teorema 4.4. *El conjunt de repartiments estables del joc d'assignació, respecte l'ordre parcial $\geq_P$, té estructura de reticle complet (El mateix passa amb l'ordre $\geq_Q$*

Com a conseqüència, sempre existeix un repartiment estable òptim pels compradors que denotem per $(\overline{u}, \underline{v})$, i que és el pitjor pels venedors. De la mateixa manera, existeix un repartiment estable òptim pels venedors $(\underline{u}, \overline{v})$, que és el pitjor pels compradors.

Teorema 4.5. *Per tot $i \in P, \overline{u}_i = w(P, Q) - w(P \setminus \{i\}, Q)$.*

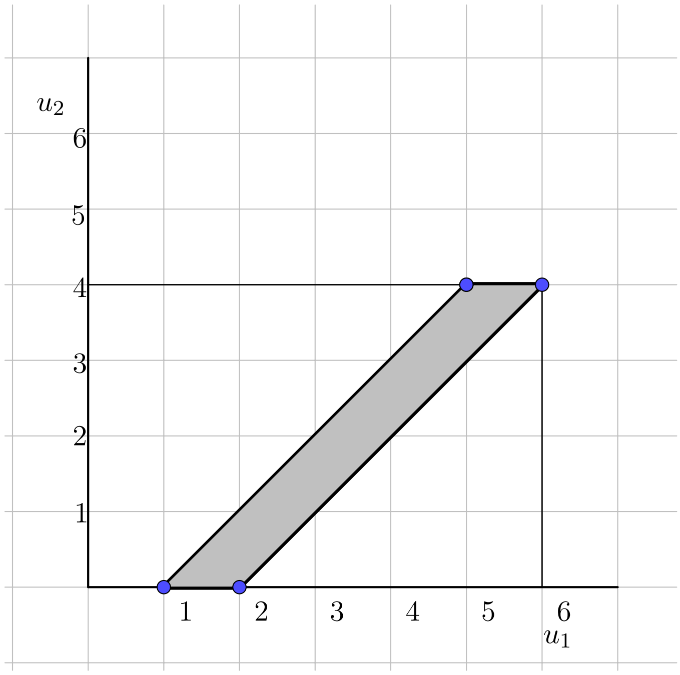

Figura 4: Gràfic core

4.2 Propietats de la subhasta de Vickrey

En la subhasta de Vickrey de múltiples objectes heterogenis, cada comprador $i \in P$ comunica simultàniament al subhastador i a sobre tancat la seva valoració a_{ij} de cada objecte. Aleshores el subhastador busca primer una assignació òptima μ dels objectes als compradors (no més d'un objecte per comprador). A continuació es determina el preu que cada comprador ha de pagar per l'objecte assignat. Aquest preu és el que es coneix com a preu de la subhasta de Vickrey i és, per tot $j \in Q$ tal que (i,j)$\in \mu$:

$$P_j = \max_{\mu' \in \mu(P-\{i\},Q)} \sum_{(k,l)\in\mu'} a_{kl} - \sum_{(k,l)\in\mu\setminus\{(i,j)\}} a_{kl} =$$

$$v((P\setminus\{i\}) \cup Q) - v((P\setminus\{i\}) \cup (Q\setminus\{j\}))$$

Per tant, el guany o utilitat del comprador i és:

$$u_i = a_{i,j} - P_j = a_{i,j} - (v(P - \{i\} \cup Q) - v(P - \{i\} \cup Q - \{j\})) = v(P \cup Q) - v(P - \{i\}\, Q)$$

Teorema 4.6. *En una subhasta de múltiples objectes heterogenis, dir la veritat és una estratègia dominant.*

DEMOSTRACIÓ: Si el jugador i diu la veritat i obté l'objecte j al final de la subhasta, el seu benefici serà $\overline{u}_i = a_{ij} - (w((P \setminus \{i\}) \cup Q) - w((P \setminus \{i\}) \cup (Q \setminus \{j\}))$ tal com s'ha definit anteriorment. Suposem però, que el jugador no diu la veritat amb les seves valoracions. Si al final de la subhasta a ell li acaben assignant el mateix objecte j amb les seves valoracions cambiades, ell acabaria pagant el mateix preu p_j. Això és perquè per la fórmula, el preu final que ha de pagar depèn de les valoracions de la resta de jugadors i no de la seva,

que no es té en compte. Així doncs, si es guanya el mateix objecte, mentir en la pròpia valoració no suposarà per a ell ni una pèrdua ni un guany.
Si en canvi, al jugador i li acaben assignant un objecte diferent k , el preu que pagarà serà $p_k = w((P \setminus \{i\}) \cup Q) - w((P \setminus \{i\}) \cup (Q \setminus \{k\})))$ obtenint un benefici de $\overline{u}_i^{'} = a_{ik} - (w((P \setminus \{i\}) \cup Q) - w((P \setminus \{i\}) \cup (Q \setminus \{k\})))$.
Aleshores $a_{ik} + w((P \setminus \{i\}) \cup (Q \setminus \{k\})) = a_{ik} + max_{\mu \in \mathcal{M}(P \setminus \{i\}, Q \setminus \{k\})} \sum a_{tl} \leq w(P \cup Q) = a_{ij} + w((P \setminus \{i\}) \cup (Q \setminus \{j\}))$ Per tant, $\overline{u}_i^{'} \leq \overline{u}_i$, i això vol dir que el jugador no n'ha tret res de mentir pel que fa a les sees pròpies valoracions.
Si al jugador i no se li assigna cap objecte, tampoc n'ha tret res de mentir, ja que $0 = \overline{u}_i^{'} \leq \overline{u}_i$.

□

Com en les subhastes de Vickrey que hem vist abans, d'un sol objecte i de multiples objectes idèntics, existeixen mecanismes seqüencials que arriben al mateix resultat. Els mecanismes seqüencials tenen l'advantatge que els compradors no han de dir d'entrada quant estan disposats a pagar per cada objecte sino que el subhastador va pujant el preu i nomes han de dir què estan disposats a comprar donat aquest preu. Un mecanisme ascendent que arriba al mateix resultat (distribiució d'objectes i preu pagat per cadascun) que la subhasta de Vickrey està descrit en el treball de Demange et al (1986).

5 Subhastes combinatòries

En una subhasta combinatòria, que també s'anomena subhasta de paquets, el subhastador té diversos objectes heterogenis i cada comprador pot fer una oferta per cada paquet o subconjunt d'objectes. Aleshores, el subhastador ha de cercar una assignació òptima, tenint en compte les ofertes, i després determinar quin preu paga cada comprador pel paquet que li han assignat. Segons com sigui aquest preu tenim un diferent mecanisme de subhasta.

Cal remarcar que el fet de permetre ofertes per paquets d'objectes, i no només per cada objecte individual, permet evitar el risc agregat dels compradors, que es pot produir quan dos o més objectes són complementaris per un comprador.

Dos objectes són substituts per un comprador quan la suma dels seus valors és més gran que el valor del parell (és a dir, quan ja té un dels objectes, el segon val menys). I dos objectes són complementaris quan la suma del valor de dos objectes és menor que el valor conjunt del parell (quan ja té un dels objectes, valora més el poder aconseguir el segon).

Quan dos objectes són complementaris, un comprador que faci ofertes molt agresives per aconseguir tots dos, pot trobar-se amb que només n'aconsegueix un i paga massa per ell. Això es mostra en el següent exemple.

Exemple 5.1. Suposem que es subhasten 3 objectes que són un paraigues (A), un impermeable (B)i unes botes (C), en tres subhastes independents. Un comprador te les següents valoracions:

Paquets	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Valoracions	10	8	6	15	18	16	20

Observeu que el paraigues i l'impermeable són substituts, junts valen menys que la suma dels seus valors individuals. En canvi, el paraigues i les botes (o l'impermeable i les botes) són complementaris.

Si aquest comprador, per obtenir la parella paraigues+botes ofereix 10 pel primer i 8 pel segon. Si a causa de les ofertes dels altres compradors només obté les botes, es trobarà que ha pagat més que el seu valor (8 en lloc de 6). Això és el que es coneix com el problema de l'exposició al risk agregat.

En una subhasta combinatòria d'un conjunt d'objectes M, cada comprador $i \in N$ té una valoració per cada subconjunt de M, $v_i(S)$, per cada $S \subseteq M$. Simultàniament (en un sobre tancat), cada comprador diu al subhastador la seva oferta per cada paquet, és a dir $b_i(S)$ per cada $S \subseteq M$. Aquesta oferta no té per què coincidir amb la seva valoració real.

Un cop rebudes les ofertes, el subhastador ha de resoldre el problema de determinar els guanyadors, és a dir, determinar quin objecte assignar a cada comprador de manera que es maximitzi el guany:

$$\max_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} b_i(S) x_i(S)$$

subjecte a

1. $\sum_{S \supseteq \{j\}} \sum_{i \in N} x_i(S) \leq 1$, per tot $j \in M$,
2. $\sum_{S \subseteq M} x_i(S) \leq 1$, per tot $i \in N$,
3. $x_i(S) = \{0, 1\}$ per tot $i \in N$ i tot $S \subseteq M$.

En aquesta formulació, $x_i(S)$ és una variable binària que pren el valor de 1 si el paquet S s'assigna al comprador i, i pren valor 0 en cas contrari. La primera condició significa que cada objecte només pot pertànyer a un dels paquest assignats, i la segona que cada comprador només pot rebre un paquet.

Aquest problema de maximització és NP-complet i requereix tècniques avançades que no són objecte d'aquest treball.

Mostrem amb un exemple, què significa una assignació eficient o òptima, és a dir, una solució del problema de maximització anterior.

Exemple 5.2. La taula següent mostra les ofertes que fan tres compradors en una subhasta combinatòria de 3 objectes A, B i C.

S	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$
A	**200**	150	200
B	100	**200**	100
C	100	100	**200**
AB	200	200	200
AC	250	300	275
BC	150	150	150
ABC	300	400	300

L'assignació $x_2(B) = x_3(AC) = 1$ i $x_i(S) = 0$ en altre cas, és un aassignació factible, que compleix les consicions 1), 2) i 3), però no és òptima, ja que el benefici del subhastador és 475, i pot ser 600 si tria l'assignació en negreta, que correspon a $x_1(A) = x_2(B) = x_3(C) = 1$ i $x_i(S) = 0$ en altre cas.

5.1 La subhasta combinatòria de Vickrey

Un cop els compradors fan les seves ofertes per cada paquet d'objectes i el subhastador troba una assignació òptima, el que diferencia les distintes subhastes és com es determina el preu que cadascú paga pel paquet que l'està assignat.

La més coneguda d'aquestes subhastes és la generalització de la subhasta de Vickrey que hem estudiat en les seccions anteriors i que també es coneix com mecanisme de Vickrey-Clark-Groves, ja que aquests altres autors van aplicar el mateix mecanisme per problemes diferents, com per exemple la provisió d'un bé públic. Com nosaltres ens centrem en el cas de les subhastes, l'anomenarem simplement subhasta combinatòria de Vickrey.

El preu que pagarà un comporador $i \in N$ en la subhasta de Vickrey és

$$P_i^V = \alpha_i - \sum_{k \neq i} b_k(S),$$

on α_i és el valor òptim del problema de determinació de guanyadors però ignorant totes les ofertes del comprador i. Per tant, el preu que paga i es la diferència entre el que la resta de compradors pagarien si ell no participés en la subhasta, i el que paguen quan ell participa. Per això és diu que el preu que cada comprador paga és el seu cost d'oportunitat d'obtenir el paquet que li ha estat assignat.

Un cop determinat el que paga cada participant, l'ingrés del subhastador és

$$R^V = \sum_{i \in W} P_V,$$

on com sempre W es el conjunt de compradors que reben algun objecte.

Mostrem amb el següent exemple com es determinen els preus en la subhasta de Vickrey.

Exemple 5.3. Considerem una subhasta amb tres objectes en venda, A, B i C. Per simplificar suposem que, apart dels objectes individuals només es poden fer ofertes pel paquet AB. Hi ha 4 compradors potencials i la taula següent mostra les seves ofertes (suposem que només fan ofertes pels paquets en que estan interessats).

S	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$	$b_4(S)$
A	**20**	10		10
B		**20**	10	10
C	10		**20**	10
AB			28	

L'assignació òptima, es a dir la solució del problema de determinació dels guanyadors, està en negreta i coinsisteix en assignar A al comprador 1, B al comprador 2 i C al comprador 3.

Per calcular el preu que paga el comprador 1, P_1^V, considerem que 1 no està present, com mostra la taula següent.

S	$\cancel{b_1(S)}$	$b_2(S)$	$b_3(S)$	$b_4(S)$
A	$\cancel{20}$	10		**10**
B		**20**	10	10
C	$\cancel{10}$		**20**	10
AB			28	

Aleshores, l'assignació òptima sense el comprador 1 consisteix en donar A al comprador 4, B al comprador 2 i C al comprador 3. Per tant,

$$P_1^V = \alpha_1 - (b_2(B) + b_3(C)) = 50 - 40 = 10.$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} P_2^V &= \alpha_2 - (b_1(A) + b_3(C)) = (20 + 10 + 20) - (20 + 20) = 10 \\ P_e^V &= \alpha_3 - (b_1(A) + b_2(B)) = (20 + 20 + 10) - (20 + 20) = 10. \end{aligned}$$

Com hem vist en capítols anteriors, també en el cas de les subhastes combinatòries, la subhasta de Vickrey te la propietat de la compatibilitat d'incentius. La clau està en el fet que el preu que cada comprador paga pel paquet que l'assignen no depèn de la seva pròpia valoració sinó que representa la externalitat que aquest comprador exerceix per la seva presència en el conjunt dels altres compradors.

Teorema 5.4. *En la subhasta combinatòria de Vickrey és una estrategia dèbilment dominant per cada comprador oferir la seva veritable valoració de cada paquet d'objectes.*

Encara més, es coneix que la regla de Vickrey és la única que és efficent, individualment racional (ningú paga per sobre de la seva valoració) i te compatibilitat d'incentius, el que significa que no es pot manipular. No obstant això, en la pràctica, quan hia ha molts objectes en venda, no es un tipus de subhasta que es faci servir molt. Això pot ser perquè presenta alguns inconvenients que mostrem en la secció següent.

5.2 Inconvenients de la subhasta combinatòria de Vickrey

Els principals inconvenients que presenta la subhasta combinatòria de Vickrey es recullen en el treball de Ausubel i Milgrom (2004) i son el baix ingrés del venedor, la falta de monotonia dels ingressos del venedor (respecte a las valoracions dels compradors), i que pot ser manipulada per la connivència d'un grup de compradors o quan un comprador fa ofertes sota diferents identitats.

Considerem un cas amb tres compradors i dos objectes A i B. El comprador 1 només està interessat en el paquet AB i està disposat a pagar 2 millions, mentre que els altres compradors estan disposats a pagar 2 millions per qualsevol dels objectes.

	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$
A	0	2	2
B	0	2	2
AB	2	2	2

L'assignació òptima dona A al comprador 2 i B al comprador 3, amb una valor òptim de 2+2=4. Els preus que paguen aquests compardors segons Vickrey son $p_2^V = 2 - 2 = 0$ i $p_3^V = 2 - 2 = 0$, per tant l'ingrès del venedor és nul. Si el venedor haguès subhastat només el paquet AB, amb una subhasta a segon preu o amb una subhasta anglesa, haguès aconseguit un ingrès de 2 milions.

Un segon inconvnient, és la falta de monotonia de l'ingrès del venedor respecte el nombre de compradors i respecte a l'import de les ofertes. Suposem que el venedor pot desqualificar al tercer comprador, o equialentment, que la seva oferta es redueix a 0.

	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$
A	0	2	0
B	0	2	0
AB	2	2	0

Aleshores, una assignació òptima és donar el paquet AB al comprador 1, i el seu preu de Vickrey és $P_1^V = 2 - 0 = 2$. Per tant, ha disminuit l'import de les ofertes però el venedor ha sortit guanyant.

El tercer inconvenient és que els compradors perdedors poden treure profit si cooperen entre ells. Considerem la següent modificació de l'exemple anterior.

	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$
A	0	0.5	0.5
B	0	0.5	0.5
AB	2	0.5	0.5

En aquest cas, l'assignació òptima dóna el paquet AB al comprador 1, i per tant els compradors 2 i 3 perden la subhasta i no guanyen res. Si en canvi es posen d'acord per oferir 2 milions per cada objecte (i també pel conjunt dels dos), tornem a l'exemple inicial i cadascú quanya un objecte al preu de zero. Per tant, els compradors perdedors tenen incentius per manipular la subhasta posant-se d'acord en pujar el preu.

Finalment, un comprador també pot manipular la subhasta fent servir diferents identitats per fer les ofertes. Considerem la següent subhasta amb dos compradors.

	$b_1(S)$	$b_2(S)$
A	0	0.5
B	0	0.5
AB	2	1

L'assignació òptima dona el paquet AB al comprador 1, i per tant el comprador 2 no guanya res. Però si aquest comprador es desdobla en dos, que ofereixen 2 millions per cada objecte (i també pel paquet AB), tornem a la situació inicial on ja sabem que 2 i 3 guanyen cadascú un objecte i paguen 0. Com que aquest preu està per sota de la valoració real del comprador 2 (que és 1 millió), aquest comporador te incentius per actuar d'aquesta manera.

Cal destacar que en tots aquest exemples, el comprador 1 no dona valor als objectes individuals i valora en 2 millions el paquet AB. Això significa que els objectes A i B son complementaris per aquest comprador, és a dir, només tenen valor en la presència de l'altre. Suposem que no és així i que el comprador 1 considera que A i B són substituts, per exemple $B_1(A) = b_1(B) = 1$ i $b_1(AB) = 2$:

	$b_1(S)$	$b_2(S)$	$b_3(S)$
A	1	2	2
B	1	2	2
AB	2	2	2

Aleshores la assignació òptima torna a donar A al comprador 2 i B al comprador 3, però ara el preu que paguen segons la subhasta de Vickrey és $p_2^V = 3 - 2 = 1$ i $P_3^V = 3 - 2 = 1$. Per tant el venedor té in ingrès de 1+1=2 millions. De la mateixa manera, quan no hi ha complementaritats, la resta d'inconvenients de la subhasta de Viockrey també desapareixen.

6 Conclusions

Des que William Vickrey va mostrar que en la subhasta d'un objecte a segon preu els compradors no tenien incentius a mentir sobre les seves veritables valoracions, ja que dir la veritable valoració era una estratègia dominant, aquesta idea s'ha generalitzat a situacions on es subhasten diversos objectes que poden ser homogenis o heterogenis, o fins i tot es pot permetre fer ofertes per paquets d'objectes. I en tots aquests casos el mecanisme té compatibilitat d'incentius, que vol dir que tots els compradors tenen incentius per revelar les seves veritables valoracions.

La subhasta de Vickrey es fa servir a la pràctica per subhastar objectes únics, obres d'art per exemple, i també les subhastes online de eBay són un mecanisme semblant al de Vickrey. Però en el camp de subhastes combinatòries de múltiples objectes heterogenis no es coneixen aplicacions pràctiques. Una de les raons pot ser que a mesura que aumenta el nombre d'objectes a la venda, el nombre de paquets possibles creix exponencialment. Això fa que cada comporador hagi de valorar molts objectes i també es complica computacionalment el problema de trobar l'assignació òptima (problema de determinació dels guanyadors).

La regla de Vickrey és l'única que és eficient, individualment racional i amb compatibilitat d'incentius (veure Green and Laffont, 1979, i Holmstrom, 1979). Però presenta alguns inconvenients: pot donar baixos ingressos al venedor i pot ser manipulada pels compradors formant coalicions o actuant sota diferents identitats.

Referències

[1] Mochón, Asunción; Saéz, Yago: Understanding Auctions, Springer Texts in Business and Economics (2014)

[2] Krishna, V. : Auction Theory. Elsevier (2009)

[3] L. S. Shapley and M. Shubik, The Assignment Game I: The Core, International Journal of Game Theory, 1 (1972), 111–130.

[4] A. E. Roth and M. Sotomayor, Two-sided Matching, Econometric Society Monograph 18, Cambridge University Press, 1990.

[5] L. M. Ausubel and P. Milgrom, The lovely but lonely Vickrey auction, In Combinatorial Auctions (ed. P. Cramton, R. Steinberg and Y. Shoham), MIT Press, 2005.

[6] G. Demange, D. Gale and M. Sotomayor, Multi-item auctions, Journal of Political Economy, 94 (1986), 863–872.