GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball Final de Grau

SISTEMES DEDUCTIUS ALGEBRITZABLES

Autor: Lucas Uzías Acevedo

Director: Dr. Joan Gispert Brasó

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 juny de 2022

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Abstract

Logics allow the study of reasoning's validity. Essentially, there are two ways of representing logics, syntactically and semantically. The syntactic presentation builds on the notion of proof, which is defined by a set of inference rules or calculus, stating that a reasoning is correct if a proof of the conclusion can be constructed from the premises. The semantic representation is based on the notions of truth and interpretation, and the idea is that, if the premises are true, so is the conclusion. Semantic representation has also been studied using the logical matrices' method. The existence of completeness theorems makes it possible to relate syntactic to semantics.

Presently work studies the article [Blo89], by Blok and Pigozzi, where it is formally defined to be an algebraizable deductive system. Next, some characterization theorems of these will be proved. It will also be seen that, when a deductive system is algebraizable, it is easier to find a completeness theorem between syntactic calculus and a matrix semantic representation. This paper will conclude by considering some applications, such as the so-called bridge theorems, which relate the branches of logic and algebra.

Resum

Les lògiques permeten l'estudi de la validesa dels raonaments. Essencialment, es poden trobar dues maneres de representar les lògiques, sintàcticament i semàntica. La presentació sintàctica es basa en la noció de demostració, que es defineix mitjançant un conjunt de regles d'inferència o càlcul, afirmant que un raonament és correcte si es pot construir una demostració de la conclusió a partir de les premisses. La representació semàntica es fonamenta en les nocions de veritat i interpretació, i en la idea que, si les premisses són veritat, igualment la conclusió. També s'ha estudiat la representació semàntica a partir del mètode de matrius lògiques. L'existència dels teoremes de completesa possibiliten relacionar sintàctica amb semàntica.

En el present treball s'estudia l'article [Blo89], de Blok i Pigozzi, on es defineix formalment ésser un sistema deductiu algebritzable. Seguidament, es demostraran alguns teoremes de caracterització d'aquests. També es veurà que, quan un sistema deductiu és algebritzable, resulta més senzill trobar-ne un teorema de completesa entre el càlcul sintàctic i una representació semàntica matricial. Aquest escrit conclourà considerant algunes aplicacions, com els anomenats teoremes pont, que relacionen les branques de la lògica i l'àlgebra.

2020 Mathematics Subject Classification: 03B05, 03G05, 03G10, 03G27

Agraïments

Vull agrair al Dr. Joan Gispert Brasó la seva gran paciència i ajuda durant l'elaboració d'aquest treball, que n'ha estat molta donada la meva escassa formació prèvia en lògica.

Índex

Introducció

El 1935, Alfred Tarski publicà un dels articles pioners en tractar les lògiques de manera algebraica, *Grundzüge des Systemenkalküls. Erster Teil*, o *Foundations of the Calculus of Systems*, el dotzè article de [Tar83], pàg. 342. Entre altres resultats, Tarski va trobar, a través de l'ara conegut com *procés de Lindenbaum-Tarski*, que la classe d'àlgebres de Boole és l'algebrització de la lògica proposicional clàssica o, en termes més actuals, és la seva *semàntica algebraica equivalent*; el que significa que, a la pràctica, la classe d'àlgebres es comporta intrínsecament igual que la lògica.

El següent pas natural fou intentar generalitzar el que Tarski havia fet amb la lògica clàssica, per tal d'aconseguir les classes d'àlgebres associades a altres lògiques. Foren bastants els treballs i les investigacions en aquest sentit, com, per exemple, el rellevant llibre d'Helena Rasiowa, [Ras74], que dona resultats de gran utilitat per una gran família de sistemes deductius.

No obstant això, l'article que, es podria dir, esdevingué l'apogeu de la generalització, o abstracció, del procés de Lindenbaum-Tarski, és *Algebraizable Logics*, [Blo89], de Willem J. Blok i Don L. Pigozzi, presentat el 1989. L'esmentat article serà la base d'aquest treball, ja que fou el que formalitzà la definició d'ésser un sistema deductiu *algebritzable*, i presentà uns teoremes per caracteritzar-los. A més, es considera un dels precursors de la branca de la *lògica algebraica abstracta*.

Personalment, vaig iniciar aquest Treball Final de Grau sense haver cursat prèviament cap assignatura de lògica, així que, el primer dels objectius d'aquest escrit serà poder entendre les definicions, els conceptes i resultats, tant de la lògica com de l'àlgebra, que es puguin necessitar al llarg de l'argument. Per aquest motiu, també, es començarà amb un primer capítol dedicat a estudiar unes quantes definicions preliminars, on el qualificatiu "preliminars" esdevé notablement relatiu, cal dir. Per tal d'il·lustrar els diferents conceptes, s'intercalarà constantment l'exemple de la lògica proposicional clàssica, en la que, espero, resultarà una explicació entenedora i assumible per un lector neòfit en la lògica, com n'és un servidor. Al final del capítol, pròpiament es reconstruirà la demostració de Tarski, el *procés de Lindenbaum-Tarski*, per la lògica clàssica.

L'altre objectiu principal, que s'intentarà assolir al segon capítol, serà estudiar amb detall els resultats de Blok i Pigozzi, i aplicar-los a diferents sistemes deductius. Així que, en aquesta part es definiran els sistemes deductius algebritzables, i es demostraran, concretament, tres teoremes d'algebrització. Igual que abans, es recorrerà a l'exemple de la lògica proposicional clàssica, i, a la vegada, aquesta servirà de guia per tractar-ne altres lògiques. Finalment, el tercer capítol també s'interessarà per algunes aplicacions directes, com els teoremes de completesa i els anomenats teoremes pont, els quals, en certa manera, esdevindran una manifestació de la gran importància dels resultats i les construccions plantejades al llarg d'aquest treball.

Per elaborar tot el mencionat, ha calgut consultar una extensa i variada bibliografia. Òbviament, l'article de Blok i Pigozzi n'ha estat la font més important, però, segurament la segona referència més destacable són els primers capítols del llibre [Fon16]. Juntament amb d'altres com [Bur81; Cin; Pri09], o el primer capítol de [Pla91], aquestes obres han estat la formació bàsica per començar a entendre i endinsar-se en la lògica i la lògica algebraica.

Tanmateix, altres fonts han sigut emprades, especialment per aprofundir un mica en els diferents temes a tractar. Per la teoria referent a reticles s'han consultat obres com [Bal75; Bir40; Grä78]. A la vegada, quan s'estudien algunes lògiques no clàssiques, han estat útils els treballs de [Pri01; Jan90]. Tot i que no s'ha aprofundit massa, pel que fa als teoremes pont cal referenciar, entre d'altres, [Blo91; Cra57; Cze85; Cze86].

També, obres com [Cze01; Ras63] s'han consultat al llarg del treball, més aviat per contrastar informació i considerar diferents punts de vista. Complementàriament, al mateix escrit ja se citen altres fonts emprades en qüestions més puntuals i concretes.

Quant a notació, generalment es dedicaran p, q, r, s per denotar variables, $\varphi, \psi, \vartheta, \phi$ per fórmules, Σ, Γ, conjunts de fórmules, $\delta, \epsilon, \xi, \eta$ per fórmules integrants d'una equació (però no així a les quasi-equacions), i Θ per conjunts d'equacions. Es farà ús del símbol $\vdash$ per relacions definides sintàcticament, i, usualment, $\vDash$ per relacions definides semànticament. També, els conjunts es representaran amb majúscules, $A, U, L, ...$, i es reservarà la negreta per les àlgebres, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, ...$, tot i que els llenguatges proposicionals s'anomenaran usant $\mathbf{L}$. Tant els càlculs com els sistemes deductius s'intentaran expressar amb la tipografia $\mathcal{S}, \mathcal{C}l, \mathcal{IPC}, ...$, mentre que les classes d'àlgebres concretes es representaran per $\mathsf{K}, \mathsf{BA}, \mathsf{HA}, ...$; i els operadors sobre aquestes es denotaran per $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{Q}, \mathbb{V}$,... T o S usualment seran teories, però per les teories equacionals es repetirà el símbol Θ, tot i que, en principi, no hauria de portar a confusió.

Finalment, com a última apreciació, tot i que en aquesta introducció s'han mantingut les distàncies, en el que és pròpiament el cos del treball es parlarà en primera persona del plural, ja que, espero, puguem gaudir junts d'aquest viatge envers la lògica.

1 Definicions preliminars

1.1 Fórmules i sistemes deductius

En el llenguatge natural, per establir una veritat, o per defensar que una idea és correcta, resulta necessari presentar alguna evidència o argument que ens serveixi de prova. Aquesta evidència o *raonament*, en el fons, no és més que un conjunt d'enunciats, *proposicions*, on anomenem a les primeres *premisses*, i a partir d'aquestes construïm o arribem a l'última, que denominem la *conclusió*. Així, definirem un raonament com una expressió de la forma $\Sigma \therefore \varphi$, on entenem $\therefore$ com *per tant*, Σ és un conjunt de premisses i φ és la conclusió. Un exemple de raonament pot ser:

Premissa 1: *Si aquest Treball Final de Grau és sobre lògica, llavors és interessant de llegir.*

Premissa 2: *Aquest Treball Final de Grau és sobre lògica.*

Conclusió: *Per tant, aquest Treball Final de Grau és interessant de llegir.*

D'altra banda, direm que un raonament és *correcte* o vàlid quan les premisses impliquen la conclusió. Així, per exemple, podem veure que l'anterior és un raonament correcte, i fixem-nos, també, que, si a la primera premissa i a la conclusió substituïm "interessant" per un altre adjectiu, com "gratificant", "avorrit", "fàcil" o "difícil"; el raonament continuaria sent correcte, tot i que les conclusions d'aquests nous arguments veiem que podrien ser contradictòries entre elles i, per tant, algunes segurament no les consideraríem veritat.

Entendrem la Lògica com la ciència que estudia, des d'un punt de vista formal, els raonaments i la seva validesa. Llavors, per fer lògica, en aquest últim sentit, primerament ens serà necessari precisar-ne la construcció dels enunciats o sentències a tractar. En aquest treball, ens limitarem al que anomenem *llenguatge proposicional* o llenguatge d'ordre zero, que és el més senzill dels llenguatges formals:

Definició 1.1. *Un **llenguatge proposicional** és una parella $\boldsymbol{L} = \langle L, ar\rangle$, on L és un conjunt de símbols (constants lògiques i connectives), i $ar : L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ és una aplicació que determina l'arietat dels elements de L.*

Definició 1.2. *Donat un llenguatge proposicional $\boldsymbol{L} = \langle L, ar\rangle$ i un conjunt de variables X, amb $X \cap L = \varnothing$, el seu **conjunt de fórmules** o proposicions $Fm_{\boldsymbol{L}}(X)$ es defineix per recursivitat de la següent manera:*

i) $X \subseteq Fm_{\boldsymbol{L}}(X)$;

ii) $\{\lambda \in L : ar(\lambda) = 0\} \subseteq Fm_{\boldsymbol{L}}(X)$;

iii) $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in Fm_{\boldsymbol{L}}(X)$ *per tot* $\varphi_i \in Fm_{\boldsymbol{L}}(X)$ *i tot* $\lambda \in L$ *d'arietat* $ar(\lambda) = n \geqslant 1$;

iv) No existeixen més fórmules que les generades per i), ii) i iii) amb un nombre finit de passos.

Quan no porti a cap ambigüitat, expressarem el conjunt de proposicions $Fm_{\mathbf{L}}(X)$ senzillament com Fm.

Definició 1.3. *Anomenem **substitució** a tot endomorfisme en Fm, és a dir, tota aplicació $\sigma : Fm \longrightarrow Fm$, tal que conserva les connectives i les constants, quedant determinada per la restricció al conjunt de variables X.*

Definició 1.4. *Una substitució σ és **exhaustiva** quan per cada fórmula φ existeix una fórmula ψ tal que $\sigma(\psi) = \varphi$.*

Definició 1.5. *Una **lògica proposicional** és una parella $\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{L}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, on $\boldsymbol{L}$ és un llenguatge proposicional i $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$ és una relació entre les parts de les fórmules i les fórmules, que verifica, per tot $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:*

Si $\varphi \in \Sigma$, llavors $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$; *(Identitat)*

Si $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Gamma$, llavors $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$; *(Monotonia)*

Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, llavors $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$; *(Tall)*

Si $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, llavors $\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{L}} \sigma(\varphi)$, per tota substitució σ. *(Estructuralitat)*

*Anomenem $\vdash_{\mathcal{L}}$ la **relació de conseqüència** de la lògica $\mathcal{L}$.*

Definició 1.6. *Diem que una lògica proposicional $\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{L}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ és **sistema deductiu** quan és **finitària**, és a dir, que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, si $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, llavors existeix $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finit tal que $\Sigma' \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Definició 1.7. *Siguin $\mathcal{L} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ i $\mathcal{L}' = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{L}'} \rangle$ dues lògiques definides sobre el mateix llenguatge proposicional $\mathbf{L}$. Diem que $\mathcal{L}$ és una **extensió** de $\mathcal{L}'$ o que $\mathcal{L}'$ és més feble que $\mathcal{L}$ (i $\mathcal{L}$ és més fort que $\mathcal{L}'$), i ho denotem per $\mathcal{L}' \leqslant \mathcal{L}$, si $\vdash_{\mathcal{L}'} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$.*

Essencialment, les lògiques proposicionals es poden definir de dues maneres: semànticament i sintàctica. A continuació, estudiarem ambdós tractaments, i els il·lustrarem amb la lògica proposicional clàssica.

1.1.1 Representació sintàctica

A grans trets, la representació sintàctica consisteix en donar un conjunt de regles de càlcul per, partint de les premisses d'un raonament, construir-ne una demostració de la conclusió.

Definició 1.8. *Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt de meta-variables referides a $Fm(X)$, i prenem $\varphi \in Fm(\mathcal{X})$ i un conjunt finit $\Sigma = \{\psi_i \in Fm(\mathcal{X}) : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\}$. Una **regla d'inferència** és la parella $\langle \Sigma, \varphi \rangle$, i se sol representar com:*

$$\frac{\psi_1, \ldots, \psi_n}{\varphi}$$

*L'aplicació de la regla sobre fórmules concretes l'anomenem una aplicació o **instància** de la regla.*

Exemple 1.9. La regla *Modus Ponens* es representa, amb les meta-variables φ i ψ, com:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

Veiem que, per exemple, l'aplicació de *Modus Ponens*, sobre les fórmules p i $p \to q$ dona q, o de $p \vee q$ i $(p \vee q) \to (q \wedge r)$ podríem afirmar-ne $q \wedge r$, ja que tenim les instàncies:

$$\frac{p, p \to q}{q} \qquad\qquad \frac{p \vee q, (p \vee q) \to (q \wedge r)}{q \wedge r}$$

Des de la perspectiva sintàctica, i segons la definició, una regla realment no és més que un joc de símbols, sense cap necessitat de significat al darrere. Malgrat això, la idea o l'objectiu d'una regla $\langle \Sigma, \varphi \rangle$ serà afirmar que, si prenem els elements de Σ com a premisses, llavors es pot deduir, es pot demostrar, φ; així que, ens interessarà, i serà el més usual, que les regles guardin certa significança o caràcter semàntic, en aquest sentit.

Definició 1.10. *Un **càlcul** és un conjunt de regles d'inferència.*

Definició 1.11. *Una **demostració** de $\varphi \in Fm$ a partir de $\Sigma \subseteq Fm$, en un càlcul donat $\mathcal{S}$, és una successió finita $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ tal que $\varphi_n = \varphi$ i, per tota $i \leqslant n$, o bé $\varphi_i \in \Sigma$, o bé φ_i s'obté de fórmules anteriors, aplicant alguna regla d'inferència del càlcul $\mathcal{S}$.*

Definició 1.12. *Sigui $\mathcal{S}$ un càlcul i Fm un conjunt de fórmules en un llenguatge proposicional $\mathbf{L}$. Prendrem $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$ com la relació definida, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, de la següent manera:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Longleftrightarrow \textit{Existeix una demostració de } \varphi \textit{ a partir de } \Sigma, \textit{ en el càlcul } \mathcal{S}.$$

Teorema 1.13. *Seguint la notació de la definició anterior, tenim que $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ és un sistema deductiu.*

Demostració. Donat un càlcul $\mathcal{S}$, i prenent $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

Si $\varphi \in \Sigma$, aleshores podem considerar la successió $\langle \varphi \rangle$ com una demostració de φ a partir de Σ, així que $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. (Identitat)

Suposem $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Gamma$. Sigui $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració de $\varphi = \varphi_n$ a partir de Σ. Tenim que, per tota $i \leqslant n$, $\varphi_i \in \Sigma \subseteq \Gamma$ o, en altre cas, φ_i és deduïble de fórmules anteriors mitjançant aplicacions de regles de $\mathcal{S}$. Veiem que, aleshores, $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi \rangle$ també resulta una demostració de φ a partir de Γ, que ens porta a afirmar que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. (Monotonia)

Suposem ara que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, per tot $\psi \in \Sigma$, i que $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Sigui $\langle \psi_0, \dots, \psi_n \rangle$ una demostració de $\psi = \psi_n$ a partir de Γ, per tot $\psi \in \Sigma$; i prenem $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració de $\varphi = \varphi_n$ a partir de Σ. Tenim, llavors, que les φ_i provenen d'aplicar alguna regla a fórmules anteriors, o $\varphi_i \in \Sigma$. Suposem que φ_{i_j}, per $j = \{0, \dots, k\}$ són totes les φ_i que pertanyen a Σ, que per la definició de demostració sabem que són un nombre finit. Si a la demostració de ψ a partir de Σ li intercalem, als llocs de les φ_{i_j}, les successions que demostren cada $\psi = \varphi_{i_j}$ a partir de Γ, que hem suposat que existeixen i també són finites, aleshores haurem construït una demostració de φ a partir de Γ, és a dir, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. (Tall)

Considerem $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, amb $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració de $\varphi = \varphi_n$ a partir de Σ. Sigui σ una substitució arbitrària. Suposem primer que φ_i prové d'aplicar una regla a fórmules anteriors, llavors, tindrem que, per $i_0, \dots, i_k < i$,

$$\frac{\varphi_{i_0}, \dots, \varphi_{i_k}}{\varphi_i}$$

és una instància d'alguna regla del càlcul $\mathcal{S}$. Aleshores, de la definició de substitució, és immediat que

$$\frac{\sigma(\varphi_{i_0}), \dots, \sigma(\varphi_{i_k})}{\sigma(\varphi_i)}$$

és també una instància de la mateixa regla.

Si, en canvi, $\varphi_i \in \Sigma$, igualment tenim que $\sigma(\varphi_i) \in \{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\}$. Per tant, ajuntant tot el que hem vist, tenim que $\langle \sigma(\varphi_0), \dots, \sigma(\varphi_{n-1}), \sigma(\varphi) \rangle$ és una demostració de $\sigma(\varphi)$ a partir de $\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\}$, amb el que arribem al fet que $\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \sigma(\varphi)$. (Estructuralitat)

Veiem que, si $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, donat que tota demostració de φ a partir de Σ és finita, prenent Σ' com el conjunt d'elements de Σ que intervenen en alguna demostració de φ en concret, tindrem que $\Sigma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ amb $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finit i, per tant, $\vdash_{\mathcal{S}}$ és finitària. Provem així que, per un llenguatge proposicional $\mathbf{L}$, $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ és sistema deductiu. ▲

Exemple 1.14. *(Lògica proposicional clàssica)*

Definim $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l} \rangle$, on $L = \{\to, \neg\}$ són les connectives del llenguatge $\mathbf{L}$, amb $ar(\to) = 2$ i $ar(\neg) = 1$; i $\vdash_{\mathcal{C}l}$ és una relació definida sintàcticament, segons el vist anteriorment, a partir d'un càlcul, que determinarem emprant unes regles especials, els denominats *axiomes*:

Definició 1.15. *Un* ***axioma*** *és una regla de la forma $\langle \emptyset, \varphi \rangle$, per $\varphi \in Fm(\mathcal{X})$. En lloc de representar-lo com*

$$\frac{}{\varphi},$$

usualment es descriu donant φ.

En el càlcul amb el qual definirem la lògica proposicional clàssica tindrem com axiomes, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm(\mathcal{X})$:

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{Ax1}$$
$$(\varphi \to (\psi \to \vartheta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta)) \tag{Ax2}$$
$$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \tag{Ax3}$$
$$(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \tag{Ax4}$$

I, com a única regla, *Modus Ponens* (M.P.):

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

Aquest càlcul és dels anomenats de *tipus Hilbert*, per contenir molts axiomes i pocs esquemes de regles, en aquest cas només un. Tanmateix, són molts i de diferents tipus els possibles càlculs per determinar la lògica proposicional clàssica, com, per exemple, el càlcul tipus Hilbert que trobem a [Pla91], pàg. 17; o els càlculs de tipus *Deducció Natural*, caracteritzats per contenir pocs, o cap, axioma, però un nombre significatiu de regles. Aquesta pluralitat de càlculs no és exclusiva de la lògica proposicional clàssica, sinó que, en general, podem trobar-ne diferents càlculs per definir una mateixa lògica. A l'*Apèndix A* es consideren els càlculs que s'empraran en aquest treball per algunes de les lògiques a estudiar: $\mathcal{IPC}$ per la lògica intuicionista, $Ł_{[0,1]}$ pel sistema deductiu infinit-valorat de Łukasiewicz, $Ł_3$ pel sistema deductiu tri-valorat de Łukasiewicz, $\mathcal{G}_{[0,1]}$ i $\mathcal{G}_n$ seran els càlculs de les lògiques infinit-valorades i n-valorades de Gödel, respectivament, i gK i lK els de les lògiques modals global i local.

Tornant al nostre càlcul clàssic, però, una demostració de $\varphi \in Fm$ a partir de $\Sigma \subseteq Fm$ ara serà una successió finita $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ tal que $\varphi_n = \varphi$ i $\varphi_i \in Fm$, per tota $i \leqslant n$, o pertany a Σ, o és una instància dels axiomes *(Ax1)*, *(Ax2)*, *(Ax3)* o *(Ax4)*, o s'obté de dues fórmules anteriors a partir de *Modus Ponens*, és a dir, a la demostració existeixen dues fórmules φ_j i φ_k, amb $j, k < i$, tals que $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$.

Pel *Teorema 1.13*, sabem què $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l} \rangle$ definirà un sistema deductiu. Vegem ara un petit exemple de com demostrar, amb φ una fórmula, $\vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi$:

$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	Instància de *(Ax2)*
$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	Instància de *(Ax1)*
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	M.P. dels dos anteriors
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	Instància de *(Ax1)*
$\varphi \to \varphi$	M.P. dels dos anteriors

A l'*Apèndix B* es presenten i demostren algunes propietats rellevants quant a operar sintàcticament amb la lògica proposicional clàssica. En particular, es proven el *Teorema de Deducció* i el *Teorema de Reducció a l'Absurd*, i es comenten les propietats de $\vee$ i $\wedge$ a Dreta i Esquerra, entre d'altres. Tots aquests resultats els necessitarem i ens seran útils més endavant.

1.1.2 Representació semàntica

La representació semàntica descansa sobre les nocions d'*interpretació* i *veritat*, i la idea de fons seria formalitzar que, si les premisses d'un raonament són veritat, llavors la conclusió també ha de ser veritat.

Una interpretació l'entendrem com una funció que assigna algun tipus de valor de veritat a cada fórmula, atorgant així alguna mena de significat a les connectives. Generalment, definim la interpretació d'una fórmula de manera recursiva, assignant els valors de veritat a les variables, i estenent-ho a la resta de fórmules mitjançant, per exemple, les que coneixem com *taules de veritat*. Així, direm que un raonament és correcte si, quan la interpretació de les premisses és veritat, llavors també ho és la interpretació de la conclusió.

Certament, la noció d'interpretació i de veritat resulten molt amplies o, fins i tot, ambigües. Però, en part és degut a la necessitat d'abastar la gran casuística existent: en particular, si determinem prèviament un subconjunt dels valors de veritat possibles, els elements del qual anomenarem *valors designats*, podem considerar que una fórmula és veritat si la seva interpretació és un valor designat; a partir d'això, i aplicant els conceptes esmentats de manera pràcticament directa, tot seguit tractarem la lògica proposicional clàssica i la lògica tri-valorada de Gödel. En canvi, no gaire més endavant n'estudiarem un mètode algebraic de definir les lògiques, i, tot i que no en parlarem molt en aquest treball, existeixen altres tipus de semàntiques, on, per exemple, les interpretacions es defineixen a partir dels anomenats *models de Kripke*, com es pot considerar amb les lògiques modals o la intuicionista[1].

Exemple 1.16. *(Lògica proposicional clàssica)*

Sigui el llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar\rangle$, on $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ és el conjunt de connectives, i verifiquen $ar(\wedge) = ar(\vee) = ar(\rightarrow) = ar(\leftrightarrow) = 2$, $ar(\neg) = 1$. Suposem les operacions en el conjunt $\{0, 1\}$ definides per les següents taules de veritat:

$\curlywedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\curlyvee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

De manera que, si prenem una funció $I : Fm \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, per p i q variables:

$$\begin{aligned} &I(p), I(q) \in \{0,1\}, && I(p \wedge q) = I(p) \curlywedge I(q), && I(p \rightarrow q) = I(p) \Rightarrow I(q), \\ &I(\neg p) = \neg I(p), && I(p \vee q) = I(p) \curlyvee I(q), && I(p \leftrightarrow q) = I(p) \Leftrightarrow I(q); \end{aligned}$$

podem considerar $I : Fm \rightarrow \{0, 1\}$ una interpretació. Observem que, d'aquestes propietats, n'obtenim que tota interpretació queda determinada per la seva restricció a les variables. Cal esmentar que la notació habitual és confondre o, podríem dir, fusionar, les operacions $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i $\neg$ amb les connectives $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ i $\neg$, respectivament.

[1] Vegis els articles [Kri59; Kri65].

Considerarem com a valors designats el conjunt $\{1\}$, que evidentment és subconjunt de $\{0,1\}$. Així que, per una interpretació $I : Fm \longrightarrow \{0,1\}$, si una fórmula $\varphi \in Fm$ verifica $I(\varphi) = 1$, aleshores direm que aquesta és veritat o certa, mentre que una fórmula amb interpretació igual a 0 es prendrà com a falsa. Tenint en compte això, fixem-nos que podríem entendre que la taula de veritat de la connectiva $\wedge$ (de l'operació $\curlywedge$) fa que aquesta prengui el significat de la conjunció *i*, $\vee$ la disjunció *o*, $\rightarrow$ el condicional *si... llavors*, $\leftrightarrow$ prendria el significat del bicondicional *si, i només si* i $\neg$ seria la negació *no*.

Finalment, arribem a la representació semàntica de la lògica proposicional clàssica, a través de la següent proposició:

Proposició 1.17. *Sigui* $\mathbf{L}$ *el llenguatge proposicional definit com a l'Exemple 1.16, amb* $\{0,1\}$ *el conjunt de valors de veritat i* $\{1\} \subseteq \{0,1\}$ *el seu subconjunt de valors designats. Si definim la relació* $\vDash_{\mathcal{C}l} \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$*, per tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$*, per:*

$$\Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi \Longleftrightarrow \textit{Per tota interpretació } I : Fm \longrightarrow \{0,1\}, \textit{ si } \{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}, \\ \textit{llavors } I(\varphi) = 1;$$

aleshores, $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{C}l} \rangle$ *és una lògica.*

Demostració. Per tot $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

Si $\varphi \in \Sigma$, llavors és trivial que per tota interpretació $I : Fm \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, també $I(\varphi) = 1$; així que $\Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$. (Identitat)

Suposem $\Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Gamma$. Sigui I una interpretació tal que $\{I(\phi) : \phi \in \Gamma\} \subseteq \{1\}$, llavors, evidentment es verifica $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma \subseteq \Gamma\} \subseteq \{1\}$. Per la nostra primera hipòtesi, podem afirmar que $I(\varphi) = 1$ i, per tant, concloem que $\Gamma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$. (Monotonia)

Ara suposem que $\Gamma \vDash_{\mathcal{C}l} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$, i que $\Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$. Per tota interpretació I tal que $\{I(\phi) : \phi \in \Gamma\} \subseteq \{1\}$ sabem, doncs, que $I(\psi) = 1$, per tot $\psi \in \Sigma$. Així, donat que tenim que $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, sabem que es dona $I(\varphi) = 1$, amb el que podem afirmar que $\Gamma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$. (Tall)

Considerem $\Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$ i, aleshores, per tota interpretació I, si $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, tindrem que $I(\varphi) = 1$. Sigui $\sigma : Fm \longrightarrow Fm$ una substitució arbitrària. Observem que $I' := I \circ \sigma$ és també interpretació de Fm en $\{0,1\}$, per tant, en particular, tenim que, si $\{I'(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, llavors $I'(\varphi) = 1$; és a dir, si $\{I(\sigma(\psi)) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, tenim que $I(\sigma(\varphi)) = 1$, el que significa que $\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathcal{C}l} \sigma(\varphi)$. (Estructuralitat) ▲

A tall d'exemple, demostrarem el principi del tercer exclòs amb la lògica $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{C}l} \rangle$ plantejada: volem provar, per tota fórmula φ, el raonament $\vDash_{\mathcal{C}l} \varphi \vee \neg\varphi$, és a dir, donat que l'antecedent és el conjunt buit, cal veure que, per tota interpretació $I : Fm \longrightarrow \{0,1\}$, $I(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Això no comporta gaire dificultat, ja que $I(\varphi \vee \neg\varphi) = I(\varphi) \vee \neg I(\varphi)$ (on, recordem, estem barrejant les operacions definides a les taules de veritat amb les connectives de $\mathbf{L}$). Si $I(\varphi) = 1$, per les taules de veritat sabem que $I(\varphi \vee \neg\varphi) = 1 \vee \neg 1 = 1 \vee 0 = 1$; i, si $I(\varphi) = 0$, tindrem $I(\varphi \vee \neg\varphi) = 0 \vee \neg 0 = 0 \vee 1 = 1$. Donat que $I(\varphi) \in \{0,1\}$, concloem que $\vDash_{\mathcal{C}l} \varphi \vee \neg\varphi$ es verifica.

Exemple 1.18. *(Lògica tri-valorada de Gödel)*

Definim el llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, amb $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot, \top\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = ar(\rightarrow) = 2$, $ar(\neg) = 1$ i $ar(\bot) = ar(\top) = 0$. Amb el conjunt de valors de veritat $\{0, 1/2, 1\}$, i prenent com a únic valor designat l'1, veiem que ara una interpretació serà de la forma $I : Fm \longrightarrow \{0, 1/2, 1\}$. Mitjançant taules de veritat, podem definir les següents operacions, que, com a l'exemple anterior, determinaran les interpretacions:

$\wedge^{G_3}$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee^{G_3}$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\rightarrow^{G_3}$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

$\neg^{G_3}$	
0	1
1/2	0
1	0

I, $\bot^{G_3} = 0$, $\top^{G_3} = 1$. Procedint de manera semblant a la *Proposició 1.17*, podem definir una lògica $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{G}_3} \rangle$, on, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vDash_{\mathcal{G}_3} \varphi \iff \text{Per tota interpretació } I : Fm \longrightarrow \{0, 1/2, 1\}, \text{ si } \{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}, \text{ llavors } I(\varphi) = 1.$$

Ara podem veure que, per exemple, a la lògica $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{G}_3} \rangle$, que anomenem la lògica *tri-valorada de Gödel*, no es dona el principi del tercer exclòs, el que ens assegura que és una lògica multivalorada: sigui una interpretació $I : Fm \longrightarrow \{0, 1/2, 1\}$ tal que, per $\varphi \in Fm$, $I(\varphi) = 1/2$. Aleshores, tenim que $I(\varphi \vee \neg\varphi) = I(\varphi) \vee^{G_3} \neg^{G_3} I(\varphi) = 1/2 \vee^{G_3} \neg^{G_3} 1/2 = 1/2 \vee^{G_3} 0 = 1/2 \neq 1$. Per tant, concloem que $\nvDash_{\mathcal{G}_3} \varphi \vee \neg\varphi$.

Tanmateix, aquesta manera de definir semànticament una lògica no ens serà la més útil, sinó que, a la pràctica, recorrerem, com ja vam avançar, a una abstracció o generalització algebraica del que hem estat veient, i que anomenarem mètode o representació per *matrius lògiques.*

Definició 1.19. *Sigui un llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, una **$\mathbf{L}$-àlgebra** o, si no porta a confusió, senzillament, una àlgebra, és una estructura $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ on A és un conjunt no buit, que anomenem l'univers o domini d'$\boldsymbol{A}$, i $\lambda^{\boldsymbol{A}} : A^n \longrightarrow A$, on $n = ar(\lambda)$, és una funció sobre A.*

Potser un dels detalls més importants, que desencadenarà els principals resultats d'aquest treball, és el fet que el conjunt de fórmules Fm ens estableix la que anomenarem l'àlgebra de fórmules $\mathbf{Fm}$. Arribem a aquesta conclusió sense gaires dificultats, a partir de *ii)* i *iii)* de la mateixa definició del conjunt de fórmules, la *Definició 1.2*, prenent, per tot $\lambda \in L$:

$$\lambda^{\mathbf{Fm}} := \lambda, \qquad \text{si } ar(\lambda) = 0;$$
$$\lambda^{\mathbf{Fm}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \qquad \text{si } ar(\lambda) = n \geqslant 1.$$

Definició 1.20. *Sigui $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ una $\mathbf{L}$-àlgebra qualsevol. Una **congruència** és una relació d'equivalència $\Theta \subseteq A \times A$ tal que, per tot $\lambda \in L$ d'arietat $n \geqslant 1$, amb $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, si tenim $\langle a_i, b_i \rangle \in \Theta$ per tot $i \leqslant n$, llavors $\langle \lambda^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n), \lambda^{\boldsymbol{A}}(b_1, \ldots, b_n) \rangle \in \Theta$.*

Definició 1.21. *Donades dues $\mathbf{L}$-àlgebres $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ i $\boldsymbol{A}' = \langle A', \langle \lambda^{\boldsymbol{A}'} : \lambda \in L \rangle \rangle$, diem que $\boldsymbol{A}$ és **subàlgebra** d'$\boldsymbol{A}'$ si $A \subseteq A'$ i, per tot $\lambda \in L$ d'arietat n i tot $a_1, \ldots, a_n \in A$, tenim que $\lambda^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \lambda^{\boldsymbol{A}'}(a_1, \ldots, a_n)$.*

Definició 1.22. *Siguin $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ i $\boldsymbol{B} = \langle B, \langle \lambda^{\boldsymbol{B}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ dues $\mathbf{L}$-àlgebres, definides sobre el mateix llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$. La funció $h : A \longrightarrow B$ és un **homomorfisme** d'$\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$, i ho denotarem per $h : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$, si, per tot $\lambda \in L$ d'arietat $ar(\lambda) = n$ i tot $a_1, \ldots, a_n \in A$, tenim que $h(\lambda^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \lambda^{\boldsymbol{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. Un homomorfisme bijectiu s'anomena **isomorfisme**.*

Definició 1.23. *Siguin dues àlgebres $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A}'$. Una* ***immersió*** *d'$\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A}'$ és un homomorfisme injectiu, que denotarem per $e : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{A}'$, tal que estableix un isomorfisme entre $\boldsymbol{A}$, de domini A, i la seva imatge, que és una àlgebra amb domini $e(A)$.*

Fixem-nos que podem entendre la condició d'ésser un homomorfisme entre $\mathbf{L}$-àlgebres com la propietat de conservar les connectives de $\mathbf{L}$. Com a cas particular, veiem que un endomorfisme $h : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, a més de conservar les connectives, també deixarà les constants fixes, ja que tots els símbols λ d'arietat $ar(\lambda) = 0$ hauran de verificar $h(\lambda) = \lambda$.

Definició 1.24. *Sigui* $\mathbf{A}$ *una* $\mathbf{L}$*-àlgebra. Una* ***$\boldsymbol{A}$-interpretació*** *és un homomorfisme $I : \boldsymbol{Fm} \longrightarrow \boldsymbol{A}$, és a dir, una aplicació $I : Fm \longrightarrow A$ entre el conjunt de fórmules en $\mathbf{L}$ i el domini A, tal que preserva les connectives del llenguatge.*

Podem apreciar que les $\mathbf{A}$-interpretacions, amb $\mathbf{A}$ una àlgebra, supliran la noció d'interpretació, considerant l'univers d'$\mathbf{A}$, A, com el conjunt de valors de veritat. Així, ara només ens cal declarar un subconjunt d'A com els valors designats, amb el que suplirem el requeriment de la noció de veritat:

Definició 1.25. *Donat un llenguatge proposicional* $\mathbf{L}$*, una* ***$\mathbf{L}$-matriu*** *és una parella $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle$, on $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in \mathbf{L} \rangle \rangle$ és una $\mathbf{L}$-àlgebra i $D \subseteq A$ és el conjunt format pels valors designats d'A.*

Definició 1.26. *Siguin dues* $\mathbf{L}$*-matrius $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle$ i $\langle \boldsymbol{A}', D' \rangle$. $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle$ és* ***submatriu*** *de $\langle \boldsymbol{A}', D' \rangle$, i es denota per $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{A}', D' \rangle$, si $\boldsymbol{A}$ és subàlgebra de $\boldsymbol{A}'$ i els conjunts d'elements designats verifiquen $D = D' \cap A$, amb A el domini d'$\boldsymbol{A}$.*

D'aquí arribem a la representació semàntica matricial de les lògiques, que podem donar a partir d'un teorema que pot recordar a la *Proposició 1.17*, tant en la seva expressió com en la seva demostració.

Definició 1.27. *Sigui* $\mathbf{L}$ *un llenguatge proposicional i $\mathcal{A} = \langle \boldsymbol{A}, D \rangle$ una* $\mathbf{L}$*-matriu. Definirem la relació $\vDash_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$ a partir de, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:*

$$\Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi \Longleftrightarrow \textit{Per tota } \boldsymbol{A}\textit{-interpretació } I, \textit{ si } \{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D, \textit{ llavors } I(\varphi) \in D.$$

Teorema 1.28. *Considerant la definició anterior, tenim que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{A}} \rangle$ és una lògica.*

Demostració. Sigui la $\mathbf{L}$-matriu $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, D \rangle$ i la relació $\vDash_{\mathcal{A}}$ definida segons la *Definició 1.27*. Per tot $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

Suposant $\varphi \in \Sigma$, per tota $\mathbf{A}$-interpretació I tal que $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D$, tenim que, evidentment $I(\varphi) \in D$, amb el que deduïm que $\Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$. (Identitat)

Suposem ara $\Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$ i $\Sigma \subseteq \Gamma$. Sigui I una $\mathbf{A}$-interpretació tal que $\{I(\phi) : \phi \in \Gamma\} \subseteq D$, aleshores, també es verifica $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma \subseteq \Gamma\} \subseteq D$. Per la primera hipòtesi, confirmem que $I(\varphi) \in D$ i, per tant, $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$. (Monotonia)

Considerem que $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \psi$ per tot $\psi \in \Sigma$, i que $\Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$. Per tota $\mathbf{A}$-interpretació I tal que $\{I(\phi) : \phi \in \Gamma\} \subseteq D$, tenim que $I(\psi) \in D$, per tot $\psi \in \Sigma$. Així, donat que $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D$, sabem que es dona $I(\varphi) \in D$, amb el que concloem que $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$. (Tall)

Si $\Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$, aleshores, per tota $\mathbf{A}$-interpretació I, si $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D$, llavors tenim que $I(\varphi) \in D$. Sigui $\sigma : Fm \longrightarrow Fm$ una substitució arbitrària. Observem que $I' \coloneqq I \circ \sigma$

és també **A**-interpretació, per tant, en particular, tindrem que, si $\{I'(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D$, llavors $I'(\varphi) \in D$; és a dir, $\{I(\sigma(\psi)) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D$ implica que $I(\sigma(\varphi)) \in D$. Això ens porta, finalment, a què $\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathcal{A}} \sigma(\varphi)$. (Estructuralitat) ▲

Exemples 1.29. *(Lògica proposicional clàssica i tri-valorada de Gödel)*

Sigui el llenguatge proposicional $\mathbf{L}$ de l'*Exemple 1.16*. Veiem que podem prendre la matriu $\mathcal{B}_{\mathbf{2}} = \langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle$, on $\mathbf{2} = \langle\{0,1\}, \langle \lambda^{\mathbf{2}} : \lambda \in L\rangle\rangle$ és una $\mathbf{L}$-àlgebra, amb les operacions determinades per taules de veritat idèntiques a les presentades a l'*Exemple 1.16*. Cal assenyalar que, a la pràctica, també se solen designar les operacions a $\mathbf{2}$ amb la mateixa notació que per les connectives de $\mathbf{L}$.

Gràcies a la *Definició 1.27* i al *Teorema 1.28*, sabem que la parella $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{B}_{\mathbf{2}}}\rangle$ defineix una lògica. Observem que, tal com hem construït tot, tenim directament que $\Sigma \vDash_{\mathcal{B}_{\mathbf{2}}} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$.

Pel cas de la lògica tri-valorada de Gödel podem fer quelcom semblant: definim la $\mathbf{L}$-àlgebra $\mathbf{G}_3 = \langle\{0, 1/2, 1\}, \langle \lambda^{\mathbf{G}} : \lambda \in L\rangle\rangle$, on prenem de l'*Exemple 1.18* tant el llenguatge proposicional $\mathbf{L}$ com les taules de veritat, pel que fa a definir les operacions $\lambda^{\mathbf{G}}$, $\lambda \in L$, a l'àlgebra $\mathbf{G}_3$. Procedint igual que abans, sabem que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{G}_3, \{1\}\rangle}\rangle$ serà una lògica i, a més, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, tenim que $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_3, \{1\}\rangle} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathcal{G}_3} \varphi$, on $\vDash_{\mathcal{G}_3}$ és la relació definida a l'*Exemple 1.18*.

Exemple 1.30. *(Lògiques n-valorades i infinit-valorada de Gödel)*

Considerarem ara una generalització de la lògica tri-valorada de Gödel: prenem la $\mathbf{L}$-àlgebra $\mathbf{G}_{[0,1]} = \langle [0,1], \wedge^{\mathbf{G}}, \vee^{\mathbf{G}}, \rightarrow^{\mathbf{G}}, \neg^{\mathbf{G}}, \bot^{\mathbf{G}}, \top^{\mathbf{G}}\rangle$. Òbviament, donat que l'interval $[0,1]$ conté un nombre infinit de valors, ens serà impossible representar les operacions mitjançant taules de veritat, però, podem igualment establir, per tot $a, b \in [0,1]$:

$$a \wedge^{\mathbf{G}} b := min\{a,b\} \qquad a \rightarrow^{\mathbf{G}} b := \begin{cases} b & \text{si } a > b \\ 1 & \text{si } a \leqslant b \end{cases} \qquad \bot^{\mathbf{G}} := 0$$

$$a \vee^{\mathbf{G}} b := max\{a,b\} \qquad \neg^{\mathbf{G}} a := \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad \top^{\mathbf{G}} := 1$$

Observem que aquestes operacions són tancades sota qualsevol conjunt que contingui el 0 i l'1, així que, prenent les mateixes operacions, tenim que $\mathbf{G}_{[0,1]}$ té un subàlgebra per cada subconjunt de $[0,1]$ que inclogui $\{0,1\}$. Fixem-nos que la subàlgebra més petita, la definida sobre $\{0,1\}$, es pot entendre com pròpiament l'àlgebra $\mathbf{2}$, amb la que hem definit la lògica proposicional clàssica. També es veu immediatament que, per $\{0,1\} \subseteq \{0, 1/2, 1\} \subseteq [0,1]$, es genera la mateixa subàlgebra $\mathbf{G}_3$ d'abans.

No suposa una gran dificultat comprovar que, entre dues subàlgebres de $\mathbf{G}_{[0,1]}$ de n elements, es pot trobar un isomorfisme entre aquestes, així que, a la pràctica, parlem de les àlgebres n-valorades de Gödel $\mathbf{G}_n$, indicant qualsevol subàlgebra de $\mathbf{G}_{[0,1]}$ de n elements. Usualment, es prenen els n valors $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$.

Així, acabem de definir un nombre infinit numerable d'àlgebres. Amb aquestes, igual que hem fet amb la lògica proposicional clàssica, podem determinar les lògiques, per cada valor de n, $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle}\rangle$, i $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\}\rangle}\rangle$, que anomenarem, respectivament, les lògiques *n-valorades*[2] i la lògica *infinit-valorada de Gödel*[3].

[2]Presentades per Kurt Gödel el 1932, a [Göd32].

[3]Presentada per Michael Dummett el 1959, a [Dum59].

Exemple 1.31. *(Lògica infinit-valorada de Łukasiewicz)*

Sigui el llenguatge $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, amb $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot, \top\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = ar(\rightarrow) = 2$, $ar(\neg) = 1$ i $ar(\bot) = ar(\top) = 0$. Prenem la $\mathbf{L}$-àlgebra $\mathbf{Ł}_{[0,1]} = \langle [0,1], \langle \lambda^{\mathbf{Ł}} : \lambda \in L \rangle \rangle$. Definim les operacions a l'àlgebra com, per tot $a, b \in [0,1]$:

$$a \wedge^{\mathbf{Ł}} b \coloneqq min\{a,b\} \qquad a \rightarrow^{\mathbf{Ł}} b \coloneqq \begin{cases} 1 - a + b & \text{si } a > b \\ 1 & \text{si } a \leqslant b \end{cases} \qquad \bot^{\mathbf{Ł}} \coloneqq 0$$

$$a \vee^{\mathbf{Ł}} b \coloneqq max\{a,b\} \qquad \neg^{\mathbf{Ł}} a \coloneqq 1 - a \qquad \top^{\mathbf{Ł}} \coloneqq 1$$

D'aquestes definicions és directe, per exemple, que es donen les relacions $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$ i $a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b)$ (un altre cop, emprem la notació de les connectives per les operacions). Usualment, també resulta útil definir una conjunció ($\odot$) i una disjunció ($\oplus$) fortes, per tot $a, b \in [0,1]$:

$$a \odot b \coloneqq \neg(a \rightarrow \neg b) = max\{0, a + b - 1\}; \qquad a \oplus b \coloneqq \neg a \rightarrow b = min\{1, a + b\}.$$

Operant com abans, sabem que, a partir de la relació $\vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\} \rangle}$ podem definir una lògica $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\} \rangle} \rangle$, que anomenarem la lògica *infinit-valorada de Łukasiewicz*[4].

Observem que, de manera anàloga al realitzat amb l'àlgebra i la lògica de Gödel, es podria generar un nombre infinit numerable de lògiques, a partir d'establir unes àlgebres de Łukasiewicz n-valorades (on, també, per $n = 2$ tindríem l'àlgebra $\mathbf{2}$). En aquest treball, però, ens centrarem principalment en la lògica infinit-valorada, i només esmentarem la lògica *tri-valorada de Łukasiewicz*, és a dir, la definida sobre un conjunt de $n = 3$ elements, usualment $\{0, 1/2, 1\}$. Cal dir també, però, que històricament tot el procés que hem comentat es dugué a terme a l'inrevés, és a dir, Łukasiewicz primer plantejà la lògica tri-valorada, el 1920, a [Łuk20], i posteriorment ho generalitzà per n valors i infinits valors.

A partir de la representació matricial de les lògiques, en derivem un resultat interessant respecte les extensions:

Teorema 1.32. *Donades dues* $\mathbf{L}$*-matrius* $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle$ *i* $\langle \boldsymbol{A}', D' \rangle$*, si* $\langle \boldsymbol{A}, D \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{A}', D' \rangle$*, llavors la lògica* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{A}, D \rangle} \rangle$ *és extensió de* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{A}', D' \rangle} \rangle$*.*

Demostració. Volem veure que, per $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{A}', D' \rangle} \varphi$ implica $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{A}, D \rangle} \varphi$. Sigui I una $\mathbf{A}$-interpretació tal que $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D = D' \cap A \subseteq D'$, amb el que sabem que també $I(\varphi) \in D \subseteq D'$. Veiem que, per $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Fm$ i tot $\lambda \in L$ d'arietat n, $I(\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \lambda^{\mathbf{A}}(I(\varphi_1), \ldots, I(\varphi_n)) = \lambda^{\mathbf{A}}(I(\varphi_1), \ldots, I(\varphi_n))$, ja que $\mathbf{A}$ és subàlgebra d'$\mathbf{A}'$. Per tant, arribem al fet que I també és una $\mathbf{A}'$-interpretació, amb $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq D'$ i $I(\varphi) \in D'$. Així, tenim que $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{A}', D' \rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{A}, D \rangle} \varphi$. ▲

Proposició 1.33. *La lògica proposicional clàssica és extensió tant de les lògiques* n*-valorades i infinit-valorades de Gödel com de l'infinit-valorada de Łukasiewicz.*

Demostració. Volem veure que, per tot $n \in \mathbb{N}$, $\vDash_{\mathcal{B}_2} \subseteq \vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\} \rangle}$, $\vDash_{\mathcal{B}_2} \subseteq \vDash_{\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\} \rangle}$ i $\vDash_{\mathcal{B}_2} \subseteq \vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\} \rangle}$. Pel teorema anterior, tenim que només hem de comprovar que $\mathcal{B}_2$ és submatriu de $\langle \mathbf{G}_n, \{1\} \rangle$, de $\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\} \rangle$ i de $\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\} \rangle$.

Veiem que els conjunts de valors designats verifiquen la condició requerida, ja que $\{1\} = \{1\} \cap \{0,1\}$. Per tant, queda veure que $\mathbf{2}$ és subàlgebra de $\mathbf{G}_n$, $\mathbf{G}_{[0,1]}$ i $\mathbf{Ł}_{[0,1]}$. És

[4]Presentada per Jan Łukasiewicz el 1922, a [Łuk22]

trivial que $\{0,1\} \subseteq \{i/n : i \leqslant n, i \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$, i també comprovem fàcilment, consultant les definicions de les operacions, que, per tot $a, b \in \{0,1\}$,

$$\neg^{\mathbf{2}} a = \neg^{\mathbf{G}} a = \neg^{\mathbf{Ł}} a; \quad a \wedge^{\mathbf{2}} b = a \wedge^{\mathbf{G}} b = a \wedge^{\mathbf{Ł}} b; \quad a \vee^{\mathbf{2}} b = a \vee^{\mathbf{G}} b = a \vee^{\mathbf{Ł}} b;$$
$$a \rightarrow^{\mathbf{2}} b = a \rightarrow^{\mathbf{G}} b = a \rightarrow^{\mathbf{Ł}} b; \quad a \leftrightarrow^{\mathbf{2}} b = a \leftrightarrow^{\mathbf{G}} b = a \leftrightarrow^{\mathbf{Ł}} b.$$

On hem definit $a \leftrightarrow^{\mathbf{G}} b \coloneqq (a \rightarrow^{\mathbf{G}} b) \wedge^{\mathbf{G}} (b \rightarrow^{\mathbf{G}} a)$ i $a \leftrightarrow^{\mathbf{Ł}} b \coloneqq (a \rightarrow^{\mathbf{Ł}} b) \wedge^{\mathbf{Ł}} (b \rightarrow^{\mathbf{Ł}} a)$. També podem prendre $\top^{\mathbf{2}} \coloneqq a \rightarrow^{\mathbf{2}} a$ i $\bot^{\mathbf{2}} \coloneqq \neg^{\mathbf{2}} \top^{\mathbf{2}}$, amb el que tindrem $1 = \top^{\mathbf{2}} = \top^{\mathbf{G}} = \top^{\mathbf{Ł}}$ i $0 = \bot^{\mathbf{2}} = \bot^{\mathbf{G}} = \bot^{\mathbf{Ł}}$.

Ajuntant-ho tot, obtenim que, aplicant el teorema anterior, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}} \varphi$, $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}} \varphi$ i $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}} \varphi$, és a dir, veiem que la lògica proposicional clàssica és extensió de les lògiques n-valorades de Gödel i de les infinit-valorades de Gödel i Łukasiewicz. ▲

Corol·lari 1.34. *Sigui la* $\mathbf{L}$*-matriu* $\langle \boldsymbol{A}, D\rangle$ *i una* $\mathbf{L}$*-àlgebra* $\boldsymbol{B}$ *de domini* B*. Si existeix una immersió* $e : \boldsymbol{B} \hookrightarrow \boldsymbol{A}$*, llavors la lògica* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{B}, e^{-1}(D)\rangle}\rangle$ *és extensió de* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{A}, D\rangle}\rangle$.

Demostració. Sigui la immersió $e : \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{A}$. Sabem que $e(B) \subseteq A$, on A és el domini de l'àlgebra $\mathbf{A}$, amb el que veiem que l'àlgebra definida sobre $e(B)$, diguem-li $\mathbf{eB}$, és subàlgebra de $\mathbf{A}$. De la definició de submatriu, podem afirmar que $\langle \mathbf{eB}, D \cap e(B)\rangle$ és submatriu de $\langle \mathbf{A}, D\rangle$. Pel *Teorema 1.32*, tenim que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{eB}, D \cap e(B)\rangle}\rangle$ és extensió de $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{A}, D\rangle}\rangle$. Ara, donat que e és una immersió, $\mathbf{B}$ és isomorfa a $\mathbf{eB}$, així que, com $e^{-1}(D \cap e(B)) = e^{-1}(D) \cap B = e^{-1}(D)$, perquè $e^{-1}(D) \subseteq B$; podem concloure que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{B}, e^{-1}(D)\rangle}\rangle$ és extensió de $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{A}, D\rangle}\rangle$. ▲

Proposició 1.35. *Per tot* $n, k \in \mathbb{N}$, $n \leqslant k$, $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{G}_n, \{1\}\rangle}\rangle$ *és extensió de* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \boldsymbol{G}_k, \{1\}\rangle}\rangle$.

Demostració. És fàcil de comprovar que, per tot $n, k \in \mathbb{N}$, existeix una immersió $\mathbf{G}_n \hookrightarrow \mathbf{G}_k$ si, i només si, $n \leqslant k$, ja que si $n \leqslant k$ podem prendre un isomorfisme que enviï els primers $n-1$ elements de $\mathbf{G}_n$ als primers de $\mathbf{G}_k$, i l'1 a l'1; mentre que no serà possible establir cap immersió si $n > k$. Aplicant el *Corol·lari 1.34* obtenim directament que $\langle \mathbf{L}_G, \vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle}\rangle$ és extensió de $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\langle \mathbf{G}_k, \{1\}\rangle}\rangle$, com volíem veure. ▲

D'aquest últim resultat en construïm la següent cadena, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_{n-1}, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$
$$\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_3, \{1\}\rangle} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{G}_2, \{1\}\rangle} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle} \varphi.$$

Tancant aquesta secció, observem que el que hem estat aplicant sobre una sola $\mathbf{L}$-matriu també es pot considerar envers una família o classe de $\mathbf{L}$-matrius $\mathscr{M}$, definint, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vDash_{\mathscr{M}} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi \text{ per tot } \mathcal{A} \in \mathscr{M}.$$

Tenint en compte que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{A}}\rangle$ és lògica per tota $\mathbf{L}$-matriu $\mathcal{A}$ de $\mathscr{M}$, resulta en una mera comprovació veure que $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathscr{M}}\rangle$ també és una lògica.

1.1.3 Completesa

En aquest punt, és natural preguntar-se per la possible relació entre la representació sintàctica i la semàntica. D'aquesta qüestió en surten les següents definicions:

Definició 1.36. *Diem que tenim un **teorema de completesa feble** entre la representació semàntica d'una lògica* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{L}} \rangle$ *i un càlcul sintàctic del sistema deductiu* $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$*, si, per tot* $\varphi \in Fm$*, es verifica:*

$$\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Definició 1.37. *Tenim un **teorema de completesa forta finitària** entre la representació semàntica d'una lògica* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{L}} \rangle$ *i un càlcul sintàctic del sistema deductiu* $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$*, si, per tot* $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \in Fm$*:*

$$\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Definició 1.38. *Existeix un **teorema de completesa forta** entre la representació semàntica d'una lògica* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{L}} \rangle$ *i un càlcul sintàctic del sistema deductiu* $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$*, si, per tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$*, tenim que:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

En aquest cas, diem que $\mathcal{S}$ *és coherent* ($\Rightarrow$) *i complet* ($\Leftarrow$) *respecte* $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{L}} \rangle$.

No cal esmentar que, si tenim un teorema de completesa forta entre un càlcul i una representació semàntica, llavors també existeix un teorema de completesa forta finitària, i aquest últim també n'implica que tindrem un teorema de completesa feble. Un punt interessant és que, si tenim un teorema de completesa forta entre una lògica definida semànticament i un sistema deductiu, llavors podrem afirmar que la primera també n'és finitària i, per tant, sistema deductiu.

Exemple 1.39. *(Completesa a la lògica proposicional clàssica)*

Per il·lustrar els conceptes presentats, veurem que el sistema deductiu sintàctic $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l} \rangle$ de l'*Exemple 1.14* i la lògica $\langle \mathbf{L}, \vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}} \rangle$ de l'*Exemple 1.29* defineixen el mateix, ja que tenim el següent teorema de completesa:

Teorema 1.40. *(Teorema de Completesa Forta de la lògica proposicional clàssica) Per tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$*:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}} \varphi.$$

Demostració. Implicació ($\Rightarrow$), o Teorema de Coherència: veiem que es redueix a provar que la regla M.P. es valida a $\vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}}$ i que els quatre axiomes *(Ax1)*, *(Ax2)*, *(Ax3)* i *(Ax4)* són tautologies a $\vDash_{\mathcal{B}_\mathbf{2}}$, és a dir, que són vàlids, són veritat, per tota **2**-interpretació. Per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$, tenim:

Per tota **2**-interpretació I, si $I(\varphi) = 0$ llavors $I(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = 0 \to I(\psi \to \varphi) = 1$, perquè $0 \to 0 = 1$ i $0 \to 1=1$; si, en canvi, $I(\varphi) = 1$, aleshores $I(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = 1 \to (I(\psi) \to 1) = 1$, ja que $I(\psi) \to 1 = 1$, donat que $1 \to 1 = 0 \to 1 = 1$. *(Ax1)*

D'altra banda, si $I(\varphi) = 0$, llavors,

$$I[(\varphi \to (\psi \to \vartheta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta))] = \\ [0 \to I(\psi \to \vartheta)] \to [I(\varphi \to \psi) \to I(\varphi \to \vartheta)] = 1 \to (1 \to 1) = 1.$$

Si $I(\varphi) = 1$, suposem que $I[(\varphi \to (\psi \to \vartheta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta))] = 0$, llavors, cal que $I[\varphi \to (\psi \to \vartheta)] = 1$ i $I[(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta)] = 0$. Per tant, s'ha de veure que $0 \to I(\psi \to \vartheta) = 1$, que és cert, i que $1 \to I(\varphi \to \vartheta) = 0$. Però, això últim implica que

$I(\varphi \to \vartheta) = 0$, que és fals, perquè $I(\varphi \to \vartheta) = 0 \to I(\vartheta) = 1$ per tota $\mathbf{2}$-interpretació I. Per tant, per reducció a l'absurd tenim que la interpretació en cap cas pot donar 0, provant així que *(Ax2)* és tautologia a $\vDash_{\mathcal{B}_2}$.

Quant el tercer axioma, veiem que, si $I(\varphi) = 0$, llavors,

$$I(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)) = \neg 0 \to I(\varphi \to \psi) = 1 \to (0 \to I(\psi)) = 1 \to 1 = 1;$$

i, si $I(\varphi) = 1$, aleshores,

$$I(\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)) = \neg 1 \to I(\varphi \to \psi) = 0 \to I(\varphi \to \psi) = 1;$$

el que ens assegura l'axioma *(Ax3)*.

Comprovem *(Ax4)* considerant que, per tota $\mathbf{2}$-interpretació I, si $I(\varphi) = 0$, tenim que

$$I[(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi] = (\neg 0 \to 0) \to 0 = (1 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1;$$

i, si $I(\varphi) = 1$, llavors,

$$I[(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi] = (\neg 1 \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1.$$

Finalment, provem que $\varphi, \varphi \to \psi \vDash_{\mathcal{B}_2} \psi$. Veiem que no suposa cap complicació, ja que, per tota $\mathbf{2}$-interpretació I, si $I(\varphi) = 1$ i $I(\varphi \to \psi) = 1$, per conservar I les connectives, tenim que $I(\varphi \to \psi) = I(\varphi) \to I(\psi) = 1 \to I(\psi) = 1$, per tant, arribem a què, necessàriament, $I(\psi) = 1$. *(M.P.)*

Esquema de la implicació ($\Leftarrow$): per demostrar-ho ens caldrà emprar el conegut com *Lema de Lindenbaum* (vegis el teorema 56, del cinquè capítol de [Tar83], pàg. 98):

Lema 1.41. *Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:*

$$\Sigma \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi \Longrightarrow \text{ Existeix } \Delta \subseteq Fm \text{ un conjunt de fórmules maximal (respecte } \subseteq) \\ \vdash_{\mathcal{C}l}\text{-consistent tal que } \Sigma \subseteq \Delta \text{ i } \Delta \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi.$$

Provarem que $\Sigma \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi \Rightarrow \Sigma \nvDash_{\mathcal{B}_2} \varphi$ que, pel contrarecíproc, ens confirma el que volem. Aplicant el Lema de Lindenbaum, tenim que $\Sigma \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi$ implica $\Delta \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi$ per Δ un conjunt maximal $\vdash_{\mathcal{C}l}$-consistent tal que $\Sigma \subseteq \Delta$. Llavors, definim una $\mathbf{2}$-interpretació I tal que verifiqui $I(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Delta$, on p és una variable. Es pot demostrar (per una prova sencera vegis, per exemple, §2 del setè capítol de [Ras63], pàg. 259) que aquesta interpretació també confirma $I(\psi) = 1 \Leftrightarrow \psi \in \Delta$ per tota fórmula ψ. Aleshores, com $\Sigma \subseteq \Delta$, tindrem $\{I(\psi) : \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$; mentre que, com $\Delta \nvdash_{\mathcal{C}l} \varphi \Leftrightarrow \varphi \notin \Delta$, obtenim que $I(\varphi) = 0$. Per tant, arribem a què $\Sigma \nvDash_{\mathcal{B}_2} \varphi$. ▲

Podem apreciar la importància del Teorema de Completesa veient, per exemple, que ens porta a afirmar que $\vDash_{\mathcal{B}_2}$ és finitària, propietat que abans no podíem assegurar, senzillament perquè sabem que $\vdash_{\mathcal{C}l}$ ho és.

1.2 Equacions i classes d'àlgebres

En aquesta secció veurem que part dels conceptes que hem anat estudiant es poden generalitzar, i això ens permetrà definir, en particular, una relació de conseqüència equacional relativa a una classe d'àlgebres, la *Definició 1.51*, que, com tractarem al pròxim capítol, ens serà de gran utilitat quant a estudiar l'algebritzabilitat dels sistemes deductius.

Definició 1.42. *Una **equació** és una expressió de la forma $\varphi \approx \psi$ amb $\varphi, \psi \in Fm$. Denotem el conjunt d'equacions per $Eq_{\mathbf{L}}(X)$, o merament Eq.*

Definició 1.43. *Una **quasi-equació** és una parella $\langle\{\varphi_i \approx \psi_i : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\}, \varphi \approx \psi\rangle$ on $\varphi_i \approx \psi_i, \varphi \approx \psi \in Eq$, per tot $i \leqslant n$. Les representarem amb la notació $(\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$, i el conjunt de quasi-equacions d'un llenguatge donat el denotarem per QEq.*

Fixem-nos que una equació és una quasi-equació amb l'antecedent el conjunt buit $\varnothing$, amb el que tenim la inclusió $Eq \subseteq QEq$.

Definició 1.44. *Sigui $\boldsymbol{A}$ una $\mathbf{L}$-àlgebra i $(\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$ una quasi-equació. Direm que aquesta quasi-equació és vàlida a $\boldsymbol{A}$, i ho denotarem per $\boldsymbol{A} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$ segons la següent correlació:*

$$\boldsymbol{A} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi \Longleftrightarrow \text{Per tot homomorfisme } h : \boldsymbol{Fm} \longrightarrow \boldsymbol{A}, \\ \text{si } h(\varphi_i) = h(\psi_i) \text{ per tot } i \leqslant n, \text{ llavors } h(\varphi) = h(\psi).$$

Definició 1.45. *Sigui K una classe d'àlgebres ($\mathbf{L}$-àlgebres), és a dir, qualsevol família de $\mathbf{L}$-àlgebres; i sigui $(\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$ una quasi-equació. Direm que aquesta quasi-equació és vàlida a K, i ho denotarem de manera anàloga a la definició anterior, quan ho sigui per tota àlgebra $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$:*

$$\mathsf{K} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi \Longleftrightarrow \\ \boldsymbol{A} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi \text{ per tot } \boldsymbol{A} \in \mathsf{K}.$$

Definició 1.46. *Diem que la classe d'àlgebres K és **quasi-varietat** si és definible per quasi-equacions, és a dir, si existeix $\Theta \subseteq QEq$ tal que $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} \vDash \theta, \text{ per tot } \theta \in \Theta\}$. D'altra banda, K és una **varietat** si és definible per equacions.*

Com $Eq \subseteq QEq$, és immediat que tota varietat és quasi-varietat. Els *Teoremes 1.47 i 1.48* caracteritzaran les quasi-varietats i les varietats, a partir d'uns operadors sobre classes d'àlgebres que presentem breument a continuació. Per una classe d'àlgebres K i una àlgebra $\mathbf{A}$, diem que:

$\mathbf{A} \in \mathbb{I}(\mathsf{K})$ si $\mathbf{A}$ és isomorfa a alguna àlgebra de K;

$\mathbf{A} \in \mathbb{S}(\mathsf{K})$ si $\mathbf{A}$ és subàlgebra d'alguna àlgebra de K;

$\mathbf{A} \in \mathbb{P}(\mathsf{K})$ si $\mathbf{A}$ és producte directe d'un conjunt no buit d'àlgebres de K;

$\mathbf{A} \in \mathbb{P}_U(\mathsf{K})$ si $\mathbf{A}$ és ultra-producte d'un conjunt no buit d'àlgebres de K;

$\mathbf{A} \in \mathbb{H}(\mathsf{K})$ si $\mathbf{A}$ és imatge homomorfa d'alguna àlgebra de K.

No entrarem en els detalls d'aquestes definicions; per un estudi més en profunditat, vegis el segon capítol de [Bur81].

Teorema 1.47. *(Teorema de Mal'cev. Vegis els primers teoremes del cinquè capítol de [Mal73], pàg. 210) Una classe d'àlgebres K és quasi-varietat si, i només si, és tancada sobre els operadors $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_U$.*

Teorema 1.48. *(Teorema de Birkhoff. Vegis l'article [Bir35]) Una classe d'àlgebres K és varietat si, i només si, és tancada sobre els operadors $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{P}$.*

Amb l'ajuda d'aquests teoremes podem construir-ne dos operadors, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{V}$, que ens seran de gran utilitat a l'hora de treballar amb quasi-varietats i varietats:

Definició 1.49. *Sigui* $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{A}_i : i \in I\}$ *una classe d'àlgebres qualsevol. Definim* $\mathbb{Q}(\mathsf{K}) \coloneqq \mathbb{ISPP}_U(\mathsf{K})$. *Pel Teorema 1.47, sabem que la classe* $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$ *serà la quasi-varietat més petita que conté* K *i, per aquest motiu, l'anomenarem la* ***quasi-varietat generada*** *per* K.

Definició 1.50. *Sigui* K *una classe d'àlgebres. Prenem* $\mathbb{V}(\mathsf{K}) \coloneqq \mathbb{HSP}(\mathsf{K})$. *Pel Teorema 1.48, podem afirmar que* $\mathbb{V}(\mathsf{K})$ *és la varietat més petita que conté* K, *i la bategem com la* ***varietat generada*** *per* K.

Definició 1.51. *Sigui* K *una classe d'àlgebres. Anomenarem* ***relació de conseqüència equacional relativa a*** K *a la relació* $\vDash_{\mathsf{K}}$ *entre un conjunt d'equacions* $\Theta \subseteq Eq$ *i una equació* $\varphi \approx \psi$, *tal que:*

$$\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \iff \text{Per tota } \mathbf{L}\text{-àlgebra } \boldsymbol{A} \in \mathsf{K} \text{ i per tot homomorfisme } h : \boldsymbol{Fm} \longrightarrow \boldsymbol{A},$$
$$\text{si } h(\varphi_i) = h(\psi_i) \text{ per tot } \varphi_i \approx \psi_i \in \Theta, \text{ llavors } h(\varphi) = h(\psi).$$

Definició 1.52. *Direm que* $\vDash_{\mathsf{K}}$ *és* ***finitària*** *si, per* $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$, $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$ *implica que existeix* $\Theta' \subseteq \Theta$ *finit tal que* $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$.

Ara, observem que, per una classe d'àlgebres K i $\{\varphi_i \approx \psi_i : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\} \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$, de les mateixes definicions n'obtenim que:

$$\{\varphi_i \approx \psi_i : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \iff \mathsf{K} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi.$$

Per tant, podem deduïm que, si K és una quasi-varietat, en altres paraules, és definible per quasi-equacions, llavors la relació $\vDash_{\mathsf{K}}$ serà finitària. Observem que no és pas cert en l'altre sentit, ja que, si $\vDash_{\mathsf{K}}$ és finitària, no necessàriament K és quasi-varietat; però, sí que tindrem, per tot $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$, que $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \iff \Theta \vDash_{\mathbb{Q}(\mathsf{K})} \varphi \approx \psi$, amb el que definiran, i a la pràctica les tractarem, com la mateixa relació.

Abans de passar a estudiar l'exemple de la classe d'àlgebres de Boole, provarem dos teoremes referents a la relació $\vDash_{\mathsf{K}}$ presentada:

Teorema 1.53. *Per tota classe d'àlgebres* K, *la relació de conseqüència equacional relativa a* K *verifica les propietats de la Identitat, la Monotonia i el Tall.*

Demostració. Per qualssevol $\Theta \cup \Phi \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$:

Suposem $\Theta = \{\varphi_i \approx \psi_i : \varphi_i, \psi_i \in Fm, i \in I\}$; si $\varphi \approx \psi \in \Theta$, llavors existeix algun i tal que $\varphi_i = \varphi$ i $\psi_i = \psi$. Per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$, tindrem que, si $h(\varphi_i) = h(\psi_i)$ per tot $i \in I$, llavors $h(\varphi) = h(\psi)$, amb el que $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. (Identitat)

Ara suposem $\Phi \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$ i $\Phi \subseteq \Theta \subseteq Eq$, llavors, per tot $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$, com $\Phi \subseteq \Theta$, si $h(\varphi_j) = h(\psi_j)$ per tot $\varphi_j \approx \psi_j \in \Theta$, aleshores $h(\varphi_i) = h(\psi_i)$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Phi$ i, llavors, per la primera hipòtesi, $h(\varphi) = h(\psi)$; amb el que concloem que $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. (Monotonia)

Finalment, si $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi_i \approx \psi_i$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Phi$ i $\Phi \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$, llavors, per tot $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $h(\varphi_j) = h(\psi_j)$ per tot $\varphi_j \approx \psi_j \in \Theta$, tenim que $h(\varphi_i) = h(\psi_i)$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Phi$ i, per la segona hipòtesi, això implica que $h(\varphi) = h(\psi)$. Per tant, arribem a què $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. (Tall) ▲

Teorema 1.54. *Per tota classe d'àlgebres* K*, la relació* $\models_{\mathsf{K}}$ *és estructural en el conjunt d'equacions, entenent-ho com que, per* $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$*, si* $\Theta \models_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$*, llavors* $\{\sigma(\varphi_i) \approx \sigma(\psi_i) : \varphi_i \approx \psi_i \in \Theta\} \models_{\mathsf{K}} \sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi)$*, per tota substitució* σ*.*

Demostració. Suposem $\Theta \models_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$ i sigui σ una substitució. Per tot $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $h(\varphi_i) = h(\psi_i)$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Theta$, sabem que $h(\varphi) = h(\psi)$. Ara, donat que una substitució només altera les variables, i manté les connectives i constants, si definim $h' \coloneqq h \circ \sigma$, $h' : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$ igualment serà un homomorfisme i, per tant, verifica que, si $h'(\varphi_i) = h'(\psi_i)$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Theta$, llavors també $h'(\varphi) = h'(\psi)$. Per la definició de h', hem demostrat que, si $h(\sigma(\varphi_i)) = h(\sigma(\psi_i))$ per tot $\varphi_i \approx \psi_i \in \Theta$, aleshores $h(\sigma(\varphi)) = h(\sigma(\psi))$, és a dir, $\{\sigma(\varphi_i) \approx \sigma(\psi_i) : \varphi_i \approx \psi_i \in \Theta\} \models_{\mathsf{K}} \sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi)$. ▲

Considerant els dos últims teoremes, veiem que es podria dir que $\models_{\mathsf{K}}$ defineix una lògica, però, sobre el conjunt d'equacions Eq, i no pas sobre el de fórmules.

Exemple 1.55. *(La classe d'àlgebres de Boole)*

En la següent definició, i d'aquí en endavant, es pressuposen algunes nocions bàsiques respecte dels reticles. A l'*Apèndix C* es presenta tota la teoria sobre reticles necessària per a entendre l'estudiat en aquest treball.

Definició 1.56. *Una* ***àlgebra de Boole***[5] *és un reticle* $\boldsymbol{B} = \langle B, \wedge, \vee \rangle$ *acotat, complementat i distributiu.*

Observem que les àlgebres de Boole també es poden entendre com $\mathbf{L}$-àlgebres, si prenem com a llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$ amb $L = \{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = 2$, $ar(\neg) = 1$ i $ar(\bot) = ar(\top) = 0$. Per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$, considerem Θ el conjunt de totes les equacions següents:

$\varphi \wedge \varphi \approx \varphi$	$\varphi \vee \varphi \approx \varphi$	(Idempotència)
$\varphi \wedge \psi \approx \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \approx \psi \vee \varphi$	(Commutabilitat)
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta \approx \varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \vartheta \approx \varphi \vee (\psi \vee \vartheta)$	(Associativitat)
$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \approx \varphi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \approx \varphi$	(Identitats absorció)
$\varphi \vee \bot \approx \varphi$, $\varphi \wedge \top \approx \varphi$	$\varphi \wedge \bot \approx \bot$, $\varphi \vee \top \approx \top$	(Acotat)
$\varphi \vee \neg\varphi \approx \top$	$\varphi \wedge \neg\varphi \approx \bot$	(Complementat)
$\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta) \approx (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \vartheta)$	$\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) \approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$	(Distributiu)

Llavors, veiem que la classe de totes les àlgebres de Boole, que anomenem BA, és una varietat i, per tant, també una quasi-varietat, ja que serà definible per les equacions de Θ, $\mathsf{BA} = \{\mathbf{B} : \mathbf{B} \models \theta, \text{ per tot } \theta \in \Theta\}$. A més, un resultat interessant referent a l'àlgebra de Boole definida sobre el conjunt $\{0,1\}$, $\mathbf{B}_2 = \langle \{0,1\}, \wedge^{\mathbf{B}_2}, \vee^{\mathbf{B}_2}, \neg^{\mathbf{B}_2}, \bot^{\mathbf{B}_2}, \top^{\mathbf{B}_2} \rangle$, on veiem fàcilment que $\bot^{\mathbf{B}_2} = 0$ i $\top^{\mathbf{B}_2} = 1$; és que $\mathbf{B}_2$ genera BA, és a dir, $\mathbb{Q}(\mathbf{B}_2) = \mathsf{BA}$ (quant a la demostració, vegis, per exemple, §1 del quart capítol de [Bur81], pàg. 116, concretament el corol·lari 1.14.). D'aquí veiem també que $\mathbb{V}(\mathbf{B}_2) = \mathbb{Q}(\mathbf{B}_2)$.

Recordem ara la $\mathbf{L}$-àlgebra $\mathbf{2} = \langle \{0,1\}, \langle \lambda^{\mathbf{2}} : \lambda \in L \rangle \rangle$, on $L = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, amb la que hem determinat la lògica proposicional clàssica a l'*Exemple 1.29*. El següent resultat

[5] Presentades a mitjans del segle XIX per George Boole, a [Boo09]. Donada la gran rellevància i les moltes aplicacions de les àlgebres de Boole, però, podem trobar-ne bastant literatura envers el tema i, en particular, diferents definicions equivalents, com les presentades per E.V. Huntington a [Hun04] o per H.M. Sheffer a [She13], entre d'altres.

ens assegura que, en efecte, **2** i l'àlgebra de Boole $\mathbf{B}_2 = \langle\{0,1\}, \wedge^{\mathbf{B}_2}, \vee^{\mathbf{B}_2}, \neg^{\mathbf{B}_2}, 0, 1\rangle$, són essencialment la mateixa.

Proposició 1.57. *La* **L***-àlgebra* $\mathit{2}$ *i l'àlgebra de Boole* $\boldsymbol{B}_2$ *esdevenen terme-equivalents definint, a l'àlgebra de Boole, per tot* $a, b \in \{0,1\}$*:*

$$a \rightarrow^{\boldsymbol{B}_2} b := \neg^{\boldsymbol{B}_2} a \vee^{\boldsymbol{B}_2} b;$$
$$a \leftrightarrow^{\boldsymbol{B}_2} b := (\neg^{\boldsymbol{B}_2} a \vee^{\boldsymbol{B}_2} b) \wedge^{\boldsymbol{B}_2} (\neg^{\boldsymbol{B}_2} b \vee^{\boldsymbol{B}_2} a).$$

I, a $\mathit{2}$*:*

$$\top^{\boldsymbol{2}} := a \rightarrow^{\boldsymbol{2}} a;$$
$$\bot^{\boldsymbol{2}} := \neg^{\boldsymbol{2}}(a \rightarrow^{\boldsymbol{2}} a).$$

Demostració. Primerament, tot i que resulta evident, caldria veure que $\wedge^{\mathbf{2}} = \wedge^{\mathbf{B}_2}$, $\vee^{\mathbf{2}} = \vee^{\mathbf{B}_2}$ i $\neg^{\mathbf{2}} = \neg^{\mathbf{B}_2}$; una manera de fer-ho és construint les taules de veritat de les operacions de $\mathbf{B}_2$, que esdevenen les mateixes que les de **2**. Ara, sabent que $\top^{\mathbf{B}_2} = 1$ i $\bot^{\mathbf{B}_2} = 0$, també arribem fàcilment a què, per tot $a \in \{0,1\}$, $\top^{\mathbf{2}} = a \rightarrow^{\mathbf{2}} a = 1 = \top^{\mathbf{B}_2}$ i $\bot^{\mathbf{2}} = \neg^{\mathbf{2}}(a \rightarrow^{\mathbf{2}} a) = 0 = \bot^{\mathbf{B}_2}$. Finalment, només ens queda considerar que, per tot $a, b \in \{0,1\}$, tenim que:

$$a \rightarrow^{\mathbf{B}_2} b = \neg^{\mathbf{B}_2} a \vee^{\mathbf{B}_2} b = \neg^{\mathbf{2}} a \vee^{\mathbf{2}} b = a \rightarrow^{\mathbf{2}} b,$$

$$a \leftrightarrow^{\mathbf{B}_2} b = (\neg^{\mathbf{B}_2} a \vee^{\mathbf{B}_2} b) \wedge^{\mathbf{B}_2} (\neg^{\mathbf{B}_2} b \vee^{\mathbf{B}_2} a) = (\neg^{\mathbf{2}} a \vee^{\mathbf{2}} b) \wedge^{\mathbf{2}} (\neg^{\mathbf{2}} b \vee^{\mathbf{2}} a) = a \leftrightarrow^{\mathbf{2}} b;$$

com també es pot comprovar directament de les taules de veritat de les operacions de **2**. Concloem així que, amb les definicions de l'enunciat, **2** i $\mathbf{B}_2$ resulten terme-equivalents. ▲

Un cop presentada la classe d'àlgebres de Boole, construirem la relació de conseqüència equacional relativa a aquesta. Primerament, fixem-nos que el llenguatge proposicional sobre el qual generem les àlgebres de Boole pot variar segons com les definim, tot i que sempre resultaran equivalents. De tota manera, ja hem vist que podem adaptar el llenguatge fins a ser el mateix que el de la lògica proposicional clàssica, que és el que suposarem[6].

La relació de conseqüència equacional relativa a BA, $\vDash_{\mathsf{BA}}$, es definirà com, per tot $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$:

$$\Theta \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \psi \iff \text{Per tota } \mathbf{L}\text{-àlgebra } \mathbf{B} \in \mathsf{BA} \text{ àlgebra de Boole, i tot homomorfisme } h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{B}, \text{ si } h(\varphi_i) = h(\psi_i) \text{ per tot } \varphi_i \approx \psi_i \in \Theta, \text{ llavors } h(\varphi) = h(\psi).$$

Per treballar una mica aquesta relació $\vDash_{\mathsf{BA}}$, i perquè ens resultarà útil més endavant, presentarem el Teorema de Completesa Algebraica de la lògica proposicional clàssica respecte $\vDash_{\mathsf{BA}}$.

Teorema 1.58. *(Teorema de Completesa Algebraica de la lògica proposicional clàssica respecte* $\vDash_{\mathsf{BA}}$*) Donada la lògica proposicional clàssica* $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l}\rangle$ *i* BA *la classe d'àlgebres de Boole, ambdues amb la constant* $\top$ *definida, tenim que, per tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$*:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \iff \{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top.$$

[6] De fet, en aquest cas podria resultar més útil emprar la segona definició de les àlgebres de Boole de Huntington, §2 de [Hun04], pàg. 297, ja que només requereix dues connectives, equivalents a $\neg$ i $\rightarrow$ de la lògica proposicional clàssica; les mateixes úniques connectives necessàries al càlcul tipus Hilbert presentat a l'*Exemple 1.14*, estalviant-nos així la resta de connectives.

Demostració. La implicació ($\Rightarrow$) es resol de manera semblant al que ja vam fer a la primera part de la demostració del Teorema de Completesa Forta de la lògica proposicional clàssica, el *Teorema 1.40*, veient que, transformant una fórmula ϑ en l'equació $\vartheta \approx \top$, les equacions obtingudes a partir dels quatre axiomes i de la regla M.P. de $\mathcal{C}l$ també es verifiquen a $\vDash_{\mathsf{BA}}$. Vegem, per exemple, que M.P. es transformaria, per $\varphi, \psi \in Fm$, en $\varphi \approx \top, \varphi \to \psi \approx \top \vDash_{\mathsf{BA}} \psi \approx \top$, i podem comprovar que es valida considerant que, per tot $\mathbf{B} \in \mathsf{BA}$ i tot $\mathbf{B}$-homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{B}$, si $h(\varphi) = h(\top) = \top$ i $h(\varphi \to \psi) = h(\top) = \top$, pel fet que h conserva les connectives, tenim que,

$$h(\top) = \top = h(\varphi \to \psi) = h(\varphi) \to_{\mathbf{B}} h(\psi) = h(\top) \to_{\mathbf{B}} h(\psi) = \neg_{\mathbf{B}} h(\top) \vee_{\mathbf{B}} h(\psi).$$

Com $\neg_{\mathbf{B}} h(\top) = \neg_{\mathbf{B}} \top = \bot$, i sabem que $\mathbf{B}$ és complementat, veiem que $\neg_{\mathbf{B}} h(\top) \vee_{\mathbf{B}} h(\psi) = \bot \vee_{\mathbf{B}} h(\psi) = h(\psi)$. Per tant, arribem a què $h(\psi) = h(\top)$.

Quant a la implicació ($\Leftarrow$), podem donar dues demostracions: la primera, que resulta la més curta i senzilla, es basa a fixar-nos que $\{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top$ implica $\{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\{\mathbf{2}\}} \varphi \approx \top$, i que això últim, de manera pràcticament immediata, ens porta a afirmar que $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\} \rangle} \varphi$. Per tant, retornant, un altre cop, a la completesa presentada al *Teorema 1.40*, tenim que $\{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top \Longrightarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$.

El segon mètode per provar el que volem és una demostració pel contrarecíproc que, a més d'històricament rellevant, ja que és explícitament el *procés de Lindenbaum-Tarski*; també ens resultarà útil més endavant. A grans trets, el procés consisteix a definir sintàcticament una congruència, tradicionalment[7] la relació, per $\varphi, \psi \in Fm$:

$$\varphi \equiv \psi \iff \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi \ \text{ i } \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi.$$

I, llavors, el gruix de l'argument radica en provar que, en aquest cas de la lògica proposicional clàssica, l'àlgebra quocient $\mathbf{Fm}/\equiv$, que denominem l'*àlgebra de Lindenbaum-Tarski*, és àlgebra de Boole. Donada l'extensió de tot el procés, i per no trencar el fil de l'argument, hom pot trobar tots els detalls de la demostració a l'*Apèndix D*. ▲

Teorema 1.59. *(Teorema de Completesa Algebraica de la lògica proposicional clàssica) Sigui la classe de matrius $\mathscr{B} = \{\langle \boldsymbol{B}, \{1\} \rangle : \boldsymbol{B} \in \mathsf{BA}\}$, on BA és la classe d'àlgebres de Boole. Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\mathscr{B}} \varphi.$$

Demostració. Resulta fàcilment deduïble del teorema anterior, considerant que la constant $\top$ que plantejarem realment es pot reemplaçar per qualsevol fórmula que sempre es verifiqui, com $\vartheta \leftrightarrow \vartheta$ o $\vartheta \vee \neg\vartheta$, ja que tot homomorfisme sempre l'avaluarà com a 1. Llavors, associant a cada àlgebra de Boole $\mathbf{B} \in \mathsf{BA}$ el conjunt d'elements designats $\{1\}$, tenim que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Sigma \vDash_{\mathscr{B}} \varphi \iff \{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$, el que volíem provar. ▲

Observem que, a la secció anterior, amb el Teorema de Completesa de la lògica proposicional clàssica, el *Teorema 1.40*, vam veure que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\} \rangle} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{\mathcal{C}l} \varphi$. Així, ajuntant-ho amb el darrer Teorema de Completesa Algebraica, ens porta a afirmar que $\Sigma \vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\} \rangle} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash_{\mathscr{B}} \varphi$, que també és deduïble de la propietat que l'àlgebra de Boole $\mathbf{2}$ genera BA.

[7] Vegis la definició 4 del dotzè article de [Tar83], pàg. 348.

2 Teoremes d'algebrització

2.1 Sistemes deductius algebritzables

Resumint, a grans trets, el que hem obtingut fins ara: d'una banda, tenim $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductiu, amb $\vdash_{\mathcal{S}}$ la seva relació de conseqüència, estructural i finitària, en el conjunt de fórmules Fm; de l'altra, una classe d'àlgebres K, amb $\vDash_{\mathsf{K}}$ la seva relació de conseqüència equacional relativa, que és estructural i es defineix sobre el conjunt d'equacions Eq. Seguidament, estudiarem com relacionar aquests conceptes, que ens portaran a establir quan un sistema deductiu és algebritzable.

Definició 2.1. *Estenem la definició d'una relació de conseqüència $\vdash \subseteq \mathcal{P}(U) \times U$, sobre un conjunt U, a $\vdash \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$, prenent, per tot $\Sigma \cup \Gamma \subseteq U$:*

$$\Sigma \vdash \Gamma \iff \Sigma \vdash \varphi, \textit{ per tot } \varphi \in \Gamma.$$

També podem considerar:

$$\Sigma \dashv\vdash \Gamma \iff \Sigma \vdash \Gamma \textit{ i } \Gamma \vdash \Sigma.$$

Definició 2.2. *Una classe d'àlgebres K és* ***semàntica algebraica*** *per un sistema deductiu $\mathcal{S}$ si existeix un conjunt d'equacions finit $\delta(p) \approx \epsilon(q) = \{\delta_i(p) \approx \epsilon_i(q) : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\}$, per p i q variables, tal que, per $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:*

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Leftrightarrow \{\delta(\psi) \approx \epsilon(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi).$$

*En aquest cas, anomenem el sistema $\delta \approx \epsilon$ com el conjunt d'****equacions definidores*** *per $\mathcal{S}$ i K.*

Fixem-nos que, informalment, podríem dir que K és semàntica algebraica per $\mathcal{S}$ si, transformant les fórmules en sistemes d'equacions, som capaços de passar de $\vdash_{\mathcal{S}}$ a $\vDash_{\mathsf{K}}$. No cal anar gaire lluny per trobar un primer exemple, ja que, si ens fixem, el *Teorema 1.58* ja ens estava afirmant que, en efecte, la classe d'àlgebres de Boole BA és semàntica algebraica per la lògica proposicional clàssica, amb equacions definidores l'equació, per $\varphi \in Fm$, $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \varphi \approx \top$. Pel que comentàrem després, deduïm que la classe conformada per una sola àlgebra $\{\mathbf{2}\}$ també n'és semàntica algebraica, amb les mateixes equacions definidores. Vegem un exemple addicional de semàntica algebraica per la lògica proposicional clàssica:

Exemple 2.3. Prenem la $\mathbf{L}$-àlgebra $\mathbf{G}_3$, definida com a l'*Exemple 1.29*. Comprovem que la classe $\{\mathbf{G}_3\}$ és semàntica algebraica per la lògica proposicional clàssica, amb equacions definidores l'equació, per $\varphi \in Fm$, $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \neg\neg\varphi \approx \top$. Volem veure, per tant, que, per $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \iff \{\neg\neg\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \neg\neg\varphi \approx \top.$$

La implicació ($\Leftarrow$) es pot provar ràpidament, considerant alguns resultats que ja coneixem: si suposem que es verifica $\{\neg\neg\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \neg\neg\varphi \approx \top$, llavors també es donarà $\{\neg\neg\psi : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\langle \mathbf{G}_3, \{1\}\rangle} \neg\neg\varphi$ i, com la lògica proposicional clàssica és extensió de la lògica tri-valorada de Gödel, pel vist a la *Proposició 1.33*, podem afirmar que $\{\neg\neg\psi : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle} \neg\neg\varphi$. Per la completesa forta de la lògia proposicional clàssica, el *Teorema 1.40*, tenim que l'última expressió és equivalent a què $\{\neg\neg\psi : \psi \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\neg\varphi$.

Es pot comprovar fàcilment que, per tot $\vartheta \in Fm$, $\{\neg\neg\vartheta\} \dashv\vdash_{\mathcal{Cl}} \{\vartheta\}$, amb el que, finalment, arribem a què $\{\psi : \psi \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{Cl}} \varphi$, és a dir, $\Sigma \vdash_{\mathcal{Cl}} \varphi$.

L'altra implicació ($\Rightarrow$) es demostra pel contrarecíproc. Suposem, per tant, que $\{\neg\neg\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \nvDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \neg\neg\varphi \approx \top$. Com abans, això implicarà que $\{\neg\neg\psi : \psi \in \Sigma\} \nvDash_{\langle \mathbf{G}_3, \{1\}\rangle} \neg\neg\varphi$. Per tant, tenim que existeix almenys un homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{G}_3$, una $\mathbf{G}_3$-interpretació, tal que $h(\neg\neg\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, però $h(\neg\neg\varphi) \neq 1$. Ara, fixem-nos que, de la taula de $\neg^{\mathbf{G}}$, tenim que, per tot $\vartheta \in Fm$, $\neg^{\mathbf{G}}\neg^{\mathbf{G}}h(\vartheta) = 1 \Leftrightarrow h(\vartheta) \neq 0$. Així que, com $h(\neg\neg\psi) = \neg^{\mathbf{G}}\neg^{\mathbf{G}}h(\psi) = 1$ tenim que $h(\psi) \neq 0$, per tot $\psi \in \Sigma$; i $h(\neg\neg\varphi) = \neg^{\mathbf{G}}\neg^{\mathbf{G}}h(\varphi) \neq 1$ implica que $h(\varphi) = 0$.

Definim la funció $f : \{0, 1/2, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$, on, per tot $a \in \{0, 1/2, 1\}$,

$$f(a) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Veiem que f es pot entendre com un homomorfisme entre $\mathbf{G}_3$ i $\mathbf{2}$, ja que és una funció sobre els seus dominis i es pot comprovar fàcilment que conserva les connectives, en el sentit que, per tot $a, b \in \{0, 1/2, 1\}$:

$$\begin{array}{lll} f(a \wedge^{\mathbf{G}_3} b) = f(a) \wedge^{\mathbf{2}} f(b), & f(a \to^{\mathbf{G}_3} b) = f(a) \to^{\mathbf{2}} f(b), & f(\bot^{\mathbf{G}_3}) = \bot^{\mathbf{2}}, \\ f(a \vee^{\mathbf{G}_3} b) = f(a) \vee^{\mathbf{2}} f(b), & f(\neg^{\mathbf{G}_3} a) = \neg^{\mathbf{2}} f(a), & f(\top^{\mathbf{G}_3}) = \top^{\mathbf{2}}; \end{array}$$

on ja sabem que $\bot^{\mathbf{G}_3} = \bot^{\mathbf{2}} = 0$ i $\top^{\mathbf{G}_3} = \top^{\mathbf{2}} = 1$.

Finalment, apreciem que $f \circ h$, aleshores, serà una $\mathbf{2}$-interpretació, la qual verificarà $f \circ h(\psi) = 1$ per tot $\psi \in \Sigma$, i $f \circ h(\varphi) = 0$. Això significa que $\Sigma \nvDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle} \varphi$, que, per completesa, implica $\Sigma \nvdash_{\mathcal{Cl}} \varphi$. Així, en conclusió, pel contrarecíproc tenim que $\Sigma \vdash_{\mathcal{Cl}} \varphi \Rightarrow \{\neg\neg\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \neg\neg\varphi \approx \top$, com volíem demostrar.

En aquest punt, també podem provar que les semàntiques algebraiques no són úniques, senzillament comprovant que la classe $\{\mathbf{G}_3\}$ no defineix la mateixa relació equacional relativa que la classe d'àlgebres de Boole o $\{\mathbf{2}\}$. Veiem que, per exemple, per $\varphi \in Fm$, $\vDash_{\{\mathbf{2}\}} \neg\neg\varphi \approx \varphi$, ja que, per tota $\mathbf{2}$-interpretació I_2, $I_2(\neg\neg\varphi) = \neg^{\mathbf{2}}\neg^{\mathbf{2}}I_2(\varphi) = I_2(\varphi)$. En canvi, $\nvDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \neg\neg\varphi \approx \varphi$, perquè, per una $\mathbf{G}_3$-interpretació I_3, veiem que, si $I_3(\varphi) = 1/2$, llavors $I_3(\neg\neg\varphi) = \neg^{\mathbf{G}}\neg^{\mathbf{G}}I_3(\varphi) = \neg^{\mathbf{G}}\neg^{\mathbf{G}}(1/2) = \neg^{\mathbf{G}}0 = 1 \neq 1/2 = I_3(\varphi)$.

Definició 2.4. *La classe d'àlgebres* K *és* ***semàntica algebraica equivalent***[8] *al sistema deductiu* $\mathcal{S}$ *si n'és semàntica algebraica i, a més, existeix un conjunt finit de fórmules de dues variables* $\Delta(p, q) = \{\Delta_i(p, q) : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\}$ *tal que, per tot* $\varphi \approx \psi \in Eq$*:*

$$\{\varphi \approx \psi\} \mathrel{=\!\mid\!\vDash}_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi)).$$

En aquest cas, el sistema Δ *es bateja com les* ***fórmules d'equivalència*** *per* $\mathcal{S}$ *i* K*.*

Les semàntiques algebraiques equivalents, en certa manera, ens assegurarien que no només podem passar de $\vdash_{\mathcal{S}}$ a $\vDash_{\mathsf{K}}$, sinó que també podem tornar enrere, ja que, si passem de $\vDash_{\mathsf{K}}$ a $\vdash_{\mathcal{S}}$, d'una equació a un sistema de fórmules, llavors arribem a la mateixa conseqüència inicial. Anàlogament, les definicions de semàntica algebraica i semàntica algebraica equivalent es poden mirar des de l'altre sentit, amb el que arribem al següent corol·lari:

[8] Mantenim aquí la nomenclatura emprada a [Blo89], tot i que, actualment, se sol reservar el terme *equivalent* per designar la semàntica algebraica més gran que fa algebritzable una lògica, la qual guanyarà importància a la secció 2.1.1.

Corol·lari 2.5. *Sigui* K *una semàntica algebraica per* $\mathcal{S}$*, amb les equacions definidores* $\delta \approx \epsilon$*. Si* K *és equivalent a* $\mathcal{S}$*, amb fórmules d'equivalència* Δ*, llavors, per tot* $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$ *i tot* $\vartheta \in Fm$*:*

i) $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \{\Delta(\xi, \eta) : \xi \approx \eta \in \Theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \psi)$*;*

ii) $\{\vartheta\} \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))$.

D'altra banda, si existeix un sistema de fórmules Δ *satisfent les condicions i) i ii), llavors* K *és equivalent a* $\mathcal{S}$ *amb fórmules d'equivalència* Δ*.* ▲

Observem que, entenent les definicions presentades respecte quasi-equacions, podem afirmar que, si la classe d'àlgebres K és semàntica algebraica pel sistema deductiu $\mathcal{S}$, llavors la quasi-varietat generada per K, $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$, també ho és, i K és equivalent a $\mathcal{S}$ si, i només si, $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$ ho és.

Exemple 2.6. La classe $\{\mathbf{2}\}$ és semàntica algebraica equivalent a la lògica proposicional clàssica, amb equacions definidores $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \varphi \approx \varphi \to \varphi$ i fórmules d'equivalència $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \leftrightarrow \psi\} = \{(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)\} = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$, per tot $\varphi, \psi \in Fm$. Abans ja hem vist que n'és semàntica algebraica, així que només queda comprovar que, per $\varphi, \psi \in Fm$: $\{\varphi \approx \psi\} \dashv\vDash_{\{\mathbf{2}\}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi))$, és a dir, $\varphi \leftrightarrow \psi \approx (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Si $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{2}$ és homomorfisme tal que $h(\varphi) = h(\psi)$, veiem que, llavors,

$$h(\varphi \leftrightarrow \psi) = h(\varphi) \leftrightarrow h(\psi) = h(\psi) \leftrightarrow h(\psi) = 1,$$

perquè per les taules de veritat $1 \leftrightarrow 1 = 1$ i $0 \leftrightarrow 0 = 1$. També,

$$h[(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)] = h(\varphi \leftrightarrow \psi) \to h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \to 1 = 1;$$

així que, ja hem vist la relació $\{\varphi \approx \psi\} \vDash_{\{\mathbf{2}\}} \varphi \leftrightarrow \psi \approx (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

D'altra banda, si h verifica $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = h[(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)]$, llavors $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = h(\varphi \leftrightarrow \psi) \to h(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Això implica que, necessàriament, $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, donat que $1 = 1 \to 1$, però $0 \neq 0 \to 0$. Llavors, $h(\varphi) \leftrightarrow h(\psi) = 1$, el que significa que $h(\varphi) = h(\psi)$. Així, hem vist que $\{\varphi \leftrightarrow \psi \approx (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)\} \vDash_{\{\mathbf{2}\}} \varphi \approx \psi$. Per tant, concloem que, efectivament, la classe $\{\mathbf{2}\}$ és semàntica algebraica equivalent a la lògica proposicional clàssica. Considerant els resultats que ja coneixem en relació a $\mathbf{2}$ i BA, podem establir fàcilment que BA també serà semàntica algebraica equivalent a la lògica proposicional clàssica, amb les mateixes fórmules d'equivalència i equacions definidores.

Exemple 2.7. Vegem ara que la classe $\{\mathbf{G}_3\}$, que ja sabem que és semàntica algebraica, per l'*Exemple 2.3*, no és equivalent a la lògica proposicional clàssica, amb l'equació $\neg\neg\varphi \approx \top$ i la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$. Cal veure que existeixen $\varphi, \psi \in Fm$ tals que no verifiquen $\{\varphi \approx \psi\} \dashv\vDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \{\neg\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \approx \top\}$.

Prenem un homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{G}_3$ tal que, per $\varphi, \psi \in Fm$, $h(\varphi) = 1/2$ i $h(\psi) = 1$; també, $h(\top) = 1$ i $h(\bot) = 0$. Veiem que, com h ha de mantenir vàlides les taules, és a dir, preservar les connectives, i es pot comprovar fàcilment que, per tot $\vartheta \in Fm$, $\neg^{\mathbf{G}}\vartheta = \vartheta \to^{\mathbf{G}} \bot^{\mathbf{G}}$, tenim que:

$$h(\neg\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = [(h(\varphi) \leftrightarrow h(\psi)) \to h(\bot)] \to h(\bot) = ((1/2 \leftrightarrow 1) \to 0) \to 0 =$$
$$(1/2 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1.$$

Ara, arribem a què $h(\neg\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 = h(\top)$, però $h(\varphi) = 1/2 \neq 1 = h(\psi)$, per tant, $\{\neg\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \approx \top\} \nvDash_{\{\mathbf{G}_3\}} \varphi \approx \psi$, provant així el que volíem.

Definició 2.8. *Un sistema deductiu és **algebritzable** si té una semàntica algebraica equivalent.*

Alternativament, també podem definir quan un sistema deductiu és algebritzable senzillament aplegant les definicions anteriors, arribant a una definició més directa:

Definició 2.9. *Un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ és **algebritzable** si existeix una classe d'àlgebres K, un sistema finit de fórmules Δ i un sistema finit d'equacions $\delta \approx \epsilon$ tals que, per $\Sigma \cup \{\vartheta\} \subseteq Fm$ i $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$, es verifica:*

2.9.i) $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \vartheta \Leftrightarrow \{\delta(\phi) \approx \epsilon(\phi) : \phi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta)$;

2.9.ii) $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \{\Delta(\xi, \eta) : \xi \approx \eta \in \Theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \psi)$;

2.9.iii) $\{\varphi \approx \psi\} \dashv\vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi))$;

2.9.iv) $\{\vartheta\} \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))$.

Si es donen aquestes condicions, llavors Δ és el sistema de fórmules d'equivalència i $\delta \approx \epsilon$ el d'equacions definidores.

Proposició 2.10. *Un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ és algebritzable si, i només si, existeix una classe d'àlgebres K, un sistema finit de fórmules Δ i un sistema finit d'equacions $\delta \approx \epsilon$ tals que verifiquen 2.9.i) i 2.9.iii) o 2.9.ii) i 2.9.iv).*

Demostració. Per la *Definició 2.9*, és suficient amb veure que es donen *2.9.i*) i *2.9.iii*) si, i només si, *2.9.ii*) i *2.9.iv*). Implicació ($\Rightarrow$): Per tot K, Δ i $\delta \approx \epsilon$ que verifiquin les hipòtesis, tenim que, per $\varphi, \psi \in Fm$ i $\Theta \subseteq Eq$, si definim $\Theta' \coloneqq \{\delta(\Delta(\xi, \eta)) \approx \epsilon(\Delta(\xi, \eta)) : \xi \approx \eta \in \Theta\}$:

$$\{\Delta(\xi, \eta) : \xi \approx \eta \in \Theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \psi) \overset{2.9.i)}{\Longleftrightarrow} \Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi)).$$

Considerant que $\delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi)) \dashv\vDash_{\mathsf{K}} \{\varphi \approx \psi\}$, per Tall tenim que $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \psi)) \Leftrightarrow \Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Per acabar de provar que es dona *2.9.ii)* només cal veure que $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$:

Suposem $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Com $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\xi, \eta)) \approx \epsilon(\Delta(\xi, \eta))$ per tot $\xi \approx \eta \in \Theta$, tenim que, per *2.9.iii)* i Tall, $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta$; així que, podem aplicar Tall respecte a la suposició, per arribar a què $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. D'altra banda, considerem ara que es verifica $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$, i volem provar $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Evidentment, per la Identitat, podem afirmar $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta$ per tot $\xi \approx \eta \in \Theta$. Per *2.9.iii)* i Tall tenim $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\xi, \eta)) \approx \epsilon(\Delta(\xi, \eta))$, per tot $\xi \approx \eta \in \Theta$. Veiem que aquests són precisament tots els elements de Θ', per tant, un altre cop, per Tall, concloem que $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Hem provat així que es verifica *2.9.ii)*.

Mirem ara d'arribar a *2.9.iv)*; per $\vartheta \in Fm$:

$$\{\vartheta\} \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta)) \overset{2.9.i)}{\Longleftrightarrow} \delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) \dashv\vDash_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))) \approx \epsilon(\Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))).$$

Que sabem que es satisfà, donat que és pròpiament la hipòtesi *2.9.iii)* aplicada a $\delta(\vartheta)$ i $\epsilon(\vartheta)$.

Implicació ($\Leftarrow$): es demostra a partir dels mateixos arguments que ($\Rightarrow$), aplicant *2.9.ii)* i *2.9.iv)* en comptes de *2.9.i)* i *2.9.iii)*, respectivament, i, pràcticament, intercanviant equacions per fórmules i $\vDash_{\mathsf{K}}$ per $\vdash_{\mathcal{S}}$. ▲

De moment, ja hem vist que la lògica proposicional clàssica és algebritzable, amb les àlgebres de Boole com a semàntica algebraica equivalent. A continuació, en donarem un segon exemple de lògica algebritzable, i un de no algebritzable:

Definició 2.11. *Una lògica $\mathcal{S}$ és* ***trivial*** *si satisfà $\{p\} \vdash_{\mathcal{S}} q$ per p i q dues variables diferents. La lògica $\mathcal{S}$ és* ***inconsistent*** *si és trivial i conté teoremes, fórmules φ tals que $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. La lògica és* ***quasi-inconsistent*** *si és trivial i no té teoremes.*

La següent proposició resulta en una senzilla comprovació de les condicions de la *Definició* 2.9, només necessitant tenir en compte la definició general de $\models_{\mathsf{K}}$ i la definició de les lògiques inconsistents.

Proposició 2.12. *La lògica inconsistent és algebritzable, amb semàntica algebraica equivalent qualsevol classe d'àlgebres, amb un conjunt buit de fórmules d'equivalència i una equació definidora $\delta \approx \epsilon$ amb $\delta(\varphi) = \epsilon(\varphi) = \varphi$, per tot $\varphi \in Fm$.* ▲

Proposició 2.13. *Si $\mathcal{S}$ és una lògica algebritzable, amb Δ el sistema de fórmules d'equivalència, llavors $\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \varphi)$, per tot $\varphi \in Fm$.*

Demostració. Suposem $\mathcal{S}$ algebritzable amb sistema de fórmules d'equivalència Δ i equacions definidores $\delta \approx \epsilon$. Tenim, per $\varphi \in Fm$:

$$\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \varphi) \overset{2.9.i)}{\iff} \models_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(\varphi, \varphi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi, \varphi)) \overset{2.9.iii) \text{ i } Tall}{\iff} \models_{\mathsf{K}} \varphi \approx \varphi.$$

I això últim sempre es verifica, ja que, per tota àlgebra $\mathbf{A}$ de la semàntica algebraica equivalent K, per tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$, evidentment $h(\varphi) = h(\varphi)$. ▲

Per tant, podem deduir que qualsevol lògica sense teoremes no serà algebritzable. En particular, la lògica quasi-inconsistent no és algebritzable.

Tot i que no es podran estudiar tots amb el detall que es mereixerien, més endavant en tractarem amb més o menys profunditat alguns sistemes deductius concrets, tant algebritzables com no.

2.1.1 Unicitat

La *Proposició* 2.12 dels exemples anteriors ja ens ha avançat un resultat important, donat que ens ha provat que les semàntiques algebraiques equivalents no són úniques. No obstant això, els següents teoremes i resultats ens asseguraran que tota lògica algebritzable té, en essència, una única algebrització.

Lema 2.14. *Per un sistema deductiu $\mathcal{S}$ algebritzable amb fórmules d'equivalència Δ, es verifica, per $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$:*

$\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \varphi)$; *(Reflexivitat)*

$\Delta(\varphi, \psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\psi, \varphi)$; *(Simetria)*

$\Delta(\varphi, \psi) \cup \Delta(\psi, \vartheta) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \vartheta)$; *(Transitivitat)*

Per tot $\lambda \in L$, amb $ar(\lambda) = n \geqslant 1$,

$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta(\varphi_i, \psi_i) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \lambda(\psi_1, \ldots, \psi_n))$; *(Congruència)*

$\{\varphi\} \cup \Delta(\varphi, \psi) \vdash_{\mathcal{S}} \psi$; *(M.P.)*

Si $\vartheta(\xi, \eta), \xi, \eta \in Fm$, llavors $\Delta(\varphi, \psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\vartheta(\varphi, \eta), \vartheta(\psi, \eta))$. *(Reemplaçament)*

Demostració. Observem que la Reflexivitat ja l'hem demostrat a la *Proposició* 2.13. La resta es poden provar amb els mateixos arguments: considerant $\mathcal{S}$ algebritzable, amb un sistema d'equacions definidores $\delta \approx \epsilon$, apliquem *2.9.i)*, transformant així aquestes relacions a $\vdash_{\mathcal{S}}$ en relacions a $\models_{\mathsf{K}}$, on K és la semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$; i, amb l'ajut de *2.9.iii)* i el Tall, se simplifiquen les expressions fins a ser gairebé elementals. Per exemple, comprovem M.P.:

$$\{\varphi\} \cup \Delta(\varphi,\psi) \vdash_{\mathcal{S}} \psi \overset{2.9.i)}{\iff} \{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)\} \cup \{\delta(\Delta(\varphi,\psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi,\psi))\} \models_{\mathsf{K}} \delta(\psi) \approx \epsilon(\psi)$$
$$\overset{2.9.iii)\text{ i Tall}}{\iff} \{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)\} \cup \{\varphi \approx \psi\} \models_{\mathsf{K}} \delta(\psi) \approx \epsilon(\psi).$$

I això últim sabem que es verifica, perquè, per tota àlgebra $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$ tenim que, si $h(\delta(\varphi)) = h(\epsilon(\varphi))$ i $h(\varphi) = h(\psi)$, llavors $h(\delta(\psi)) = h(\epsilon(\psi))$, ja que, com h manté les connectives, sabem que $h(\delta(\varphi)) = \delta(h(\varphi))$ i $h(\epsilon(\varphi)) = \epsilon(h(\varphi))$. ▲

Teorema 2.15. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, i sigui K una semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, amb Δ i $\delta \approx \epsilon$ el seu sistema de fórmules d'equivalència i el d'equacions definidores, respectivament. Llavors, la classe d'àlgebres K' també serà equivalent a $\mathcal{S}$, amb fórmules Δ' i equacions $\delta' \approx \epsilon'$, si, i només si, per tot $\Theta \cup \{\xi \approx \eta\} \subseteq Eq$ i per tot $\varphi, \psi \in Fm$:*

i) $\Theta \models_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta \Leftrightarrow \Theta \models_{\mathsf{K}'} \xi \approx \eta$;

ii) $\Delta(\varphi,\psi) \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\varphi,\psi)$;

iii) $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) \dashv\models_{\mathsf{K}} \delta'(\varphi) \approx \epsilon'(\varphi)$.

Demostració. Implicació ($\Leftarrow$): Si es donen les tres condicions, llavors resulta evident que, com $\mathcal{S}$ és algebritzable per K, també ho serà per K'.

Implicació ($\Rightarrow$): Si $\mathcal{S}$ és algebritzable tant per K com per K', amb els seus respectius sistemes de fórmules Δ i Δ', sabem que es verifica el Reemplaçament del *Lema 2.14* per ambdós conjunts i, en particular, tenim:

$$\Delta(\varphi,\psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\Delta'(\varphi,\varphi), \Delta'(\psi,\varphi)). \tag{2.1}$$

I, per M.P.:

$$\Delta(\varphi,\varphi) \cup \Delta(\Delta'(\varphi,\varphi), \Delta'(\psi,\varphi)) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\psi,\varphi). \tag{2.2}$$

Com, per Reflexivitat, $\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi,\varphi)$ i, per Simetria, $\Delta'(\psi,\varphi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\varphi,\psi)$, tenim que, aplicant Tall a (2.1) i (2.2), arribem a què $\Delta(\varphi,\psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\varphi,\psi)$. Intercanviant els papers de Δ i Δ' obtenim $\Delta'(\varphi,\psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi,\psi)$. Això prova l'apartat *ii*). Considerant aquest resultat, els apartats *i*) i *iii*) són gairebé directes, per $\Theta \cup \{\xi \approx \eta\} \subseteq Eq$:

$$\Theta \models_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta \overset{2.9.ii)}{\iff} \{\Delta(\varphi,\psi) : \varphi \approx \psi \in \Theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\xi,\eta) \Leftrightarrow$$
$$\{\Delta'(\varphi,\psi) : \varphi \approx \psi \in \Theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\xi,\eta) \overset{2.9.ii)}{\iff} \Theta \models_{\mathsf{K}'} \xi \approx \eta.$$

Apel·land dos cops a *2.9.iv)*,

$$\Delta(\delta(\varphi), \epsilon(\varphi)) \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \{\varphi\} \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta'(\delta'(\varphi), \epsilon'(\varphi)) \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta'(\varphi), \epsilon'(\varphi)).$$

I, aplicant-hi *2.9.ii)*, tenim $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) \dashv\models_{\mathsf{K}} \delta'(\varphi) \approx \epsilon'(\varphi)$. ▲

Aquest últim teorema ens assegura que tot sistema deductiu algebritzable té, principalment, una única semàntica algebraica equivalent. Però, encara en podem afirmar més, retornant als resultats que coneixem de les quasi-varietats:

Corol·lari 2.16. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, i siguin K i K' semàntiques algebraiques equivalents a $\mathcal{S}$. Aleshores, K i K' generen la mateixa quasi-varietat, és a dir, $\mathbb{Q}(\mathsf{K}) = \mathbb{Q}(\mathsf{K}')$.*

Demostració. Pel *Teorema 2.15*, sabem que, per tot $\Theta \cup \{\xi \approx \eta\} \subseteq Eq$, tenim $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta \Leftrightarrow \Theta \vDash_{\mathsf{K}'} \xi \approx \eta$. Sigui qualsevol quasi-equació $(\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$ tal que se satisfà a K. Llavors, sabem que $\{\varphi_i \approx \psi_i : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$, i això implica que $\{\varphi_i \approx \psi_i : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}'} \varphi \approx \psi$. Per tant, veiem que les quasi-equacions que es verifiquen a K també en són vàlides a K'. Anàlogament, podem comprovar que les quasi-equacions de K' se satisfan igualment a K. Així, arribem a què $\mathbb{Q}(\mathsf{K}) = \mathbb{Q}(\mathsf{K}')$. ▲

En definitiva, recordant que K és semàntica algebraica equivalent a un sistema deductiu donat si, i només si, $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$ també ho és; tenim que tot sistema deductiu té una quasi-varietat semàntica algebraica equivalent unívocament determinada. En aquest treball l'anomenarem *la (única) quasi-varietat semàntica equivalent* al sistema deductiu.

Observem, però, que el fet que les lògiques tinguin essencialment només una algebrització no implica que les classes d'àlgebres només puguin algebritzar una lògica, ja que podem trobar lògiques diferents amb una mateixa semàntica algebraica equivalent:

Exemple 2.17. Prenem l'àlgebra $\mathbf{A} = \langle\{\top, v, f, \bot\}, \to\rangle$, on definim l'operació binària $\to$ amb la següent taula de veritat:

$\to$	$\top$	v	f	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
v	$\top$	v	f	$\bot$
f	$\top$	$\bot$	v	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Podem definir dos sistemes deductius $\mathcal{S}_1 = \langle \mathbf{L}_\to, \vdash_{\mathcal{S}_1}\rangle$ i $\mathcal{S}_2 = \langle \mathbf{L}_\to, \vdash_{\mathcal{S}_2}\rangle$, on $\mathbf{L}_\to$ és el llenguatge d'una sola connectiva $\to$ d'arietat 2, aprofitant la condició *2.9.i)*, per $i = 1, 2$ i $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathbf{L}_\to}$:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_i} \varphi \Longleftrightarrow \{\delta_i(\psi) \approx \epsilon_i(\psi) : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\{\mathbf{A}\}} \delta_i(\varphi) \approx \epsilon_i(\varphi).$$

On considerem les fórmules δ_i i ϵ_i com, per exemple:

$$\begin{aligned} \delta_1(\varphi) &= \varphi, & \epsilon_1(\varphi) &= \varphi \to \varphi; \\ \delta_2(\varphi) &= (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to \varphi, & \epsilon_2(\varphi) &= (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi); \end{aligned}$$

que no són equivalents, així que definiran dos sistemes deductius diferents. Per exemple, es pot arribar a veure (tots els detalls d'aquest exemple es poden trobar a 5.2.4 de [Blo89], pàg. 54) que, per $\varphi \in Fm_{\mathbf{L}_\to}$, $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}_1} \varphi \to (\varphi \to \varphi)$, però, en canvi, $\{\varphi\} \nvdash_{\mathcal{S}_2} \varphi \to (\varphi \to \varphi)$. A més, aquestes caracteritzacions no només ens definiran $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, sinó que també ens asseguraran que la classe $\{\mathbf{A}\}$ serà semàntica algebraica pels dos sistemes deductius, amb les equacions definidores $\delta_1 \approx \epsilon_1$ per $\mathcal{S}_1$ i $\delta_2 \approx \epsilon_2$ per $\mathcal{S}_2$.

Comprovem ara que $\mathsf{K} = \mathbb{Q}(\mathbf{A})$ és semàntica algebraica equivalent a ambdós sistemes deductius: prenem, per $\varphi, \psi \in Fm_{\mathbf{L}_\to}$, el sistema de fórmules $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$; volem veure que es verifica, per $i = 1, 2$:

$$\{\varphi \approx \psi\} \mathrel{=\!\!|\!\vDash_{\mathsf{K}}} \delta_i(\Delta(\varphi, \psi)) \approx \epsilon_i(\Delta(\varphi, \psi)).$$

La primera conseqüència ($\vDash_{\mathsf{K}}$) és gairebé immediata per les dues fórmules d'equivalència i pels dos sistemes deductius, ja que, considerant, per tot $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$, els homomorfismes $h : \mathbf{Fm}_{\mathbf{L}_{\rightarrow}} \longrightarrow \mathbf{A}$ tals que $h(\varphi) = h(\psi)$, resulta en una senzilla comprovació veure que $h[\delta_i(\Delta(\varphi,\psi))] = h[\epsilon_i(\Delta(\varphi,\psi))]$, per $i = 1, 2$ i per les dues fórmules de Δ.

Quant a l'altra conseqüència (${}_{\mathsf{K}}\!\Dashv$), suposem un homomorfisme h tal que $h(\varphi \to \psi) = h((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi))$ i $h(\psi \to \varphi) = h((\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi))$. Fixant-nos en la taula de veritat de $\to$ és elemental adornar-nos que, perquè es doni el que hem suposat, cal que $h(\varphi \to \psi), h(\psi \to \varphi) \in \{\top, v\}$. Veiem que això només pot succeir si $h(\varphi) = h(\psi) \in \{\top, v\}$. Per tant, ja hem provat que $\delta_1(\Delta(\varphi,\psi)) \approx \epsilon_1(\Delta(\varphi,\psi)) \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. De manera semblant es pot provar que també $\delta_2(\Delta(\varphi,\psi)) \approx \epsilon_2(\Delta(\varphi,\psi)) \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$.

Per tant, arribem a què K és semàntica algebraica equivalent tant a $\mathcal{S}_1$ com a $\mathcal{S}_2$. Resulta interessant que aquests sistemes deductius es podrien caracteritzar matricialment per $\mathcal{S}_1 = \langle \mathbf{A}, \{v, \top\}\rangle$ i $\mathcal{S}_2 = \langle \mathbf{A}, \{f, v, \top\}\rangle$ i, de fet, ambdós sistemes deductius són extensions de $\mathcal{R}_{\rightarrow}$, el fragment implicatiu (vegis la secció 2.5) de la *lògica rellevant*[9] $\mathcal{R}$. Concretament, pel càlcul de $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ vegis §8.3.4. de [And75], pàg. 79; i pel de $\mathcal{R}$ es pot consultar §27.1.1., pàg. 339.

Exemple 2.18. Prenem l'àlgebra tri-valorada de Łukasiewicz, però considerant només les connectives $\to$ i $\neg$, $\mathbf{Ł}_3 = \langle\{0, 1/2, 1\}, \to^{\mathbf{Ł}_3}, \neg^{\mathbf{Ł}_3}\rangle$, on $ar(\to) = 2$ i $ar(\neg) = 1$. Definim dues connectives unàries addicionals: $\diamond x \coloneqq \neg x \to x$ i $\square x \coloneqq \neg \diamond \neg x$. Tindrem les taules:

$\to^{\mathbf{Ł}_3}$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

	$\neg^{\mathbf{Ł}_3}$	$\diamond^{\mathbf{Ł}_3}$	$\square^{\mathbf{Ł}_3}$
0	1	0	0
1/2	1/2	1	0
1	0	1	1

Es pot demostrar (per més detalls vegis l'exemple 3.20 de [Fon16], pàg. 121) que la classe d'àlgebres $\{\mathbf{Ł}_3\}$ és semàntica algebraica equivalent a:

i) El sistema deductiu de la lògica tri-valorada de Łukasiewicz (pel seu càlcul, vegis l'*Apèndix A.3*), Ł$_3$, amb fórmules d'equivalència $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$ i equacions definidores $\varphi \approx \varphi \to \varphi$.

ii) La lògica para-consistent de Da Costa i D'Ottaviano[10], amb fórmules d'equivalència $\{\varphi \rightsquigarrow \psi, \psi \rightsquigarrow \varphi, \neg\varphi \rightsquigarrow \neg\psi, \neg\psi \rightsquigarrow \neg\varphi\}$, on $\varphi \rightsquigarrow \psi \coloneqq (\neg \diamond \varphi \to \psi) \to \psi$, i equacions definidores $\diamond\varphi \approx \varphi \to \varphi$. Es pot comprovar que, en realitat, aquesta lògica és funcionalment equivalent a la tri-valorada de Łukasiewicz (tant per la definició formal de la lògica, com per la prova del que s'acaba d'esmentar, vegis la secció 4.4.3 de [Car16], pàg. 140).

2.2 Un primer teorema d'algebrització

2.2.1 Reticles de teories

En aquesta secció donarem una manera alternativa de representar els sistemes deductius, que serà la que emprarem, a la pròxima secció, per caracteritzar-ne els algebritzables.

Definició 2.19. *Donat un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$, diem que el conjunt $T \subseteq Fm$ és una* ***teoria de*** $\mathcal{S}$ *si, per tota fórmula φ, es té que $T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $\varphi \in T$.*

[9] Presentada formalment el 1975, per A.R. Anderson i N.D. Belnap, a [And75], juntament amb altres lògiques estretament relacionades.

[10] Presentada i estudiada per Da Costa i D'Ottaviano en les seves tesis doctorals i en diversos articles, per exemple, [Da 70].

Definició 2.20. *Per $\Sigma \subseteq Fm$, anomenem la* **teoria generada** *per Σ a la teoria de $\mathcal{S}$ més petita que inclou Σ, és a dir, al conjunt de fórmules:*

$$Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) = \{\varphi \in Fm : \Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}.$$

*La funció definida en el conjunt de les parts de Fm, $Cn_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(Fm) \longrightarrow \mathcal{P}(Fm)$, es denomina l'***operador de conseqüència** *de $\mathcal{S}$.*

Observem que les condicions o propietats de la *Definició 1.5*, que estipulen quan $\vdash_{\mathcal{S}}$ defineix una lògica, es poden reescriure respecte $Cn_{\mathcal{S}}$, per tot $\Sigma \cup \Gamma \subseteq Fm$:

$\Sigma \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$;	$(Identitat)$
Si $\Sigma \subseteq \Gamma$, llavors $Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\Gamma)$;	$(Monotonia)$
$Cn_{\mathcal{S}}(Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)) \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$;	$(Tall)$
Per tota substitució σ, $\{\sigma(\varphi) : \varphi \in Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)\} \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\})$.	$(Estructuralitat)$

També podem caracteritzar l'ésser finitari com: $Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) \subseteq \bigcup_{\Sigma' \subseteq \Sigma \text{ finit}} Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma')$.

Així, veiem que podríem definir[11] una lògica com la parella $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, Cn_{\mathcal{S}} \rangle$, en comptes de $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$.

Tanmateix, encara podem trobar-ne una definició alternativa més, i que és la que ens resultarà útil. Prenem, primer, el conjunt de totes les teories de $\mathcal{S}$, que anomenarem $Th\mathcal{S} = Th(\mathcal{S}) = \{Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) : \Sigma \subseteq \mathcal{P}(Fm)\}$. Igualment, podríem entendre $Th\mathcal{S}$ com tots els subconjunts de Fm tancats sota $\vdash_{\mathcal{S}}$.

Proposició 2.21. *El conjunt de teories $Th\mathcal{S}$ és tancat sota interseccions arbitràries.*

Demostració. Donats $T_i \in Th\mathcal{S}$ i $\varphi_i \in Fm$, per $i \in I$, tenim que $T_i \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i$ impliquen $\varphi_i \in T_i$, per tot $i \in I$. Volem veure que la intersecció $\bigcap_{i \in I} T_i$ també és tancada sota $\vdash_{\mathcal{S}}$. Suposem $\bigcap_{i \in I} T_i \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, amb $\varphi \in Fm$; per la Monotonia de $\vdash_{\mathcal{S}}$, com $\bigcap_{i \in I} T_i \subseteq T_i$ per cada T_i, podem afirmar que $T_i \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ per tot $i \in I$. Això implica, per la nostra hipòtesi, que $\varphi \in T_i$ per tot $i \in I$, amb el que arribem a què $\varphi \in \bigcap_{i \in I} T_i$, provant així que la intersecció arbitrària també és tancada. ▲

Per tant, podem definir un reticle complet $\mathbf{Th}\mathcal{S} = \langle Th\mathcal{S}, \cap, \vee^{\mathcal{S}} \rangle$, on $\cap$ és la intersecció, que, per la proposició anterior, sabem que és tancada a $Th\mathcal{S}$; i $\vee^{\mathcal{S}}$ és una operació binària sobre $Th\mathcal{S}$ tal que, si $S, T \in Th\mathcal{S}$, llavors $S \vee^{\mathcal{S}} T = \bigcap\{R \in Th : S \cup T \subseteq R\} = Cn_{\mathcal{S}}(T \cup S)$, que, evidentment, també serà tancada al conjunt de teories. Fixem-nos que la teoria més gran del reticle és Fm, i la més petita és el conjunt de teoremes de $\mathcal{S}$, és a dir, les fórmules φ tals que $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, és a dir, $\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Apreciem que tant $\vdash_{\mathcal{S}}$ com $Cn_{\mathcal{S}}$ estaran totalment determinats per $\mathbf{Th}\mathcal{S}$, amb el que podríem caracteritzar les lògiques per la parella $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \mathbf{Th}\mathcal{S} \rangle$.

Ara, a la secció 1.2, a partir dels *Teoremes 1.53 i 1.54*, vam concloure que, en definitiva, podíem entendre la relació de conseqüència equacional relativa a una classe d'àlgebres K, $\vDash_{\mathsf{K}}$, com una lògica definida sobre el conjunt d'equacions Eq. Arran d'això, seguidament veurem que amb $\vDash_{\mathsf{K}}$ podem realitzar quelcom similar al que acabem de fer amb $\vdash_{\mathcal{S}}$.

[11] De fet, aquesta era la definició inicial o tradicional pels sistemes deductius, com es pot veure al tercer article de [Tar83], pàg. 30.

Definició 2.22. *Un **operador de clausura** sobre un conjunt A és una funció $C: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ tal que, per tot $A' \subseteq A$:*

$$\begin{aligned} &A' \subseteq CA'; && \textit{(Identitat)} \\ &\text{Si } A'' \subseteq A' \subseteq A, \text{ llavors } CA'' \subseteq CA'; && (Monotonia) \\ &C(CA') \subseteq CA'. && (Tall) \end{aligned}$$

Observem que l'operador de conseqüència $Cn_{\mathcal{S}}$ és un operador de clausura sobre el conjunt Fm. Recuperant com hem definit $Cn_{\mathcal{S}}$, no ens resultarà pas difícil trobar-ne un operador de clausura sobre Eq:

Definició 2.23. *Sigui K una classe d'àlgebres. Una **teoria equacional** de K, o, senzillament, una teoria de K, és Θ un conjunt d'equacions tal que, per tota equació $\varphi \approx \psi \in Eq$, $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$ implica $\varphi \approx \psi \in \Theta$.*

Definició 2.24. *Donat $\Theta \subseteq Eq$, la **teoria (equacional) generada** per Θ és la teoria equacional més petita que inclou Θ, és a dir, el conjunt d'equacions:*

$$Cn_{\mathsf{K}}(\Theta) = \{\varphi \approx \psi \in Eq : \Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi\}.$$

Proposició 2.25. *La funció $Cn_{\mathsf{K}} : \mathcal{P}(Eq) \longrightarrow \mathcal{P}(Eq)$ és operador de clausura.* ▲

De manera anàloga al que hem vist amb els sistemes deductius, podem prendre el conjunt de teories o tancats $Th\mathsf{K} = Th(\mathsf{K}) = \{Cn_{\mathsf{K}}(\Theta) : \Theta \subseteq \mathcal{P}(Eq)\}$, i construir-ne un reticle complet $\mathbf{Th}\mathsf{K} = \langle Th\mathsf{K}, \cap, \vee^{\mathsf{K}}\rangle$, ja que $Th\mathsf{K}$ també serà tancat sota interseccions arbitràries, amb una demostració afí a la de la *Proposició 2.21*, i, per $T, S \in Th\mathsf{K}$, $T \vee^{\mathsf{K}} S := Cn_{\mathsf{k}}(T \cup S) \subseteq Th\mathsf{K}$, així que $Th\mathsf{K}$ també és tancat sota $\vee^{\mathsf{K}}$. Podem apreciar que $\vDash_{\mathsf{K}}$ es veu totalment determinada o caracteritzada tant per Cn_{K} com per $\mathbf{Th}\mathsf{K}$.

Acabem aquesta secció amb uns resultats gairebé directes, que ens introduiran a l'estudi que realitzarem a la pròxima secció.

Lema 2.26. *Sigui $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ un sistema deductiu, llavors, es verifica:*

i) Els elements compactes de $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ són les teories de $\mathcal{S}$ finitament generades.

ii) El conjunt de teories $Th\mathcal{S}$ és tancat sota unions de conjunts dirigits.

iii) El reticle $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ és algebraic. ▲

Lema 2.27. *Sigui $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ un sistema deductiu, i definim $\sigma_{\mathcal{S}}(T) := Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(T))$, per $T \in Th\mathcal{S}$ i σ una substitució. Aleshores, es verifica:*

i) $Th\mathcal{S}$ és tancat sota substitucions inverses, és a dir, $\sigma^{-1}(T) \in Th\mathcal{S}$ per tot $T \in Th\mathcal{S}$.

ii) $\sigma_{\mathcal{S}}(Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)) = Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(\Sigma))$ per tot $\Sigma \subseteq Fm$ i tota substitució σ.

iii) Per tot sistema de teories T_i, $i \in I$, i tota substitució σ, tenim que $\sigma_{\mathcal{S}}(\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i) = \bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} \sigma_{\mathcal{S}}(T_i)$.

Demostració. Donat que, per tota substitució σ i tot $\Sigma \subseteq Fm$, sabem que es verifica $\sigma(Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)) \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(\Sigma))$, llavors tenim que $\sigma[Cn_{\mathcal{S}}(\sigma^{-1}(T))] \subseteq Cn_{\mathcal{S}}[\sigma(\sigma^{-1}(T))] \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(T) = T$, per T una teoria de $\mathcal{S}$. Si apliquem σ^{-1} als dos costats, llavors ja hem provat *i)* i, emprant la mateixa propietat, arribem a què *ii)* també es verifica. Finalment, veiem que $\sigma_{\mathcal{S}}(\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i) = \sigma_{\mathcal{S}}[Cn_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i\in I} T_i)] = Cn_{\mathcal{S}}[\sigma(\bigcup_{i\in I} T_i)] = Cn_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i\in I} \sigma(T_i)) = \bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} \sigma_{\mathcal{S}}(T_i)$, on hem aplicat que, per tota teoria T, $Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(T)) = Cn_{\mathcal{S}}(\sigma_{\mathcal{S}}(T))$. ▲

Fixem-nos que, en general, la substitució d'una teoria no ha de ser necessàriament teoria, en canvi, per tota $\mathcal{S}$-teoria T, $\sigma_{\mathcal{S}}(T)$ també és teoria de $\mathcal{S}$. Podem deduir els equivalents equacionals dels *Lemes 2.26 i 2.27*, que tindran demostracions anàlogues:

Lema 2.28. *Sigui* K *una classe d'àlgebres, llavors, són equivalents:*

i) $\vDash_{\mathsf{K}}$ *és finitària, és a dir, per tot* $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq$*, si* $\Theta \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$*, llavors existeix* $\Theta' \subseteq \Theta$ *finit tal que* $\Theta' \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$*.*

ii) Els elements compactes de $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$ *són les teories de* K *finitament generades.*

iii) El conjunt de teories $Th\mathsf{K}$ *és tancat sota unions de conjunts dirigits.*

I, qualsevol de les tres anteriors, implica:

iv) El reticle $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$ *és algebraic.* ▲

Lema 2.29. *Sigui* K *una classe d'àlgebres, i definim* $\sigma_{\mathsf{K}}(\Theta) \coloneqq Cn_{\mathsf{K}}(\sigma(\Theta))$*, per* $\Theta \in Th\mathsf{K}$ *i* σ *una substitució, on també estem considerant la contracció* $\sigma(\Theta) = \{\sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi) : \varphi \approx \psi \in \Theta\}$*. Aleshores, es verifica:*

i) $Th\mathsf{K}$ *és tancat sota substitucions inverses, és a dir,* $\sigma^{-1}(\Theta) = \{\varphi \approx \psi : \sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi) \in \Theta\} \in Th\mathsf{K}$*, per tot* $\Theta \in Th\mathsf{K}$*.*

ii) $\sigma_{\mathsf{K}}(Cn_{\mathsf{K}}(\Phi)) = Cn_{\mathsf{K}}(\sigma(\Phi))$ *per tot* $\Phi \subseteq Eq$ *i tota substitució* σ*.*

iii) Per tot sistema de teories Θ_i*,* $i \in I$*, i tota substitució* σ*, tenim que* $\sigma_{\mathsf{K}}(\bigvee^{\mathsf{K}}_{i\in I} \Theta_i) = \bigvee^{\mathsf{K}}_{i\in I} \sigma_{\mathsf{K}}(\Theta_i)$*.* ▲

2.2.2 Relació entre els reticles de teories

Teorema 2.30. *(Teorema d'Algebrització) Sigui* $\mathcal{S}$ *un sistema deductiu, i* K *una classe d'àlgebres qualsevol tal que la relació* $\vDash_{\mathsf{K}}$ *és finitària, llavors, se satisfà:*

i) K *és una semàntica algebraica per* $\mathcal{S}$ *si, i només si, existeix un isomorfisme entre* $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$ *i un subsemi-reticle complet i compacte de* $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$ *que commuta per substitucions.*

ii) K *és semàntica algebraica equivalent a* $\mathcal{S}$ *si, i només si, existeix un isomorfisme entre* $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$ *i* $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$ *que commuta per substitucions.*

iii) Els apartats i) i ii) continuen sent vàlids si "substitucions" es canvia per "substitucions exhaustives".

Per tal de demostrar aquest teorema, abans haurem de definir dues funcions: $H_{\mathsf{K}} : Th\mathsf{K} \longrightarrow Th\mathcal{S}$ i $\Omega_{\mathsf{K}} : Th\mathcal{S} \longrightarrow Th\mathsf{K}$, i estudiar-ne les propietats i relacions que presenten respecte als reticles $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\mathbf{Th}\mathsf{K}$. Els lemes i resultats que n'obtindrem seran els que ens permetran demostrar el Teorema d'Algebrització, com farem a la pàgina 33.

Sigui un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ i K una classe d'àlgebres semàntica algebraica de $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$. Suposem sempre que $\vDash_{\mathsf{K}}$ és finitària. Definirem, per qualsevol $\Theta \in Th\mathsf{K}$ i $T \in Th\mathcal{S}$:

$$H_{\mathsf{K}}\Theta = H_{\mathsf{K}}(\Theta) \coloneqq \{\varphi \in Fm : \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) \in \Theta\};$$
$$\Omega_{\mathsf{K}}T = \Omega_{\mathsf{K}}(T) \coloneqq Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in T\}).$$

Evidentment, $\Omega_{\mathsf{K}}T$ serà teoria equacional. Vegem que, paral·lelament, $H_{\mathsf{K}}\Theta$ és $\mathcal{S}$-teoria: suposant $H_{\mathsf{K}}\Theta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, per $\psi \in Fm$, com K és semàntica algebraica de $\mathcal{S}$, tenim que

$\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in H_{\mathsf{K}}\Theta\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\psi) \approx \epsilon(\psi)$. Donat que aquestes premisses pertanyen a Θ, per la definició de H_{K}, i sabem que Θ és una teoria de K, arribem, llavors, a què $\delta(\psi) \approx \epsilon(\psi) \in \Theta$. Això últim ens confirma que $\psi \in H_{\mathsf{K}}\Theta$.

De les mateixes definicions veiem que tant H_{K} com Ω_{K} preserven l'ordre. Observem també que, si $\mathcal{S}$ és algebritzable amb K la seva única quasi-varietat semàntica equivalent, llavors, per la unicitat que ens assegura el *Teorema 2.15*, qualsevol sistema d'equacions definidores generarà les mateixes funcions H_{K} i Ω_{K}.

Lema 2.31. *i) Per tot $\Sigma \subseteq Fm$, $\Omega_{\mathsf{K}}Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\})$.*

ii) Ω_{K} preserva els suprems de $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$ en $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$, és a dir, $\Omega_{\mathsf{K}}(\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i) = \bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} \Omega_{\mathsf{K}}T_i$, per tot sistema de $\mathcal{S}$-teories T_i, $i \in I$.

iii) Ω_{K} preserva unions de conjunts de teories dirigits, és a dir, $\Omega_{\mathsf{K}}(\bigcup_{i\in I} T_i) = \bigcup_{i\in I} \Omega_{\mathsf{K}}T_i$, per tot sistema de $\mathcal{S}$-teories T_i, $i \in I$, dirigits per la inclusió.

Demostració. i) La inclusió $Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\}) \subseteq \Omega_{\mathsf{K}}Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$ és evident, amb el que només resta provar l'altra implicació. Suposem $\varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathsf{K}}Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$, llavors, $\{\delta(\chi) \approx \epsilon(\chi) : \chi \in Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)\} \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Ara, com $Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$ és $\mathcal{S}$-teoria, tenim que $\chi \in Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$ és equivalent al fet que $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \chi$, amb el que podem també afirmar que $\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{K}} \{\delta(\chi) \approx \epsilon(\chi) : \chi \in Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)\}$. Pel Tall veiem que $\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$, és a dir, $\varphi \approx \psi \in Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\})$.

ii) Sigui un sistema de $\mathcal{S}$-teories T_i, $i \in I$. Prenem $\Sigma = \bigcup_{i\in I} T_i$, de manera que $\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i = Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$. Usant i) constatem:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathsf{K}}\left(\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i\right) &= Cn_{\mathsf{K}}\left(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma = \bigcup_{i\in I} T_i\}\right) = Cn_{\mathsf{K}}\left(\bigcup_{i\in I}\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in T_i\}\right) \\ &= Cn_{\mathsf{K}}\left[\bigcup_{i\in I} Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in T_i\})\right] = Cn_{\mathsf{K}}\left(\bigcup_{i\in I}\Omega_{\mathsf{K}}T_i\right) = \bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I}\Omega_{\mathsf{K}}T_i.\end{aligned}$$

iii) Per ii) tenim, per T_i, amb $i \in I$, un sistema de $\mathcal{S}$-teories dirigit, $\Omega_{\mathsf{K}}(\bigcup_{i\in I} T_i) = \Omega_{\mathsf{K}}(\bigvee^{\mathcal{S}}_{i\in I} T_i) = \bigvee^{\mathsf{K}}_{i\in I}(\Omega_{\mathsf{K}}T_i) = \bigcup_{i\in I} \Omega_{\mathsf{K}}T_i$, on podem afirmar l'última igualtat perquè estem suposant que $\vDash_{\mathsf{K}}$ és finitària, i perquè sabem que, com Ω_{K} preserva l'ordre, llavors $\Omega_{\mathsf{K}}T_i$ també és un sistema de teories dirigit. ▲

Lema 2.32. *i) Per tota $\mathcal{S}$-teoria T, $H_{\mathsf{K}}\Omega_{\mathsf{K}}T = T$.*

ii) Per tota K-teoria Θ, $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta \subseteq \Theta$, i, si $\Theta \in \Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$, llavors $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = \Theta$.

Demostració. i) Òbviament, $T \subseteq H_{\mathsf{K}}\Omega_{\mathsf{K}}T$, per les definicions de H_{K} i Ω_{K}. Per veure l'altra implicació, suposem $\psi \in H_{\mathsf{K}}\Omega_{\mathsf{K}}T$, que ens porta a afirmar la relació $\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in T\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\psi) \approx \epsilon(\psi)$. Com K és semàntica algebraica per $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$, sabem que tindrem $T \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, amb el que concloem, donat que T és $\mathcal{S}$-teoria, que $\psi \in T$.

ii) $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in H_{\mathsf{K}}\Theta\}) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) \in \Theta\}) \subseteq Cn_{\mathsf{K}}(\Theta) = \Theta$, per ser Θ una K-teoria. Si $\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}T$ per alguna $T \in Th\mathcal{S}$, és a dir, si $\Theta \in \Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$; llavors, només d'aplicar i), tenim $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Omega_{\mathsf{K}}T = \Omega_{\mathsf{K}}T = \Theta$. ▲

Del primer apartat del *Lema 2.32* podem concloure que Ω_{K} defineix una bijecció entre $Th\mathcal{S}$ i $\Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$, i sabem que $\Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S}) \subseteq Th\mathsf{K}$. Com Ω_{K} preserva l'ordre, veiem que $\Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$ genera un reticle complet sota la relació d'ordre que, podríem dir, rep de $Th\mathsf{K}$.

Anomenarem aquest reticle $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$, ja que és isomorf a $\mathbf{Th}\mathcal{S}$, mitjançant l'isomorfisme Ω_{K}.

Lema 2.33. *Donat un sistema deductiu $\mathcal{S}$, i K una semàntica algebraica per $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$:*

i) $\Omega_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{Th}\mathcal{S})$ és un subsemi-reticle complet i compacte de $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$.

ii) K és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$ si, i només si, $\Omega_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{Th}\mathcal{S}) = \boldsymbol{Th}\mathsf{K}$.

Demostració. Donada la llargària de la demostració, vegis l'*Apèndix E*, el *Lema E.1*. ▲

Com podem veure, aquest últim lema ens caracteritza les semàntiques algebraiques equivalents. Per caracteritzar, però, les semàntiques algebraiques necessitarem aplicar alguna restricció addicional.

Lema 2.34. *Sigui σ una substitució. Per tot $T \in Th\mathcal{S}$, es dona $\Omega_{\mathsf{K}}\sigma_{\mathcal{S}}(T) = \sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathsf{K}}T)$.*

Demostració. Recordem que havíem definit $\sigma_{\mathcal{S}}(T) \coloneqq Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(T))$, per $T \in Th\mathcal{S}$, i $\sigma_{\mathsf{K}}(\Theta) \coloneqq Cn_{\mathsf{K}}(\sigma(\Theta))$, per $\Theta \in Th\mathsf{K}$. Per tant, tenim les igualtats, per tot $\Phi \subseteq Eq$: $Cn_{\mathsf{K}}[\sigma(Cn_{\mathsf{K}}(\Phi))] = \sigma_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathsf{K}}(\Phi)] = Cn_{\mathsf{K}}(\sigma(\Phi))$. Ara, pel primer apartat del *Lema 2.31* tindrem que, per tot $T \in Th\mathcal{S}$, $\Omega_{\mathsf{K}}\sigma_{\mathcal{S}}(T) = \Omega_{\mathsf{K}}Cn_{\mathcal{S}}(\sigma(T)) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in \sigma(T)\})$. Per les igualtats d'abans podem afirmar,

$$Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in \sigma(T)\}) = Cn_{\mathsf{K}}[\sigma(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in T\})] = \\ \sigma_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) : \varphi \in T\})] = \sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathsf{K}}T).$$

Així, arribem a què $\Omega_{\mathsf{K}}\sigma_{\mathcal{S}}(T) = \sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathsf{K}}T)$, com volíem veure. ▲

Amb tots aquests lemes presentats, ara si podem demostrar el Teorema d'Algebrització, el *Teorema 2.30*, que ens caracteritza les semàntiques algebraiques i les semàntiques algebraiques equivalents a través dels reticles de teories.

Demostració del Teorema 2.30. i) La implicació ($\Rightarrow$) es veu directament d'aplicar el primer apartat del *Lema 2.33* juntament amb el *Lema 2.34*. Implicació ($\Leftarrow$): Sigui Ξ un isomorfisme entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i un subsemi-reticle complet i compacte de $\mathbf{Th}\mathsf{K}$, tal que commuta per substitucions. Prenem la $\mathcal{S}$-teoria $T = Cn_{\mathcal{S}}(\{p\})$, on p és una variable fixada, i considerem $\Theta = \Xi(T)$. Θ serà compacte en $\mathbf{Th}\mathsf{K}$, perquè és imatge d'un element compacte de $\mathbf{Th}\mathcal{S}$, i $\Xi(\mathbf{Th}\mathcal{S})$ és compacte en $\mathbf{Th}\mathsf{K}$ per suposició. Pel *Lema 2.28*, sabem que els elements compactes de $\mathbf{Th}\mathsf{K}$ són teories de K finitament generades, així que podem afirmar que Θ és finitament generada. Suposem que el sistema finit d'equacions $\xi_i(p, p_0, \dots, p_k) \approx \eta_i(p, p_0, \dots, p_k)$, amb $i, k \leqslant n$, genera Θ.

Considerem ara una substitució σ tal que $\sigma(p) = p$ i $\sigma(p_j) = p$, per tot $j \leqslant k$. Veiem que $\sigma_{\mathcal{S}}(T) = \sigma_{\mathcal{S}}(Cn_{\mathcal{S}}(\{p\})) = Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(p)\}) = Cn_{\mathcal{S}}(\{p\}) = T$. Llavors,

$$\Theta = \Xi(T) = \Xi(\sigma_{\mathcal{S}}(T)) = \sigma_{\mathsf{K}}(\Xi(T)) = \sigma_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(p, p_0, \dots, p_k) \approx \eta(p, p_0, \dots, p_k)\})].$$

Per la relació que hem vist a la demostració del *Lema 2.34*, i aplicant la substitució σ, tenim que:

$$\sigma_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(p, p_0, \dots, p_k) \approx \eta(p, p_0, \dots, p_k)\})] = \\ Cn_{\mathsf{K}}[\sigma(\{\xi(p, p_0, \dots, p_k) \approx \eta(p, p_0, \dots, p_k)\})] = Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(p, p, \dots, p) \approx \eta(p, p, \dots, p)\}).$$

Aleshores, veiem que el sistema $\xi(p,p,\ldots,p) \approx \eta(p,p,\ldots,p)$ també genera Θ.

Considerem ara una substitució σ' tal que envia p a una fórmula φ. Llavors, aplicant a σ' les relacions que acabem de veure:

$$\Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\{\varphi\})] = \Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma'(p)\})] = \Xi(\sigma'_{\mathcal{S}}[Cn_{\mathcal{S}}(\{p\})]) = \sigma'_{\mathsf{K}}(\Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\{p\})]) = \sigma'_{\mathsf{K}}(\Theta) = \\ \sigma'_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(p,p,\ldots,p) \approx \eta(p,p,\ldots,p)\})] = Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(\varphi,\ldots,\varphi) \approx \eta(\varphi,\ldots,\varphi)\}).$$

Ara, observem que, per tot $\Sigma \subseteq Fm$, tenim:

$$\Xi(Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)) = \Xi\left[\bigvee_{\varphi\in\Sigma}^{\mathcal{S}} Cn_{\mathcal{S}}(\{\varphi\})\right] = \bigvee_{\varphi\in\Sigma}^{\mathsf{K}} \Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\{\varphi\})] = \\ \bigvee_{\varphi\in\Sigma}^{\mathsf{K}} Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(\varphi,\ldots,\varphi) \approx \eta(\varphi,\ldots,\varphi)\}) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(\varphi,\ldots,\varphi) \approx \eta(\varphi,\ldots,\varphi) : \varphi \in \Sigma\}).$$

Llavors, podem fer les següents afirmacions, per $\psi \in Fm$:

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \psi \;&\Leftrightarrow\; Cn_{\mathcal{S}}(\{\psi\}) \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) \\ &\Leftrightarrow\; \Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\{\psi\})] \subseteq \Xi[Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)] \\ &\Leftrightarrow\; Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(\psi,\ldots,\psi) \approx \eta(\psi,\ldots,\psi)\}) \subseteq Cn_{\mathsf{K}}(\{\xi(\varphi,\ldots,\varphi) \approx \eta(\varphi,\ldots,\varphi) : \varphi \in \Sigma\}) \\ &\Leftrightarrow\; \{\xi(\varphi,\ldots,\varphi) \approx \eta(\varphi,\ldots,\varphi) : \varphi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{K}} \xi(\psi,\ldots,\psi) \approx \eta(\psi,\ldots,\psi). \end{aligned}$$

Per tant, com podem veure, K serà semàntica algebraica per $\mathcal{S}$ amb equacions definidores, per $\vartheta \in Fm$, $\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) = \xi(\vartheta,\ldots,\vartheta) \approx \eta(\vartheta,\ldots,\vartheta)$. De fet, també podem apreciar que Ξ coincideix amb Ω_{K}, aplicant les equacions definidores que hem trobat.

ii) Resulta immediat considerant el que acabem de veure a la demostració de *i)*, juntament amb el segon apartat del *Lema* 2.33.

iii) Observem que les substitucions σ i σ' de la prova de *i)* en tot moment es podrien considerar també exhaustives. ▲

A més de l'important resultat que hem obtingut, sense gaire esforç addicional es pot derivar el següent, que expressem en forma de corol·lari:

Corol·lari 2.35. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb K la seva única quasivarietat semàntica equivalent. Aleshores, Ω_{K} és l'únic isomorfisme entre $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$ i $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$ tal que commuta per substitucions. A més, si Δ és sistema de fórmules d'equivalència per K, llavors, per tot $T \in Th\mathcal{S}$, tenim que $\Omega_{\mathsf{K}}T = \{\varphi \approx \psi : \Delta(\varphi,\psi) \in T\}$.* ▲

2.3 Teoremes de caracterització intrínsecs

Tot i que el *Teorema* 2.30 que acabem de veure representa un dels resultats més importants d'aquest treball, també és cert que, per aplicar-lo, necessitem conèixer la classe d'àlgebres involucrada en l'algebrització, i cal trobar un isomorfisme entre aquesta i el sistema deductiu que estudiem. En aquesta secció i la següent estudiarem dos teoremes d'algebrització que ens donaran un seguit de condicions, o propietats, suficients i necessàries perquè un sistema deductiu en concret sigui algebritzable. Els anomenarem, per tant, teoremes de caracterització intrínsecs, ja que no dependran de la semàntica algebraica. Per tal d'aconseguir tot això, en essència buscarem, i trobarem, l'isomorfisme de la condició *ii)* del *Teorema* 2.30.

2.3.1 1a caracterització

Definició 2.36. *Sigui una congruència Θ, definida sobre l'àlgebra $\boldsymbol{A}$, amb domini A. Diem que Θ és* ***compatible*** *amb el conjunt $F \subseteq A$ si, per tot $a, b \in A$, tenim que $a \in F$ i $\langle a, b\rangle \in \Theta$ impliquen $b \in F$.*

Definició 2.37. *Per tota àlgebra $\boldsymbol{A}$ amb domini A, i qualsevol $F \subseteq A$, definirem la* ***relació de Leibniz****, $\Omega_{\boldsymbol{A}}F$, com la congruència més gran d'$\boldsymbol{A}$ compatible amb F. Denominem $\Omega_{\boldsymbol{A}} : \mathcal{P}(A) \longrightarrow A \times A$ l'****operador de Leibniz****.*

Proposició 2.38. *Per tota àlgebra $\boldsymbol{A}$ de domini A, i tot $F \subseteq A$, la relació de Leibniz $\Omega_{\boldsymbol{A}}F$ sempre existeix.*

Demostració. Primerament, podem considerar el reticle complet de totes les relacions d'equivalència, on l'ínfim de θ i θ' dues relacions d'equivalència és la seva intersecció, $\theta \cap \theta'$, i el suprem és $(\theta \circ \theta') \cup (\theta' \circ \theta)$, amb $\circ$ la composició. L'ordre parcial vindria determinat per la inclusió. Llavors, les congruències sobre una àlgebra $\mathbf{A}$ seran el que se sol anomenar un subreticle, és a dir, formaran un reticle complet tal que comparteix ínfim i suprem amb el reticle complet de totes les relacions d'equivalència.

A la vegada, les congruències sobre $\mathbf{A}$ compatibles amb $F \subseteq A$ també formaran un subreticle respecte del de les congruències sobre $\mathbf{A}$, ja que es pot veure que tant la intersecció, com la unió i la composició de congruències compatibles són també compatibles, i d'aquest fet en traiem que el suprem i l'ínfim de dues congruències compatibles són igualment congruències compatibles. Comprovem que aquest últim reticle no és buit, donat que la relació d'identitat, Id_A, sempre és, trivialment, una congruència compatible i, de fet, en serà la mínima. A més, també podem veure que es verifica que, si Θ és congruència compatible i $\Theta' \subseteq \Theta$, llavors la congruència Θ' també serà compatible, ja que si $a \in F$ i $\langle a, b\rangle \in \Theta$, com $\Theta' \subseteq \Theta$, sabem que $\langle a, b\rangle \in \Theta'$, i la compatibilitat de Θ ens afirma que $b \in F$, amb el que Θ' igualment en resultarà compatible.

Finalment, donat que tot reticle complet té un màxim, arribem a què sempre podrem trobar la congruència més gran sobre $\mathbf{A}$ compatible amb F, dit d'altra manera, la relació de Leibniz sempre existeix. ▲

Fixem-nos ara que, si prenem l'àlgebra de fórmules $\mathbf{Fm}$, tenim que el seu operador de Leibniz, $\Omega_{\mathbf{Fm}}$, es podrà entendre com una aplicació que transforma conjunts de fórmules en congruències $\Theta \subseteq Fm \times Fm$, és a dir, essencialment, conjunts d'equacions (entrarem en els detalls quan demostrem el *Teorema 2.40*). Veiem així que l'operador de Leibniz ens obre la porta a la primera caracterització intrínseca, que es basarà a afirmar que, l'isomorfisme entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\mathbf{Th}\mathsf{K}$ del *Teorema 2.30*, realment no és altre que el mateix operador de Leibniz. A la secció anterior, però, al *Lema 2.35*, ja vam comentar que Ω_{K} és l'únic isomorfisme entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\mathbf{Th}\mathsf{K}$ que commuta per substitucions. Si, per qualsevol teoria equacional Θ, definim $\hat{\Theta} := \{\langle \varphi, \psi\rangle : \varphi \approx \psi \in \Theta\}$, veiem que es dona el següent:

Teorema 2.39. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, i K la seva semàntica algebraica equivalent. Sigui Ω_{K} l'únic isomorfisme entre $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$ i $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$. Llavors, per tota $\mathcal{S}$-teoria T, tenim que $(\Omega_{\mathsf{K}}T)\hat{} = \Omega_{\boldsymbol{Fm}}T$.*

Demostració. Resulta evident que, per tota teoria equacional Θ, $\hat{\Theta}$ és congruència, així que, en particular, $(\Omega_{\mathsf{K}}T)\hat{}$ també. Suposem ara que $\langle \varphi, \psi\rangle \in (\Omega_{\mathsf{K}}T)\hat{}$ i que $\varphi \in T$, per T una $\mathcal{S}$-teoria. Llavors, tenim que $\varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathsf{K}}T$, que, per la caracterització de $\Omega_{\mathsf{K}}T$ presentada al *Corol·lari 2.35*, significa que $\Delta(\varphi, \psi) \in T$, per Δ un sistema de fórmules d'equivalència en K. Ara, com T és $\mathcal{S}$-teoria, sabem que $T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ i $T \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \psi)$ i, pel *Lema 2.14*, podem aplicar M.P. per veure que $T \vdash_{\mathcal{S}} \psi$. Així, tenim que $\psi \in T$, amb el que veiem que $(\Omega_{\mathsf{K}} T)\hat{}$ és compatible amb T. Es pot concloure, llavors, que $(\Omega_{\mathsf{K}} T)\hat{} = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$. ▲

Cal mencionar que, usualment, no es distingeix entre la relació de Leibniz $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ i l'única teoria equacional Θ tal que $\hat{\Theta} = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$. Un cop presentada la relació de Leibniz, ja podem enunciar el primer teorema de caracterització intrínsec, la demostració del qual la construirem al llarg d'aquesta secció:

Teorema 2.40. *(1a Caracterització Intrínseca) Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu. $\mathcal{S}$ és algebritzable si, i només si, l'operador de Leibniz satisfà ambdues següents condicions:*

i) $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ és injectiu i preserva l'ordre sobre $\boldsymbol{Th}\mathcal{S}$, és a dir, per qualssevol teories T i S de $\mathcal{S}$, si $T \subseteq S$, llavors $\Omega_{\boldsymbol{Fm}} T \subseteq \Omega_{\boldsymbol{Fm}} S$;

ii) $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ preserva unions de subconjunts dirigits de $Th\mathcal{S}$.

La primera implicació ($\Rightarrow$) del teorema és relativament fàcil, ja que, suposant $\mathcal{S}$ algebritzable:

i) El primer apartat és cert per tot $\mathcal{S}$ sistema deductiu, perquè del *Teorema 2.39* se segueix que l'operador de Leibniz, restringit a les teories de $\mathcal{S}$, és injectiu i preserva l'ordre, igual que Ω_{K}.

ii) El segon apartat també esdevé pràcticament directe, considerant el que acabem de veure: que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ coincideix amb Ω_{K} sobre $Th\mathcal{S}$, amb K la semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$. Combinant-ho amb l'apartat *iii)* del *Lema 2.31*, que ens diu que Ω_{K} preserva unions de subconjunts dirigits, tenim que, com volíem demostrar, $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ preserva unions de subconjunts dirigits de $Th\mathcal{S}$.

Per provar l'altra implicació ($\Leftarrow$), suposem certs *i)* i *ii)*, i hem de veure que $\mathcal{S}$ és algebritzable, és a dir, ens cal construir K, la semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$. Per aconseguir-ho, necessitarem aplicar el *Teorema 2.30*, però, per tal de verificar les seves hipòtesis, abans n'haurem d'emprar alguns lemes. Per donar continuïtat al nostre argument, les demostracions menys curtes han sigut redirigides a l'*Apèndix E*:

Lema 2.41. *Sigui σ una substitució exhaustiva. Llavors, per tot $\vartheta \in Fm$ i tota variable p de ϑ, existeix $\vartheta' \in Fm$ i una variable q tal que $\sigma(\vartheta'[\varphi/q]) = \vartheta[\sigma(\varphi)/p]$, per tot $\varphi \in Fm$.*

Demostració. Donat que σ és exhaustiva, per cada variable r de ϑ existeix una altra variable r' tal que $\sigma(r') = r$. Prenem ϑ' com el resultat de reemplaçar a ϑ totes les variables r diferents de p per $\sigma^{-1}(r) = r'$, i p la reemplacem per una variable q, diferent de totes les r'. Veiem que, amb aquesta definició, es verifica $\sigma(\vartheta'[\varphi/q]) = \vartheta[\sigma(\varphi)/p]$ per tot $\varphi \in Fm$, ja que, en aplicar σ a ϑ', totes les variables, excepte la q, passen a ser $\sigma(r') = r$. ▲

Lema 2.42. *Assumint que $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ preserva l'ordre, es verifica:*

i) $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(\bigcap_{i \in I} T_i) = \bigcap_{i \in I} \Omega_{\boldsymbol{Fm}} T_i$, per tot sistema T_i, $i \in I$, de teories de $\mathcal{S}$, un sistema deductiu. Per tant, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S}) = \{\Omega_{\boldsymbol{Fm}} T : T \in Th\mathcal{S}\}$ és tancat sota interseccions arbitràries.

ii) $\sigma^{-1}(\Omega_{\boldsymbol{Fm}} T) = \Omega_{\boldsymbol{Fm}} \sigma^{-1}(T)$, per tot $T \in Th\mathcal{S}$ i tota substitució exhaustiva σ. Per tant, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota les inverses de substitucions exhaustives.

Demostració. Vegis el *Lema E.2*. ▲

Així, com, pel primer apartat del *Lema 2.42*, sabem que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota interseccions, tenim que el conjunt forma un reticle complet, que denotarem per $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$. I, com estem suposant que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ és injectiu, pel primer apartat del *Teorema 2.40*, veiem que tenim un isomorfisme entre els reticles $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$. Per tal de poder aplicar el *Teorema 2.30*, però, encara ens cal trobar alguna igualtat entre $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$ i $\mathbf{Th}\mathsf{K}$, per K alguna classe d'àlgebres. Aquesta equivalència només serà possible considerant la definició que hem aplicat al *Teorema 2.39*, on hem determinat que, per tota teoria equacional Θ, $\hat{\Theta} = \{\langle\varphi, \psi\rangle : \varphi \approx \psi \in \Theta\}$. Com ja havíem esmentat, això permet confondre o relacionar $\Omega_{\mathbf{Fm}}T$, on T és una teoria de $\mathcal{S}$, amb l'única teoria equacional Θ tal que $\hat{\Theta} = \Omega_{\mathbf{Fm}}T$.

Els dos lemes que presentem a continuació, referents als *kernels* o nuclis de relacions, bé es podrien prendre com a "sub-lemes", ja que només els emprarem per provar el *Lema 2.46*, que és el que pròpiament ens donarà la classe d'àlgebres que necessitem. La següent proposició, prèvia als lemes, resulta elemental, considerant la definició d'homomorfisme i de congruència:

Proposició 2.43. *Per tot homomorfisme h de $\boldsymbol{Fm}$ en una àlgebra $\boldsymbol{A}$, el nucli d'h és el conjunt $\{\varphi \approx \psi : h(\varphi) = h(\psi)\}$, i és una congruència.* ▲

Lema 2.44. *Per un homomorfisme h de $\boldsymbol{Fm}$ en algun membre d'una classe d'àlgebres K, el nucli de la relació d'h és teoria equacional de K. A més, per tot $\Theta \subseteq Eq$, $Cn_{\mathsf{K}}\Theta$, la teoria equacional generada per Θ, es pot veure com una intersecció de nuclis de relacions de tots els homomorfismes h de $\boldsymbol{Fm}$ en àlgebres de K tals que $h(\varphi) = h(\psi)$, per tot $\varphi \approx \psi \in \Theta$.*

Demostració. Per tot $\mathbf{A} \in \mathsf{K}$ i tot homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{A}$, sigui $\Theta_h = \{\varphi \approx \psi : h(\varphi) = h(\psi)\}$ el nucli de la relació de cada h. Volem veure que Θ_h és teoria equacional de K. Suposem $\xi \approx \eta \notin \Theta_h$, llavors $h(\xi) \neq h(\eta)$. Com, per definició, $h(\varphi) = h(\psi)$ per tot $\varphi \approx \psi \in \Theta_h$, tenim que $\Theta_h \not\vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta$. Per tant, estem veient que $\xi \approx \eta \notin \Theta_h$ implica $\Theta_h \not\vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta$. Però, aleshores, pel contrarecíproc sabrem que $\Theta_h \vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta$ implica $\xi \approx \eta \in \Theta_h$, és a dir, Θ_h és teoria de K. La segona part de l'enunciat és una conseqüència pràcticament directa d'aquest primer resultat. ▲

Lema 2.45. *Donada la classe d'àlgebres $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$, i un homomorfisme $h : \boldsymbol{Fm} \longrightarrow \boldsymbol{Fm}/\Theta$, amb $\boldsymbol{Fm}/\Theta$ un element de K, i amb la propietat que cada element de $\boldsymbol{Fm}/\Theta$ és imatge d'un nombre infinit de variables; llavors, el nucli de la relació d'h és de la forma $\sigma^{-1}(\Theta)$, per alguna substitució exhaustiva σ.*

Demostració. Sigui h un homomorfisme que satisfà les hipòtesis de l'enunciat, i σ una substitució tal que $\sigma(p_i) \in h(p_i)$ per tot $i \in I$, tal que cada p_i és imatge sota σ d'alguna p_j. Sabem que σ existeix per l'assumpció que cada $\mathbf{Fm}/\Theta$ és imatge d'un infinit nombre de variables. Tenim també que σ és exhaustiva i $h(p_i) = \sigma(p_i)/\Theta$, per tot $i \in I$. Sigui π la projecció de $\mathbf{Fm}$ sobre $\mathbf{Fm}/\Theta$. Llavors, $(\pi \circ \sigma)(p_i) = \pi(\sigma(p_i)) = \sigma(p_i)/\Theta = h(p_i)$ per tot $i \in I$. Arribem, per tant, a què $\pi \circ \sigma = h$. Sigui ara Φ el nucli de la relació d'h, tenim que $\varphi \approx \psi \in \Phi$ si, i només si, $h(\varphi) = h(\psi)$, és a dir, $(\pi \circ \sigma)(\varphi) = \pi(\sigma(\varphi)) = \pi(\sigma(\psi))$. Però, això succeeix si, i només si, $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$, per tant, perquè es doni cal que $\sigma(\varphi) \approx \sigma(\psi) \in \Theta$ o, equivalentment, $\varphi \approx \psi \in \sigma^{-1}(\Theta)$. Conglomerant-ho tot tenim que $\varphi \approx \psi \in \Phi$ si, i només si, $\varphi \approx \psi \in \sigma^{-1}(\Theta)$, per tant, concloem que $\Phi = \sigma^{-1}(\Theta)$. ▲

Lema 2.46. *Si $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ preserva unions de conjunts dirigits, llavors, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S}) = Th\mathsf{K}$, per $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$.*

Demostració. Vegis el *Lema E.3*. ▲

Per tant, ajuntant els lemes estudiats fins ara, veiem que, si $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ és injectiu, preserva l'ordre i preserva unions de conjunts dirigits, llavors existeix un isomorfisme entre els reticles $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\mathbf{Th}\mathsf{K}$, amb $\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$. Per acabar de tancar tot, ens queda veure un últim lema:

Lema 2.47. *Suposem que $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ és injectiu i preserva unions de conjunts dirigits. Llavors, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ commuta amb substitucions exhaustives.*

Demostració. Vegis el *Lema E.4*. ▲

Finalment, veiem que, sota les dues hipòtesis del *Teorema 2.40*, i gràcies als lemes que hem anat provant, podem aplicar el *Teorema 2.30*, els apartats *ii)* i *iii)*, arribant a què $\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$ és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$. Per tant, $\mathcal{S}$ és algebritzable i, amb aquest resultat, concloem la demostració del *Teorema 2.40*.

2.3.2 2a caracterització

A partir del *Teorema 2.40*, que acabem d'obtenir, podem determinar una segona caracterització intrínseca, que serà més útil i pràctica a l'hora de treballar amb sistemes deductius:

Teorema 2.48. *(2a Caracterització Intrínseca) Un sistema deductiu $\mathcal{S}$ és algebritzable si, i només si, existeix un sistema de fórmules Δ en dues variables, i un sistema d'equacions $\delta \approx \epsilon$ en una variable, tals que verifiquen les següents condicions, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$:*

i) $\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \varphi)$;

ii) $\Delta(\varphi, \psi) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\psi, \varphi)$;

iii) $\Delta(\varphi, \psi) \cup \Delta(\psi, \vartheta) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\varphi, \vartheta)$;

iv) Per tota connectiva primitiva $\lambda \in L$, $ar(\lambda) = n$, i tot $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in Fm$, $\bigcup_{i=1}^{n} \Delta(\varphi_i, \psi_i) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\lambda(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \lambda(\psi_1, \dots, \psi_n))$;

v) $\{\vartheta\} \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))$.

Si aquestes condicions es donen, llavors Δ és sistema de fórmules d'equivalència per $\mathcal{S}$, i $\delta \approx \epsilon$ són equacions definidores per $\mathcal{S}$.

Demostració. Implicació ($\Rightarrow$): suposem que $\mathcal{S}$ és algebritzable, amb Δ el sistema de fórmules d'equivalència i $\delta \approx \epsilon$ les equacions definidores. Demostrar que les condicions *i)-iv)* es verifiquen és totalment immediat, aplicant el *Lema 2.14*; i el cinquè apartat també resulta evident, donat que és exactament la propietat *iv)* de la *Definició 2.9* de ser algebritzable.

Implicació ($\Leftarrow$): suposem que es verifiquen *i)-v)*, i cal veure que, llavors, $\mathcal{S}$ és algebritzable. Per fer-ho, només necessitarem comprovar que es donen les condicions del *Teorema 2.40*, la primera caracterització intrínseca. Si definim $\Omega_\Delta T \coloneqq \{\langle \varphi, \psi \rangle : \Delta(\varphi, \psi) \in T\}$, veiem que les quatre primeres hipòtesis ens asseguren que Ω_Δ és congruència, i, tot seguit, provaren que Ω_Δ és injectiva, que preserva unions de conjunts dirigits i, finalment, que coincideix amb l'operador de Leibniz, $\Omega_\Delta T = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$, per tot $T \in Th\mathcal{S}$. Llavors, podrem aplicar el *Teorema 2.40* i, així, demostrar que $\mathcal{S}$ és algebritzable. Tanmateix, de moment provem que Ω_Δ és injectiva:

Suposem $\Omega_\Delta T = \Omega_\Delta S$, per dues teories S i T de $\mathcal{S}$, i sigui $\varphi \in T$. Per *v)* tenim que $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \Delta(\delta(\varphi), \epsilon(\varphi))$; com T és teoria, i aplicant la Monotonia de $\vdash_{\mathcal{S}}$, sabem que

$\Delta(\delta(\varphi), \epsilon(\varphi)) \in T$. Per tant, $\langle\delta(\varphi), \epsilon(\varphi)\rangle \in \Omega_\Delta T = \Omega_\Delta S$, i això en ens porta al fet que $\Delta(\delta(\varphi), \epsilon(\varphi)) \in S$. Aplicant *v)* en l'altre sentit, i sabent que S també és $\mathcal{S}$-teoria, tenim que $\varphi \in S$. Així que, veiem que $T \subseteq S$ i, per simetria, podem obtenir també $S \subseteq T$, trobant d'aquesta manera que Ω_Δ és injectiva.

Demostrem ara que Ω_Δ preserva unions de conjunts dirigits: suposem $T_i, i \in I$, un sistema de teories de $\mathcal{S}$ dirigit per la inclusió. Es verifica:

$$\langle\varphi, \psi\rangle \in \Omega_\Delta\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right) \Leftrightarrow \Delta(\varphi,\psi) \in \bigcup_{i\in I} T_i \Leftrightarrow \Delta(\varphi,\psi) \in T_i \text{ per alguna } i \in I \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_\Delta T_i \text{ per alguna } i \in I \Leftrightarrow \langle\varphi,\psi\rangle \in \bigcup_{i\in I}\Omega_\Delta T_i.$$

Finalment, si arribem a què, en realitat, $\Omega_\Delta T = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$ per tot $T \in Th\mathcal{S}$, llavors ja podrem aplicar el *Teorema 2.40*. Veiem fàcilment que $\Omega_\Delta T$ és compatible amb T, ja que, si $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_\Delta T$, llavors $\Delta(\varphi,\psi) \in T$; si suposem $\varphi \in T$, aleshores, pel M.P. del *Lema 2.14*, sabem que $\{\varphi\} \cup \Delta(\varphi,\psi) \vdash_\mathcal{S} \psi$. Per Monotonia de $\vdash_\mathcal{S}$ i recordant que T és $\mathcal{S}$-teoria, tenim que $\psi \in T$. Per tant, com $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ és la congruència més gran compatible amb T, arribem a la primera inclusió $\Omega_\Delta T \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}} T$.

Quant a l'altra inclusió, per la Identitat del *Lema 2.14*, sabem que $\vdash_\mathcal{S} \Delta(\varphi,\varphi)$, per tot $\varphi \in Fm$, així que, $\Delta(\varphi,\varphi) \in T$. Donat que $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ és compatible amb T, tindrem que, per tot $\psi \in Fm$, si es verifica $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$, llavors $\Delta(\varphi,\psi) \in T$. Per tant, també tenim que $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_\Delta T$. Arribem així a què $\Omega_{\mathbf{Fm}} T \subseteq \Omega_\Delta T$.

Com volíem veure, tenim que $\Omega_\Delta T = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$, per tota T $\mathcal{S}$-teoria. Finalment, com hem obtingut que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ és injectiva, preserva l'ordre sobre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i preserva unions de subconjunts dirigits de $Th\mathcal{S}$, si apliquem el *Teorema 2.40*, queda demostrat que $\mathcal{S}$ és algebritzable. ▲

D'aquest segon teorema de caracterització en podem extreure alguns resultats interessants, que seran de gran utilitat:

Corol·lari 2.49. *Una condició suficient perquè el sistema deductiu $\mathcal{S}$ sigui algebritzable és l'existència d'un sistema de fórmules Δ, en dues variables, tal que satisfà les condicions i)-iv) del Teorema 2.48, juntament amb, per $\varphi, \psi \in Fm$:*

$$v')\ \{\varphi\} \cup \Delta(\varphi,\psi) \vdash_\mathcal{S} \psi; \qquad (M.P.)$$
$$vi')\ \{\varphi,\psi\} \vdash_\mathcal{S} \Delta(\varphi,\psi). \qquad (regla\ G)$$

Si aquestes propietats es donen, llavors Δ és el sistema de fórmules d'equivalència per $\mathcal{S}$, i $\varphi \approx \Delta(\varphi,\varphi)$ són les equacions definidores.

Demostració. Només ens cal veure que aquestes dues noves condicions impliquen la cinquena del *Teorema 2.48*. Sigui, per $\varphi \in Fm$, $\epsilon(\varphi) = \varphi$ i $\epsilon(\varphi) = \Delta(\varphi,\varphi)$. Llavors, per tot $\vartheta \in Fm$, tenim $\Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta)) = \Delta(\vartheta, \Delta(\vartheta,\vartheta))$. Per la *regla G*, $\{\vartheta\} \cup \Delta(\vartheta,\vartheta) \vdash_\mathcal{S} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))$. I, com sabem que $\Delta(\vartheta,\vartheta)$ sempre es verifica, tenim $\{\vartheta\} \vdash_\mathcal{S} \Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta))$. D'altra banda, per *M.P.* tenim que $\epsilon(\varphi) \cup \Delta(\epsilon(\vartheta), \delta(\vartheta)) \vdash_\mathcal{S} \delta(\vartheta)$, on $\delta(\vartheta) = \vartheta$. Ja hem comentat que $\epsilon(\varphi) = \Delta(\varphi,\varphi)$ és teorema de $\mathcal{S}$, i la segona suposició que hem fet, $\Delta(\varphi,\psi) \vdash_\mathcal{S} \Delta(\psi,\varphi)$, ens permet afirmar que $\Delta(\delta(\vartheta), \epsilon(\vartheta)) \vdash_\mathcal{S} \vartheta$. Per tant, ajuntant els dos resultats que hem obtingut, veiem que es verifica la condició *v)* del *Teorema 2.48*, amb el que podem assegurar que $\mathcal{S}$ és algebritzable, amb les fórmules d'equivalència i les equacions definidores de l'enunciat. ▲

Amb aquest, en certa manera, teorema de suficiència, veiem que podem canviar la cinquena condició del *Teorema 2.48* pel *M.P.* i la *regla G*, amb el que ens permet inferir si el sistema deductiu en qüestió és algebritzable i, en aquest cas, ens proporciona un sistema d'equacions definidores; i tot això a partir només del conjunt de fórmules d'equivalència.

Teorema 2.50. *Siguin $\mathcal{S}$, Δ i $\delta \approx \epsilon$ tals que verifiquen les condicions del Teorema 2.48. Sigui $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{Fm}/\Omega_\Delta T : T \in Th\mathcal{S}\}$. Llavors, $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$, la quasi-varietat generada per K, és l'única quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}$, Δ és sistema de fórmules d'equivalència per $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$, i $\delta \approx \epsilon$ són equacions definidores.*

Demostració. A la demostració del primer teorema de caracterització, el *Teorema 2.40*, vam arribar a què, per tot sistema deductiu $\mathcal{S}$, si $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ satisfà les condicions del teorema, llavors tindrem que la classe d'àlgebres $\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$ és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$. El fet de suposar que $\mathcal{S}$, Δ i $\delta \approx \epsilon$ verifiquen les condicions del *Teorema 2.48* ens diu, en particular, que $\mathcal{S}$ és algebritzable, amb Δ un sistema de fórmules d'equivalència per $\mathcal{S}$. Per tant, apreciem que, ara, per tot $T \in Th\mathcal{S}$, $\Omega_\Delta T = \{\langle\varphi,\psi\rangle : \Delta(\varphi,\psi) \in T\}$ és equivalent a $(\Omega_{\mathsf{K}} T)\hat{} = \{\langle\varphi,\psi\rangle : \varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathsf{K}} T\}$, considerant la caracterització $\Omega_{\mathsf{K}} T = \{\varphi \approx \psi : \Delta(\varphi,\psi) \in T\}$ del *Corol·lari 2.35*. Aleshores, aplicant el *Teorema 2.39*, veiem que $\Omega_\Delta T = (\Omega_{\mathsf{K}} T)\hat{} = \Omega_{\mathbf{Fm}} T$. Això ens porta directament a què $\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})\} = \{\mathbf{Fm}/\Omega_{\mathbf{Fm}} T : T \in Th\mathcal{S}\} = \{\mathbf{Fm}/\Omega_\Delta T : T \in Th\mathcal{S}\}$. Finalment, recordem que, com K és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, llavors $\mathbb{Q}(K)$ també, i en serà l'única quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}$. ▲

2.4 Algebrització de lògiques concretes

Exemple 2.51. *(Lògica proposicional clàssica)*

Sigui la lògica proposicional clàssica, $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l}\rangle$, definida a l'*Exemple 1.14*. Per demostrar que $\mathcal{C}l$ és algebritzable, podem aplicar el *Corol·lari 2.49*, amb el que només ens cal definir un conjunt de fórmules Δ, en dues variables, que verifiqui les sis condicions (les quatre primeres del *Teorema 2.48*, M.P. i la regla G), i així ja en sabrem que és sistema de fórmules d'equivalència de $\mathcal{C}l$ i, en aquest cas, es podrà prendre el sistema d'equacions definidores com $\varphi \approx \Delta(\varphi,\varphi)$, per $\varphi \in Fm$.

El sistema de fórmules que ens resultarà més adient és, per $\varphi,\psi \in Fm$, $\Delta(\varphi,\psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$, ja que ens confirma les tres primeres condicions pràcticament de manera immediata.

i) $\vdash_{\mathcal{C}l} \Delta(\varphi,\varphi) \;\Leftrightarrow\; \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi$, i, pel Teorema de Deducció, el *Teorema B.1*, tenim que això es dona si, i només si, $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$, que sabem que es verifica, per la Identitat de $\vdash_{\mathcal{C}l}$.

ii) $\Delta(\varphi,\psi) \vdash_{\mathcal{C}l} \Delta(\psi,\varphi)$ es tradueix al fet que es donin les dues relacions $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi$ i $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$, que evidentment són certes.

iii) Volem veure que es verifiquen $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \vartheta$ i $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \vartheta \to \varphi$. Pel Teorema de Deducció, i aplicant *Modus Ponens* repetides vegades a cada expressió, n'obtenim dues que resulten trivialment certes:

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi, \varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \vartheta \;\Leftrightarrow \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi, \psi, \vartheta, \varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \vartheta,$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi, \vartheta\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \;\Leftrightarrow \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \psi \to \vartheta, \vartheta \to \psi, \psi, \varphi, \vartheta\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi.$$

iv) Amb la definició que hem adoptat, les úniques connectives primitives del llenguatge $\mathbf{L}$ són la negació, $\neg$, i el condicional, $\to$:

Negació: Per $\varphi_1, \psi_1 \in Fm$, volem comprovar que es donen $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\varphi_1 \to \neg\psi_1$ i $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\psi_1 \to \neg\varphi_1$. Evidentment, només ens caldrà provar una de les dues, ja que, intercanviant el paper de les φ_1 i les ψ_1, esdevenen la mateixa expressió. Comprovem, per exemple, la primera:

Si apliquem el T.D., tindrem que la relació a demostrar és equivalent a $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\psi_1$. Ara, pel Teorema de Reducció a l'Absurd,

$$\begin{aligned}&\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\psi_1 \iff \\ &\qquad\qquad \{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1, \neg\neg\psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l}\text{-inconsistent} \iff \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l}\text{-inconsistent.}\end{aligned}$$

Com d'aplicar M.P. sobre $\psi_1 \to \varphi_1$ i ψ_1 n'inferim φ_1, tenim, a la vegada, que $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\varphi_1$ i $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi_1$, provant així el que volíem.

Condicional: Volem veure: $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \varphi_2 \to \psi_2, \psi_2 \to \varphi_2\} \vdash_{\mathcal{C}l} (\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\psi_1 \to \psi_2)$ i $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \varphi_2 \to \psi_2, \psi_2 \to \varphi_2\} \vdash_{\mathcal{C}l} (\psi_1 \to \psi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_2)$. Podem, un altre cop, centrar-nos només en la primera relació, i la segona es demostrarà anàlogament; i també podem aplicar el T.D. i el R.A., amb el que veiem que tot es redueix a demostrar que $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \varphi_2 \to \psi_2, \psi_2 \to \varphi_2, \varphi_1 \to \varphi_2, \neg(\psi_1 \to \psi_2)\}$ és $\vdash_{\mathcal{C}l}$-inconsistent. Considerant que $\neg(\psi_1 \to \psi_2)$ és equivalent a $\psi_1 \wedge \neg\psi_2$, i aplicant la propietat de $\wedge$ a l'Esquerra i, tres cops seguits, M.P., arribem a què el nostre conjunt de fórmules és equivalent a $\{\varphi_1 \to \psi_1, \psi_1 \to \varphi_1, \varphi_2 \to \psi_2, \psi_2 \to \varphi_2, \varphi_1 \to \varphi_2, \psi_1, \neg\psi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_2\}$, que és $\vdash_{\mathcal{C}l}$-inconsistent perquè conté tant ψ_2 com $\neg\psi_2$.

v') Per tot $\varphi, \psi \in Fm$, ens cal provar $\{\varphi, \psi \to \varphi, \varphi \to \psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi$, que clarament es verifica, aplicant M.P. sobre φ i $\varphi \to \psi$.

vi') Volem veure que $\{\varphi, \psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$ i $\{\varphi, \psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi$, que, aplicant el T.D., esdevé trivial.

En conclusió, veiem que la lògica proposicional clàssica és algebritzable, amb fórmules d'equivalència, per tot $\varphi, \psi \in Fm$, $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$ i equacions definidores, aplicant el *Corol·lari 2.49*, $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \varphi \approx \varphi \to \varphi$.

Un cop sabem que $\mathcal{C}l$ és algebritzable, aplicant el *Teorema 2.50*, podem afirmar que la quasi-varietat generada per K, $\mathbb{Q}(\mathsf{K})$, és l'única quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{C}l$, on K són les anomenades àlgebres de Lindenbaum-Tarski:

$\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Omega_\Delta T : T \in Th(\mathcal{C}l)\} = \{\mathbf{Fm}/\{\langle\varphi, \psi\rangle : \Delta(\varphi, \psi) \in T\} : T \in Th(\mathcal{C}l)\} = \{\mathbf{Fm}/\{\langle\varphi, \psi\rangle : T \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi \text{ i } T \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi\} : T \in Th(\mathcal{C}l)\}$.

Resulta més que evident la relació d'aquesta classe d'àlgebres amb l'àlgebra estudiada al procés de Lindenbaum-Tarski, a la demostració del *Teorema D.1*, de l'*Apèndix D*. Per tant, important el que ja vam obtenir, veiem que, per cada teoria T de $\mathcal{C}l$, l'àlgebra quocient $\mathbf{Fm}/\Omega_\Delta T$ coincideix amb una àlgebra de Boole. Així, tenim que, en aquest cas, $\mathbb{Q}(\mathsf{K}) = \mathsf{BA}$, la classe d'àlgebres de Boole (vegis la demostració de la *Proposició 3.4*).

En aquest punt, cal esmentar la gran importància històrica del procés de Lindenbaum-Tarski, donat que, pràcticament, introduí la idea de tractar algebraicament les lògiques, o, més concretament, el conjunt de fórmules com una àlgebra. Realment, aquesta ha sigut la base o la inspiració dels conceptes que hem pogut estudiar al llarg del capítol, donat que, essencialment, el que hem fet és generalitzar el procés de Lindenbaum-Tarski per tal de poder-lo aplicar a més lògiques, i no només a la proposicional clàssica. Amb aquesta perspectiva, es pot apreciar que, per exemple, la relació i l'operador de Leibniz resulten una generalització de la relació $\Omega\Gamma'$ definida al segon pas del procés; o que la mateixa definició d'ésser algebritzable es pot entendre com les condicions per arribar a establir un teorema de completesa algebraica, amb les equacions definidores i les fórmules d'equivalència una generalització de la transformació que vàrem fer de la fórmula ϑ a l'equació $\vartheta \approx \top$, a la demostració del *Teorema 1.58*.

També amb la idea de generalitzar el procés de Lindenbaum-Tarski, Helena Rasiowa estudià una família de lògiques considerablement extensa, al rellevant treball [Ras74], els resultats del qual ens permetrà afirmar, de manera senzilla, l'algebritzabilitat, i determinar les equacions definidores i les fórmules d'equivalència, de la majoria dels sistemes deductius que estudiarem.

Definició 2.52. *Direm que un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ és **implicatiu** si el llenguatge $\mathbf{L}$ només conté connectives d'arietat 0, 1 o 2 i una de les connectives d'arietat 2, que denotarem per $\to$, verifica, per tot $\varphi, \psi, \vartheta, \phi \in Fm$:*

$$\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \to \varphi; \tag{2.3}$$

$$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi; \tag{2.4}$$

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \vartheta\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \to \vartheta; \tag{2.5}$$

$$\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi \to \varphi; \tag{2.6}$$

$$\textit{Per tot } \lambda \in L \textit{ d'arietat 1, } \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \lambda(\varphi) \to \lambda(\psi); \tag{2.7}$$

$$\textit{Per tot } \lambda \in L \textit{ d'arietat 2, } \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi, \vartheta \to \phi, \phi \to \vartheta\} \vdash_{\mathcal{S}} \lambda(\varphi, \vartheta) \to \lambda(\psi, \phi). \tag{2.8}$$

Teorema 2.53. *Sigui $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductiu implicatiu. Llavors, $\mathcal{S}$ és algebritzable, amb fórmules d'equivalència, per tot $\varphi, \psi \in Fm$, $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$, i equacions definidores $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \varphi \approx \Delta(\varphi, \varphi)$.*

Demostració. Amb $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$, fàcilment es pot veure que les propietats (2.3), (2.5), (2.7) i (2.8) ens proporcionen les condicions *i)-iv)* del *Teorema 2.48*. A més, apreciem que (2.4) i (2.6) permeten que es verifiquin M.P. i la regla G del *Corol·lari 2.49*. Per tant, aplicant aquest últim corol·lari, arribem a què $\mathcal{S}$ és algebritzable amb les fórmules d'equivalència i les equacions definidores de l'enunciat. ▲

Observem que la lògica proposicional clàssica és implicativa, de fet, podem veure que a l'exemple anterior hem emprat les mateixes fórmules d'equivalència i equacions definidores que ens hauria proporcionat aquest últim teorema. En els següents exemples discutirem l'algebrització de la lògica intuicionista, la infinit-valorada de Łukasiewicz i les lògiques n-valorades i la infinit-valorada de Gödel, que seran també tots sistemes deductius implicatius.

Exemple 2.54. *(Lògica proposicional intuicionista)*

Prenem el sistema deductiu $\mathcal{IPC} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{IPC}} \rangle$ (vegis l'*Apèndix A.1* per la definició del llenguatge i del càlcul $\mathcal{IPC}$). Fàcilment, es pot comprovar que $\mathcal{IPC}$ és un sistema deductiu implicatiu, així que podem concloure'n que és algebritzable, gràcies al *Teorema 2.53*, amb el sistema d'equacions definidores $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi) = \varphi \approx \varphi \to \varphi$, o $\varphi \approx \top$ (definint $\top := p \to p$, per p una variable); i de fórmules d'equivalència $\Delta(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$. Alternativament, es pot comprovar la seva algebrització mitjançant el *Teorema 2.48*, amb una metodologia molt semblant a la realitzada amb la lògica proposicional clàssica.

La quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{IPC}$ serà la classe d'*àlgebres de Heyting*[12], HA, que tenen una estreta relació amb les àlgebres de Boole.

Definició 2.55. *Una **àlgebra de Heyting** és un reticle $\boldsymbol{H} = \langle H, \leqslant \rangle$ acotat tal que, per tot $a, b \in H$, existeix un element $x \in H$ màxim tal que $a \wedge x \leqslant b$. Aquest element es denomina el **pseudo-complement relatiu** d'a respecte de b, i es representa com $a \to b$. Es defineix el **pseudo-complement** d'a com $\neg a \coloneqq a \to \bot$.*

Podem veure, particularment, que l'àlgebra tri-valorada de Gödel, $\mathbf{G}_3$, que vam definir inicialment a l'*Exemple 1.18*, és àlgebra de Heyting; de fet, al següent exemple veurem que la resta d'àlgebres n-valorades i la infinit-valorada de Gödel igualment són àlgebres de Heyting. Observem també que, en una àlgebra de Heyting, per tot element a tenim que $a \wedge \neg a = \bot$, però, a diferència de les àlgebres de Boole, $a \vee \neg a = \top$ no és necessàriament cert. D'aquí, i prenent $a \to b \coloneqq \neg a \vee b$, per a i b elements d'una àlgebra de Boole; el següent resultat és immediat:

Proposició 2.56. *Tota àlgebra de Boole és àlgebra de Heyting. Tota àlgebra de Heyting $\boldsymbol{H} = \langle H, \leqslant \rangle$ que verifica $a \vee \neg a = \top$, per tot $a \in H$, és àlgebra de Boole.*▲

Exemple 2.57. *(Lògiques de Gödel)*

Els sistemes deductius $\mathcal{G}_{[0,1]} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{G}_{[0,1]}} \rangle$ i $\mathcal{G}_n = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{G}_n} \rangle$ (vegis *Apèndix A.2*), per $n \in \mathbb{N}$, són algebritzables. Donat que són sistemes deductius implicatius, podem obtenir els sistemes de fórmules d'equivalència i d'equacions definidores d'aplicar el *Teorema 2.53*.

A l'exemple anterior, ja havíem avançat que les àlgebres de Gödel són àlgebres de Heyting. La següent definició (o redefinició) de les àlgebres de Gödel ens evidenciarà encara més aquest fet:

Definició 2.58. *Una àlgebra de Gödel és una àlgebra de Heyting tal que, per tot a i b del domini, es dona la propietat o axioma: $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.*

D'aquesta manera resulta també més senzill veure, per exemple, que la classe de totes les àlgebres de Gödel, que anomenarem GA, és una varietat i, per tant, una quasi-varietat. De fet, es pot provar que la classe GA és la quasi-varietat semàntica equivalent al sistema deductiu $\mathcal{G}_{[0,1]}$.

D'altra banda, per cada valor de n, la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{G}_n$ és la quasi-varietat generada per l'àlgebra de Gödel n-valorada $\mathbf{G}_n$, és a dir, $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_n)$. També es dona $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_n) = \mathbb{V}(\mathbf{G}_n)$, ja que la classe $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_n)$ és una varietat. Un altre resultat a ressaltar és que tindrem la següent cadena (on, pel comentari anterior, sabem que podem substituir l'operador $\mathbb{Q}$ per $\mathbb{V}$ en tot moment):

$$\mathsf{BA} = \mathbb{Q}(\mathbf{2}) = \mathbb{Q}(\mathbf{G}_2) \subsetneq \mathbb{Q}(\mathbf{G}_3) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{Q}(\mathbf{G}_n) \subsetneq \mathbb{Q}(\mathbf{G}_{n+1}) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{Q}(\mathbf{G}_{[0,1]}) = \mathsf{GA}.$$

Exemple 2.59. *(Lògica infinit-valorada de Łukasiewicz)*

Es pot veure que el sistema deductiu $\text{Ł}_{[0,1]} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\text{Ł}_{[0,1]}} \rangle$ (càlcul i llenguatge definits a l'*Apèndix A.3*) serà algebritzable, amb fórmules d'equivalència i equacions definidores les del *Teorema 2.53*, ja que també és implicatiu. La seva quasi-varietat semàntica equivalent és la classe de les anomenades *MV-àlgebres*[13].

[12] Introduïdes per Arend Heyting el 1930, a [Hey30].
[13] Presentades el 1958 per Chen Chung Chang, a [Cha58].

Definició 2.60. *Una* ***MV-àlgebra*** *és una estructura* $\boldsymbol{A} = \langle A, +, \cdot, \neg, 0, 1\rangle$, *on* $A \supseteq \{0, 1\}$ *és un conjunt,* $+$ *i* $\cdot$ *operacions binàries i* $\neg$ *n'és unària, les tres sobre* A*; tals que verifiquen, per tot* $x, y, z \in A$*:*

$$\begin{aligned}
x + y &= y + x & x \cdot y &= y \cdot x \\
x + (y + z) &= (x + y) + z & x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\
x + \neg x &= 1 & x \cdot \neg x &= 0 \\
x + 1 &= 1 & x \cdot 0 &= 0 \\
x + 0 &= x & x \cdot 1 &= x \\
\neg(x + y) &= \neg x \cdot \neg y & \neg(x \cdot y) &= \neg x + \neg y \\
x &= \neg\neg x & \neg 0 &= 1
\end{aligned}$$

I, definint $x \vee y \coloneqq (x \cdot \neg y) + y$ *i* $x \wedge y \coloneqq (x + \neg y) \cdot y$*, s'ha de validar:*

$$\begin{aligned}
x \vee y &= y \vee x & x \wedge y &= y \wedge x \\
x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z & x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \\
x + (y \wedge z) &= (x + y) \wedge (x + z) & x \cdot (y \vee z) &= (x \cdot y) \vee (x \cdot z)
\end{aligned}$$

De les mateixes definicions, es pot veure que la classe de totes les MV-àlgebres, MV, és una varietat i, per tant, una quasi-varietat. També n'obtenim fàcilment que $\mathsf{BA} \subseteq \mathsf{MV}$. Es coneixen com a *àlgebres de Wajsberg* a les àlgebres equivalents a les MV-àlgebres, però definides emprant unes connectives $\to$ i $\neg$ (vegis, per exemple, [Fon84]).

Quant a les lògiques n-valorades de Łukasiewicz, només comentar que a l'*Exemple 2.18* ja vam veure que la tri-valorada és algebritzable, amb $\{\mathbf{Ł}_3\}$ una semàntica algebraica equivalent, així que sabem que $\mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_3)$ serà la seva quasi-varietat semàntica equivalent. De manera totalment anàloga a les lògiques de Gödel, es pot veure que la quasi-varietat semàntica equivalent a una lògica n-valorada de Łukasiewicz és la quasi-varietat (en realitat, també varietat) generada per una àlgebra de Łukasiewicz de n valors.

2.5 Algebrització d'expansions i fragments

Pel que acabem de veure, donat un sistema deductiu, per concloure si és algebritzable o no només ens cal comprovar si es verifiquen les condicions del *Teorema 2.48*, o el *Teorema 2.40*, i, si finalment és algebritzable, podem aplicar el *Teorema 2.50* per obtenir la seva quasi-varietat semàntica equivalent, que serà la generada per les seves respectives àlgebres de Lindenbaum-Tarski. Tot aquest procés resulta molt útil, com hem pogut constatar amb alguns exemples. Tanmateix, en alguns casos, n'hi haurà maneres més eficients de comprovar quan un sistema deductiu és algebritzable, recorrent a alguna expansió o fragment d'aquest. Seguidament, estudiarem les definicions i teoremes que ens ho permetran fer. Donat que treballem principalment amb sistemes deductius, hem optat per presentar les properes definicions respecte d'aquests, però, realment, es poden estendre sense gaires inconvenients a les lògiques en general.

Definició 2.61. *Sigui un llenguatge proposicional* $\mathbf{L} = \langle L, ar\rangle$*. Un* ***fragment*** *de* $\mathbf{L}$ *és un llenguatge* $\mathbf{L}' = \langle L', ar'\rangle$ *tal que* $L' \subseteq L$ *i* $ar' = ar{\restriction}_{L'}$*. Es denota per* $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$*, i, en aquest cas, diem que* $\mathbf{L}$ *és una* ***expansió*** *del llenguatge* $\mathbf{L}'$*.*

Definició 2.62. *Sigui un sistema deductiu* $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ *i* $\mathbf{L}'$ *un fragment de* $\mathbf{L}$*. El* $\mathbf{L}'$*-**fragment*** *de* $\mathcal{S}$ *és el sistema deductiu* $\mathcal{S}' = \langle \mathbf{L}', \vdash_{\mathcal{S}'}\rangle$ *on definim la relació de conseqüència com* $\vdash_{\mathcal{S}'} \coloneqq \vdash_{\mathcal{S}} \cap (\mathcal{P}(Fm_{\mathbf{L}'}) \times Fm_{\mathbf{L}'})$*.*

És trivial veure que $\mathcal{S}'$ sempre és un sistema deductiu, ja que $\vdash_{\mathcal{S}'}$ manté tant les condicions de relació de conseqüència com l'estructuralitat que $\vdash_{\mathcal{S}}$ ja complia. També és fàcil veure que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathbf{L}'}$, es verifica $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{S}'} \varphi$.

Definició 2.63. *Siguin $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ i $\mathcal{S}' = \langle \mathbf{L}', \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle$ dos sistemes deductius. $\mathcal{S}$ és una **expansió** del sistema deductiu $\mathcal{S}'$ si $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$ i $\vdash_{\mathcal{S}'} \subseteq \vdash_{\mathcal{S}}$.*

Observem que, aleshores, una extensió no és altra cosa que una expansió sobre el mateix llenguatge proposicional.

Definició 2.64. *Sigui la $\mathbf{L}$-àlgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L \rangle \rangle$ i la $\mathbf{L}'$-àlgebra $\boldsymbol{A}' = \langle A, \langle \lambda^{\boldsymbol{A}} : \lambda \in L' \rangle \rangle$, amb els llenguatges proposicionals verificant $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$. Direm que $\boldsymbol{A}'$ és el **$\mathbf{L}'$-reducte** d'$\boldsymbol{A}$.*

Seguidament, donarem els dos teoremes que ens permetran establir si un sistema deductiu és algebritzable o no a partir d'estudiar els seus fragments, segons el *Teorema 2.65*, o les seves expansions, *Teorema 2.67*:

Teorema 2.65. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb un llenguatge $\mathbf{L}$; i sigui $\mathcal{S}'$ un $\mathbf{L}'$-fragment de $\mathcal{S}$. Si $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$ conté totes les connectives primitives que apareixen al sistema de fórmules d'equivalència i al d'equacions definidores per $\mathcal{S}$, llavors $\mathcal{S}'$ també és algebritzable. A més, si K és la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}$, i K' és la classe de $\mathbf{L}'$-reductes dels elements de K, llavors $\mathbb{S}(\mathsf{K}')$, la classe d'àlgebres isomorfes a alguna subàlgebra de K', és la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}'$.*

Demostració. La primera part del teorema resulta trivial, ja que les condicions per ser algebritzable no es veuran afectades per l'absència d'algunes connectives, suposant que aquestes no són primitives que apareguin al sistema de fórmules d'equivalència o al d'equacions definidores. La segona part del teorema no és tan elemental, però esdevé pràcticament directa considerant el resultat de Mal'cev que ens assegura que, si K és quasi-varietat, llavors $\mathbb{Q}(\mathsf{K}') = \mathbb{S}(\mathsf{K}')$ (vegis el corol·lari 5 del cinquè capítol de [Mal73], pàg. 216). ▲

Exemple 2.66. *(Fragments implicatius de la lògica proposicional clàssica i intuicionista)*

Considerem el llenguatge preposicional $\mathbf{L}_{\rightarrow}$, que conté una única connectiva $\rightarrow$, d'arietat 2. Podem veure que $\mathbf{L}_{\rightarrow}$ és un fragment tant del llenguatge amb el qual definírem la lògica clàssica sintàcticament (*Exemple 1.14*), com del llenguatge amb què hem presentat sintàcticament la lògica proposicional intuicionista (*Apèndix A.1*).

Concretament, podem veure que el càlcul $\mathcal{C}l_{\rightarrow}$, derivat del de l'*Exemple 1.14*, estarà conformat pels axiomes $(Ax1)$, $(Ax2)$ i el denominat *Axioma de Pierce*, per tot $\varphi, \psi \in Fm_{\mathbf{L}}(\mathcal{X})$: $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$; i la regla M.P. com a única regla. D'altra banda, el càlcul $\mathcal{IPC}_{\rightarrow}$ estarà compost només de $(IAx1)$ i $(IAx8)$, i M.P. com a regla.

Donat que ja sabem que la lògica clàssica i la lògica intuicionista són algebritzables, i les seves equacions definidores i les fórmules d'equivalència només contenen la connectiva $\rightarrow$, per ambdós sistemes deductius, podem aplicar el *Teorema 2.65* per afirmar que les seves restriccions implicatives, $\mathcal{C}l_{\rightarrow}$ i $\mathcal{IPC}_{\rightarrow}$, respectivament, també són algebritzables.

Quant a l'algebrització, evidentment $\mathcal{C}l_{\rightarrow}$ i $\mathcal{IPC}_{\rightarrow}$ mantindran el fet d'ésser implicatives, amb el que podem considerar les equacions definidores i fórmules d'equivalència com les del *Teorema 2.53*. Es pot veure que la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{C}l_{\rightarrow}$ és la classe de les *àlgebres implicatives*[14], i que la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{IPC}_{\to}$ és la classe de les anomenades *àlgebres de Hilbert*[15] o *àlgebres implicatives positives.*

També cal assenyalar que, aquest mateix procés, es podria repetir per la resta de sistemes deductius implicatius estudiats, ja que $\mathbf{L}_{\to}$ n'és fragment de tots els llenguatges en qüestió, i ja sabem que les seves equacions definidores i les fórmules d'equivalència únicament contenen la connectiva $\to$.

Teorema 2.67. *Sigui $\mathcal{S}' = \langle \mathbf{L}', \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle$ un sistema deductiu algebritzable i $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ una expansió d'aquest. Llavors, $\mathcal{S}$ també serà algebritzable, amb les mateixes fórmules d'equivalència i equacions definidores, si $\vdash_{\mathcal{S}}$ verifica la condició iv) del Teorema 2.48 per totes les connectives noves respecte de $\mathbf{L}'$, és a dir, si per tota connectiva $\lambda \in L \smallsetminus L'$ d'arietat n, i tot $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n \in Fm_{\mathbf{L}}$:*

$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta(\varphi_i, \psi_i) \vdash_{\mathcal{S}} \Delta\left(\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \lambda(\psi_1, \ldots, \psi_n)\right).$

Demostració. Suposem $\mathcal{S}'$ un sistema deductiu algebritzable. Evidentment, $\mathcal{S}'$ ha de satisfer els cinc apartats del *Teorema 2.48*, per algun sistema de fórmules d'equivalència i d'equacions definidores. Llavors, és elemental que, per tota expansió de $\mathcal{S}'$, tant les tres primeres com la cinquena condició del *Teorema 2.48* es verificaran. L'únic que no es podria afirmar és que es mantingui la quarta condició, ateses les noves connectives del llenguatge. Precisament, però, és el que prenem, o demanem, com a hipòtesi. Aleshores, donat que l'expansió de $\mathcal{S}'$ valida les cinc condicions del *Teorema 2.48*, arribem a què també és algebritzable. ▲

Exemple 2.68. *(Lògica modal)*

Prenem el llenguatge $\mathbf{L}_{\Box}$ i el càlcul gK (vegis *Apèndix A.4*). Ja sabem que, a partir d'aquest càlcul, podem definir una relació de conseqüència, que anomenarem $\vdash_{gK}$, de manera que $\langle \mathbf{L}_{\Box}, \vdash_{gK} \rangle$ és sistema deductiu. Es pot veure que aquest presenta un teorema de completesa forta respecte de la lògica modal global definida sobre la classe de tots els models de Kripke (per la definició semàntica i el teorema de completesa, vegis, per exemple, [Jan90]).

Observem que els primers quatre axiomes del càlcul són els mateixos que presentàrem per la lògica proposicional clàssica, amb el que $\vdash_{\mathcal{C}l} \subseteq \vdash_{gK}$. També tenim que $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\Box}$, on $\mathbf{L}$ és el llenguatge proposicional de la representació sintàctica de la lògica clàssica. Així, veiem que el sistema deductiu que acabem de definir és una expansió de la lògica proposicional clàssica. Pel *Teorema 2.67*, llavors, sabem que serà algebritzable si es verifica, per tot $\varphi, \psi \in Fm_{\mathbf{L}_{\Box}}$:

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash_{gK} \Box\varphi \to \Box\psi;$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\} \vdash_{gK} \Box\psi \to \Box\varphi.$$

Veiem que, efectivament, podem construir les demostracions que necessitem, per exemple (l'altra s'obté de manera anàloga):

$\varphi \to \psi$	Premissa
$\Box(\varphi \to \psi)$	Regla de Necessitat respecte de l'anterior
$\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$	Instància de *(MAx5)*
$\Box\varphi \to \Box\psi$	M.P. dels dos anteriors

[14] Presentades per J.C. Abbott el 1967, a [Abb67].
[15] Plantejades per L. Henkin el 1950, a [Hen50].

Per tant, arribem a què el sistema deductiu $\langle \mathbf{L}_\Box, \vdash_{gK} \rangle$ és algebritzable, i amb les mateixes fórmules d'equivalència i les mateixes equacions definidores que les de la lògica proposicional clàssica. La quasi-varietat semàntica equivalent serà la classe de les anomenades *àlgebres modals*.

Definició 2.69. *Una* ***àlgebra modal*** *és una àlgebra de Boole dotada d'un operador unari* $\Box$ *tal que* $\Box\top = \top$ *i, per tots* a *i* b *elements de l'àlgebra,* $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Per donar també un exemple de sistema deductiu no algebritzable, podem considerar el generat pel càlcul lK (vegis, per exemple, 3.61 de [Fon16], pàg. 153), que sabem que es pot derivar de gK limitant la regla de Necessitat als teoremes. Així i tot, lK presenta un teorema de completesa forta respecte de la lògica modal local, definida sobre el sistema de tots els models de Kripke (per la definició i el teorema de completesa vegis, per exemple, [Jan90]).

Del *Teorema 2.67* es deriva, com a cas particular:

Corol·lari 2.70. *Qualsevol extensió finitària d'un sistema deductiu algebritzable és també algebritzable, amb les mateixes fórmules d'equivalència i equacions definidores.* ▲

Exemple 2.71. A la *Proposició 1.33* vam veure que la lògica proposicional clàssica és extensió de la lògica tri-valorada de Gödel i l'infinit-valorada de Łukasiewicz. De fet, també es podria veure que igualment n'és una extensió de la lògica proposicional intuicionista. Llavors, resulta interessant apreciar que, demostrant que qualsevol d'aquestes tres és algebritzable, pel *Corol·lari 2.70* també estaríem construint una prova alternativa del fet que la lògica proposicional clàssica és algebritzable.

3 Aplicacions

3.1 Resultats sobre extensions

En aquest últim capítol esmentarem breument alguns resultats interessants derivables de tot el que hem estat veient. En la present secció, estudiarem primerament com axiomatitzar les quasi-varietats semàntiques equivalents, i a partir d'això en deduirem en especial el *Corol·lari 3.3*. D'aquest n'extraurem algunes aplicacions referents a les lògiques estudiades.

Teorema 3.1. *Sigui un sistema deductiu $\mathcal{S}$, determinat a partir d'un conjunt d'axiomes Ax i un conjunt de regles d'inferència Ir. Suposem $\mathcal{S}$ algebritzable amb fórmules d'equivalència Δ i equacions definidores $\delta \approx \epsilon$. Llavors, l'única quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}$ està axiomatitzada per les equacions, per p i q variables:*

i) $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$, *per tot* $\varphi \in Ax$;

ii) $\delta(\Delta(p,p)) \approx \epsilon(\Delta(p,p))$.

I les quasi-equacions:

iii) $\delta(\psi_0) \approx \epsilon(\psi_0) \& \ldots \& \delta(\psi_{n-1}) \approx \epsilon(\psi_{n-1}) \Rightarrow \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$,
per tot $\langle \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}, \varphi \rangle \in Ir$;

iv) $\delta(\Delta(p,q)) \approx \epsilon(\Delta(p,q)) \Rightarrow p \approx q$.

Demostració. Sigui K la quasi-varietat definida per *i)-iv)*. Veiem que l'equació *ii)* i la quasi-equació *iv)* resulten equivalents a la condició per ser algebritzable *2.9.iii)*, ja que tenim que $\{p \approx q\} \mathrel{=\!\mid\!\models}_{\mathsf{K}} \delta(\Delta(p,q)) \approx \epsilon(\Delta(p,q))$.

Fixem-nos ara que la segona condició necessària per veure que $\mathcal{S}$ és algebritzable, *2.9.i)*, és a la vegada equivalent a, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$: $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Phi = \{\varphi : \{\delta(\psi) \approx \epsilon(\psi) : \psi \in \Sigma\} \models_{\mathsf{K}} \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)\}$.

De la primera equació de l'enunciat podem deduir que $Ax \subseteq \Phi$, i de *iii)* n'obtenim que Φ és tancat sota les regles d'inferència, amb el que veiem que Φ és una teoria de $\mathcal{S}$. Per tant, donat que $\Sigma \in \Phi$, ja tenim la primera inclusió, perquè hem arribat a què $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \varphi \in \Phi$.

Per obtenir l'altra implicació, suposem $\varphi \in \Phi$. Sigui K' la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{S}$ (per hipòtesi $\mathcal{S}$ és algebritzable, així que sabem que K' existeix). Com K' satisfarà *i)-iv)*, veiem que $\mathsf{K}' \subseteq \mathsf{K}$. Com hem suposat $\varphi \in \Phi$, per la definició de Φ tindrem que $\{\delta(\psi) \approx \epsilon(\psi) : \psi \in \Sigma\} \models_{\mathsf{K}'} \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$. Aplicar *2.9.iii)* ens diu que aquesta expressió resulta equivalent a què $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Així, hem arribat al fet que $\varphi \in \Phi$ implica $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, com volíem veure. ▲

Observem que, per dos sistemes deductius $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, que $\mathcal{S}$ sigui extensió de $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}' \leqslant \mathcal{S}$, és equivalent a què, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, si $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}'} \varphi$, llavors $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Per aquest motiu, de les extensions es deriva una relació d'ordre entre els sistemes deductius amb un mateix llenguatge. Considerant això, veiem que es pot construir un reticle de totes les extensions d'un sistema deductiu donat. Si aquest sistema deductiu és algebritzable, el podem associar a la seva quasi-varietat semàntica equivalent, amb el que podem arribar a determinar, gràcies al *Corol·lari 2.70*, un isomorfisme entre el reticle de les extensions d'un sistema deductiu i el reticle de les quasi-varietats de la quasi-varietat semàntica equivalent. D'aquest resultat, i de la següent definició, en deduïm gairebé directament el pròxim corol·lari:

Definició 3.2. *Siguin $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ dos sistemes deductius, definits sintàcticament. Diem que*

*$\mathcal{S}'$ és una **extensió axiomàtica** de $\mathcal{S}$ si s'obté d'afegir-ne nous axiomes a aquest, sense alterar les seves regles, però.*

Corol·lari 3.3. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb la quasi-varietat semàntica equivalent K. Existeix un isomorfisme entre el reticle de les extensions finitàries de $\mathcal{S}$ i el reticle de les subquasi-varietats de K. També, es pot restringir a un isomorfisme entre el reticle de les extensions axiomàtiques de $\mathcal{S}$ i el de les subvarietats relatives de K, és a dir, les subquasi-varietats de K que es poden definir només afegint equacions al conjunt de quasi-equacions que defineixen K.* ▲

Així, per un sistema deductiu $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ algebritzable, amb K la seva quasi-varietat semàntica equivalent, sabem que si $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle$ és una extensió de $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, llavors $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle$ també serà algebritzable, amb la quasi-varietat semàntica equivalent una subquasi-varietat $\mathsf{K}' \subseteq \mathsf{K}$. Paral·lelament, si $\mathsf{K}'' \subseteq \mathsf{K}$ és una subquasi-varietat de K, aleshores tenim que $\vDash_{\mathsf{K}''}$ serà equivalent a una relació de conseqüència, diguem-li $\vdash_{\mathsf{K}''}$, tal que $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathsf{K}''} \rangle$ és sistema deductiu algebritzable, amb la quasi-varietat semàntica equivalent K'', i és extensió de $\langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$. És a dir, tenim el següent esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{Extensions finitàries de } \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle & \cong & \text{Subquasi-varietats de } \mathsf{K} \\ \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}'} \rangle & \longrightarrow & \mathsf{K}' \\ \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathsf{K}''} \rangle & \longleftarrow & \mathsf{K}'' \end{array}$$

On l'ordre parcial de les extensions és $\leqslant$, i el de les subquasi-varietats és $\supseteq$. També, el corol·lari ens afirma que aquest isomorfisme es pot restringir a les extensions axiomàtiques i les subvarietats relatives de K, on es materialitza o evidencia el fet que afegir un axioma als sistemes deductius equival a sumar més equacions a la quasi-varietat semàntica equivalent, com, en part, ja havíem vist al primer apartat del *Teorema 3.1*.

Proposició 3.4. *No existeixen sistemes deductius consistents que siguin extensió finitària de la lògica proposicional clàssica.*

Demostració. Veiem, primerament, que les àlgebres de Boole no tenen subvarietats ni subquasi-varietats no trivials. Això es pot deduir fàcilment considerant que l'àlgebra $\mathbf{2}$ genera BA tant com a varietat com a quasi-varietat, és a dir, $\mathbb{Q}(\mathbf{2}) = \mathbb{V}(\mathbf{2}) = \mathsf{BA}$; i que $\mathbf{2}$ és subàlgebra (o isomorfa a una subàlgebra) de qualsevol àlgebra de Boole no trivial, ja que aquestes han de contenir necessàriament $\bot$ i $\top$, és a dir, el 0 i l'1 de $\mathbf{2}$. Per tant, qualsevol quasi-varietat que contingui alguna àlgebra de Boole no trivial tindrà també a $\mathbf{2}$ i, aleshores, generarà tota la quasi-varietat BA. Així, l'única subquasi-varietat de BA diferent de la pròpia BA és la classe de les àlgebres trivials, que només és quasi-varietat semàntica equivalent a la lògica inconsistent. Gràcies al *Corol·lari 3.3*, arribem a què la lògica inconsistent és l'única extensió finitària de la lògica proposicional clàssica. ▲

Definició 3.5. *Una lògica **superintuicionista** és una lògica que és extensió de la lògica intuicionista.*

Aplicant el *Corol·lari 2.70*, tenim que totes les lògiques superintuicionistes són algebritzables, amb les mateixes fórmules d'equivalència i equacions definidores que $\mathcal{IPC}$. Observem també que la lògica proposicional clàssica és superintuicionista, de fet, es pot provar que és la lògica superintuicionista consistent més gran.

Definició 3.6. *Anomenem lògiques **intermèdies** a les lògiques superintuicionistes tals que tinguin la lògica proposicional clàssica com a extensió.*

Proposició 3.7. *Existeixen infinites lògiques intermèdies.*

Demostració. Ja hem vist a l'*Exemple 2.54* que la quasi-varietat semàntica equivalent a la lògica proposicional intuicionista és la classe de les àlgebres de Heyting. A diferència de les àlgebres de Boole, les àlgebres de Heyting tenen infinites subquasi-varietats, per exemple, les generades per les àlgebres n-valorades de Gödel, com deduïm de l'*Exemple 2.57*, ja que tenim la cadena $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_i) \subsetneq \mathbb{Q}(\mathbf{G}_{i+1}) \subsetneq \mathsf{GA} \subsetneq \mathsf{HA}$, per tot $i \in \mathbb{N}$. Això ens porta que, pel *Corol·lari 3.3*, les lògiques n-valorades de Gödel són superintuicionistes, amb el que confirmem així que n'existeixen infinites. De fet, aquí recalquem les lògiques de Gödel perquè són les que hem estudiat, però es pot veure que, en realitat, hi ha un continu de lògiques intermèdies (vegis, entre d'altres, [Yan68]). ▲

3.2 Teoremes de completesa

Com ja s'ha dit i exposat durant el treball, l'algebrització dels sistemes deductius pràcticament també ens proporciona un teorema de completesa. Per la lògica proposicional clàssica, per exemple, ho vam veure amb el *Teorema 1.59*, la demostració del qual es facilitava notablement considerant que les àlgebres de Boole són semàntica algebraica de la lògica clàssica. Per algunes de les lògiques que hem estudiat passarà quelcom semblant, amb el que podrem establir, per exemple, teoremes de completesa algebraica del càlcul $\mathcal{IPC}$ respecte d'una semàntica de matrius definida sobre les àlgebres de Heyting, de $\mathcal{G}_{[0,1]}$ respecte la de les àlgebres de Gödel, del càlcul infinit-valorat de Łukasiewicz respecte de les MV-àlgebres, o del càlcul gK respecte d'una semàntica matricial definida sobre la classe d'àlgebres modals. Ara bé, a continuació, en deduirem un resultat general més interessant encara:

Definició 3.8. *Sigui un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$. Donada una $\mathbf{L}$-àlgebra $\boldsymbol{A}$ amb univers A, diem que el subconjunt $F \subseteq A$ és un $\mathcal{S}$-**filtre** si es verifica que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $\Sigma \vDash_{\langle \boldsymbol{A},F \rangle} \varphi$.*

Veiem que, per $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductiu algebritzable amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$, podem caracteritzar els $\mathcal{S}$-filtres de l'àlgebra $\mathbf{A}$, de domini A, com $F = \{a \in A : \delta(a) \approx \epsilon(a)\}$. Fixem-nos que, en la majoria de sistemes deductius que hem tractat en aquest treball, $F = \{1\}$ n'és un filtre.

Teorema 3.9. *Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb K la seva quasi-varietat semàntica equivalent. Aleshores:*

i) Si tenim una àlgebra $\boldsymbol{A}$ tal que $\mathbb{V}(\boldsymbol{A}) = \mathbb{V}(\mathsf{K})$ (si K és varietat tenim $\mathbb{V}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{K}$), llavors, per F un $\mathcal{S}$-filtre, existeix el següent teorema de completesa feble, per tot $\varphi \in Fm$:

$$\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \vDash_{\langle \boldsymbol{A},F \rangle} \varphi.$$

ii) Si tenim una àlgebra $\boldsymbol{A}$ tal que $\mathbb{Q}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{K}$, aleshores, per F un $\mathcal{S}$-filtre, existeix un teorema de completesa forta finitària, per tot $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \in Fm$:

$$\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \vDash_{\langle \boldsymbol{A},F \rangle} \varphi.$$

En aquest cas, si, a més, tenim que la relació $\vDash_{\langle \boldsymbol{A},F \rangle}$ és finitària, llavors també existeix un teorema de completesa forta, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \iff \Sigma \vDash_{\langle \boldsymbol{A},F \rangle} \varphi.$$

Demostració. Considerant tot el que ja sabem, no és pas difícil comprovar aquest teorema, donat que només cal recordar la caracterització de la relació de conseqüència equacional relativa a K, per una quasi-equació $(\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi$:

$$\{\varphi_i \approx \psi_i : i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi \iff \mathsf{K} \vDash (\varphi_0 \approx \psi_0)\& \ldots \&(\varphi_n \approx \psi_n) \Rightarrow \varphi \approx \psi.$$

Si $\mathbf{A}$ és una àlgebra tal que $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathsf{K}$ prenem totes les quasi-equacions; si, en canvi, només tenim $\mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\mathsf{K})$, aleshores a l'expressió anterior considerem únicament les equacions, les quasi-equacions amb antecedent el conjunt buit $\varnothing$. D'aquesta manera es pot provar, amb arguments anàlegs als que aplicàrem al *Teorema 1.59*, que es verifiquen *i)* i el teorema de completesa forta finitària de *ii)*. En les condicions d'aquest últim, veiem que, si $\vDash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle}$ és finitària, llavors, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, si $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, sabem que existeix $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finit tal que $\Sigma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, així que, en aquest cas, de la completesa forta finitària se segueix directament la completesa forta. ▲

Exemple 3.10. Observem que, per la lògica proposicional clàssica, es dona l'apartat *ii)*, ja que $\mathbb{Q}(\mathbf{2}) = \mathsf{BA}$, i tenim que $\vDash_{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle}$ és finitària, ja que $\mathbf{2}$ és finita, amb el que arribem al teorema de completesa forta que ja coneixíem.

Amb les lògiques n-valorades de Gödel succeeix quelcom semblant: per tot valor de n, la quasi-varietat semàntica equivalent a $\mathcal{G}_n$ és la generada per $\mathbf{G}_n$, $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_n)$, i $\vDash_{\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle}$ és finitària, perquè $\mathbf{G}_n$ és finita. Així que, per cada valor de n, podem establir un teorema de completesa forta entre el càlcul $\mathcal{G}_n$ i la representació semàntica definida per la matriu $\langle \mathbf{G}_n, \{1\}\rangle$, d'igual manera que ho podem fer per tot el sistema de matrius generat per $\mathbb{Q}(\mathbf{G}_n)$. Fixem-nos que aquesta fou, precisament, la caracterització emprada inicialment per la lògica tri-valorada. Pel que fa a $\mathbf{G}_{[0,1]}$, es dona el mateix, respecte del càlcul $\mathcal{G}_{[0,1]}$, ja que, tot i que $\mathbf{G}_{[0,1]}$ no és finita, $\vDash_{\langle \mathbf{G}_{[0,1]}, \{1\}\rangle}$ sí que és finitària, com es pot veure, en part, gràcies al fet que tot subconjunt entre $\{0, 1\}$ i $[0, 1]$ és subàlgebra de $\mathbf{G}_{[0,1]}$.

Exemple 3.11. Sabem que el càlcul infinit-valorat de Łukasiewicz, $Ł_{[0,1]}$, és algebritzable, amb la classe de MV-àlgebres la seva quasi-varietat semàntica equivalent. Es pot veure que $\mathsf{MV} = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{[0,1]})$, on $\mathbf{Ł}_{[0,1]}$ és l'àlgebra definida a l'*Exemple 1.31*, sobre el domini $[0, 1]$. Això, pel segon apartat del *Teorema 3.9*, ens suposa l'existència d'un teorema de completesa forta finitària entre el càlcul i la representació semàntica que concedeix la relació $\vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\}\rangle}$. Però, $\vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\}\rangle}$ no és pas finitària, així que, no podem establir un teorema de completesa forta entre les dues representacions. Igualment, sí que tenim, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, que $\Sigma \vdash_{Ł_{[0,1]}} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\}\rangle} \varphi$, perquè els quatre axiomes del càlcul $Ł_{[0,1]}$ esdevenen tautologies, i M.P. es valida, a $\vDash_{\langle \mathbf{Ł}_{[0,1]}, \{1\}\rangle}$.

Fixem-nos que, com ja sabem, existeix un teorema de completesa forta del càlcul $Ł_{[0,1]}$ respecte de la classe de totes les MV-àlgebres, $\mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{[0,1]})$, però, en canvi, respecte únicament de l'àlgebra $\mathbf{Ł}_{[0,1]}$ només tindrem un teorema de completesa forta finitària. Així i tot, cal dir que aquest resultat supera la mera completesa feble en la qual Łukasiewicz pensava quan presentà el càlcul infinit-valorat, a [Łuk22].

3.3 Teoremes Pont

Com hem repetit tant de manera implícita com explícita al llarg d'aquest treball, per un sistema deductiu algebritzable $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$, amb K la seva semàntica algebraica equivalent, tenim que la relació de conseqüència equacional relativa a K, $\vDash_{\mathsf{K}}$, es comporta essencialment igual que $\vdash_{\mathcal{S}}$, i podem passar d'una relació a l'altra mitjançant les equacions definidores i les fórmules d'equivalència, que, respectivament, transformen fórmules en sistemes d'equacions, i equacions en sistemes de fórmules.

Aleshores, apreciem que hem obtingut una certa connexió entre els sistemes deductius, uns conceptes purament lògics, i les classes d'àlgebres, objectes intrínsecament algebraics. És a dir, hem trobat una mena de pont entre la lògica i l'àlgebra, que enllaça aquestes dues branques de coneixement *a priori* tan diferents.

Vist això, el següent pas natural és preguntar-se pel que anomenarem com *teoremes pont*, i que, podríem dir, seran el colofó d'aquest treball. Els teoremes pont són una família de teoremes, de la forma:

Un sistema deductiu $\mathcal{S}$ verifica una propietat P si, i només si,
la classe d'àlgebres associada a $\mathcal{S}$ verifica una propietat P'.

Si les propietats P i P' són essencialment les mateixes, se sol dir que tenim un *teorema de transferència*, i que la propietat P es transfereix de $\mathcal{S}$ a la classe d'àlgebres.

En aquesta secció presentarem i comentarem breument alguns dels teoremes pont principals. La idea no és pas treballar-los en profunditat, així que només es presentaran els conceptes més rellevants, i també es prescindirà de donar demostracions. Tanmateix, se citaran les obres de referència on trobar-ne tot.

3.3.1 Teorema de Deducció

Per tenir tots els detalls i les demostracions del que tractarem a continuació, vegis l'apartat 3.6 de [Fon16], pàg. 159, juntament amb [Blo91; Cze85; Cze86] o el segon capítol de [Cze01], pàg. 123.

Definició 3.12. *Sigui Λ un conjunt de fórmules de dues variables. Direm que Λ és un* ***conjunt deductiu*** *per un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ si, per tot $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm$:*

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \Lambda(\varphi, \psi).$$

Definició 3.13. *Un sistema deductiu verifica el* ***Teorema de Deducció*** *(T.D.) si té un conjunt deductiu.*

Exemple 3.14. Observem que, com ja sabem, la lògica proposicional clàssica verifica el Teorema de Deducció per la fórmula $\Lambda(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi\}$, amb φ i ψ fórmules. També es pot veure, per exemple, que la lògica proposicional intuicionista i el sistema deductiu lK satisfan el Teorema de Deducció amb el mateix conjunt deductiu.

Definició 3.15. *Sigui K una classe d'àlgebres, i sigui Ψ un conjunt d'equacions de dues variables equacionals (que equival a un conjunt de fórmules de quatre variables). Direm que Ψ és un* ***conjunt deductiu*** *per l'operador de clausura associat a $\vDash_{\mathsf{K}}$, si, per tot $\Theta \cup \{\varphi \approx \psi, \xi \approx \eta\} \subseteq Eq$:*

$$\Theta \cup \{\varphi \approx \psi\} \vDash_{\mathsf{K}} \xi \approx \eta \iff \Theta \vDash_{\mathsf{K}} \Psi(\varphi \approx \psi, \xi \approx \eta).$$

Igualment, direm que una classe d'àlgebres verifica el ***Teorema de Deducció*** *(T.D.) si té un conjunt deductiu.*

Teorema 3.16. *(Teorema de transferència del T.D) Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb K una semàntica algebraica equivalent. $\mathcal{S}$ verificarà el T.D. si, i només si, l'operador de clausura associat a $\vDash_{\mathsf{K}}$ satisfà el T.D.*

Definició 3.17. *Diem que una quasi-varietat* K *té* ***congruències relatives principals definibles per equacions*** *(sigles en anglès, EDPRCs), quan existeix un conjunt d'equacions finit, no buit, de dues variables* $\{\xi_i(x_0 \approx x_1, y_0 \approx y_1) \approx \eta_i(x_0 \approx x_1, y_0 \approx y_1) : i \in \mathbb{N}, i \leqslant n\}$ *tal que, per tot* $\boldsymbol{A} \in K$ *d'univers* A *i tot* $a, b, c, d \in A$*:*

$$c \equiv d \ (\Theta^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K}}(a,b)) \iff \xi_i(a \approx b, c \approx d) = \eta_i(a \approx b, c \approx d), \text{ per tot } i \leqslant n.$$

On $\Theta^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K}}(a,b)$ *denota la* K*-congruència de* $\boldsymbol{A}$ *més petita que conté totes les parelles que generen* a *i* b*.*

Teorema 3.18. *Una quasi-varietat* K *té EDPRCs si, i només si, l'operador de clausura associat a* $\vDash_{\mathsf{K}}$ *satisfà el T.D., per un conjunt deductiu finit.*

Teorema 3.19. *(Teorema pont del T.D.) Sigui* $\mathcal{S}$ *un sistema deductiu algebritzable, amb* K *la seva quasi-varietat semàntica equivalent.* $\mathcal{S}$ *verifica el T.D. si, i només si,* K *té EDPRCs.*

Exemple 3.20. Tant les àlgebres de Boole com les de Heyting tenen EDPRCs, i es poden caracteritzar a partir de $c \equiv d \ (\Theta^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K}}(a,b)) \Leftrightarrow (a \leftrightarrow b) \wedge c = (a \leftrightarrow b) \wedge d$. Això suposa una prova alternativa que els sistemes deductius $\mathcal{Cl}$ i $\mathcal{IPC}$ verifiquen el Teorema de Deducció.

D'altra banda, el Teorema de Deducció Local és una versió més dèbil del Teorema de Deducció. Essencialment, el que es fa és afeblir la definició d'ésser un conjunt deductiu, i després s'opera de manera semblant al que ja hem vist pel T.D.. Hi ha diferents formes de redefinir els conjunts deductius per tal que siguin més permissius, però la tradicional o més antiga és considerar que, en comptes d'un conjunt de fórmules Λ, un conjunt deductiu serà una família de conjunts de fórmules $\{\Lambda_i : i \in I\}$ tal que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \Lambda_i(\varphi, \psi), \text{ per algun } i \in I.$$

Observem que, d'aquí, és immediat que, si un sistema deductiu té el T.D., llavors també tindrà el T.D. local, ja que un conjunt deductiu en el sentit d'abans també és un conjunt deductiu en la nova concepció o definició.

Exemple 3.21. Es pot provar que el sistema deductiu gK verifica el T.D. local que hem definit, amb la família de conjunts $\{\Lambda_n(\varphi,\psi) = \bigwedge_{i \leqslant n} \Box^i \varphi \to \psi : n \in \mathbb{N}\}$, on considerem $\Box^0 \varphi \coloneqq \varphi$ i $\Box^{n+1}\varphi \coloneqq \Box \Box^n \varphi$.

Definició 3.22. *Sigui la classe d'àlgebres* K*. Direm que* K *verifica la* ***propietat de l'extensió de congruències*** *si, per tot* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$*, amb* $\boldsymbol{B}$ *una subàlgebra d'*$\boldsymbol{A}$*, tenim que:* Θ_B *és una congruència de* $\boldsymbol{B}$ *si, i només si,* $\Theta_B = \Theta_A \cap B^2$*, on* Θ_A *és una congruència d'*$\boldsymbol{A}$ *i* B *és el domini de* $\boldsymbol{B}$*.*

Teorema 3.23. *(Teorema pont del T.D. local) Sigui* $\mathcal{S}$ *un sistema deductiu algebritzable, amb* K *la seva quasi-varietat semàntica equivalent.* $\mathcal{S}$ *verifica el T.D. local si, i només si,* K *verifica la propietat de l'extensió de congruències.*

3.3.2 Teorema d'interpolació de Craig

Un altre cop, només donarem una ullada ràpida als resultats més rellevants. Per més detalls i demostracions, vegis [Cra57; Cze82; Mak77], o el capítol 22 de [Mon76], pàg. 365.

Definició 3.24. *Sigui un sistema deductiu $\mathcal{S}$. Direm que $\mathcal{S}$ té la propietat o el* ***teorema d'interpolació de Craig*** *si, per tot $\varphi, \psi \in Fm$ tals que $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, existeix una fórmula* ***interpoladora****, és a dir, $\vartheta \in Fm$ tal que les seves variables són les que apareixen tant a φ com a ψ, i que verifica $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \vartheta$ i $\{\vartheta\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.*

Exemple 3.25. La lògica proposicional clàssica verifica el teorema d'interpolació de Craig. Es pot comprovar que, si $\varphi(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n), \psi(p_1, \ldots, p_n, r_1, \ldots, r_n) \in Fm$ verifiquen $\{\varphi\} \vdash_{Cl} \psi$, llavors $\bigvee_{X \subseteq \{1,\ldots,n\}} \varphi_X$ és una fórmula interpoladora, on φ_X denota la fórmula φ amb les variables q_i substituïdes per $\top$ o $\bot$, depenent si $i \in X$ o no.

Definició 3.26. *Sigui una classe d'àlgebres K. Diem que K té la* ***propietat d'amalgamació*** *si, per tot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \in \mathsf{K}$ amb immersions $e_1 : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{B}_1$ i $e_2 : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{B}_2$, existeixen $\boldsymbol{C} \in \mathsf{K}$ i immersions $f_1 : \boldsymbol{B}_1 \hookrightarrow \boldsymbol{C}$ i $f_2 : \boldsymbol{B}_2 \hookrightarrow \boldsymbol{C}$, tals que $f_1 \circ e_1 = f_2 \circ e_2$. Per tant, tindríem el següent esquema commutatiu:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "f_1"] & \boldsymbol{C} \\
\boldsymbol{A} \arrow[u, "e_1"] \arrow[r, "e_2"'] & \boldsymbol{B}_2 \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.27. *(Teorema pont del teorema d'interpolació de Craig) Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb K la seva quasi-varietat semàntica equivalent. Llavors, $\mathcal{S}$ té el teorema d'interpolació de Craig si, i només si, K té la propietat d'amalgamació.*

El teorema d'interpolació de Craig presentat se sol anomenar el teorema d'interpolació global o feble. Tot seguit, parlarem del denominat teorema d'interpolació local o fort:

Definició 3.28. *Sigui un sistema deductiu $\mathcal{S} = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ tal que $\mathbf{L}$ conté una connectiva $\to$. Es diu que $\mathcal{S}$ té el* ***teorema d'interpolació*** *(de Craig)* ***local*** *si, per tot $\varphi, \psi \in Fm$, si $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, llavors existeix una fórmula* ***interpoladora****, és a dir, $\vartheta \in Fm$ tal que les seves variables són les que apareixen tant a φ com a ψ, i satisfà $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \to \vartheta$ i $\vdash_{\mathcal{S}} \vartheta \to \psi$.*

Exemple 3.29. La lògica proposicional clàssica verifica el teorema d'interpolació local, i és fàcilment deduïble considerant que satisfà el teorema d'interpolació de Craig (global) i el T.D. per un conjunt deductiu $\Lambda(\varphi, \psi) = \{\varphi \to \psi\}$. Observem, però, que en general el teorema d'interpolació de Craig no implica el teorema d'interpolació local, ni aquest últim implica el d'interpolació de Craig.

Definició 3.30. *Sigui una classe d'àlgebres K. Diem que K té la propietat de* ***super-amalgamació*** *si té la propietat d'amalgamació i, a més, seguint la notació de la Definició 3.26, i considerant A el domini d'$\boldsymbol{A}$ i B_j el de $\boldsymbol{B}_j$, tenim que, per $\{j, k\} = \{1, 2\}$ i per tot $x \in B_j$ i $y \in B_k$:*

Si $f_j(x) \leqslant f_k(y)$, llavors existeix $z \in A$ tal que $x \leqslant e_j(z)$ i $y \leqslant e_k(z)$.

Teorema 3.31. *(Teorema pont del teorema d'interpolació local) Sigui $\mathcal{S}$ un sistema deductiu algebritzable, amb K la seva quasi-varietat semàntica equivalent. Llavors, $\mathcal{S}$ té el teorema d'interpolació local si, i només si, K té la propietat de super-amalgamació.*

Exemple 3.32. A [Mak77] es deriva que, del continu de lògiques intermèdies, només vuit tenen el teorema d'interpolació local, entre elles, la lògica inconsistent, la lògica proposicional clàssica i la proposicional intuicionista.

Conclusions

En aquest viatge per la lògica i la lògica algebraica, primerament, hem pogut estudiar els conceptes més elementals, però també més importants, de la lògica: les representacions sintàctica i semàntica, i els teoremes de completesa que les relacionen. Després, adaptant els objectes i conceptes que havíem presentat, hem construït la relació de conseqüència equacional relativa a una classe d'àlgebres, que, pràcticament, es podria entendre que defineix una lògica sobre el conjunt d'equacions.

Al cap i a la fi, hem determinat els sistemes deductius algebritzables mitjançant un parell de relacions entre el sistema deductiu i la lògica de les equacions relativa a alguna classe d'àlgebres en concret. A més, estudiant i aprofundint en aquesta definició, i amb l'ajuda d'alguns resultats sobre reticles i varietats, hem estat capaços de trobar els teoremes que hem anomenat de caracterització, que es basen a establir un isomorfisme entre el reticle de les teories del sistema deductiu i el de les teories de la relació equacional relativa a una classe d'àlgebres; i també hem comprovat que tal isomorfisme és l'operador de Leibniz. Finalment, aplicant els teoremes de caracterització, hem obtingut alguns resultats interessant, com l'algebrització de lògiques concretes o els teoremes de completesa. Seguidament, hem pogut comentar alguns teoremes pont, que ens han evidenciat encara més l'estreta relació entre la lògica i l'àlgebra.

Així, considero que hem assolit els principals objectius d'aquest treball: comprendre les nocions necessàries bàsiques, i principals, de la lògica i l'àlgebra; i analitzar també l'article [Blo89], definint ser algebritzable i demostrant els teoremes de caracterització.

Personalment, m'hauria agradat aprofundir més en els resultats de l'últim capítol, especialment en els teoremes pont, ja que hi ha molta teoria al darrere, i aquí només hem pogut fer un petit esment o introducció al tema, que, cal dir, és prou interessant. Tanmateix, crec que això també resulta bastant representatiu, donat que, en aquest treball, hem tingut l'oportunitat d'endinsar-nos, una mica, en l'apassionant món de la lògica i la lògica algebraica, però, en realitat, encara hi ha molt més per descobrir.

Espero, doncs, que la lectura d'aquest petit treball n'hagi estat una inspiració per continuar explorant i investigant, així com igualment ho ha estat el fet d'escriure'l.

Referències

[Abb67] ABBOTT, J.C. *Semi-boolean algebra.* Matematički Vesnik vol. 4 (19), 40. Društvo matematičara Srbije, 1967, pàg. 177 - 198. Versions digitalitzades disponibles a: resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN311571026_0019 (Citat a la pàgina: 46).

[And75] ANDERSON, A.R.; BELNAP, N.D. *Entailment: the logic of relevance and necessity.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975. ISBN: 9780691071923 (Citat a la pàgina: 28).

[Bal75] BALBES, R.; DWINGER, P. *Distributive lattices.* Columbia, Missouri, 1975. ISBN: 9780826201638 (Citat a la pàgina: 1).

[Bir35] BIRKHOFF, G. *On the Structure of Abstract Algebras.* Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society vol. 31. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1935, pàg. 433 - 454. DOI: 10.1017/S0305004100013463 (Citat a la pàgina: 16).

[Bir40] BIRKHOFF, G. *Lattice theory.* 3d. ed. Colloquium publications of American Mathematical Society (AMS) vol. 25. Providence: American Mathematical Society, 1940. ISBN: 9780821810255 (Citat a la pàgina: 1).

[Blo89] BLOK, W.J.; PIGOZZI, D.L. *Algebraizable logics.* Memoirs of the American Mathematical Society n. 396. Providence, Rhode Island, 1989. ISBN: 9780821824597. Versió escanejada disponible a faculty.sites.iastate.edu/dpigozzi/ (Citat a les pàgines: i, 1, 22, 27, 55).

[Blo91] BLOK, W.J.; PIGOZZI, D.L. *Local deduction theorems in algebraic logic.* vol. 54. Amsterdam etc.: North-Holland; Budapest: János Bolyai Mathematical Society, 1991, pàg. 75 - 109. ISBN: 9780444885432 (Citat a les pàgines: 2, 52).

[Boo09] BOOLE, G. *An investigation of the laws of thought. On which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.* Reedició de l'original de 1854. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9781108001533 (Citat a la pàgina: 18).

[Bur81] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H.P. *A Course in Universal Algebra.* Springer New York, 1981. DOI: 10.1007/978-1-4613-8130-3. Versió actualitzada disponible a math.uwaterloo.ca/∼snburris/htdocs/UALG/ (Citat a les pàgines: 1, 16, 18).

[Car16] CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.E. *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation.* Logic, Epistemology, and the Unity of Science vol. 40. New York: Springer International Publishing, 2016. ISBN: 9783319332031 (Citat a la pàgina: 28).

[Cin] CINTULA, P.; NOGUERA, C. *A Gentle Introduction to Abstract Algebraic Logic.* URL: cs.cas.cz/cintula/AAL (última consulta: abril 2022) (Citat a la pàgina: 1).

[Cra57] CRAIG, W. *Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory.* The Journal of Symbolic Logic vol. 22. 1957, pàg. 269 - 285. DOI: 10.2307/2963594 (Citat a les pàgines: 2, 53).

[Cze01] CZELAKOWSKI, J. *Protoalgebraic logics.* Trends in logic. Springer, Dordrecht, 2001. ISBN: 9780792369400. DOI: 10.1007/978-94-017-2807-2 (Citat a les pàgines: 2, 52).

[Cze82] Czelakowski, J. *Logical Matrices and the Amalgamation Property.* Studia logica vol. 41, 4. Wroclaw, Poland: Ossolineum i North-Holland, 1982, pàg. 329 - 341. doi: 10.1007/bf00403332 (Citat a la pàgina: 53).

[Cze85] Czelakowski, J. *Algebraic aspects of deduction theorems.* Studia Logica vol. 44. 1985, pàg. 369 - 387. doi: 10.1007/bf00370428 (Citat a les pàgines: 2, 52).

[Cze86] Czelakowski, J. *Local Deductions Theorems.* Studia logica vol. 45. Ossolineum i D. Reidel, 1986, pàg. 377 - 391. doi: 10.1007/BF00370271 (Citat a les pàgines: 2, 52).

[Cha58] Chang, C.C. *Algebraic Analysis of Many Valued Logics.* Transactions of the AMS vol. 88, 2. AMS, 1958, pàg. 467 - 490. doi: 10.2307/1993227 (Citat a la pàgina: 43).

[Da 70] Da Costa, N.C.A.; D'Ottaviano, I.M.L. *Sur un problème de Jaśkowski.* Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris 270. París, França: Académie de Sciences de Paris, 1970, pàg. 1349 - 1353 (Citat a la pàgina: 28).

[Dum59] Dummett, M. *A Propositional Calculus with Denumerable Matrix.* The Journal of Symbolic Logic vol. 24, 2. Association for Symbolic Logic, Cambridge University Press, 1959, pàg. 97 - 106. doi: 10.2307/2964753 (Citat a la pàgina: 11).

[Fon16] Font, J.M. *Abstract algebraic logic. An introductory textbook.* Studies in Logic vol. 60. London: College Publications, 2016. isbn: 9781848902077 (Citat a les pàgines: 1, 28, 47, 52).

[Fon84] Font, J.M.; Rodríguez, A.J.; Torrens, A. *Wajsberg algebras.* Stochastica vol. 8, 1. Fac. Mat. Univ. Barcelona, Barcelona España; Inst. Enseñ. Media Alpujarra, Orjiva (Granada), España, 1984, pàg. 5 - 31. Versió digital disponible a: eudml.org/doc/38902 (Citat a la pàgina: 44).

[Göd32] Gödel, K. *Zum Intuitionistischen Aussagenkalkül.* Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien vol. 69. 1932, pàg. 65 - 66. Traducció a l'anglès disponible a *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I: Publications 1929-1936*, Oxford University Press, 1986, ISBN: 9780195039641 (Citat a la pàgina: 11).

[Grä78] Grätzer, G. *General Lattice Theory.* Birkhäuser Basel, 1978. isbn: 9783764369965. doi: 10.1007/978-3-0348-7633-9 (Citat a les pàgines: 1, 63).

[Hen50] Henkin, L. *An algebraic characterization of quantifiers.* Fundamenta Mathematicae vol. 37. 1950, pàg. 63 - 74. Versió digital disponible a: eudml.org/doc/213228 (Citat a la pàgina: 46).

[Hey30] Heyting, A. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* I, II, III. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Math. Klasse. Berlín, 1930, pàg. 42 - 56, 57 - 71, 158 - 169. jfm: 56.0823.01 (Citat a la pàgina: 43).

[Hun04] Huntington, E.V. *Sets of independent postulates for the algebra of logic.* Transactions of the AMS vol. 5, 3. AMS, 1904, pàg. 288 - 309. doi: 10.1090/s0002-9947-1904-1500675-4 (Citat a les pàgines: 18, 19).

[Jan90] Jansana, R. *Una introducción a la Lógica Modal.* Madrid: Editorial Tecnos, 1990. isbn: 9788430918300 (Citat a les pàgines: 2, 46, 47).

[Kri59] Kripke, S.A. *A completeness theorem in modal logic.* Journal of Symbolic Logic 1 vol. 24. Cambridge University Press, 1959, pàg. 1 - 14. doi: 10.2307/2964568 (Citat a la pàgina: 7).

[Kri65] KRIPKE, S.A. *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*. Studies in logic and the foundations of mathematics vol. 40. 1965, pàg. 92 - 130. DOI: 10.1016/S0049-237X(08)71685-9 (Citat a la pàgina: 7).

[Łuk20] ŁUKASIEWICZ, J. *O logice trójwartościowej*. Ruch Filozoficzny vol. 5. Lwów, Segona República Polonesa, 1920, pàg. 170 - 171. Traduccions a l'anglès: *On three-valued logic*, PL, pàg. 16–18; SW, pàg. 87–88. (Citat a la pàgina: 12).

[Łuk22] ŁUKASIEWICZ, J. *Interpretacja liczbowa teorii zdań*. Ruch Filozoficzny vol. 7. Lwów, Segona República Polonesa, 1922, pàg. 92 - 93. Traducció a l'anglès: *A numerical interpretation of the theory of propositions*, SW, pàg. 129-130 (Citat a les pàgines: 12, 51, 59).

[Mak77] MAKSIMOVA, L.L. *Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-boolean algebras*. Algebra and Logic vol. 16, 6. New York: Springer, U.S., 1977, pàg. 427 - 455. DOI: 10.1007/bf01670006 (Citat a les pàgines: 53, 54).

[Mal73] MAL'CEV, A.I. *Algebraicheskie sistemy*. Traduït del rus per B.D. Seckler i A.P. Doohovskoy. New York: Springer-Verlag, 1973. ISBN: 9780387057927 (Citat a les pàgines: 16, 45).

[Mon76] MONK, J.D. *Mathematical logic*. Graduate Texts in Mathematics vol. 37. New York: Springer-Verlag, 1976. ISBN: 9781468494549 (Citat a la pàgina: 53).

[Pla91] PLA I CARRERA, J. *Lliçons de lògica matemàtica. Primera i segona part*. Barcelona: Promociones i Publicaciones Universitarias, 1991. ISBN: 9788476657843 (Citat a les pàgines: 1, 6).

[Pri01] PRIEST, G. *An Introduction to non-classical logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN: 9780521794343 (Citat a la pàgina: 2).

[Pri09] PRIDA, J.F. *Lógica matemática*. Manuales (Marova). Madrid: Marova, 2009. ISBN: 9788426904669 (Citat a les pàgines: 1, 62).

[Ras63] RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. Monografie matematyczne 41. Warszawa: Państwowe Wydawn. Naukowe, 1963. ISBN: 9780900318160 (Citat a les pàgines: 2, 15).

[Ras74] RASIOWA, H. *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Studies in logic and the foundations of mathematics vol. 78. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1974. ISBN: 9780720422641 (Citat a les pàgines: 1, 42).

[She13] SHEFFER, H.M. *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants*. Transactions of the AMS vol. 14. AMS, 1913, pàg. 481 - 488. DOI: 10.1090/S0002-9947-1913-1500960-1 (Citat a la pàgina: 18).

[Tar83] TARSKI, A. *Logic, semantics, meta-mathematics. Papers from 1923 to 1938*. Traduït per Woodger, J.H. Indianapolis, Indiana, 1983. ISBN: 9780915144754 (Citat a les pàgines: 1, 15, 20, 29).

[Yan68] YANKOV, V.A. *Postroenie posledovatelnosti silno nezavisimykh superintuizionistskikh propozicionalnykh ischislenij*. Doklady Akademii Nauk SSSR vol. 181, 1. 1968, pàg. 33 - 34. Versió digital disponible a mi.mathnet.ru/dan33958. Traducció a l'anglès: *Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi*. Soviet Mathematics, Doklady, vol. 9, pàg. 806-807 (Citat a la pàgina: 50).

Apèndixs

A Definició d'alguns càlculs

A.1 Sistema deductiu intuicionista

Definim el llenguatge proposicional $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, amb $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = ar(\rightarrow) = 2$ i $ar(\perp) = 0$. Un càlcul de tipus Hilbert per la lògica proposicional intuicionista pot ser el que anomenarem $\mathcal{IPC}$, i que estarà compost pels axiomes, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm_{\mathbf{L}}(\mathcal{X})$:

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \tag{IAx1}$$
$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi) \tag{IAx2}$$
$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \tag{IAx3}$$
$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \tag{IAx4}$$
$$\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \tag{IAx5}$$
$$\psi \rightarrow \varphi \vee \psi \tag{IAx6}$$
$$(\varphi \vee \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \vartheta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \vartheta) \rightarrow \vartheta)] \tag{IAx7}$$
$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta)] \tag{IAx8}$$
$$\perp \rightarrow \varphi \tag{IAx9}$$

I, com a única regla, *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

A.2 Sistemes deductius de Gödel

Sigui el llenguatge $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, amb $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = ar(\rightarrow) = 2$, $ar(\perp) = 0$. Definirem el càlcul infinit-valorat de Gödel, $\mathcal{G}_{[0,1]}$, amb els nou axiomes del càlcul intuicionista $\mathcal{IPC}$ juntament amb, per tot $\varphi, \psi \in Fm_{\mathbf{L}}(\mathcal{X})$:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi) \tag{GAx10}$$

I l'única regla serà *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

A la vegada, per cada valor de n, els càlculs n-valorats de Gödel, $\mathcal{G}_n$, es compondran dels mateixos axiomes i regles que $\mathcal{G}_{[0,1]}$, amb l'afegitó del següent axioma:

$$\bigvee_{0 \leqslant i < j \leqslant n} ((p_i \rightarrow p_j) \wedge (p_j \rightarrow p_i)) \tag{GnAx11}$$

A.3 Sistemes deductius tri-valorat i infinit-valorat de Łukasiewicz

Sigui el llenguatge $\mathbf{L} = \langle L, ar \rangle$, on $L = \{\rightarrow, \neg\}$, amb $ar(\rightarrow) = 2$ i $ar(\neg) = 1$. Per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$, el següent càlcul de tipus Hilbert que presentarem[16], $Ł_{[0,1]}$, es compon dels

[16]Que és el que originalment donà Łukasiewicz a [Łuk22], tret d'un cinquè axioma *(ŁAx5)*: $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, que, en realitat, es pot derivar dels quatre anteriors.

axiomes:

$$\begin{aligned} &\varphi \to (\psi \to \varphi) && \textit{(ŁAx1)} \\ &(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \vartheta) \to (\varphi \to \vartheta)) && \textit{(ŁAx2)} \\ &((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi) && \textit{(ŁAx3)} \\ &(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) && \textit{(ŁAx4)} \end{aligned}$$

I l'única regla del càlcul serà *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

El càlcul tri-valorat de Łukasiewicz, Ł$_3$, es constituirà dels axiomes, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$:

$$\begin{aligned} &\varphi \to (\psi \to \varphi) && \textit{(ŁAx1)} \\ &(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \vartheta) \to (\varphi \to \vartheta)) && \textit{(ŁAx2)} \\ &(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) && \textit{(ŁAx4)} \\ &((\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi) \to \varphi && \textit{(ŁAx6)} \end{aligned}$$

I l'única regla de Ł$_3$ és també *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

A.4 Sistemes deductius modals gK i lK

Sigui el llenguatge proposicional $\mathbf{L}_\Box = \langle L_\Box, ar\rangle$, amb $L_\Box = \{\to, \neg, \Box\}$ i $ar(\to) = 2$, $ar(\neg) = ar(\Box) = 1$. Per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm_{\mathbf{L}_\Box}(\mathcal{X})$, definirem el càlcul gK, o càlcul modal global, a partir dels axiomes:

$$\begin{aligned} &\varphi \to (\psi \to \varphi) && \textit{(MAx1)} \\ &(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi)) && \textit{(MAx2)} \\ &\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) && \textit{(MAx3)} \\ &(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi && \textit{(MAx4)} \\ &\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) && \textit{(MAx5)} \end{aligned}$$

I, com a regles, *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

I la regla de *Necessitat*:

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

Si limitem la regla de Necessitat de manera que únicament es pugui aplicar sobre teoremes, és a dir, sobre fórmules les quals podem demostrar sense emprar cap premissa; aleshores anomenem el càlcul resultant lK, o càlcul modal local.

B Alguns resultats i definicions sobre $\vdash_{Cl}$

Teorema B.1. (Teorema de Deducció, T.D.) Per tot $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \psi \iff \Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi.$$

Demostració. Implicació ($\Leftarrow$): per la Monotonia de $\vdash_{Cl}$, com $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\varphi\}$, tenim que, si $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$, també $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$. Si prenem el conjunt de fórmules $\{\varphi, \varphi \to \psi\}$, veiem que, per *Modus Ponens*, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash_{Cl} \psi$. Donat que, per la Identitat, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \varphi$, podem aplicar el Tall amb els conjunts $\Sigma \cup \{\varphi\}$ i $\{\varphi, \varphi \to \psi\}$, per afirmar que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \psi$.

Implicació ($\Rightarrow$): Sigui $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ una demostració de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Demostrarem que $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$ per inducció completa sobre n:

Per $n = 0$, la demostració serà $\langle \varphi_0 \rangle$, amb $\varphi_0 = \psi$, i tindrem que $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ o que ψ és instància d'algun axioma (evidentment, en aquest cas, ψ no pot provenir d'aplicar M.P. a dues fórmules anteriors). Suposem que $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$: si $\psi \in \Sigma$, llavors veiem que $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$, per Identitat. Donat que $\psi \to (\varphi \to \psi)$ és instància de *(Ax1)*, és trivial que $\Sigma \vdash_{Cl} \psi \to (\varphi \to \psi)$. Com abans, gràcies al M.P. i al Tall sobre els conjunts Σ i $\{\psi, \psi \to (\varphi \to \psi)\}$, arribem a què $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$. Si, en canvi, ψ no pertany a Σ, sinó que $\psi = \varphi$, veiem que ens cal demostrar $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \varphi$. No obstant això, ja s'ha provat que $\vdash_{Cl} \varphi \to \varphi$ i, aplicant la Monotonia, arribem a què $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \varphi$. D'altra banda, si ψ no pertany a $\Sigma \cup \{\varphi\}$, sinó que és instància d'algun axioma, observem que podem procedir igual que si pertanyés a Σ.

Demostrat el cas $n = 0$, procedim a provar el pas d'inducció completa: suposem cert que, per tot $i \leqslant n$, $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \varphi_i$. Considerant també que $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ és demostració de φ_n a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, volem veure que, si $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \rangle$ és demostració de $\varphi_{n+1} = \psi$ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, llavors $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$. Ara, ψ pot pertànyer a $\Sigma \cup \{\varphi\}$, ser instància dels axiomes o obtenir-se a partir d'aplicar M.P. a dues fórmules anteriors. Veiem que en els primers casos podem actuar de manera anàloga al que hem fet al pas $n = 0$, amb el que només ens queda comprovar què passa si existeixen φ_i i φ_j, amb $i, j \leqslant n$, tals que $\varphi_i = \varphi_j \to \psi$. Per les nostres Hipòtesis d'Inducció, però, tenim que:

$\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \varphi_i = \varphi \to (\varphi_j \to \psi)$	Hipòtesi d'Inducció	(.1)
$\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \varphi_j$	Hipòtesi d'Inducció	(.2)
$\Sigma \vdash_{Cl} (\varphi \to (\varphi_j \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \psi))$	Instància de $(Ax2)$	(.3)
$\Sigma \vdash_{Cl} (\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \psi)$	M.P. i Tall de (.1) i (.3)	(.4)
$\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$	M.P. i Tall de (.2) i (.4)	

Així que, per inducció completa sobre n, acabem de provar que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \psi \Rightarrow \Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$, tancant la demostració del Teorema de Deducció. ▲

Definició B.2. *Diem que $\Sigma \subseteq Fm$ és $\vdash_{Cl}$-**inconsistent** si $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$, per tot $\psi \in Fm$.*

Lema B.3. *$\Sigma \subseteq Fm$ és $\vdash_{Cl}$-inconsistent si, i només si, existeix $\varphi \in Fm$ tal que $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$ i $\Sigma \vdash_{Cl} \neg\varphi$.*

Demostració. Implicació ($\Rightarrow$): si Σ és $\vdash_{Cl}$-inconsistent, per definició podem trobar una demostració de qualsevol fórmula a partir de Σ, en particular, $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$ i $\Sigma \vdash_{Cl} \neg\varphi$.

Implicació ($\Leftarrow$): Donat que és una instància de ($Ax3$), sabem que es verifica $\Sigma \vdash_{Cl} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ i, aplicant M.P. dos cops seguits, tenim que $\{\varphi, \neg\varphi, \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)\} \vdash_{Cl} \psi$. Aleshores, per Tall sabem que $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$, i això aplica a qualsevol $\psi \in Fm$, així que veiem que Σ és $\vdash_{Cl}$-inconsistent. ▲

Definició B.4. *El conjunt de fórmules $\Sigma \subseteq Fm$ és $\vdash_{Cl}$-**consistent** si no és $\vdash_{Cl}$-inconsistent, és a dir, si, per tot $\psi \in Fm$, no es poden donar alhora $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$ i $\Sigma \vdash_{Cl} \neg\psi$.*

Teorema B.5. (Teorema de Reducció a l'Absurd, R.A.) Per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\Sigma \vdash_{Cl} \psi \iff \Sigma \cup \{\neg\psi\} \text{ és } \vdash_{Cl}\text{-inconsistent.}$$

Demostració. Implicació ($\Rightarrow$): Per Monotonia, com estem suposant que $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$, tenim que $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{Cl} \psi$, ara, per Identitat és evident que $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{Cl} \neg\psi$. Per tant, pel *Lema B.3*, $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ és $\vdash_{Cl}$-inconsistent.

Implicació ($\Leftarrow$): Suposant que $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ és $\vdash_{Cl}$-inconsistent, podem afirmar que $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{Cl} \psi$. Pel Teorema de Deducció, veiem que això implica que $\Sigma \vdash_{Cl} \neg\psi \to \psi$. Ara, tenim que $\Sigma \vdash_{Cl} (\neg\psi \to \psi) \to \psi$ per ser una instància de ($Ax4$), amb el que, aplicant M.P. a $\neg\psi \to \psi$ i $(\neg\psi \to \psi) \to \psi$, per Tall arribem a què $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$. ▲

Definició B.6. *Prenem unes noves connectives $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$, definides, per tot $\varphi, \psi \in Fm$, com:*

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to \neg\psi); \\ \varphi \vee \psi &:= \neg\varphi \to \psi; \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi). \end{aligned}$$

Teorema B.7. Amb les definicions anteriors, es verifiquen, per tot $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \phi\} \subseteq Fm$:

i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{Cl} \varphi$ i $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{Cl} \psi$.

ii) $\{\varphi\} \vdash_{Cl} \varphi \vee \psi$ i $\{\psi\} \vdash_{Cl} \varphi \vee \psi$.

iii) Propietat de $\wedge$ a l'Esquerra: $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{Cl} \phi \iff \Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{Cl} \phi$.

iv) Propietat de $\wedge$ a la Dreta: $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \wedge \psi \iff \Sigma \vdash_{Cl} \varphi$ i $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$.

v) Prova per Casos: $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{Cl} \phi \iff \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \phi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{Cl} \phi$.

Per una demostració, vegis, per exemple, la secció 4.2 de [Pri09], pàg. 53 (tot i que s'empra un càlcul i notació lleugerament diferents).

C Alguns resultats i definicions sobre reticles

En aquest apèndix es condensa la teoria emprada en el treball envers els reticles. La major part es requereix per entendre la definició de les àlgebres de Boole, però les últimes definicions, que es troben separades de l'anterior per un espaiat lleugerament major, fan referència a altres resultats, com al *Lema 2.26* i els que el segueixen, o al *Teorema 2.30*.

Definició C.1. *Un reticle és una parella $\langle A, \leqslant \rangle$, amb A un conjunt parcialment ordenat respecte $\leqslant$, tal que, per tota parella $a, b \in A$, existeix un element ínfim, que podem denotar per $a \wedge b$, i un suprem, $a \vee b$.*

Alternativament, també podem definir un reticle de la següent manera:

Definició C.2. *Un **reticle** és una estructura $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, on A és un conjunt i $\wedge$ i $\vee$ són dues operacions binàries sobre A tals que verifiquen, per tot $a, b, c \in A$:*

i) Idempotència: $a \wedge a = a$ i $a \vee a = a$;

ii) Commutabilitat: $a \wedge b = b \wedge a$ i $a \vee b = b \vee a$;

iii) Associativitat: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ i $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

iv) Identitats d'absorció: $a \vee (a \wedge b) = a$ i $a \wedge (a \vee b) = a$.

El següent teorema ens assegura que les últimes dues definicions són equivalents. La demostració, que ometrem, es pot trobar amb tot detall al primer capítol de [Grä78], teorema 1, pàg. 6.

Teorema C.3. i) Sigui un reticle $\langle A, \leqslant \rangle$ segons la *Definició C.1*. Si prenem, per tot $a, b \in A$: $a \wedge b = inf\{a, b\}$ i $a \vee b = sup\{a, b\}$, tenim que $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ és reticle, segons la *Definició C.2*; i, evidentment, també es dona que $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.

ii) Sigui un reticle $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ segons la *Definició C.2*. Definim $\leqslant$, per tot $a, b \in A$, com: $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. Llavors, $\leqslant$ és un ordre parcial sobre A, i $\langle A, \leqslant \rangle$ és reticle segons la *Definició C.1*; també, tenim que $inf\{a, b\} = a \wedge b$ i $sup\{a, b\} = a \vee b$. ▲

Fixem-nos que la segona definició dels reticles, la *Definició C.2*, ens permet entendre aquests com $\mathbf{L}'$-àlgebres, si prenem com a llenguatge proposicional $\mathbf{L}' = \langle L', ar \rangle$ amb $L' = \{\wedge, \vee\}$ i $ar(\wedge) = ar(\vee) = 2$. Ara, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm_{\mathbf{L}'}$, prenem Θ el conjunt de totes les equacions següents:

$$\varphi \wedge \varphi \approx \varphi \text{ i } \varphi \vee \varphi \approx \varphi \qquad \text{(Idempotència)}$$
$$\varphi \wedge \psi \approx \psi \wedge \varphi \text{ i } \varphi \vee \psi \approx \psi \vee \varphi \qquad \text{(Commutabilitat)}$$
$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta \approx \varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta) \text{ i } (\varphi \vee \psi) \vee \vartheta \approx \varphi \vee (\psi \vee \vartheta) \qquad \text{(Associativitat)}$$
$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \approx \varphi \text{ i } \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \approx \varphi \qquad \text{(Identitats d'absorció)}$$

Llavors, veiem que la classe de tots els reticles, diguem-li $K_{\wedge\vee}$, és una varietat i, per tant, també una quasi-varietat, ja que serà definible per les equacions de Θ, que es deriven de la *Definició C.2*, $K_{\wedge\vee} = \{\mathbf{A}_{\wedge\vee} : \mathbf{A}_{\wedge\vee} \vDash \theta, \text{ per tot } \theta \in \Theta\}$.

Definició C.4. *Diem que un reticle $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ és **complet** si tot subconjunt $A' \subseteq A$ té un element ínfim, denotat per $\bigwedge A'$, i un suprem, $\bigvee A'$, per tots els elements d'A'. Dit d'una altra manera, per tot $A' \subseteq A$ existeixen $\bigwedge A'$ i $\bigvee A'$ en A' tals que, per tot $a \in A'$, $\bigwedge A' \leqslant a \leqslant \bigvee A'$.*

Definició C.5. *Un reticle $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ s'anomena* ***acotat*** *si tant $\wedge$ com $\vee$ tenen element neutre, és a dir, si existeixen elements $\bot$ i $\top$ tals que, per tot $a \in A$,*

$$a \vee \bot = a; \qquad a \wedge \top = a;$$
$$a \wedge \bot = \bot; \qquad a \vee \top = \top.$$

Observem que, en aquest cas, $\bot$ és mínim i $\top$ màxim.

Definició C.6. *Un reticle acotat $\langle A, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ és* ***complementat*** *si, per tot $a \in A$, existeix $b \in A$ tal que:*

$$a \vee b = \top;$$
$$a \wedge b = \bot.$$

A més, es pot veure que, si aquest element b existeix, llavors és únic. Usualment, per tant, l'anomenem el ***complement*** *d'a, i el denotem per $\neg a$.*

Observem que, d'aquestes definicions, se segueix immediatament que, per tot $a \in A$, $\neg\neg a = a$, $\neg\bot = \top$ i $\neg\top = \bot$.

Definició C.7. *Un reticle $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ és* ***distributiu*** *si, per tot $a, b, c \in A$ es verifica:*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Es pot veure, però, que una expressió implica l'altra.

Definició C.8. *Un element $a \in A' \subseteq A$ d'un reticle complet $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ és* ***compacte*** *si $a \leqslant \bigvee A'$ implica que $a \leqslant \bigvee A''$ per algun $A'' \subseteq A'$ finit.*

Definició C.9. *Un reticle es diu* ***algebraic*** *si és complet i tots els seus elements són el suprem d'algun conjunt d'elements compactes.*

Definició C.10. *Un subconjunt $A' \subseteq A$ d'un reticle $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ s'anomena* ***dirigit*** *si, per tot subconjunt finit $A'' \subseteq A'$ i tot $a, b \in A''$, existeix un element $c \in A''$ tal que és suprem, és a dir, $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$.*

Definició C.11. *Siguin els reticles $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$ i $\boldsymbol{A'} = \langle A', \wedge', \vee' \rangle$, on $A' \subseteq A$. Direm que $\boldsymbol{A'}$ és un* ***subreticle*** *d'$\boldsymbol{A}$ si es verifica, per tot $a, b \in A'$, $a \vee b = a \vee' b$ i $a \wedge b = a \wedge' b$.*

Definició C.12. *Un conjunt parcialment ordenat $\langle A, \leqslant \rangle$ és un* ***semi-reticle*** *superior (inferior) si, per tota parella $a, b \in A$, existeix un element suprem (ínfim), $a \vee b$ $(a \wedge b)$.*

Resulta evident que tot reticle serà semi-reticle, tant superior com inferior. La següent definició només és la fusió de definicions anteriors, però esdevé útil a la secció 2.2.2:

Definició C.13. *Donats un reticle complet $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge^{\boldsymbol{A}}, \vee^{\boldsymbol{A}} \rangle$, i un subreticle complet d'$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A'} = \langle A', \wedge^{\boldsymbol{A'}}, \vee^{\boldsymbol{A'}} \rangle$, direm que $\boldsymbol{A}$ és un* ***subsemi-reticle complet*** *d'$\boldsymbol{A'}$ si $\bigvee^{\boldsymbol{A}}_{i \in I} a_i = \bigvee^{\boldsymbol{A'}}_{i \in I} a_i$ per tot sistema $a_i \in A$, $i \in I$.*

D Procés de Lindenbaum-Tarski

Teorema D.1. Donada la lògica proposicional clàssica $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l} \rangle$ i BA la classe d'àlgebres de Boole, ambdues amb la constant $\top$ definida, tenim que, per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$:

$$\{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top \implies \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi.$$

Demostració. La prova és una demostració pel contrarecíproc, l'anomenat procés de Lindenbaum-Tarski, que consistirà en:

1. Suposem $\Sigma \nvdash_{\mathcal{C}l} \phi$, per $\phi \in Fm$.

2. Sigui la lògica proposicional clàssica $\mathcal{C}l = \langle \mathbf{L}, \vdash_{\mathcal{C}l} \rangle$, definida sintàcticament com hem vist a la secció 1.1.1. Definim la relació $\Omega\Sigma$ de la següent manera, per $\varphi, \psi \in Fm$:

$$\varphi \equiv \psi \ (\Omega\Sigma) \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi \text{ i } \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi.$$

   Aquesta relació és una generalització de l'emprada per Tarski, on l'original vindria a ser un cas particular amb $\Sigma = \varnothing$, com s'explicita a la memòria del treball.

3. Cal comprovar que $\Omega\Sigma$ és una congruència per $\mathbf{Fm}$. De la definició és pràcticament directe veure que $\Omega\Sigma$ és relació d'equivalència. Comprovem ara que, per $\varphi, \psi \in Fm$, si $\varphi \equiv \psi \ (\Omega\Sigma)$, llavors $\neg\varphi \equiv \neg\psi \ (\Omega\Sigma)$. En aquest cas, tenim que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi$, i volem comprovar si $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\varphi \to \neg\psi$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\psi \to \neg\varphi$. Aplicant el Teorema de Deducció, de $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$ en sabem que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi$ i, pel Teorema de Reducció a l'Absurd, això és equivalent a què $\Sigma \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ és $\vdash_{\mathcal{C}l}$-inconsistent. Emprant que, a la lògica proposicional clàssica, φ és equivalent a $\neg\neg\varphi$, podem tornar a aplicar R.A. per veure que es verifica $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\varphi$. Pel T.D. concloem que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\psi \to \neg\varphi$. Veiem així la primera relació que volíem, i la segona es comprova de manera anàloga.

   Ara suposem que $\varphi_1 \equiv \psi_1 \ (\Omega\Sigma)$ i $\varphi_2 \equiv \psi_2 \ (\Omega\Sigma)$, i hem d'arribar a què $\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \psi_1 \to \psi_2 \ (\Omega\Sigma)$. Demostrarem la primera relació, i l'altra es prova de manera semblant. Podem veure que, aplicant dos cops T.D., tenim que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} (\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\psi_1 \to \psi_2)$ és equivalent a $\Sigma \cup \{\varphi_1 \to \varphi_2, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2$. Ara, considerant que $\varphi_1 \to \varphi_2 = \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$, i aplicant la propietat de $\vee$ a l'Esquerra, veiem que el que teníem es verificarà només si es donen les dues següents relacions:

$$\begin{cases} \Sigma \cup \{\neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2 \\ \Sigma \cup \ \{\varphi_2, \psi_1\} \ \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2 \end{cases}$$

   Veiem que la primera relació es verifica, donat que hem suposat $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_1 \to \varphi_1$, així que, per M.P. tenim $\Sigma \cup \{\neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi_1$. Com, evidentment, també $\Sigma \cup \{\neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \neg\varphi_1$, tenim que el conjunt $\Sigma \cup \{\psi_1, \neg\varphi_1\}$ és inconsistent; llavors, en particular, podem concloure $\Sigma \cup \{\neg\varphi_1, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2$. Quant a la segona expressió, veiem que també es valida, ja que, aplicant T.D. a la suposició $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi_2 \to \psi_2$, tenim $\Sigma \cup \{\varphi_2\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2$. Per Monotonia, arribem al fet que $\Sigma \cup \{\varphi_2, \psi_1\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi_2$. Així, hem provat el que volíem i, ajuntant-ho amb tot l'anterior, donat que les úniques connectives primitives de $\mathcal{C}l$ són $\neg$ i $\to$, tenim que $\Omega\Sigma$ és congruència.

4. Ara hem de veure que l'àlgebra quocient $\mathbf{Fm}/\Omega\Sigma$ és àlgebra de Boole. Hi ha diverses maneres d'arribar-hi, i a continuació en presentarem una de les més senzilles, consistent

en definir un ordre parcial i comprovar que es verifiquen les condicions d'ésser una àlgebra de Boole. Així que, primerament, definim a l'àlgebra quocient la següent relació, per $\varphi/\Omega\Sigma, \psi/\Omega\Sigma \in Fm/\Omega\Sigma$:

$$\varphi/\Omega\Sigma \leqslant \psi/\Omega\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi.$$

Vegem que $\leqslant$ està ben definit: siguin $\varphi' \in \varphi/\Omega\Sigma$ i $\psi' \in \psi/\Omega\Sigma$, volem veure que, si $\varphi/\Omega\Sigma \leqslant \psi/\Omega\Sigma$, llavors $\varphi'/\Omega\Sigma \leqslant \psi'/\Omega\Sigma$, és a dir, que si $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$, aleshores $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi' \to \psi'$. Per la definició de $\Omega\Sigma$, sabem que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi'$, $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi' \to \varphi$, $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \psi'$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi' \to \psi$. Pel Teorema de Deducció, com $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi' \to \varphi$, tenim que $\Sigma \cup \{\varphi'\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$. Sota la suposició, per Monotonia $\Sigma \cup \{\varphi'\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$, i per M.P. i Tall, $\Sigma \cup \{\varphi'\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi$. Com sabem que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \psi'$, un altre cop per M.P. i Tall, podem afirmar que $\Sigma \cup \{\varphi'\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi'$. Finalment, tornant a aplicar T.D., arribem a què $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi' \to \psi'$, que és l'expressió que buscàvem.

Ara cal comprovar que $\leqslant$ és un ordre parcial a $Fm/\Omega\Sigma$. Per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$, tenim que: evidentment, $\leqslant$ serà reflexiva, perquè ja sabem que $\vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi$ i, per Monotonia, $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi$. Si tenim $\varphi/\Omega\Sigma \leqslant \psi/\Omega\Sigma$ i $\psi/\Omega\Sigma \leqslant \varphi/\Omega\Sigma$, aleshores podem afirmar $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \varphi$, que, segons la definició del segon pas, ens assegura que $\varphi \equiv \psi$ $(\Omega\Sigma)$; així que $\leqslant$ és antisimètrica. D'altra banda, si $\varphi/\Omega\Sigma \leqslant \psi/\Omega\Sigma$ i $\psi/\Omega\Sigma \leqslant \vartheta/\Omega\Sigma$, llavors $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \vartheta$. Per T.D., sabem que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi$, per Monotonia, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \psi \to \vartheta$, i, per M.P. i Tall, tenim $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \vartheta$. Novament per T.D., arribem a què $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \vartheta$, amb el que provem també la transitivitat de $\leqslant$.

Per veure que $\langle Fm/\Omega\Sigma, \leqslant\rangle$ és un reticle faltaria veure que, per tot $\varphi/\Omega\Sigma, \psi/\Omega\Sigma \in Fm/\Omega\Sigma$, existeix un element ínfim, que denotarem per $\varphi/\Omega\Sigma \wedge_{\Omega\Sigma} \psi/\Omega\Sigma$, i un suprem, $\varphi/\Omega\Sigma \vee_{\Omega\Sigma} \psi/\Omega\Sigma$. Com, pel pas 3., sabem que $\Omega\Sigma$ és una relació de congruència, veiem que l'ínfim i el suprem existeixen, i són:

$$\varphi/\Omega\Sigma \wedge_{\Omega\Sigma} \psi/\Omega\Sigma = (\varphi \wedge \psi)/\Omega\Sigma;$$
$$\varphi/\Omega\Sigma \vee_{\Omega\Sigma} \psi/\Omega\Sigma = (\varphi \vee \psi)/\Omega\Sigma.$$

El reticle $\langle Fm/\Omega\Sigma, \leqslant\rangle$ és equivalent al definit per $\langle Fm/\Omega\Sigma, \wedge_{\Omega\Sigma}, \vee_{\Omega\Sigma}\rangle$ (vegis el *Teorema C.3* de l'*Apèndix C*). Per comprovar que aquest és acotat només ens cal apreciar que els elements neutres de $Fm/\Omega\Sigma$, que anomenarem $\top_{\Omega\Sigma}$ i $\bot_{\Omega\Sigma}$, seran:

$$\top_{\Omega\Sigma} = \top/\Omega\Sigma;$$
$$\bot_{\Omega\Sigma} = \bot/\Omega\Sigma.$$

On, recordem, hem suposat que al nostre llenguatge existeix la constant $\top$, i $\bot$ serà $\bot = \neg\top$. Comprovem fàcilment que es verifica, per tot $\varphi \in Fm$, $\varphi \wedge \top \equiv \varphi$ $(\Omega\Sigma)$ i $\varphi \vee \bot \equiv \varphi$ $(\Omega\Sigma)$, donat que:

Per T.D., sabem que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \wedge \top \to \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi \wedge \top\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$, i això últim esdevé evident aplicant la propietat de $\wedge$ a l'Esquerra. També, per T.D. i la propietat de $\wedge$ a la Dreta, tenim que $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \to \varphi \wedge \top \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi \wedge \top \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \varphi$ i $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{C}l} \top$, on aquestes dues darreres expressions són elementalment certes. L'expressió $\varphi \vee \bot \equiv \varphi$ $(\Omega\Sigma)$ es comprova de manera similar, considerant les propietats a Esquerra i Dreta de $\vee$, i tenint en compte, també, que $\Sigma \cup \{\bot\}$ és un conjunt inconsistent, ja que valida tant $\top$ com $\bot = \neg\top$.

Així, hem vist que $\langle Fm/\Omega\Sigma, \wedge_{\Omega\Sigma}, \vee_{\Omega\Sigma}, \bot_{\Omega\Sigma}, \top_{\Omega\Sigma}\rangle$ és acotat. Per provar que també és complementat, podem aprofitar novament que $\Omega\Sigma$ és congruència, amb el que sabrem que la funció complement $\neg_{\Omega\Sigma}$ següent està ben definida, per tot $\varphi \in Fm$:

$$\neg_{\Omega\Sigma}(\varphi/\Omega\Sigma) \coloneqq (\neg\varphi)/\Omega\Sigma.$$

Veiem sense dificultats que $\top \equiv \varphi \vee \neg\varphi$ $(\Omega\Sigma)$, ja que, d'una banda, $\vdash_{Cl} \varphi \vee \neg\varphi \to \top$ sempre es verifica, com es pot veure aplicant T.D., i, per Monotonia, tenim que $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \vee \neg\varphi \to \top$. D'altra banda, com ja sabem que $\vdash_{Cl} \varphi \to \varphi$ i $\varphi \to \varphi = \neg\varphi \vee \varphi = \varphi \vee \neg\varphi$, i també tindrem que, per ser instància de l'axioma *(Ax1)*, $\vdash_{Cl} \varphi \vee \neg\varphi \to (\top \to \varphi \vee \neg\varphi)$; llavors, per M.P. i Tall, arribem a què $\vdash_{Cl} \top \to \varphi \vee \neg\varphi$. Un altre cop, per Monotonia, $\Sigma \vdash_{Cl} \top \to \varphi \vee \neg\varphi$. De manera semblant, igualment es pot comprovar que $\bot \equiv \varphi \wedge \neg\varphi$ $(\Omega\Sigma)$.

Comprovant que, per tot $\varphi, \psi, \vartheta \in Fm$, es verifica $\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \wedge \vartheta)$ $(\Omega\Sigma)$, que aplicant el Teorema de Completesa de la lògica proposicional resulta gairebé trivial (tot i que sintàcticament no resulta pas immediat), arribem a què $\langle Fm/\Omega\Sigma, \wedge_{\Omega\Sigma}, \vee_{\Omega\Sigma}, \neg_{\Omega\Sigma}, \bot_{\Omega\Sigma}, \top_{\Omega\Sigma}\rangle$ és distributiu i, finalment, àlgebra de Boole.

5. Seguidament, hem de provar que, per tot $\varphi \in Fm$, $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Sigma/\Omega\Sigma$. Implicació ($\Rightarrow$): si $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$, aplicant T.D. tenim $\Sigma \smallsetminus \{\psi\} \vdash_{Cl} \psi \to \varphi$, per $\psi \in \Sigma$, i, per Monotonia, $\Sigma \vdash_{Cl} \psi \to \varphi$. D'altra banda, aplicant la instància de l'axioma *(Ax1)* $\vdash_{Cl} \psi \to (\varphi \to \psi)$, i T.D., tenim que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$ i, per Tall (o, simplement, perquè hem suposat $\psi \in \Sigma$), $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$. Ajuntant els dos últims resultats, com $\psi \in \Sigma$ és arbitrària, veiem que hem provat que $\varphi \in \Sigma/\Omega\Sigma$. Implicació ($\Leftarrow$): per tot $\varphi, \psi \in Fm$ tal que $\Sigma \vdash_{Cl} \psi$, si suposem $\varphi \in \Sigma/\Omega\Sigma$, tenim que $\varphi \equiv \psi$ $(\Omega\Sigma)$, amb el que $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi$ i $\Sigma \vdash_{Cl} \psi \to \varphi$; llavors, per T.D. i Tall arribem a què $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$.

6. Finalment, hem de demostrar que $\Sigma/\Omega\Sigma = \top/\Omega\Sigma = \top_{\Omega\Sigma}$. Això es pot veure fàcilment considerant que, per tot $\varphi \in Fm$, $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \top$ sempre es verifica, i, per T.D.,

$$\Sigma \vdash_{Cl} \top \to \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\top\} \vdash_{Cl} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{Cl} \varphi;$$

amb el que podem afirmar que

$$\top/\Omega\Sigma = \{\varphi \in Fm : \Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \top \text{ i } \Sigma \vdash_{Cl} \top \to \varphi\} = \{\varphi \in Fm : \Sigma \vdash_{Cl} \varphi\}.$$

Anàlogament, tenim que, aplicant T.D.,

$$\begin{aligned}\Sigma/\Omega\Sigma &= \{\psi/\Omega\Sigma : \psi \in \Sigma\} = \{\varphi \in Fm : \Sigma \vdash_{Cl} \varphi \to \psi \text{ i } \Sigma \vdash_{Cl} \psi \to \varphi, \text{ per } \psi \in \Sigma\} \\ &= \{\varphi \in Fm : \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{Cl} \psi \text{ i } \Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{Cl} \varphi, \text{ per } \psi \in \Sigma\} = \{\varphi \in Fm : \Sigma \vdash_{Cl} \varphi\}.\end{aligned}$$

Per tant, arribem a què $\Sigma/\Omega\Sigma = \top/\Omega\Sigma = \top_{\Omega\Sigma}$.

Aleshores, pel pas 4., l'àlgebra quocient $\mathbf{Fm}/\Omega\Sigma$ és àlgebra de Boole, i, aplicant el punt 6. al demostrat a 5., tenim que, per tot $\varphi \in Fm$, $\Sigma \vdash_{Cl} \varphi$ si, i només si, $\varphi/\Omega\Sigma = \top/\Omega\Sigma = \top_{\Omega\Sigma}$. Així, veiem que, si prenem la projecció $\pi : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{Fm}/\Omega\Sigma$, que resulta un homomorfisme entre les àlgebres, tenim que $\{\pi(\psi) : \Sigma \vdash_{Cl} \psi\} = \top/\Omega\Sigma = \pi(\top)$, però, recuperant la suposició d'1., $\Sigma \nvdash_{Cl} \phi$, en deduïm que $\pi(\phi) \neq \top_{\Omega\Sigma} = \pi(\top)$. Per tant, estem veient la implicació $\Sigma \nvdash_{Cl} \varphi \Rightarrow \{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \nvDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top$, per tot $\varphi \in Fm$, que, pel contrarecíproc, ens confirma $\{\psi \approx \top : \psi \in \Sigma\} \vDash_{\mathsf{BA}} \varphi \approx \top \Rightarrow \Sigma \vdash_{Cl} \varphi$. ▲ (*Teorema 1.58*)

E Resultats auxiliars per demostrar els teoremes de caracterització

Lema E.1. *Donat un sistema deductiu $\mathcal{S}$, i K una semàntica algebraica per $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$:*

i) $\Omega_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{Th}\mathcal{S})$ és un subsemi-reticle complet i compacte de $\boldsymbol{Th}\mathsf{K}$.

ii) K és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, amb equacions definidores $\delta \approx \epsilon$ si, i només si, $\Omega_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{Th}\mathcal{S}) = \boldsymbol{Th}\mathsf{K}$.

Demostració. i) Sigui Θ_i, amb $i \in I$, un sistema de K-teories en $\Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$. Podem considerar $\Theta_i = \Omega_{\mathsf{K}}T_i$, amb $T_i \in Th\mathcal{S}$. Com Ω_{K} preserva el suprem: $\bigvee_{i\in I}^{\mathsf{K}} \Omega_{\mathsf{K}}T_i = \Omega_{\mathsf{K}}(\bigvee_{i\in I}^{\mathcal{S}} T_i) = \bigvee_{i\in I}^{\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})} \Omega_{\mathsf{K}}T_i$, amb el que tenim que, substituint: $\bigvee_{i\in I}^{\mathsf{K}} \Theta_i = \bigvee_{i\in I}^{\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})} \Theta_i$. Per tant, ja hem provat que $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$ és subsemi-reticle complet de $\mathbf{Th}\mathsf{K}$. Ara, que sigui subsemi-reticle complet ens implicarà que cada element compacte de $\Omega_{\mathsf{K}}(Th\mathcal{S})$ en $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ també serà compacte en $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$. Així, només ens quedarà estudiar què succeeix amb els elements compactes en $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$. Suposem Θ un compacte en $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$, aleshores, $H_{\mathsf{K}}\Theta$ serà compacte en $\mathbf{Th}\mathcal{S}$, perquè $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = \Theta$, ja que es verifica la premissa del segon apartat del *Lema 2.32*, i també sabem que H_{K} és un isomorfisme entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ i $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S})$. Llavors, veiem que $H_{\mathsf{K}}\Theta$ és finitament generat. Sigui Σ un conjunt de fórmules finit tal que generi $H_{\mathsf{K}}\Theta$, de manera que $H_{\mathsf{K}}\Theta = Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma)$. Aleshores, pel primer apartat del *Lema 2.31*, tenim que $\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}Cn_{\mathcal{S}}(\Sigma) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Sigma\})$. Per tant, arribem al fet que la K-teoria Θ també és finitament generada. Com estem suposant $\vDash_{\mathsf{K}}$ finitària, tenim que Θ serà compacte en $\mathbf{Th}\mathsf{K}$.

ii) Implicació ($\Rightarrow$): suposem que K és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, i sigui Δ un sistema de fórmules d'equivalència. Hem de veure $\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta$, per cada $\Theta \in Th\mathsf{K}$. Per l'apartat ii) del *Lema 2.32*, sabem que $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta \subseteq \Theta$, amb el que només ens queda comprovar l'altra implicació. Sigui $\varphi \approx \psi \in \Theta$. Com hem suposat que K és semàntica algebraica equivalent, tenim que $\delta(\Delta(\varphi,\psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi,\psi)) \in \Theta$. De la definició de H_{K}, deduïm que $\Delta(\varphi,\psi) \in H_{\mathsf{K}}$, per tant, $\delta(\Delta(\varphi,\psi)) \approx \epsilon(\Delta(\varphi,\psi)) \in \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta$. Tornant a aplicar que K és semàntica algebraica equivalent, arribem a què $\varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta$. Així, veiem que $\Theta \subseteq \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta$ i, per tant, $\Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = \Theta$.

Implicació ($\Leftarrow$): Suposem ara que $\Omega_{\mathsf{K}}(\mathbf{Th}\mathcal{S}) = \mathbf{Th}\mathsf{K}$. Aleshores, pel *Lema 2.32* podem entendre H_{K} com l'invers de Ω_{K}, que és isomorfisme entre $\mathbf{Th}\mathsf{K}$ a $\mathbf{Th}\mathcal{S}$. Prenem ara $\Theta = Cn_{\mathsf{K}}(\{p \approx q\})$, per p i q dues variables fixes. Com Θ és finitament generat, és compacte en $\mathbf{Th}\mathsf{K}$. Així, també sabem que $H_{\mathsf{K}}\Theta$ serà compacte en $\mathbf{Th}\mathcal{S}$, i finitament generat. Sigui un conjunt finit de fórmules $\varphi_i(p,q,p_0,\ldots,p_k)$, amb $i \in \mathbb{N}$ i $i \leqslant n$, que generin $H_{\mathsf{K}}\Theta$, de manera que les variables $p_0,\ldots,p_k$ són totes les variables diferents de p i q que ocorren a alguna de les φ_i. Aplicant els *Lemes 2.32 i 2.31*, tenim:

$$\Theta = \Omega_{\mathsf{K}}H_{\mathsf{K}}\Theta = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\varphi_i) \approx \epsilon(\varphi_i) : i \leqslant n\}).$$

Com havíem agafat $\Theta = Cn_{\mathsf{K}}(\{p \approx q\})$, veiem que podem afirmar $\{\delta(\varphi_i) \approx \epsilon(\varphi_i) : i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}} p \approx q$.

Sigui σ una substitució tal que deixa p i q fixes, però porta cada p_i a p. Com sabem que $\vDash_{\mathsf{K}}$ és estructural, concloem que $\{\delta(\sigma(\varphi_i)) \approx \epsilon(\sigma(\varphi_i)) : i \leqslant n\} \vDash_{\mathsf{K}} \sigma(p) \approx \sigma(q)$, on tenim que $\sigma(p) \approx \sigma(q) = p \approx q$. Així, veiem que $\Theta \subseteq \Omega_{\mathsf{K}}[Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\varphi_i) : i \leqslant n\})]$. Si apliquem H_{K} als dos costats, tenim que $H_{\mathsf{K}}\Theta \subseteq Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\varphi_i) : i \leqslant n\})$, ja que hem vist que, en aquest cas, H_{K} és l'invers de Ω_{K}.

Per obtenir l'altra implicació, $Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\varphi_i) : i \leqslant n\}) \subseteq H_{\mathsf{K}}\Theta$, apreciem que $\delta(\varphi_i) \approx$

$\epsilon(\varphi_i) \in \Omega_{\mathsf{K}} H_{\mathsf{K}} \Theta = \Theta$ per tot $i \leqslant n$. Això ens porta que $\{p \approx q\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\varphi_i) \approx \epsilon(\varphi_i)$. Si apliquem la substitució σ, que, recordem, manté fixades p i q, tindrem $\{p \approx q\} \vDash_{\mathsf{K}} \delta(\sigma(\varphi_i)) \approx \epsilon(\sigma(\varphi_i))$, és a dir, com $\Theta = Cn_{\mathsf{K}}(\{p \approx q\})$ és K-teoria, $\delta(\sigma(\varphi_i)) \approx \epsilon(\sigma(\varphi_i)) \in \Theta$, per tot $i \leqslant n$. Així, arribem a què, $\sigma(\varphi_i) \in H_{\mathsf{K}}\Theta$ per tot $i \leqslant n$. Per tant, hem aconseguit veure que $H_{\mathsf{K}}\Theta = Cn_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\varphi_i) : i \leqslant n\})$, i aquesta igualtat ens assegura que K és semàntica algebraica de $\mathcal{S}$.

Per veure que K també és semàntica algebraica equivalent a $\mathcal{S}$, definim el sistema de fórmules $\Delta_i(p,q) = \sigma(\varphi_i) = \varphi_i(p,q,p,\ldots,p)$, per $i \leqslant n$. Considerant que $\Theta = \Omega_{\mathsf{K}} H_{\mathsf{K}} \Theta = \Omega_{\mathsf{K}} Cn_{\mathcal{S}}(\{\Delta(p,q)\}) = Cn_{\mathsf{K}}(\{\delta(\vartheta) \approx \epsilon(\vartheta) : \vartheta \in \Delta(p,q)\})$, i la estructuralitat de $\vDash_{\mathsf{K}}$, advertim fàcilment que $\{p \approx q\} \mathrel{=\!\mid\!\vDash_{\mathsf{K}}} \delta(\Delta(p,q)) \approx \epsilon(\Delta(p,q))$. ▲ (*Lema 2.33*)

Lema E.2. *Assumint que $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ preserva l'ordre, es verifica:*

i) $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(\bigcap_{i\in I} T_i) = \bigcap_{i\in I} \Omega_{\boldsymbol{Fm}} T_i$, per tot sistema T_i, $i \in I$, de teories de $\mathcal{S}$, un sistema deductiu. Per tant, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S}) = \{\Omega_{\boldsymbol{Fm}} T : T \in Th\mathcal{S}\}$ és tancat sota interseccions arbitràries.

ii) $\sigma^{-1}(\Omega_{\boldsymbol{Fm}} T) = \Omega_{\boldsymbol{Fm}} \sigma^{-1}(T)$ per tot $T \in Th\mathcal{S}$ i tota substitució exhaustiva σ. Per tant, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota les inverses de substitucions exhaustives.

Demostració.

i) Donat que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ preserva l'ordre, $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\bigcap_{i\in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \Omega_{\mathbf{Fm}} T_i$. L'altra inclusió es veu també ràpidament considerant que $\bigcap_{i\in I} \Omega_{\mathbf{Fm}} T_i$ és compatible amb $\bigcap_{i\in I} T_i$: si $\langle\varphi,\psi\rangle \in \bigcap_{i\in I} \Omega_{\mathbf{Fm}} T_i$ i $\varphi \in \bigcap_{i\in I} T_i$, llavors $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T_i$ i $\varphi \in T_i$ per tot $i \in I$; per la definició de la relació de Leibniz, sabem que cada $\Omega_{\mathbf{Fm}} T_i$ és compatible amb T_i, així que tenim que $\psi \in T_i$ per tota $i \in I$, que implica que $\psi \in \bigcap_{i\in I} T_i$. Com, per definició, $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\bigcap_{i\in I} T_i)$ és la congruència més gran compatible amb $\bigcap_{i\in I} T_i$, tenim $\bigcap_{i\in I} \Omega_{\mathbf{Fm}} T_i \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}(\bigcap_{i\in I} T_i)$.

ii) Sigui $T \in Th\mathcal{S}$ i σ una substitució exhaustiva. Veiem, primer, que $\sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$ és congruència: com $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ és relació d'equivalència, $\sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$ també ho serà. Suposem ara $\langle a_i, b_i\rangle \in \sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$, per tot $a_i, b_i \in \sigma^{-1}(T)$ i tot $i \leqslant n$, amb $n \geqslant 1$. Aleshores, veiem que $\langle\sigma(a_i), \sigma(b_i)\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$. Donat que $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ és congruència, tenim que, per tot $\lambda \in L$ d'arietat n, $\langle\lambda^{\mathbf{Fm}}(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)), \lambda^{\mathbf{Fm}}(\sigma(b_1),\ldots,\sigma(b_n))\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$. Ara, com sabem que les substitucions mantenen les connectives, les operacions, podem afirmar que $\langle\sigma(\lambda^{\mathbf{Fm}}(a_1,\ldots,a_n)), \sigma(\lambda^{\mathbf{Fm}}(b_1,\ldots,b_n))\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$ i, per tant, arribem a què $\langle\lambda^{\mathbf{Fm}}(a_1,\ldots,a_n), \lambda^{\mathbf{Fm}}(b_1,\ldots,b_n)\rangle \in \sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$, amb el que veiem que $\sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$ és congruència.

Vegem que també n'és compatible: sigui $\langle\varphi,\psi\rangle \in \sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$, $\varphi \in \sigma^{-1}(T)$. Llavors, $\langle\sigma(\varphi), \sigma(\psi)\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$, i $\sigma(\varphi) \in T$. Com $\Omega_{\mathbf{Fm}} T$ és compatible amb T, llavors també $\sigma(\psi) \in T$. Aleshores, tenim que $\psi \in \sigma^{-1}(T)$. Veiem, per tant, que $\sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$ és compatible amb T, amb el que obtenim la primera inclusió $\sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T) \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T)$, ja que sabem que aquesta última és la congruència més gran compatible amb $\sigma^{-1}(T)$.

Per provar l'altra inclusió hem de demostrar que $\langle\sigma(\varphi), \sigma(\psi)\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} T$, per tot $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T)$. Provem-ho per reducció a l'absurd: suposem que existeix una fórmula ϑ amb una variable p i tal que $\vartheta[\sigma(\varphi)] \in T$ i $\vartheta[\sigma(\psi)] \notin T$, o viceversa. Com σ és exhaustiva, podem aplicar el *Lema 2.41*, amb el que veiem que existeix una fórmula ϑ', amb una variable q, tal que $\sigma(\vartheta'[\varphi/q]) = \vartheta[\sigma(\varphi)/p]$ i $\sigma(\vartheta'[\psi/q]) = \vartheta[\sigma(\psi)/p]$. Llavors, $\vartheta'[\varphi/q] \in \sigma^{-1}(T)$ i $\vartheta'[\psi/q] \notin \sigma^{-1}(T)$. Arribem, per tant, a què $\langle\varphi,\psi\rangle \notin \Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T)$, ja que, en altre cas, $\Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T)$ no seria compatible amb $\sigma^{-1}(T)$. Però, això últim es contradiu amb la hipòtesi inicial $\langle\varphi,\psi\rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T)$, amb el que deduïm la inclusió $\Omega_{\mathbf{Fm}} \sigma^{-1}(T) \subseteq \sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}} T)$. ▲ (*Lema 2.42*)

Lema E.3. *Si $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ preserva unions de conjunts dirigits, llavors, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S}) = Th\mathsf{K}$, per $\mathsf{K} = \{\boldsymbol{Fm}/\Theta : \Theta \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$.*

Demostració. Primerament, fixem-nos que considerar que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ preserva unions de conjunts dirigits implica que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ també preserva l'ordre, i que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota unions de conjunts dirigits. Llavors, podem aplicar el *Lema 2.42*, i afirmar que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota interseccions arbitràries i sota les inverses de substitucions exhaustives.

Veiem fàcilment la primera inclusió ($\subseteq$), adonant-nos que cada $\Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és el nucli de la relació de la projecció de $\mathbf{Fm}$ sobre $\mathbf{Fm}/\Theta \in \mathsf{K}$, amb el que resulta evident que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S}) \subseteq Th\mathsf{K}$, donat que ja hem vist al *Lema 2.44* que els nuclis de relacions són K-teories.

Provem ara l'altra inclusió ($\supseteq$): volem veure que tota K-teoria Φ, $\hat{\Phi}$ per ser precisos, pertany també a $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$. Suposem primer que Φ és finitament generat, llavors verificarà $\Phi = Cn_{\mathsf{K}}(\Psi)$ per algun $\Psi \subseteq \Phi$ finit. Pel *Lema 2.44*, sabem que Φ es pot expressar com la intersecció de nuclis de relacions d'homomorfismes $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{Fm}/\Theta$, per $\mathbf{Fm}/\Theta \in \mathsf{K}$. El fet que Ψ sigui finitament generat garanteix que tots aquests homomorfismes satisfan la propietat de la hipòtesi del *Lema 2.45*, i aplicant-lo arribarem on volem:

Suposem $\varphi \approx \psi \notin \Phi$, amb el que sabem que $\Psi \not\models_{\mathsf{K}} \varphi \approx \psi$. Existeix, per tant, algun homomorfisme $h : \mathbf{Fm} \longrightarrow \mathbf{Fm}/\Theta$ per algun $\mathbf{Fm}/\Theta \in \mathsf{K}$, tal que $h(\xi) = h(\eta)$ per cada $\xi \approx \eta \in \Psi$, però $h(\varphi) \neq h(\psi)$. Com, per suposició, Ψ i $\varphi \approx \psi$ tenen un nombre finit de variables, podem considerar que h verifica la propietat del *Lema 2.45*. Sigui Λ el nucli de la relació d'h. Llavors, $\Psi \subseteq \Lambda$ i $\varphi \approx \psi \notin \Lambda$, i tenim que $\Phi = Cn_{\mathsf{K}}(\Psi) \subseteq \Lambda$, perquè Λ és teoria de K. Llavors, podem escriure Φ com la intersecció d'una família de Λ_i nuclis de relacions d'h_i, amb h_i un homomorfisme per cada $\varphi_i \approx \psi_i \notin \Phi$, per $i \in I$. Però, aplicant el *Lema 2.45*, tenim que cada Λ_i nucli de la relació d'h_i és de la forma $\sigma^{-1}(\Theta)$, per algun $\Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ i alguna substitució exhaustiva σ. Llavors, $\Lambda_i \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$, ja que sabem, pel segon apartat del *Lema 2.42*, que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota les inverses de substitucions exhaustives, donat que hem vist que $\Omega_{\mathbf{Fm}}$ preserva l'ordre. Finalment, $\Phi = \bigcap_{i \in I} \Lambda_i$ també hi pertanyerà a $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$, pel fet de ser $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ tancat sota interseccions arbitràries.

Suposem ara que Φ és una teoria de K, sense la necessitat de ser finitament generada. Veiem que podem definir $ThF(\Phi) = \{Cn_{\mathsf{K}}(\Psi) : \Psi \subseteq \Phi, \Psi \text{ finit}\}$. Llavors, $\Phi = \bigcup ThF(\Phi)$. Però, tenim que $ThF(\Phi)$ és subconjunt de $Th\mathsf{K}$, ja que és finit, amb el que arribem a què $\Phi \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$, perquè $ThF(\Phi)$ és dirigit per la inclusió, i sabem que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$ és tancat sota unions de conjunts dirigits. Així, concloem que $Th\mathsf{K} \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$. ▲ (*Lema 2.46*)

Lema E.4. *Suposem que $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ és injectiu i preserva unions de conjunts dirigits. Llavors, $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}$ commuta amb substitucions exhaustives.*

Demostració. Sigui σ una substitució exhaustiva i T una teoria de $\mathcal{S}$. Prenem $\mathsf{K} = \{\mathbf{Fm}/\Theta \in \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})\}$. Recordem les funcions definides al *Lema 2.27* i al *Lema 2.29*, respectivament: $\sigma_{\mathcal{S}}(T) = Cn_{\mathcal{S}}\sigma(T)$, i $\sigma_{\mathsf{K}}(\Theta) = \{\sigma_{\mathsf{K}}(\varphi) \approx \sigma_{\mathsf{K}}(\psi) : \varphi \approx \psi \in \Theta\} = Cn_{\mathsf{K}}\sigma(\Theta)$, per $\Theta \in Th\mathsf{K}$. Volem veure que $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) = \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T)$. Considerem, primer, la inclusió $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T)$:

Ho veurem per reducció a l'absurd. Sigui $\langle \varphi, \psi \rangle \in \sigma(\Omega_{\mathbf{Fm}}T)$. Com σ és exhaustiva, tenim que existeixen $\varphi', \psi' \in Fm$ tals que $\varphi = \sigma(\varphi')$ i $\psi = \sigma(\psi')$, i es donarà $\langle \varphi', \psi' \rangle \in \Omega_{\mathbf{Fm}}T$. Suposem $\langle \varphi, \psi \rangle \notin \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T)$, amb:

$$\vartheta[\varphi/p] \in \sigma_{\mathcal{S}}(T); \qquad \vartheta[\psi/p] \notin \sigma_{\mathcal{S}}(T).$$

Com σ és exhaustiva, aplicant el *Lema 2.41*, veiem que existeix una fórmula ϑ' amb una variable q tal que:

$$\sigma(\vartheta'[\varphi'/q]) = \vartheta[\varphi/p] \in \sigma_{\mathcal{S}}(T); \qquad \sigma(\vartheta'[\psi'/q]) = \vartheta[\psi/p] \notin \sigma_{\mathcal{S}}(T).$$

Llavors,

$$\vartheta'[\varphi'/q] \in \sigma^{-1}(\sigma_{\mathcal{S}}(T)); \qquad \vartheta'[\psi'/q] \notin \sigma^{-1}(\sigma_{\mathcal{S}}(T)).$$

Ajuntant-les, deduïm $\langle \varphi', \psi' \rangle \notin \Omega_{\mathbf{Fm}}(\sigma^{-1}(\sigma_{\mathcal{S}}(T)))$, ja que, per definició, sabem que $\Omega_{\mathbf{Fm}}(\sigma^{-1}(\sigma_{\mathcal{S}}(T)))$ ha de ser compatible amb $\sigma^{-1}(\sigma_{\mathcal{S}}(T))$. Per tant, $\langle \varphi', \psi' \rangle \notin \Omega_{\mathbf{Fm}}(T)$, arribant, llavors, a una contradicció. Concloem, així, que $\sigma(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T)$ i, d'aquí, en traiem que $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T)$.

Veiem ara l'altra inclusió: apreciem primerament que $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T)$ és una teoria de K, ja que $\Omega_{\mathbf{Fm}}T$ ho és i, per definició, la imatge de σ_K d'una teoria equacional també és teoria equacional. Per tant, $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) \in Th\mathsf{K} = \Omega_{\mathbf{Fm}}(Th\mathcal{S})$, per la definició que hem fet de K. Aleshores, $\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T) = \Omega_{\mathbf{Fm}}S$ per a alguna teoria $S \in Th\mathcal{S}$. Se segueix que, com $\Omega_{\mathbf{Fm}}T \subseteq \sigma^{-1}(\sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T)) = \sigma^{-1}(\Omega_{\mathbf{Fm}}S) = \Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma^{-1}(S)$, llavors, $T \subseteq \sigma^{-1}(S)$, amb el que podem dir que $\sigma(T) \subseteq S$, perquè sigma és exhaustiva. D'això últim, arribem a què $\sigma_{\mathcal{S}}(T) \subseteq S$ i, llavors, $\Omega_{\mathbf{Fm}}\sigma_{\mathcal{S}}(T) \subseteq \Omega_{\mathbf{Fm}}S = \sigma_{\mathsf{K}}(\Omega_{\mathbf{Fm}}T)$, com volíem veure. ▲ (*Lema 2.47*)