



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aplicació de models GARCH a sèries temporals financeres

Autor: Guillem Arbós Arrese

Director: Dr. Josep Vives

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2022

Abstract

The purpose of this work is to study the GARCH models and their application to financial time series. To achieve this, I first studied the basis of econometrics, the previous models to GARCH models and the reasons why they failed. After this, I researched GARCH models and some extensions of these models. Finally, I applied the knowledge learned in the theoretical part of this work in order to fit a model into two different kind of financial time series: stock exchange and commodity exchange.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és estudiar els models GARCH i les seves aplicacions en sèries temporals financeres. Per aconseguir-ho, prèviament he estudiat els fonaments econòmètrics, els models previs als models GARCH i els motius pels quals van fracassar. També he investigat els models GARCH i alguna de les seves extensions. Finalment, he aplicat tots els coneixements tractats en la part teòrica del treball per tal de modelitzar dos tipus de sèries temporals financeres diferents: accions de borsa i preus de la borsa de matèries primeres.

Agraïments

Vull agrair a la meva família per estar sempre al meu costat i recolzar-me en tot el que faig. També m'agradaria agrair als meus amics de la universitat, Matemàtics, per tots els moments que hem compartit al llarg d'aquest camí i els que vindran. Per últim agrair a l'Albert i el Gerard per haver-me acompanyat en gran part de la meva vida.

Índex

1	Introducció	1
2	Conceptes previs	3
2.1	Definicions	3
2.2	Exemples bàsics	6
3	Models ARMA	7
4	Models ARCH / GARCH	9
4.1	Sèries financeres	9
4.2	ARCH(1)	10
4.3	Propietats del procés d'innovació ϵ	11
4.4	Propietats del procés Y	12
4.5	Distribució del procés de l'error	13
4.6	Extensions	13
4.7	Estacionarietat d'un procés GARCH (p,q)	17
4.8	Curtosi	18
4.9	Estimació	18
4.9.1	IID	19
4.9.2	Model regressiu amb error heteroscedàstic	20
4.9.3	Model regressiu amb error ARCH	22
4.9.4	GARCH	23
4.10	Test	24
4.10.1	Test de Ljung Box	24
4.10.2	Test de Shapiro Wilk	24
4.10.3	Test de bondat d'ajustament de Pearson	25
4.10.4	Test d'homoscedasticitat	25
4.10.5	Test de Portmanteau	27
4.11	Criteris per seleccionar el millor model	27
5	Anàlisi pràctic	29
5.1	Accions Santander	29
5.2	Preu de l'or	40
6	Conclusions	49
7	Annex	51

1 Introducció

Els models de sèries temporals van ser inicialment introduïts per motius descriptius, predicció i correccions estacional o per control de dinàmiques. En els anys setanta, l'estudi de sèries temporals es va concentrar en el tipus de models anomenats models autoregressius de mitjana mòbil, ARMA, que eren molt fàcils d'implementar. En aquest tipus de model, el valor actual de la sèrie s'escriu com una funció lineal dels seus valors retardats i els valors actuals i passats d'algun procés de soroll. Aquest tipus de model presenta dos inconvenients: el primer és que la seva linealitat restringeix el tipus de dinàmica per la que pot estimar-se amb correcció. El segon és que en general, s'utilitza sense imposar restriccions prèvies en els paràmetres autoregressius i en els de la mitjana mòbil.

Els models ARMA no s'ajusten gaire bé amb dades financeres i problemes monetaris pel fet que les sèries temporals financeres presenten diverses formes de dinàmiques no lineals. La principal dinàmica no lineal és que la variància no és constant al llarg del temps, és a dir, hi ha una forta dependència de la variabilitat instantània de la sèrie amb els seus valors passats. Davant d'aquesta problemàtica, l'any 1982, a partir de la metodologia Box-Jenkins, Engle introdueix el model autoregressiu d'heteroscedasticitat condicional, ARCH.

Tot i les virtuts dels models ARCH, un punt negatiu de pes d'aquests models ha sigut l'estimació. És llavors quan apareixen els models GARCH, una de les famílies de models més utilitzades a dia d'avui per a l'anàlisi de la volatilitat de sèries temporals financeres. Els models GARCH expliquen la variància condicional a partir del quadrat dels errors passats, igual que els models ARCH però, a més, incorporen un terme de les variàncies condicionals passades.

El projecte

L'objectiu d'aquest treball és estudiar els models GARCH i les seves aplicacions. Al llarg d'aquesta memòria es busca assolir objectius com analitzar els models previs i els motius que van provocar la necessitat de buscar altres models alternatius per sèries temporals financeres, estudiar com tractar amb sèries temporals financeres i finalment explicar els models GARCH i les seves variants. A més, es proporcionaran eines econòmiques que ens serviran per modelitzar dues sèries temporals financeres: el preu de les accions del Banc Santander i el preu de l'or en dòlars/unça.

Estructura de la Memòria

El treball s'estructura en dos grans blocs diferenciats. El primer bloc serà de caire teòric, on es treballaran els diferents conceptes i resultats necessaris per a la comprensió del model ARCH i, en el segon, s'utilitzaran els coneixements prèviament assolits per modelitzar dues sèries temporals financeres diferents. El primer gran bloc està format pels capítols 2, 3 i 4. El capítol 2 és una breu introducció de conceptes previs, aquests conceptes són les bases estadístiques i econòmiques sobre les quals construirem l'estudi dels models ARCH/GARCH. En el tercer capítol estudiarem els models ARMA; degut a la seva problemàtica per modelitzar sèries temporals financeres ens derivarà a l'estudi dels models ARCH/GARCH, que es portarà a terme en el capítol 4. En el capítol 4 s'abordarà temes com la manipulació de les dades financeres, els models ARCH, GARCH i totes les seves

variants i diferents eines que emprarem a la part pràctica.

El segon gran bloc està format pel capítol 5. En aquest capítol es discutiran quins són els models que millor s'ajusten a les sèries del preu de les accions del Banc Santander i del preu de l'or en les mostres agafades. Un cop escollits els models, es realitzaran una sèrie de prediccions que, posteriorment, es compararan amb les dades que s'han obtingut a la realitat.

2 Conceptes previs

En aquest capítol s'utilitza resultats vists a [3] i [8]

2.1 Definicions

Definició 2.1. *Un procés estocàstic és una seqüència de variables aleatòries que estan indexades per un conjunt T :*

$$\{X_t, t \in T\}.$$

El procés estocàstic pot ser a temps discret, amb $T = \mathbb{N}$ o $T = \mathbb{Z}$ o bé també pot ser a temps continu, amb $T = \mathbb{R}$ o bé $T = [0, \infty)$. En aquest treball, només considerarem processos estocàstics discrets.

Direm que una sèrie temporal és la realització d'un procés estocàstic.

Donada una variable aleatòria X denotem l'esperança de X per $\mathbb{E}(X)$, la variància per $\mathbb{V}(X)$ i donades dues variables aleatòries X i Y denotem la seva covariància com $\mathbb{C}(X, Y)$.

Definició 2.2. *Es diu que un procés estocàstic és de segon ordre si es compleix:*

$$\mathbb{E}[X_t^2] < \infty, \forall t \geq 0.$$

Proposició 2.1.1. *Si X és una variable aleatòria d'un procés estocàstic de segon ordre, aleshores la variància està ben definida i és finita.*

Demostració. Sabem per la desigualtat de Cauchy-Schwarz que

$$\mathbb{E}[X_t] \leq (\mathbb{E}[X_t^2])^{1/2} < \infty.$$

Lavors com

$$\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - (\mathbb{E}(X_t))^2,$$

obtenim que $\mathbb{V}(X_t) < \infty$. □

Proposició 2.1.2. *Si X i Y són dues variables aleatòries de qualsevol procés estocàstic de segon ordre, llavors la covariància està ben definida.*

Demostració.

$$\begin{aligned} |\mathbb{C}(X, Y)| &= |\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]| \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)| |Y - \mathbb{E}(Y)|] \\ &\leq (\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^2])^{1/2} (\mathbb{E}[|Y - \mathbb{E}(Y)|^2])^{1/2} = \mathbb{V}(X)^{1/2} \mathbb{V}(Y)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Definició 2.3. *Si X i Y són dues variables aleatòries discretes, direm que l'esperança condicional de X donat el cas $Y=y$ és:*

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_{x \in X} x P(X = x|Y = y) = \sum_{x \in X} x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Definició 2.4. La variància condicional d'una variable aleatòria Y donada una altra variable aleatòria X és:

$$\mathbb{V}(Y|X) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X\right).$$

Definició 2.5. Direm que un procés $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ és estrictament estacionari si per qualsevol t_1, \dots, t_n i l , els vectors $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+l}, \dots, X_{t_n+l})$ tenen la mateixa llei.

Definició 2.6. Direm que un procés és estacionari o feblement estacionari si:

1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu, \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{C}(X_t, X_{t+l}) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_{t+l} - \mathbb{E}[X_{t+l}])] = \gamma(l), \forall t, l \in \mathbb{Z}$ i on γ denota una certa funció definida en \mathbb{N} . Degut a la simetria de la covariància, $\gamma(-l) = \gamma(l)$. La funció γ s'anomena funció d'autocovariància.

Definició 2.7. Un procés és Gaussià si $\forall t_1, \dots, t_n$, el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ té una llei normal multidimensional.

L'estacionarietat estricta implica estacionarietat feble. En general, el recíproc no és cert. Si el procés és Gaussià en el sentit que totes les distribucions finites són Gaussianes, aleshores feblement estacionari implica estacionarietat estricta.

Definició 2.8. Anomenem funció d'autocorrelació a la funció definida a \mathbb{N} per $\rho(k) := \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, k \in \mathbb{Z}$.

Tenim que $|\gamma(l)| \leq \gamma(0), \forall l \geq 0$ i per tant, $-1 \leq \rho(l) \leq 1, \forall l \geq 0$. El valor l s'anomena retard.

La representació gràfica de l'autocorrelació ve donada per $\{\rho(l), l \geq 0\}$ i s'anomena correlograma.

Podem observar que $\gamma(0) \geq 0$. Si $\gamma(0) = 0$ llavors tenim $X_j = \mu, \mu \in \mathbb{R}, \forall j \geq 1$. Si $\gamma(0) \neq 0$ llavors $\rho(0) = 1$.

Definició 2.9. Sigui $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ una sèrie temporal estacionària de segon ordre centrada. La funció d'autocorrelació parcial es defineix com una aplicació

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1],$$

tal que $\alpha(0) = 1, \alpha(1) = \rho(1)$ i per $l \geq 2$,

$$\alpha(l) = \rho(X_1 - P(X_1|X_2, \dots, X_l), X_{l+1} - P(X_{l+1}|X_2, \dots, X_l)),$$

on $\alpha(l)$ és l'autocorrelació entre X_1 i X_{l+1} després d'eliminar la influència de les variables X_2, \dots, X_l .

Definició 2.10. Anomenem curtosi a la mesura estadística que determina el grau de concentració que presenten els valors d'una variable al voltant del "pic" de la distribució de probabilitat. Definim $k = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ on μ_i és el moment centrat d'ordre i .

Una distribució pot ser de tres tipus, en funció de la curtosi:

1. Leptocúrtica: Existeix una gran concentració de valors al voltant de la seva mitjana i presenta un apuntament del pic i unes cues pesades ($k > 3$).
2. Mesocúrtica: Existeix una concentració normal dels valors al voltant de la seva mitja ($k = 3$).
3. Platicúrtica: Existeix una concentració baixa dels valors al voltant de la seva mitja i presenta un pic baix i unes cues amples ($k < 3$).

Definició 2.11. Una filtració \mathbb{F} és una seqüència creixent de σ -àlgebres en un espai mesurable. És a dir, donat un espai mesurable (Ω, \mathbb{F}) , una filtració és una seqüència de σ -àlgebres $\{\mathbb{F}_t\}_{t \geq 0}$ amb $\mathbb{F}_t \subseteq \mathbb{F}$ on cada t és un nombre real no negatiu i donats $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathbb{F}_{t_1} \subseteq \mathbb{F}_{t_2}$.

En el nostre cas, essent l'índex i el paràmetre de temps d'un procés estocàstic, llavors la filtració pot interpretar-se com la representació de tota la informació històrica disponible sobre el procés fins a un determinat instant.

En els models de sèries temporals és habitual afegir un soroll blanc anomenat terme de pertorbació o terme d'error i que denotarem per ϵ_t . El terme de pertorbació és aleatori i serveix per explicar els esdeveniments que no es poden controlar.

Definició 2.12. Direm que un model de regressió lineal presenta homoscedasticitat quan la variància del terme de pertorbació és constant al llarg de totes les observacions, altrament dit:

$$\mathbb{E}(\epsilon_i^2) = \sigma_\epsilon^2, \forall i,$$

on σ_ϵ^2 és un escalar constant per tot i . Quan no es compleix aquesta condició direm que existeix heteroscedasticitat, és a dir, quan la variància de cada terme de pertorbació no sigui constant.

Definició 2.13. Considerem martingala com una seqüència de variables aleatòries, un procés estocàstic, pel qual, en un moment determinat, l'esperança condicional del següent valor de la seqüència és igual al valor present.

Una martingala a temps discret és un procés estocàstic X_1, X_2, X_3, \dots que satisfà per qualsevol temps n :

$$\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \quad \mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = X_n.$$

Una sèrie estocàstica X és una seqüència de diferència de martingala (MDS) si la seva esperança amb respecte al passat és zero. X_t és una MDS si compleix les dues condicions següents:

$$|X_t| < \infty, \quad \mathbb{E}(X_t|\mathbb{F}_{t-1}) = 0, \quad \forall t.$$

Per construcció, això implica que si Y_t és una martingala, llavors $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ serà una MDS.

2.2 Exemples bàsics

A continuació mostrarem alguns dels casos més habituals de models de sèries temporals.

1. Soroll IID

Diem que $\{X_k, k \geq 1\}$ és un soroll independent i idènticament distribuït (IID) si les variables aleatòries són i.i.d amb mitjana μ i desviació estandard σ . En particular, $\rho(k) = 1$ si $k=0$ i $\rho(k) = 0$ si $k > 0$. Aquest és un model per sèries temporals purament aleatòries.

2. Passeig aleatori

Sigui $\{X_k, k \geq 1\}$ un soroll IID. Les sèries $S_k, k \geq 1$ amb $S_k := X_1 + \dots + X_k, k \geq 1$ s'anomenen passeig aleatori. Aquestes sèries no són estacionàries.

3. Soroll blanc

Diem que un procés $\{X_k, k \geq 1\}$ és un soroll blanc si totes les variables tenen esperança μ , variància σ^2 i són no correlacionades. Observem que un soroll IID és un cas particular d'un soroll blanc, ja que la independència implica no correlació.

4. Soroll blanc Gaussià

Diem que un procés $\{X_k, k \geq 1\}$ és un soroll blanc Gaussià si és un soroll blanc i qualsevol vector $(X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ té llei normal. En particular, com que la no correlació d'un vector normal implica independència, aquest procés també és un soroll IID.

3 Models ARMA

Els models de sèries temporals van ser introduïts inicialment per motius descriptius, predicció i correccions estacionals, o per control de dinàmiques. En els anys 70, la investigació es va centrar en una classe de model de sèries temporals, els anomenats models autoregressius de mitjana mòbil (ARMA). En aquest capítol s'utilitzen conceptes vists a [8].

Definició 3.1. *Un model autoregressiu centrat d'ordre p , $AR(p)$, es pot escriure com:*

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \epsilon_t,$$

on $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ són els paràmetres del model i ϵ_t és un soroll blanc centrat amb variància $\sigma^2 > 0$.

L'operador retard L , actua sobre la variable desfasant el seu valor tants períodes com indiqui el seu exponent, per exemple:

$$LX_t = X_{t-1}, \quad L^2X_t = X_{t-2}, \quad L^{12}X_t = X_{t-12}.$$

Aplicant l'operador retard a un procés autoregressiu ens queda:

$$X_t = \varphi_1 LX_t + \varphi_2 L^2X_t + \dots + \varphi_p L^pX_t + \epsilon_t \Rightarrow (1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p)X_t = \epsilon_t.$$

Llavors anomenem polinomi autoregressiu a $\Phi_p(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p$.

En els models autorregressius, la condició necessària i suficient d'estacionarietat feble requereix que totes les arrels del polinomi autorregressiu siguin, en mòdul, superiors a la unitat.

Definició 3.2. *Un model de mitjana mòbil, $MA(q)$, és un procés $Y_j, j \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$Y_j = \epsilon_j - \theta_1 \epsilon_{j-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{j-q},$$

on $\theta_1, \dots, \theta_q$ són nombres reals i ϵ és un soroll blanc amb variància σ^2 .

Es diu polinomi de mitjanes mòbils al polinomi $\Theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$.

Definició 3.3. *Siguin p, q dos nombres naturals i ϵ un soroll blanc amb variància σ^2 . Llavors un model ARMA (p, q) es pot definir com:*

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q}.$$

O altrament escrit,

$$\Phi_p(L)X_t = \Theta_q \epsilon_t.$$

L'operador diferència (Δ) es defineix com una funció de l'operador retard:

$$\Delta = (1 - L), \quad \Delta^2 = (1 - L)^2, \quad \dots, \quad \Delta^n = (1 - L)^n.$$

Definició 3.4. *Sigui d un enter positiu. Direm que un procés (X_t) és un procés $ARI-MA(p, d, q)$ si, per $k=0, \dots, d-1$, el procés $(\Delta^k X_t)$ no és estacionari i $(\Delta^d X_t)$ és un procés $ARMA(p, q)$.*

Un procés ARIMA(p,d,q) ve definit per

$$\Phi_p(L)\Delta^d X_t = \Theta_q \epsilon_t.$$

Definició 3.5. *Siguin d i s enters positius. Direm que un procés (X_t) és un procés SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s si, per $k=0, \dots, d-1$, el procés $(\Delta^k X_t)$ no és estacionari i $(\Delta^d X_t)$ és un procés ARMA(p,q) i si, per $j=0, \dots, D-1$, el proces $(\Delta_s^j X_t)$ no és estacionari i $(\Delta_s^D X_t)$ és un procés ARMA(P,Q).*

Un procés SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s ve definit per

$$\Phi_p(L)\Phi_P(L^s)\Delta_s^D \Delta^d X_t = \Theta_q(L)\Theta_Q(L^s)\epsilon_t.$$

Els models ARMA són el tipus de model més utilitzat per predir processos estacionaris de segon ordre. Aquests models són fàcils d'utilitzar degut a que són lineals en les variables i alguns paràmetres a la vegada. Aquesta linealitat produeix que les fórmules de predicció siguin fàcils d'implementar i també permet estimar els paràmetres mitjançant el mètode de mínims quadrats lineal. A més, els models ARMA són una aproximació parsimoniosa d'un model de mitjanes mòbils d'ordre infinit.

4 Models ARCH / GARCH

La teoria dels models ARMA i les seves extensions consisteixen en proposar una estructura funcional per a sèries temporals tals que el residu es converteix en soroll blanc. Recordem que un soroll blanc centrat és una col·lecció de variables aleatòries centrades no correlacionades amb variància constant σ^2 i que la no correlació és una condició més feble que la independència.

Pel que fa als camps d'aplicació dels models ARMA, cal destacar que no són gaire bons amb problemes monetaris i financers. Les sèries temporals financeres presenten diverses formes de dinàmica no lineal, essent la més crucial la forta dependència de la variabilitat instantània de la sèrie en el seu propi passat. És per aquest motiu que la gran majoria de sèries temporals financeres presenten heteroscedasticitat.

En aquest context, el 1982, Robert F. Engle introdueix els models autoregressius amb heteroscedasticitat condicional (ARCH).

4.1 Sèries financeres

Modelitzar sèries financeres planteja una sèrie de problemes, no només deguts a la varietat de sèries que existeixen (stocks, tipus de canvi, tipus d'interès, etc.), o deguts a la disponibilitat de grans conjunts de dades. Principalment es deuen a l'existència de regularitats estadístiques (*stylized facts*) que són comunes a un gran nombre de sèries financeres i són difícils de reproduir artificialment utilitzant models estocàstics.

Denotem per p_t el preu d'un actiu a temps t i sigui $\epsilon_t = \ln(p_t/p_{t-1})$ el retorn logarímic o abreviadament retorn. Les sèries (ϵ_t) són sovint properes a les sèries de variacions de preus relatius $r_t = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}$ ja que $\epsilon_t \approx \ln(1+r_t)$ per Taylor. Els retorns representen els beneficis o pèrdues d'una inversió en un període de temps.

Algunes de les propietats més comunes de les sèries financeres són:

- La no estacionarietat de les sèries de preus: les mostres de preus són generalment semblants a un passeig aleatori i per tant, no són estacionaries. En canvi, les mostres de retorns són en general compatibles amb la suposició d'estacionarietat de segon ordre.
- Absència d'autocorrelació per les variacions de retorns: les sèries de variacions de retorns presenten molt poca autocorrelació, semblant així un soroll blanc.
- Autocorrelació dels quadrats dels retorns.
- Agrupacions de volatilitat: Els grans canvis solen venir seguits per grans canvis de signe contrari, i els petits canvis solent anar seguits de petits canvis.
- Distribució amb cues pesades: quan dibuixem gràficament la distribució empírica dels retorns diaris, observem que no concorden amb una distribució Gaussiana. Els tests clàssics solen portar-nos a rebutjar la suposició de normalitat a qualsevol nivell raonable. Concretament, les densitats presenten cues pesades i un pic més marcat.
- Efecte leverage: implica l'asimetria de l'impacte de valors passats positius i negatius en la volatilitat actual. Els retorns negatius tendeixen a incrementar la volatilitat en un nombre major que els retorns positius de la mateixa magnitud.

- Estacionalitat: el dia de la setmana, la proximitat a les festivitats, estació d'estiu o d'hivern, etc. poden tenir efectes significatius en els retorns. Seguint el període de tancament de mercat, la volatilitat tendeix a incrementar, reflectint la informació acumulada durant el tancament. L'estacionalitat és molt present per sèries intradiàries.

Tot model estadístic per als retorns diaris hauria de complir les propietats vistes. Les més importants són la distribució leptocúrtica, la impredictibilitat dels retorns i l'existència d'autocorrelació en el retorn quadrat i absolut. Les clàssiques formulacions, com ARMA, centrades en l'estructura de segon ordre són inapropiades, ja que l'estructura de segon ordre en la majoria de sèries temporals financeres és semblant a un soroll blanc. El fet que els retorns absoluts grans vagin seguits de retorns absoluts grans és difícilment compatible amb la suposició de variància condicional constant. Aquest fenomen s'anomena heteroscedasticitat condicional:

$$\mathbb{V}(\epsilon_t | \mathbb{F}_{t-1}) \neq \text{constant}.$$

La propietat d'heteroscedasticitat condicional és compatible amb l'estacionarietat. Els models introduïts en la literatura economètrica són generalment escrits de manera multiplicativa

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

on (σ_t) i (η_t) són processos reals que compleixen:

1. σ_t és mesurable respecte \mathbb{F}_{t-1} i $\sigma_t > 0$.
2. (η_t) és un soroll IID centrat amb variància 1. Per tant, (η_t) és independent de \mathbb{F}_{t-1} .

Aquesta formulació implica que el signe de la variació actual del preu és la de η_t , i és independent de les variacions de preu passades. A més, si els dos primers moments condicionals de ϵ_t existeixen, venen donats per:

$$\mathbb{E}(\epsilon_t | \mathbb{F}_{t-1}) = 0, \quad \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathbb{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

La variable aleatòria σ_t s'anomena la volatilitat de ϵ_t .

4.2 ARCH(1)

Un cop vist com treballar amb sèries financeres, veurem una primera descripció d'un model heteroscedàstic d'ordre 1. Considerem un model autorregressiu d'ordre 1, AR(1), amb coeficient de regressió φ de mòdul menor a 1, per tal de garantir l'estabilitat del sistema:

$$Y_t = \mu + \varphi Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \forall t, |\varphi| < 1,$$

on $\epsilon = (\epsilon_t)$ és un soroll blanc que satisfà la condició de seqüència de diferència de martingala:

$$\mathbb{E}(\epsilon_t | \mathbb{F}_{t-1}) = 0. \tag{4.1}$$

No suposarem que la variància condicional del soroll, $V(\epsilon_t/\epsilon_{t-1})$, és independent del temps. Si no que, permetem una dependència del temps mitjançant una equació autoregressiva d'ordre 1 per les innovacions al quadrat:

$$\epsilon_t^2 = c + a\epsilon_{t-1}^2 + u_t, \quad (4.2)$$

on $u = (u_t)$ és un soroll IID.

Un procés que satisfà les condicions imposades s'anomena model autoregressiu d'ordre 1 amb ARCH(1) errors.

La restricció sobre ϵ de ser un soroll blanc que satisfà la condició de seqüència de martingala i la condició de dependència del temps de la variància condicional del soroll han estat imposades simultàniament a la innovació del procés ϵ , i a priori, no resulta obvi que siguin compatibles entre elles.

Proposició 4.2.1. *Les restriccions (4.1) i (4.2) són compatibles.*

Demostració. Observem que l'equació recursiva no és suficient per definir sense ambigüïtat el procés (ϵ_t^2) . Aquesta equació requereix d'una condició inicial. En aquest cas, la mitjana de les innovacions al quadrat és

$$m_t = \mathbb{E}(\epsilon_t^2) = c + am_{t-1},$$

on m_0 ve donada. Per tal d'assegurar que aquesta mitjana incondicional és invariant respecte el temps, suposem que el paràmetre a té mòdul estrictament menor a 1 i que la condició inicial m_0 correspon al valor d'equilibri $m_0 = c/(1 - a)$.

A més, la positivitat del procés (ϵ_t^2) ha de ser assegurada. Algunes condicions suficients per garantir la positivitat són $a > 0$ i $c + u_t \geq 0$ per qualsevol valor de u_t .

Finalment, siguin (Z_t) i (δ_t) dos processos independents, on (Z_t) pren valors positius:

$$Z_t = c + aZ_{t-1} + u_t,$$

i on les variables aleatòries δ_t són independents i idènticament distribuïdes, tal que:

$$P[\delta_t = 1] = P[\delta_t = -1] = \frac{1}{2}.$$

Observem que el procés $\epsilon_t = \delta_t \sqrt{Z_t}$ satisfà ambdues condicions. □

D'ara en endavant suposarem que les condicions que assegurin l'existència d'un procés que compleix les restriccions imposades es verifiquen. Estudiarem les propietats dels processos ϵ i Y .

4.3 Propietats del procés d'innovació ϵ

El procés (ϵ_t) ha de complir la condició d'ortogonalitat respecte al passat: $\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = 0$. Algunes de les conseqüències que té aquesta restricció són:

1. El procés de l'error és també ortogonal al passat per qualsevol retard, és a dir, $\mathbb{E}(\epsilon_t/\epsilon_{t-h}) = 0, \forall h \geq 1$.

2. No hi ha correlació entre el present i els futurs valors del procés d'innovació a qual-sevol retard h . Sigui $h, k \in \mathbb{N}$, llavors:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\epsilon_t, \epsilon_{t+k}/\epsilon_{t-h}] &= \mathbb{E}[\epsilon_t \cdot \epsilon_{t+k}/\epsilon_{t-h}] - \mathbb{E}[\epsilon_t/\epsilon_{t-h}]\mathbb{E}[\epsilon_{t+k}/\epsilon_{t-h}] = \mathbb{E}[\epsilon_t \cdot \epsilon_{t+k}/\epsilon_{t-h}] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\epsilon_t \cdot \epsilon_{t+k}/\epsilon_{t+k-1})/\epsilon_{t-h}] = \mathbb{E}[\epsilon_t \mathbb{E}(\epsilon_{t+k}/\epsilon_{t+k-1})/\epsilon_{t-h}] = 0. \end{aligned}$$

3. La variància condicional és:

$$V(\epsilon_t/\epsilon_{t-h}) = c \frac{1-a^h}{1-a} + a^h \epsilon_{t-h}^2.$$

Depèn de la informació passada només a través dels valors més recents ϵ_{t-h}^2 .

Així doncs, quan el retard h tendeix a infinit, la variància condicional convergeix cap a la següent variància incondicional:

$$V(\epsilon_t) = \frac{c}{1-a}.$$

Com aquesta variància és independent del temps, tenim que el procés ϵ és un soroll blanc.

4.4 Propietats del procés Y

Les propietats del procés Y són conseqüència directa de les propietats del soroll blanc ϵ :

1. $\mathbb{E}(Y_t/Y_{t-h}) = \mu \frac{1-\varphi^h}{1-\varphi} + \varphi^h Y_{t-h}$.
2. La variància condicional i la covariància s'obtenen d'escriure Y_t en termes de les innovacions més recents:

$$Y_t = \mu \frac{1-\varphi^h}{1-\varphi} + \varphi^h Y_{t-h} + \epsilon_t + \varphi \epsilon_{t-1} + \dots + \varphi^{h-1} \epsilon_{t-h+1}.$$

Siguin $h, k \in \mathbb{N}$ amb $h > 0$, podem escriure:

$$\mathbb{C}[Y_t, Y_{t+k}/Y_{t-h}] = \frac{c\varphi^k}{1-a} \frac{1-\varphi^{2h}}{1-\varphi^2} - \frac{ca\varphi^k}{1-a} \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a - \varphi^2} + a\varphi^k \varphi \epsilon_{t-h}^2 \frac{a^h - \varphi^{2h}}{a - \varphi^2}.$$

Si fem tendir h a infinit, obtenim la variància incondicional:

$$\mathbb{C}(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{c\varphi^k}{1-a} \frac{1}{1-\varphi^2}.$$

3. La variància condicional és:

$$V(Y_t/Y_{t-1}) = V(\epsilon_t/Y_{t-1}) = c + a\epsilon_{t-1}^2.$$

S'obté de la formula de la covariància agafant $k=0$ i $h=1$.

4.5 Distribució del procés de l'error

Engle va estudiar el procés ϵ amb una distribució normal condicionada, és a dir, $\epsilon_t/\epsilon_{t-1} \sim N(0, c + a\epsilon_{t-1}^2)$. Cal destacar que aquest procés és condicionadament Gaussià però no és marginalment Gaussià. El procés té moments estacionaris d'ordre 2 i 4 si $3a^2 < 1$:

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \frac{c}{1-a}; \quad \mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \frac{3c^2}{(1-a)^2} \frac{1-a^2}{1-3a^2}.$$

Això implica que la curtosi associada a la distribució marginal

$$k = \frac{\mathbb{E}(\epsilon_t^4)}{\mathbb{E}(\epsilon_t^2)^2} = 3 \frac{1-a^2}{1-3a^2},$$

és sempre més gran que 3. Aquest fet provoca cues més pesades en comparació a les cues de distribució normal. Observem que aquesta distribució és leptocúrtica.

4.6 Extensions

Els models ARCH descriuen simultàniament l'evolució de la mitjana condicional i la variància condicional. Diferents models han estat proposats per tal d'obtenir variàncies condicionades dependents del passat. Tractarem algun d'aquests models que ens poden ajudar a obtenir una millor modelització de les sèries amb les que treballarem (per més detalls veure [1]):

1. Model ARCH(q) (1982)

Aquest model presentat el 1982 per Engle és una generalització del model ARCH(1) pel terme de l'error que havíem vist prèviament. El que es pretén és augmentar l'ordre autoregressiu fins a q , és a dir, definim el model ARCH(q) com:

$$\epsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + u_t, \quad \mathbb{E}(u_t/\epsilon_{t-1}) = 0,$$

on $u = (u_t)$ és una seqüència de diferència de martingala. La variància condicional de ϵ_t és

$$\mathbb{V}(\epsilon_t/\epsilon_{t-1}) = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2,$$

i depèn del passat a través dels q valors més recents de ϵ_t^2 .

2. Model GARCH(p,q) (1986)

Com ja hem anat veient, el model ARCH es basa en una representació autoregressiva de la variància condicional. Els models GARCH són aquells obtinguts d'afegir una part de mitjana mòbil a un model ARCH. Així, definim el model com:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = 0, \\ \mathbb{V}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}. \end{cases}$$

Si reescrivim el model GARCH(p,q) introduint la innovació corresponent al quadrat del procés: $u_t = \epsilon_t^2 - h_t$ i substituint h_t per $\epsilon_t^2 - u_t$ obtenim:

$$\epsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^{\text{Max}(p,q)} (a_i + b_i)\epsilon_{t-1}^2 + u_t - \sum_{j=1}^p b_j u_{t-j},$$

amb $a_i = 0$ per $i > q$ i $b_i = 0$ per $i > p$.

Aquesta equació té l'estructura lineal d'un model ARMA. Sota suposicions addicionals (implicant l'estacionarietat de segon ordre de ϵ_t^2), podem afirmar que si (ϵ_t) és GARCH(p,q), aleshores (ϵ_t^2) és un procés ARMA (Max(p,q), p).

3. Model ARMA-GARCH (1986)

Considerem un model de regressió lineal amb error GARCH:

$$Y_t = X_t \cdot b + \epsilon_t,$$

on ϵ satisfà un model GARCH(p,q); o bé considerem un model ARMA amb error GARCH:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\epsilon_t,$$

on ϵ satisfà un model GARCH(p,q); o inclús un model ARMA on la variància incondicional de Y té impacte en la variància condicional:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = 0, \\ \mathbb{V}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_0 [\mathbb{E}(Y_t/Y_{t-1})]^2 + \sum_{i=1}^s \gamma_i Y_{t-i}^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

4. Model EGARCH (p,q)

Sigui (η_t) un soroll independent i idènticament distribuït tal que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ i $\mathbb{V}(\eta_t) = 1$. Llavors direm que (ϵ_t) és un procés EGARCH (p,q) si satisfà una equació de la següent forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \ln \sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p b_j \ln \sigma_{t-j}^2, \end{cases}$$

on

$$g(\eta_t - i) = \theta \eta_{t-1} + r(|\eta_{t-i}| - \mathbb{E}|\eta_{t-i}|),$$

amb $\sigma_t > 0$, a_i , b_j , r i θ són nombres reals.

La relació

$$\sigma_t^2 = e^c \prod_{i=1}^q \exp\{a_i g(\eta_{t-i})\} \prod_{j=1}^p (\sigma_{t-j}^2)^{b_j}$$

ens indica que, a diferència del model clàssic GARCH, la volatilitat té dinàmiques multiplicatives. La restricció sobre que els coeficients han de ser positius no és necessària ja que el logaritme pot ser de qualsevol signe.

La propietat d'asimetria es té en compte a través del coeficient θ . L'efecte d'un gran *shock* negatiu és major que l'efecte d'un gran *shock* positiu, si i només si, $\theta < 0$. Per tant, obtenim la típica propietat d'asimetria de les sèries temporals financeres.

Una altra diferència dels models clàssics GARCH és que la variància condicional és escrita com una funció de les innovacions passades estandarditzades enlloc de les innovacions passades.

5. Model log-GARCH

Sigui (η_t) un soroll independent i idènticament distribuït tal que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ i $\mathbb{V}(\eta_t) = 1$. Llavors direm que (ϵ_t) és un procés Log-GARCH(p,q) si satisfà una equació de la forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \ln \sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i \ln \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \ln \sigma_{t-j}^2. \end{cases}$$

Igual que en els models EGARCH, la log-volatilitat pot prendre valors positius i negatius i, per tant, no és necessari imposar restriccions sobre la positivitat dels coeficients. La definició del model requereix que els ϵ_{t-i}^2 siguin diferents de zero. A més, el model definit no és compatible amb sèries de retorns que continguin o puguin contenir zeros. El model log-GARCH no pot tenir en compte la típica propietat d'asimetria dels retorns ja que la volatilitat no depèn del signe de valors passats dels retorns.

És per aquests motius que es fa necessari una extensió del model log-GARCH. Sigui (η_t) una sèrie independent idènticament distribuïda tal que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ i $\mathbb{V}(\eta_t) = 1$. Llavors direm que (ϵ_t) és un procés Log-GARCH(p,q) estès si satisfà una equació de la forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \ln \sigma_t^2 = c_t + \sum_{i=1}^q a_{i,t} \ln \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \ln \sigma_{t-j}^2. \end{cases}$$

On $c_t = c + \sum_{i=1}^q c_i - \mathbb{I}_{\{\epsilon_{t-i} < 0\}}$ i $a_{i,t} = a_{i,+} \mathbb{I}_{\{\epsilon_{t-i} > 0\}} + a_{i,-} \mathbb{I}_{\{\epsilon_{t-i} < 0\}}$ i on c , c_i , $a_{i,+}$, $a_{i,-}$ i b_j són nombres reals i $\sigma_t > 0$.

6. Model Threshold GARCH (TGARCH)

Una manera natural d'introduir asimetria és especificar la variància condicional com una funció de les parts positives i negatives de les innovacions passades. Explicitament,

$$\epsilon_t^+ = \max(\epsilon_t, 0), \quad \epsilon_t^- = \min(\epsilon_t, 0)$$

i observem que $\epsilon_t = \epsilon_t^+ + \epsilon_t^-$. La classe de models TGARCH introdueix un efecte llindar a la volatilitat.

Sigui (η_t) un soroll independent i idènticament distribuït tal que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ i $\mathbb{V}(\eta_t) = 1$. Llavors direm que (ϵ_t) és un procés Threshold GARCH(p,q) si satisfà una equació de la forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t = c + \sum_{i=1}^q a_{i,+} \epsilon_{t-i}^+ - a_{i,-} \epsilon_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}. \end{cases}$$

on c , $a_{i,+}$, $a_{i,-}$ i b_j són nombres reals.

Sota les condicions $c > 0$, $a_{i,+} \geq 0$, $a_{i,-} \geq 0$ i $b_i \geq 0$ la variable σ_t és estrictament positiva i representa la desviació condicional estàndard de ϵ_t . En general, la desviació condicional estàndard de ϵ_t és $|\sigma_t|$ però imposant la positivitat de σ_t ja no és necessari, contràriament als models GARCH clàssics basats en l'especificació de σ_t^2 .

El model Glosten-Jagannathan-Runkle datat de 1993, GJR-GARCH, és una variant dels models TGARCH definit per:

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \epsilon_{t-i}^2 \mathbb{I}_{\{\epsilon_{t-i} > 0\}} + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2,$$

que correspon a elevar al quadrat les variables involucrades en l'equació del model TGARCH.

A través dels coeficients $a_{i,+}$ i $a_{i,-}$, la volatilitat actual depèn d'ambdós mòduls i del signe dels retorns passats. El model és flexible, permetent així que els retards i dels retorns passats presentin diferents asimetries. Observem que en ocasions especials també permet modelitzar sèries sense asimetria amb unes propietats semblants a les d'un model GARCH. Aquests models s'obtenen de considerar $a_{i,+} = a_{i,-} := a_i$ ($i = 1, \dots, q$) i tenen la següent forma:

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^q a_i |\epsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}.$$

En el cas d'un model regressiu amb errors heteroscedàstics no Gaussians, els estimadors de la variància del soroll basats en residus absoluts són més eficients que aquells basats en els residus quadrats.

7. IGARCH

Normalment quan es treballa amb processos ARMA, la condició d'estacionarietat és caracteritzada per les arrels del polinomi autoregressiu, amb mòdul estrictament més gran que 1. En el cas en que el mòdul de l'arrel és igual a 1, llavors es tracta d'un procés no estacionari. Aquests processos són coneguts com models ARIMA i generalitzen la noció de passeig aleatori. El mateix raonament ens serveix per als models GARCH encara que arribem a uns resultats diferents. Per tal de simplificar la representació, considerem el cas d'un procés IGARCH(1,1). Sota la suposició de normalitat condicional, el procés és:

$$\left\{ \epsilon_t / \mathbb{F}_{t-1} \sim N(0, h_t), \text{ amb } h_t = c + b h_{t-1} + a \epsilon_{t-1}^2, a \geq 0, b \geq 0. \right.$$

La predicció de variància condicional a diferents nivells és de la següent forma:

$$\mathbb{E}(h_{t+k} / \mathbb{F}_t) = (a + b)^k h_t + c \left[\sum_{i=0}^{k-1} (a + b)^i \right].$$

Si $a + b < 1$, llavors el procés (ϵ_t) és estacionari de segon ordre i un *shock* a la variància condicional h_t té un impacte decreixent en h_{t+k} quan k incrementa, i és asimptòticament negligible. Si $a + b \geq 1$, l'efecte en h_{t+k} no desapareix asimptòticament. Aquesta propietat es coneix com a persistència.

En el cas particular en que $a+b = 1$ (IGARCH(1,1)) tenim que $\mathbb{E}[h_{t+k}/\mathbb{F}_t] = h_t + kc$. Les propietats de predicció d' h corresponen a les d'un passeig aleatori. Per tal d'analitzar aquests processos, introduïrem el procés Gaussià estàndard definit per $Z_t h_t^{\frac{1}{2}} = \epsilon_t$. La variància condicional ve donada per:

$$\begin{aligned} h_t &= c + bh_{t-1} + ah_{t-1}Z_{t-1}^2, \\ h_t &= c + (b + aZ_{t-1}^2)h_{t-1}. \end{aligned}$$

Per mitjà de recursions des d'una data inicial 0, obtenim la següent expressió explícita:

$$h_t = h_0 \prod_{i=1}^t (b + aZ_{t-i}^2) + c \left[1 + \sum_{k=1}^{t-1} \prod_{i=1}^k (b + aZ_{t-i}^2) \right].$$

8. GARCH-X

Els models típics GARCH prediuen els valors quadrats ϵ_t^2 mitjançant només els retorns passats $\{\epsilon_u, u < t\}$. Sovint tenim informació extra disponible, en forma de vector x_{t-1} de covariàncies exògenes. És per aquest motiu que per tal de millorar la predicció dels quadrats, cal afegir als model GARCH variables explicatòries addicionals. Una versió senzilla de model GARCH-X és de la forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = c + a\epsilon_{t-1}^2 + b\sigma_{t-1}^2 + \pi' x_{t-1}, \end{cases}$$

on $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{r,t})$ és un vector de r covariàncies exògenes².

4.7 Estacionarietat d'un procés GARCH (p,q)

Sigui $\epsilon = (\epsilon_t)$ un procés que satisfà un model GARCH(p,q):

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = 0, \\ \mathbb{V}(\epsilon_t/\mathbb{F}_{t-1}) = h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}. \end{cases}$$

El procés ϵ és una seqüència diferencial martingala i admet en particular components no correlacionats amb mitjana zero. Per tal d'estudiar l'estacionarietat de segon ordre és suficient considerar la variància: $\mathbb{V}\epsilon_t = \mathbb{V}[\mathbb{E}(\epsilon_t/\epsilon_{t-1})] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(\epsilon_t/\epsilon_{t-1})] = \mathbb{E}h_t$, i veure que és asimptòticament independent del temps.

Proposició 4.7.1. *Un procés ϵ que satisfà un model GARCH(p,q) amb coeficients positius $c \geq 0, a_i \geq 0, i = 1, \dots, q, b_j \geq 0, j = 1, \dots, p$, és asimptòticament estacionari de segon ordre si*

$$a(1) + b(1) = \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1.$$

Demostració. Partim de la representació del procés ϵ^2 que ja hem vist.

$$\epsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i) \epsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{j=1}^p b_j u_{t_j}.$$

² π' és el vector transposat de π .

Prenent l'esperança a ambdós costats obtenim:

$$\mathbb{E}\epsilon_t^2 = c + \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i)\mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2).$$

Per tant, si les arrels del polinomi característic,

$$1 - \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i)L^i,$$

estan estrictament fora del cercle unitat, la seqüència $\mathbb{E}\epsilon_t^2$ convergeix i el procés és asimptòticament estacionari de segon ordre.

Aquesta condició implica que $a(1) + b(1) < 1$. Si $a(1) + b(1) \geq 1$ aleshores $1 - a(0) - b(0) > 0$ i $1 - a(1) - b(1) \geq 0$ i hi hauria una arrel real del polinomi característic entre 0 i 1.

Suposem llavors que $a(1) + b(1) < 1$. Si l'arrel z del polinomi característic té mòdul estrictament més petit a 1, llavors:

$$1 = \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i)z^i = \left| \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i)z^i \right| \leq \sum_{i=1}^{Max(p,q)} (a_i + b_i)|z|^i \leq a(1) + b(1) < 1,$$

que clarament és una contradicció. □

4.8 Curtosi

La diferència entre les distribucions condicionals i incondicionals sorgeix especialment en termes d'un augment de la curtosi. Sigui un procés GARCH condicionalment Gaussià, el segon i quart moment del procés estan relacionats per:

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4/\epsilon_{t-1}) = 3[\mathbb{E}(\epsilon_t^2/\epsilon_{t-1})]^2.$$

Agafant l'esperança a ambdós costats de la igualtat obtenim:

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \mathbb{E}\mathbb{E}(\epsilon_t^4/\epsilon_{t-1}) = 3\mathbb{E}[\mathbb{E}(\epsilon_t^2/\epsilon_{t-1})]^2 \geq 3[\mathbb{E}\mathbb{E}(\epsilon_t^2/\epsilon_{t-1})]^2 = 3(\mathbb{E}\epsilon_t^2)^2.$$

Finalment obtenim el següent resultat:

$$k = \frac{\mathbb{E}(\epsilon_t^4)}{(\mathbb{E}\epsilon_t^2)^2} = 3 + 3 \frac{\mathbb{V}\mathbb{E}(\epsilon_t^2/\epsilon_{t-1})}{(\mathbb{E}\epsilon_t^2)^2} \geq 3.$$

4.9 Estimació

Considerarem l'estimació per pseudomàxima versemblança a partir de la suposició de normalitat de la distribució condicional. En aquest capítol s'han utilitzat resultats de [2].

Sigui $L_t(y; \theta)$ la funció de versemblança condicionada associada a Y_t . La funció de versemblança de Y_1, \dots, Y_T condicionada a Y_0 és:

$$L(y; \theta) = \prod_{t=1}^T L_t(y, \theta).$$

Definim $\ell := \ln(L)$. Llavors l'estimador ve definit com a solució del problema de maximització:

$$\max_{\theta} \ln L(y; \theta) = \max_{\theta} \ell(y; \theta).$$

A l'estimador l'anomenarem com estimador de pseudomàxima versemblança i el denotarem per $\hat{\theta}_T$. Aquest estimador és asimptòticament normal i la seva matriu de covariància és:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] &= J^{-1} I J^{-1}, \\ J &= \mathbb{E}_0 \left[- \frac{\partial^2 \ell_t(Y; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right], \\ I &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\partial \ell_t(Y; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ell_t(Y; \theta)}{\partial \theta'} \right], \end{aligned}$$

on E_0 és l'esperança agafada respecte a la veritable distribució.

En general les matrius I i J no són iguals. Les matrius I i J sempre seran diferents si la veritable distribució és compatible amb la funció de versemblança, en el nostre cas particular és normal condicionada. Quan $I = J$, l'expressió de la precisió asimptòtica queda reduïda a:

$$\mathbb{V}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = J^{-1} I J^{-1} = Id J^{-1} = I^{-1}.$$

4.9.1 IID

Per una millor comprensió de les propietats de l'estimador de pseudomàxima versemblança per a models ARCH, primer estudiarem els principals resultats per a variables independents i idènticament distribuïdes. Considerem una sèrie de variables i.i.d $Y_t, t = 1, \dots, T$, amb mitjana m i variància σ^2 . La funció de versemblança aplicada al logaritme assumint normalitat és:

$$\ell = -\frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^2.$$

Les primeres derivades respecte els dos paràmetres:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T (Y_t - m), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=1}^T (Y_t - m)^2. \end{cases}$$

L'estimador de pseudomàxima versemblança de m i σ^2 són solucions de les equacions de versemblança $\frac{\partial \ell}{\partial m} = 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0$ i venen donats per:

$$\hat{m}_T = \bar{Y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t \quad i \quad \hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}_T)^2.$$

Podem observar que es tracta de la mitjana empírica i la variància de la sèrie. Per tant, podem afirmar que aquests estimadors són consistents, fins i tot quan la veritable

distribució de Y_t no és normal. En quant a la precisió assimp tòtica tenim:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left(\frac{Y-m}{\sigma} \right)^2 & \mathbb{E} \left(\frac{Y-m}{\sigma^2} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (Y-m)^2 \right] \right) \\ X & \mathbb{E} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (Y-m)^2 \right]^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & \frac{1}{2\sigma^3} \mathbb{E} u^3 \\ \frac{1}{2\sigma^3} \mathbb{E} u^3 & \frac{k-1}{4\sigma^4} \end{pmatrix},$$

on $u = \frac{Y-m}{\sigma}$. Pel que fa a la matriu J, tenim

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu assimp tòtica de covariància és la següent:

$$\mathbb{V}_{as} \left[\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{m}_T - m \\ \hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^3 \mathbb{E} u^3 \\ \sigma^3 \mathbb{E} u^3 & (k-1)\sigma^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & m_3 \\ m_3 & \frac{k-1}{4\sigma^4} \end{pmatrix},$$

on $m_3 = \mathbb{E}(Y-m)^3$. Quan la veritable distribució és normal, llavors tenim que $m_3 = 0$ i $k=3$. Així doncs, tant \hat{m}_T com $\hat{\sigma}_T^2$ són assimp tòticament no correlacionats i

$$\mathbb{V}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\sigma}_T^2 - \sigma^2)] = 2\sigma^4.$$

Els estimadors \hat{m}_t i $\hat{\sigma}_T^2$ estan correlacionats si la veritable distribució presenta algunes asimetries, llavors la variància de $\hat{\sigma}_T^2$ dependrà del valor de la curtosi. Quan més grans siguin les cues, més variabilitat hi haurà.

4.9.2 Model regressiu amb error heteroscedàstic

Considerem observacions $Y_t, t = 1, \dots, T$ amb mitjana condicional:

$$\mathbb{E}(Y_t / \mathbb{F}_{t-1}, X_t) = m_t(\theta) = m(Y_{t-1}, X_t; \theta),$$

i variància condicional

$$\mathbb{V}(Y_t / \mathbb{F}_{t-1}, X_t) = h_t(\theta) = h(Y_{t-1}, X_t; \theta).$$

Aquest dos moments condicionals depenen de valors passats de procés i de valors presents i passats d'alguna característica exògena X.

La funció de pseudoversemblança resulta de calcular L com si la distribució condicional de Y_t donats Y_{t-1}, X_t fos normal. Aquesta funció de pseudoversemblança és:

$$\ell = -\frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[Y_t - m_t(\theta)]^2}{h_t(\theta)}.$$

La primera derivada respecte el paràmetre θ és:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\theta)} \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T T \frac{[Y_t - m_t(\theta)]^2}{h_t^2(\theta)} \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} + \sum_{t=1}^T \frac{Y_t - m_t(\theta)}{h_t(\theta)} \frac{\partial m_t(\theta)}{\partial \theta}.$$

Les equacions de versemblança $\frac{\partial \ell(\hat{\theta})}{\partial \theta} = 0$ poden ser escrites com funcions degradades i dividides pel residu de desviació estàndard:

$$\hat{u}_t = \frac{Y_t - m_t(\hat{\theta})}{h_t(\hat{\theta})^{\frac{1}{2}}}.$$

La derivada de segon ordre és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'} &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \theta \partial \theta'} - \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - m_t)^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(Y_t - m_t)^2}{h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \theta \partial \theta'} \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \frac{Y_t - m_t}{h_t^2} + \sum_{t=1}^T \frac{Y_t - m_t}{h_t} \frac{\partial^2 m_t}{\partial \theta \partial \theta'} - \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} - \sum_{t=1}^T \frac{Y_t - m_t}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'}. \end{aligned}$$

L'expressió de la matriu J és la següent:

$$J = \mathbb{E}_0 \left[- \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{h_t(\theta)} \frac{\partial m_t(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial m_t(\theta)}{\partial \theta'} + \frac{1}{2h_t(\theta)^2} \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta'} \right].$$

La matriu $I = \mathbb{E}_0 \left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta'} \right]$ depèn del moment de tercer ordre condicional de Y_t :

$$M_{3t}(\theta) = \mathbb{E}[(Y_t - m_t(\theta))^3 / Y_{t-1}, X_t],$$

i de la seva curtosis condicional

$$k_t(\theta) = \frac{1}{h_t(\theta)^2} \mathbb{E}[(Y_t - m_t(\theta))^4 / Y_{t-1}, X_t].$$

La matriu I ve donada per la següent expressió:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta'} \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left\{ \left[- \frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} u_t^2 + \frac{1}{h_t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial m_t}{\partial \theta} u_t \right] \times \left[- \frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} u_t^2 + \frac{1}{h_t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} u_t \right] \right\} \\ &= \mathbb{E}_0 \left\{ \left[\frac{1}{4} \frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} + \frac{1}{4} \frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \mathbb{E}_{t-1} u_t^4 + \frac{1}{h_t} \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} + \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right] \mathbb{E}_{t-1} u_t^3 \right\} \\ &= \mathbb{E}_0 \left\{ \left[\frac{1}{4} \frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} [K_t(\theta) - 1] + \frac{1}{h_t} \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t^3} \left[\frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial m_t}{\partial \theta'} + \frac{\partial m_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right] M_{3t} \right\}. \end{aligned}$$

A la pràctica, les matrius I i J són estimades directament substituint l'esperança E_0 per l'esperança empírica i el paràmetre desconegut θ pel seu estimador $\hat{\theta}_t$. Llavors ens queda:

$$\begin{cases} \hat{I}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial \ell_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta} \frac{\partial \ell_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta'}, \\ \hat{J}_T = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \ell_t(\hat{\theta}_T)}{\partial \theta \partial \theta'}, \end{cases}$$

i la variància aproximada de $\hat{\theta}_t$ és:

$$\mathbb{V}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)] = \hat{J}_T^{-1} \hat{I}_T \hat{J}_T^{-1}.$$

Si la veritable distribució és normal, i el vector paràmetre pot ser considerat en dos subvectors on $\theta = (\alpha, \beta)$, on α representa la mitjana i β la variància, llavors obtenim la següent expressió:

$$\mathbb{V}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta)] = \left(\mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{2h_t(\beta)^2} \frac{\partial h_t(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial h_t(\beta)}{\partial \beta'} \right] \right)^{-1}.$$

I aquesta pot ser aproximada per:

$$\hat{\mathbb{V}}_{as}[\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta)] = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{2h_t(\hat{\beta}_T)^2} \frac{\partial h_t(\hat{\beta}_T)}{\partial \beta} \frac{\partial h_t(\hat{\beta}_T)}{\partial \beta'} \right)^{-1}.$$

Si la veritable distribució no és normal, necessitarem introduir un terme addicional per tenir en compte la curtosi.

4.9.3 Model regressiu amb error ARCH

Considerem un model regressiu amb errors ARCH(p). Les observacions són les següents:

$$\begin{cases} Y_t = X_t b + \epsilon_t, \text{ on } \mathbb{E}(\epsilon_t / \mathbb{F}_{t-1}) = 0, \\ \mathbb{V}(\epsilon_t / \mathbb{F}_{t-1}) = c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \epsilon_{t-p}^2. \end{cases}$$

En aquest model, tenim:

$$\begin{cases} m_t(\theta) = X_t b, \\ h_t(\theta) = c + a_1 (Y_{t-1} - X_{t-1} b)^2 + \dots + a_p (Y_{t-p} - X_{t-p} b)^2, \end{cases}$$

on $\theta' = (b', c, a_1, \dots, a_p) = (b', c, a')$. No podem aproximar separadament els paràmetres de la mitjana condicional dels que apareixen en la variància condicional. Considerem dos vectors de paràmetres: $\alpha = b$ i $\beta = (c, a)$. El vector α apareix simultàniament en la mitjana i en la variància, mentre que el vector β només apareix en la variància.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}(\hat{\theta}_T) = -\sum_{t=1}^T \frac{1}{\hat{h}_t^2} (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{h}_t) \left(\sum_{j=1}^p \hat{a}_j x'_{t-j} \hat{\epsilon}_{t-j} \right) + \sum_{t=1}^T \frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{h}_t} x'_t = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta}(\hat{\theta}_T) = \sum_{t=1}^T \frac{1}{2\hat{h}_t^2} (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{h}_t) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\epsilon}_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \hat{\epsilon}_{t-p}^2 \end{bmatrix} = 0,$$

amb $\hat{h}_t = h_t(\hat{\theta}_t)$ i $\hat{\epsilon}_t = Y_t - X_t \hat{b}_T$. De la segona equació veiem que un cop substituït l'estimador \hat{b}_T pel paràmetre b , l'equació autorregressiva que defineix el segon moment pot ser aproximada de la següent forma:

$$\hat{\epsilon}_t^2 \approx c + a_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \dots + a_p \hat{\epsilon}_{t-p}^2 + u_t,$$

on $\mathbb{V}(u_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t^2) = 2h_t^2$. El paràmetre β es pot aproximar utilitzant mínims quadrats ponderats a aquest model aproximat, amb ponderació $\frac{1}{2h_t^2}$. Podem veure que la matriu de covariància asimptòtica dels estimadors és:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{as} \left[\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_T - \alpha \\ \hat{\beta}_T^2 - \beta \end{pmatrix} \right] &= J^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & J_{\beta\beta} \end{pmatrix}, \\ J_{\alpha\alpha} &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{h_t} x_t' x_t + \frac{2}{h_t^2} \left(\sum_{j=1}^p a_j x_{t-j}' \epsilon_{t-j} \right) \left(\sum_{j=1}^p a_j x_{t-j} \epsilon_{t-j} \right) \right], \\ J_{\beta\beta} &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{2h_t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-p}^2 \end{bmatrix} [1, \epsilon_{t-1}^2, \dots, \epsilon_{t-p}^2] \right]. \end{aligned}$$

4.9.4 GARCH

Ara considerem un model GARCH(p,q) condicionalment Gaussià $Y_t/Y_{t-1} \sim N(0; h_t)$, on

$$h_t = c + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j h_{t-j}.$$

L'expressió de la variància condicional en termes de paràmetres i variables observables és:

$$h_t = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^q b_j L^j} \left(c + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i}^2 \right),$$

on L és l'operador retard. Llavors $h_t(\theta)$ depèn de tots els valors passats del procés Y . Com el procés té un número finit d'observacions $t=1, \dots, T$, és necessari substituir $h_t(\theta)$ per la seva aproximació truncada en la qual els valors Y_t^2 corresponents als valors negatius són zero, és a dir, considerem la següent equació recursiva:

$$h_t = c + \sum_{i=1}^p a_i \tilde{Y}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \tilde{h}_{t-j}, \text{ amb } \begin{cases} \tilde{Y}_t = 0, & \text{si } t \leq 0 \\ \tilde{Y}_t = Y_t, & \text{si } t \geq 1 \\ \tilde{h}_t = 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

La funció inicial de versemblança logàrítica se substitueix per la seva versió truncada:

$$\tilde{\ell} = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \tilde{h}_t(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t^2}{\tilde{h}_t(\theta)}.$$

A la pràctica, per un cert valor donat θ_1 de θ , les successives variàncies condicionals són calculades mitjançant:

$$\tilde{h}_t(\theta_1) = c + \sum_{i=1}^p a_i \tilde{Y}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \tilde{h}_{t-j}(\theta_1).$$

4.10 Test

Ara que ja sabem com estimar alguns dels models explicats amb anterioritat, presentarem tests que ens seran útils per a l'anàlisi de les sèries temporals i dels models seleccionats.

4.10.1 Test de Ljung Box

És de gran importància abans de començar a modelitzar una sèrie temporal saber si aquesta sèrie correspon a un soroll IID, és a dir, si es tracta d'una col·lecció de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes.

Teorema 4.1. *Siguin y_1, y_2, \dots, y_n n observacions d'un soroll IID. Sigui $\{\hat{\rho}(j), 1 \leq j \leq h\}$ el graf de la seva funció d'autocorrelació fins el retard h . Aleshores, per un n suficientment gran i un h relativament petit, els valors $\hat{\rho}(j)$ poden ser considerats com una mostra aleatòria d'una $N(0, \frac{1}{n})$.*

Per tant, si la hipòtesi de IID és certa, llavors el 95% de les h autocorrelacions observades han d'estar dins l'interval

$$\left[-1, 96 \frac{1}{\sqrt{n}}, 1, 96 \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Per exemple, si agafem els primers 50 valors de $\hat{\rho}$, si 3 o més d'aquests valors surten de l'interval, llavors resulta difícil acceptar que la sèrie és un soroll IID. Un mètode més precís basat en la idea anterior per veure si la sèrie temporal és un soroll IID és el test de Ljung Box. Aquest test es basa en l'estadístic

$$Q_{LB} := n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j},$$

on h és el nombre de retards que s'estan provant i $Q_{LB}(h)$ segueix una distribució chi quadrat amb h graus de llibertat.

Llavors el test de Ljung Box és pot definir de la següent forma:

H_0 : Les dades es distribueixen de forma independent.

H_a : Les dades no es distribueixen de forma independent.

És a dir, si obtenim un valor $Q_{LB} = q$, llavors

$$p := P\{Q_{LB} > q\} = P\{\chi_h^2 > q\},$$

és el p-valor o el risc de rebutjar la hipòtesi nul·la (H_0) quan és certa. Per tant, quan el p-valor sigui menor a 0,05, rebutjarem que la nostra sèrie sigui IID.

4.10.2 Test de Shapiro Wilk

Si sabem que la nostra sèrie és un soroll IID pot resultar interessant saber si es tracta d'un soroll blanc Gaussià. La manera tradicional és utilitzant el test de Kolmogorov Smirnov.

Una alternativa és el QQplot. Sigui Y_1, \dots, Y_k una mostra d'una llei $N(\mu, \sigma^2)$ i sigui X_1, \dots, X_n una mostra d'una llei $N(0,1)$. Denotem per $x_{(i)}$ i $y_{(i)}$ les corresponents observacions empíriques.

Tenim $\mathbb{E}(Y_j) = \mu + \sigma\mathbb{E}(X_j)$. Si $m_i := \mathbb{E}(X_i)$, podem dibuixar les parelles $(m_i, y_{(i)})$ i els gràfics d'aquestes parelles haurien de ser aproximadament lineals. En particular, la seva correlació hauria de ser pròxima a 1. Aquestes són les bases de l'anomenat test de Shapiro Wilk.

El valor de m_i s'acostuma a aproximar per $\Phi^{-1}(\frac{i-0,5}{n})$ on Φ és la probabilitat acumulada de la distribució normal estàndard. Llavors tenim

$$W^2 := \frac{(\sum(Y_{(i)} - \bar{Y}_n)\Phi^{-1}(\frac{i-0,5}{n}))^2}{\sum(Y_{(i)} - \bar{Y}_n)^2 \sum(\Phi^{-1}(\frac{i-0,5}{n}))^2} \in [0, 1],$$

i el p-valor és la probabilitat

$$P\{W^2 < r^2\},$$

on r és la correlació observada.

Essent la hipòtesi nul·la que la població està distribuïda normalment, si el p-valor és menor que el nivell de significància α , aleshores la hipòtesi nul·la és rebutjada i es conclou que les dades no segueixen una distribució normal. En canvi, si el p-valor és major a α es conclou que no es pot rebutjar la hipòtesi de normalitat. Per exemple, si $n \geq 50$, tenim $P\{W^2 < 0,987\} = 0,05$. Per tant, si la r^2 observada és menor que 0,987, rebutgem la hipòtesi de normalitat.

4.10.3 Test de bondat d'ajustament de Pearson

Si fent el test de Shapiro Wilk obtenim que les dades no segueixen una distribució normal i provem amb alguna altra distribució, necessitarem saber si aquesta distribució aplicada s'ajusta adequadament a la nostra mostra. En aquests casos emprarem el test chi quadrat de Pearson que mesura la bondat d'ajustament de la distribució mitjançant diferències entre les freqüències resultants i les esperades. El valor de l'estadístic del test es calcula de la següent manera:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = N \sum_{i=1}^n \frac{(O_i/N - p_i)^2}{p_i},$$

on O_i és el nombre d'observacions de tipus i , E_i és el nombre esperat de tipus i tenint en compte la distribució que s'està testejant i N és el nombre total d'observacions. Igual que en els altres test, si el p-valor és menor a 0,05 es rebutja la hipòtesi nul·la on es suposa que la distribució empírica s'adequa correctament a la distribució teòrica.

4.10.4 Test d'homoscedasticitat

De cara a utilitzar els diferents models estudiats amb heteroscedasticitat condicional serà adient conèixer per avançat si les nostres dades presenten homoscedasticitat o heteroscedasticitat condicional. Considerem un model regressiu amb errors heteroscedàstics. Suposem que els paràmetres del model poden ser dividits en el vector paràmetre α , que apareix en l'esperança, i el vector β que apareix en la variància condicional:

$$m_t(\theta) = m_t(\alpha), \quad h_t(\theta) = h_t(\alpha, \beta).$$

Susposem també que $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, on β_0 és un escalar i la hipòtesi de homoscedasticitat ve donada per la restricció $H_0 = \{\beta_1 = 0\}$.

Sota la hipòtesi nul·la, la variància condicional ja no depèn del paràmetre α . L'estadístic del test és:

$$\xi_{LM} = \sum_{t=1}^T z'_{1t} \left[\sum_{t=1}^T z_{1t} z'_{1t} - \sum_{t=1}^T z_{1t} z'_{2t} \left(\sum_{t=1}^T z_{2t} z'_{2t} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T z_{2t} z'_{1t} \right]^{-1} \times \sum_{t=1}^T z_{1t},$$

amb

$$z_{1t} = \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0),$$

$$z_{2t} = \frac{\partial \ell_t}{\partial \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_0 \end{pmatrix}}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0),$$

on $\hat{\alpha}^0$ i $\hat{\beta}_0^0$ són els estimadors de pseudomàxima versemblança de α i β_0 calculats sota hipòtesi de homoscedasticitat.

Si la funció de versemblança està ben especificada, és a dir, si el model es condicionalment Gaussià, l'estadístic del multiplicador de Lagrange té asimptòticament sota la hipòtesi nul·la una distribució χ^2 amb el grau de llibertat igual a la dimensió del vector β_1 . Si denotem la dimensió del vector per r , llavors el test del multiplicador de Lagrange consisteix en:

$$\begin{cases} \text{Si } \xi_{LM} < \chi_{95\%}^2(r), \text{ llavors acceptem la hipòtesi de homoscedasticitat} \\ \text{Si } \xi_{LM} \geq \chi_{95\%}^2(r), \text{ llavors la rebutgem} \end{cases}$$

On $\chi_{95\%}^2(r)$ és el quantil del 95% de $\chi^2(r)$. El quantil d'ordre p d'una distribució (amb $0 < p < 1$) és el valor de la variable x_p que marca un tall de manera que una proporció de valors de la població és menor o igual que x_p .

Tenim:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell_t}{\partial \alpha} = \frac{Y_t - m_t(\hat{\alpha}^0)}{\hat{h}_0} \frac{\partial m_t(\hat{\alpha}^0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hat{h}_0} \frac{\partial h}{\partial \beta_0}(\hat{\beta}_0^0) + \frac{1}{2} \frac{Y_t - m_t(\hat{\alpha}^0)}{\hat{h}_0^2} \frac{\partial h}{\partial \beta_0}(\hat{\beta}_0^0) \\ \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hat{h}_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) + \frac{1}{2} \frac{Y_t - m_t(\hat{\alpha}^0)}{\hat{h}_0^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) \end{cases}$$

És possible substituir l'estadístic inicial del multiplicador de Lagrange per un estadístic equivalent en el qual:

$$z_{1t} = \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}^0), z_{2t} = \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_0}(\hat{\theta}^0).$$

A més,

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_0} \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_1} = \frac{1}{4} \frac{1}{\hat{h}_0^4} \sum_{t=1}^T \frac{\partial h}{\partial \beta_0}(\hat{\beta}_0^0) \frac{1}{\hat{h}_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) (\hat{\epsilon}_t^{02} - \hat{h}_0)^4,$$

on podem substituir $(\hat{\epsilon}_t^{02} - \hat{h}_0)^4$ per la seva esperança condicional $2\hat{h}_0^2$ i obtenim un estadístic del test assimptòticament equivalent. Amb aquestes modificacions, l'estadístic del multiplicador de Lagrange queda de la següent forma (veure [1]):

$$\xi_{LM} = \frac{1}{2\hat{h}_0^2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1'}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) (\hat{\epsilon}_t^{02} - \hat{h}_0) \times \left\{ \sum_{t=1}^T \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1'}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) - \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) \right] \right. \\ \left. \times \left[\sum_{t=1}^T \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1'}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) \right] \right\}^{-1} \times \sum_{t=1}^T \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}(\hat{\alpha}^0, \hat{\beta}_0^0, 0) (\hat{\epsilon}_t^{02} - \hat{h}_0).$$

4.10.5 Test de Portmanteau

Per veure si un model amb volatilitat s'adequa a un model GARCH(p,q) de la forma:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \\ h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}, \end{cases}$$

realitzarem el test de Portmanteau següent (per més detalls veure [1]). Per un enter m fixat, $1 \leq m < n$, considerem l'estadístic $\hat{r}_m = (\hat{r}(1), \dots, \hat{r}(m))^T$. Siguin \hat{k}_n i \hat{J} estimadors de k_n i J. Per exemple, considerem:

$$\hat{k}_\eta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^4}{\hat{\sigma}_t^4(\hat{\theta}_n)}, \\ \hat{J} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\hat{\sigma}_t^4(\hat{\theta}_n)} \frac{\partial \hat{\sigma}_t^2(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{\sigma}_t^2(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta'}.$$

Definim també la matriu \hat{C}_m de dimensió $m \times (p+q+1)$ on l'element (h, k) de la matriu, per $1 \leq h \leq m$ i $1 \leq k \leq p+q$, ve donat per:

$$\hat{C}_m(h, k) = -\frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n (\hat{\eta}_{t-h}^2 - 1) \frac{1}{\hat{\sigma}_t^2(\hat{\theta}_n)} \frac{\partial \hat{\sigma}_t^2(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta_k}.$$

Considerem $\hat{D} = (\hat{k}_\eta - 1)^2 I_m - (\hat{k}_\eta - 1) \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}_m'$. Llavors l'adequació d'un model GARCH(p,q) serà rebutjada al nivell assimptòtic a quan:

$$\left\{ n \hat{r}_m' \hat{D}^{-1} \hat{r}_m > \chi_m^2(1-a) \right\}.$$

4.11 Criteris per seleccionar el millor model

Un cop ja tenim clar els models amb els que podem treballar, com estimar-los i quins tests fer servir per obtenir una llista reduïda de possibles models que s'ajusten adequadament a les dades, la següent pregunta que cal fer-nos és com triem el millor model entre tots els candidats. El mètode que emprarem serà minimitzar els criteris d'informació dels diferents models i si hi ha dos models amb uns criteris d'informació semblants es triarà el que requereixi estimar un nombre menor de paràmetres. Cal tenir present que un nombre massa elevat de paràmetres compliquen excessivament el model i augmenten els errors d'estimació.

Alguns dels valors i criteris que ens serviran de referència són:

- Log-versemblança: el valor logarítmic de versemblança d'un model regressiu és una forma de mesurar la bondat d'ajustament d'un model. Quant més gran sigui el valor, millor és l'ajustament del model al nostre conjunt de dades. El valor logarítmic per un determinat model pot oscil·lar entre menys infinit i més infinit.
- Akaike: el criteri d'informació d'Akaike (AIC) és un estimador de l'error de predicció i per tant, de la qualitat relativa d'un model. AIC estima la quantitat relativa d'informació perduda per un model determinat, quanta menys informació es perd, millor. En estimar aquesta quantitat, AIC premia la bondat d'ajustament però també inclou una penalització que és una funció creixent del nombre de paràmetres estimats, és a dir, té en compte tant el risc de sobreajustament (la penalització) com el risc de desajustament.

Suposem que tenim un model estadístic d'una sèrie de dades. Sigui k el nombre de paràmetres estimats en el model i sigui \hat{L} el valor màxim de la funció de versemblança pel model. Llavors el valor AIC del model és el següent:

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L}).$$

En el cas de models autoregressius amb errors heteroscedàstics es recomana utilitzar la següent modificació:

$$AIC = -2\ln(\hat{\sigma}^2) + 2k\ln(2\pi) - 1,$$

on $\hat{\sigma}^2$ és el valor estimat de la variància de l'error del model.

- Bayes: el criteri d'informació de Bayes (BIC), de la mateixa manera que l'AIC, premia la bondat d'ajustament i crea una penalització de l'ús excessiu de paràmetres. En el cas de BIC aquesta penalització és major. Aquest criteri d'informació no és asimptòticament eficient.

Suposem que tenim un model estadístic d'una sèrie de dades. Sigui n el nombre d'observacions, k el nombre de paràmetres estimats en el model i \hat{L} el valor maximitzat de la funció de versemblança del model. El criteri d'informació de Bayes ve definit per la següent funció:

$$BIC = k\ln(n) - 2\ln(\hat{L}).$$

En el context dels models autoregressius amb heteroscedasticitat condicional, el BIC pren la següent forma:

$$BIC = -2\ln(\hat{\sigma}^2) + k\ln(n) - 1 - \ln(2\pi).$$

- Hannan Quinn: el criteri d'informació de Hannan Quinn (HQC) igual que BIC no és asimptòticament eficient però HQC és fortament consistent. Sigui \hat{L} el valor màxim de la funció de versemblança pel model, n el nombre d'observacions i k el nombre de paràmetres estimats, HQC ve definit per la següent funció:

$$HQC = -2\hat{L} + 2k\ln(\ln(n)).$$

En el context dels models autoregressius amb heteroscedasticitat condicional, HQC ve definit de la següent forma:

$$HQC = -\ln(\hat{\sigma}^2) + k\ln(\ln(n)) - 1 - \ln(2\pi).$$

5 Anàlisi pràctic

En aquest capítol farem servir els conceptes estudiats en les seccions anteriors amb la finalitat d'analitzar i modelitzar correctament diferents sèries de preus. Les dades financeres que estudiarem seran el preu de les accions del Banc Santander en el New York Stock Exchange (NYSE) i el preu de l'or en dòlar/unça en el Commodity Exchange (COMEX). L'eina que es farà servir serà Rstudio i les comandes que utilitzarem seran recollides i explicades a l'annex.

El procediment a seguir per a la correcta modelització de la sèrie serà el següent:

1. Anàlisi previ de les dades
2. Identificació del model
3. Estimació dels paràmetres
4. Selecció del model òptim
5. Predicció

5.1 Accions Santander

La primera sèrie temporal que analitzaré serà el preu de les accions del Banc Santander. He seleccionat el preu d'unes accions perquè és un clar cas on es presenten agrupacions de volatilitat variables en el temps o, altrament dit, hi ha períodes de grans oscil·lacions seguits de períodes de baixa variació.

La mostra agafada correspon al preu de tancament des del 2 d'abril de 2012 fins al 31 de març de 2022. Per fer-nos una idea de com han evolucionat els preus al llarg de les més de 2500 observacions agafades, a la taula 1 es mostraran les primeres i les últimes 5 dades de la sèrie.

Taula 1: Taula de dades de la sèrie temporal ³

	SAN.Open	SAN.High	SAN.Low	SAN.Close	SAN.Volume	SAN.Adjusted
2012-04-02	7.47	7.78	7.45	7.74	8786000	4.310109
2012-04-03	7.57	7.59	7.31	7.36	15653100	4.098500
2012-04-04	7.18	7.25	7.08	7.17	14552000	3.992698
2012-04-05	7.00	7.12	6.97	7.04	9884200	3.920305
2012-04-09	6.97	7.10	6.96	7.00	7944600	3.898031
2022-03-25	3.36	3.39	3.35	3.39	3291000	3.390000
2022-03-28	3.41	3.42	3.35	3.40	5011100	3.400000
2022-03-29	3.56	3.58	3.52	3.56	6591000	3.560000
2022-03-30	3.52	3.52	3.43	3.47	4279600	3.470000
2022-03-31	3.45	3.46	3.37	3.38	4276000	3.380000

³Dades sobre el preu de tancament de les accions del Santander obtinguda de la pàgina web de Yahoo Finance [4].

La representació gràfica de la sèrie sobre el preu de tancament és la següent (figura 1):



Figura 1: Gràfic de la sèrie temporal corresponent al preu de tancament

Es mostraran algunes dades rellevants de la sèrie del preu de tancament (taula 2):

Taula 2: Taula de dades de la sèrie temporal corresponent al preu de tancament

Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana	
1,790	10,750	5,693	5,440	
Skewness	Curtosi	Desviació estàndard	1r Quartil	3r Quartil
0,299	2,346	2,059	4,080	7,110

Podem observar que la sèrie presenta una certa tendència a la baixa. Els valors del tancament de les accions del Santander oscil·len entre 10,75 euros al 2014 i 1,79 euros, al 2020, degut a la inestabilitat provocada per la Covid-19. Anem a veure ara la sèrie de retorns (figura 2):

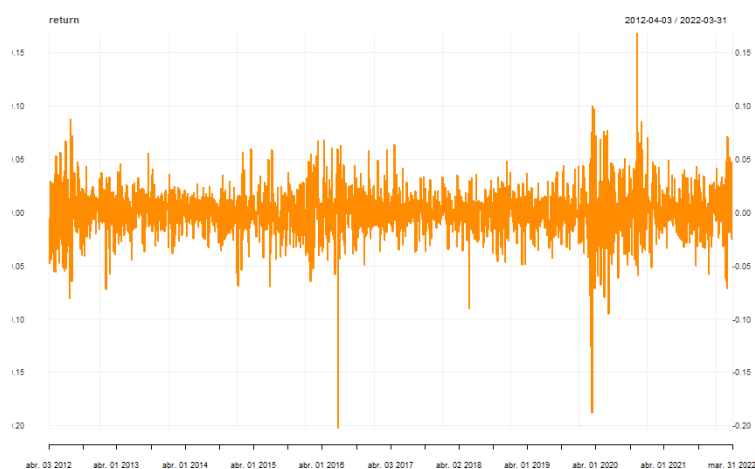


Figura 2: Gràfic de la sèrie de retorns

A continuació veurem algunes dades rellevants dels retorns (taula 3):

Taula 3: Taula de dades dels retorns de la sèrie temporal

	Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana
	-0,202	0,169	0,00015	0,000
Skewness	-0,503			
Curtosi	11,165			
Desviació estàndard		0,022		
1r Quartil			-0,012	
3r Quartil				0,012

A la taula 3 podem observar que la mitjana és relativament pròxima a zero. No obstant, com estem treballant amb dades majoritàriament més petites en valor absolut a 0,012, amb mínim de -0,202 i màxim de 0,169, no podem afirmar que la mitjana sigui zero.

Caldria comprovar que la sèrie de retorns es comporta com un soroll blanc. Una manera d'afirmar que estem davant d'un soroll blanc és mirant el correlograma de la funció d'autocorrelació simple (FAS o en anglès ACF) i la funció d'autocorrelació parcial (FAP o en anglès PACF) (figura 3). Si en la ACF i la PACF es veuen molts valors significatius voldrà dir que existeix una clara relació entre els retards i per tant, no serà soroll blanc.

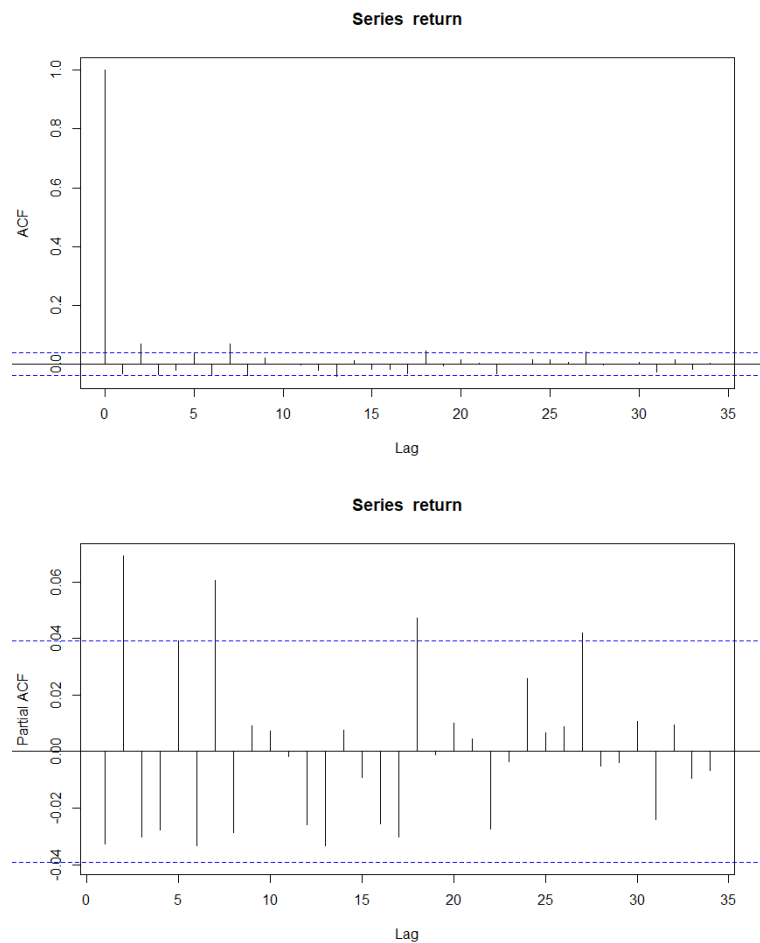


Figura 3: ACF i PACF dels retorns

Com podem observar hi ha fins a 6 retards que són significatius en la ACF i 4 en la PACF. Com que hi ha indicis de correlació significativa, no podem ni afirmar ni rebutjar que els nostres retorns siguin soroll blanc. Requerirem de més eines per tal d'arribar a una conclusió clara.

Fent el test de Ljung Box explicat anteriorment obtenim un p-valor = 0,1023 i per tant, no és significatiu al 5 %, és a dir, no rebutgem la hipòtesi nul·la del test i arribem a la conclusió que els valors dels retorns són independents. Aquest fet implica que no hi ha correlació i llavors es tracta d'un soroll blanc.

Una altra dada de la taula 3 que ens és rellevant és la curtosi. Tenim una curtosi de 11,165, és a dir, tenim un excés de curtosi de 8,165 respecte la curtosi de la distribució normal. Llavors podem concloure que és una sèrie leptocúrtica. Aquesta propietat també es veu clarament si observem l'histograma (figura 4).

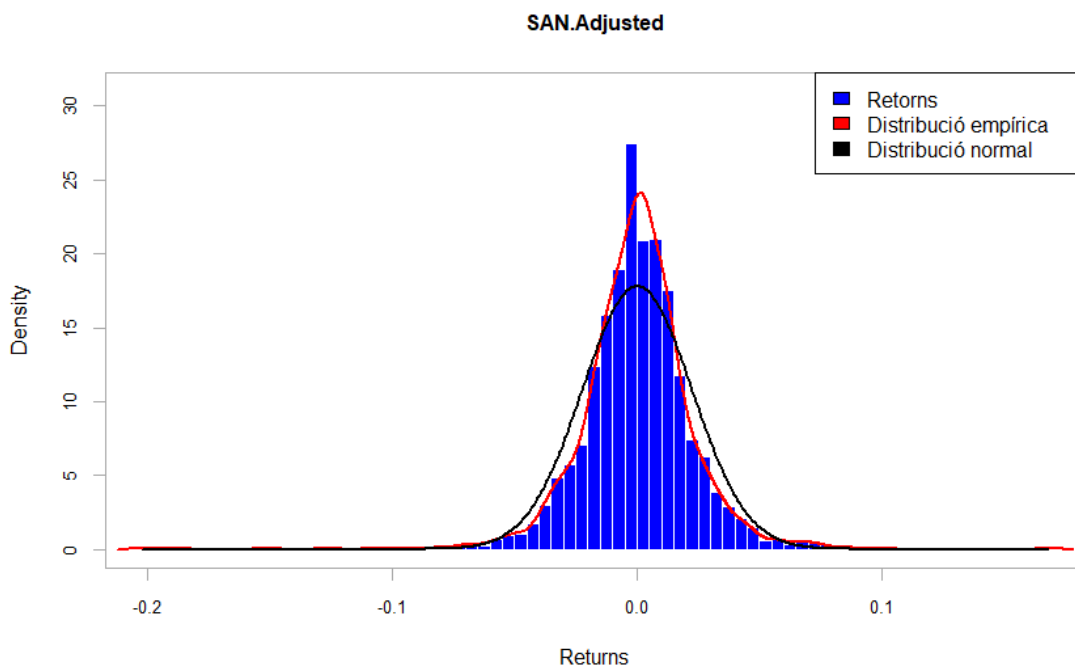


Figura 4: Histograma de la sèrie de retorns

Efectivament, mirant l'histograma podem observar que les densitats presenten cues més pesades que en la distribució normal, és a dir, decreixen a zero més lentament que $\exp(-x^2/2)$. A més, observem que el pic és notablement més afilat en el zero i que la distribució no és simètrica perquè en la Taula 3 tenim una asimetria (*skewness*) de -0,503, per tant, no podem descartar la utilització de models asimètrics.

A priori es podria afirmar amb la informació que hem vist que la nostra sèrie no segueix una distribució normal però per acabar de confirmar-ho realitzarem el test de Shapiro-Wilk. Les dades obtingudes en el test són l'estadístic $W=0,936$ i el p-valor = $2,2e-16$. Com el p-valor és menor al nivell de significància del 5%, llavors la hipòtesi nul·la és rebutjada i es conclou que les dades de la nostra sèrie no segueixen una distribució normal.

En l'apartat 4.8 hem treballat l'estimació per pseudomàxima versemblança a partir de la suposició de normalitat. La nostra sèrie de retorns no compleix la hipòtesi inicial, però no és problema ja que els estimadors per pseudomàxima versemblança són consistents encara que no estiguem en un cas de normalitat.

Una de les característiques dels models amb heteroscedasticitat condicional és que els retorns siguin un soroll blanc però que els retorns al quadrat (ϵ_t^2) o els retorns absoluts ($|\epsilon_t|$) no siguin un soroll blanc. Per saber si podem aplicar un model ARCH a la nostra sèrie caldria contrastar aquest fet.

Primerament veurem la sèrie de retorns al quadrat (figura 5):

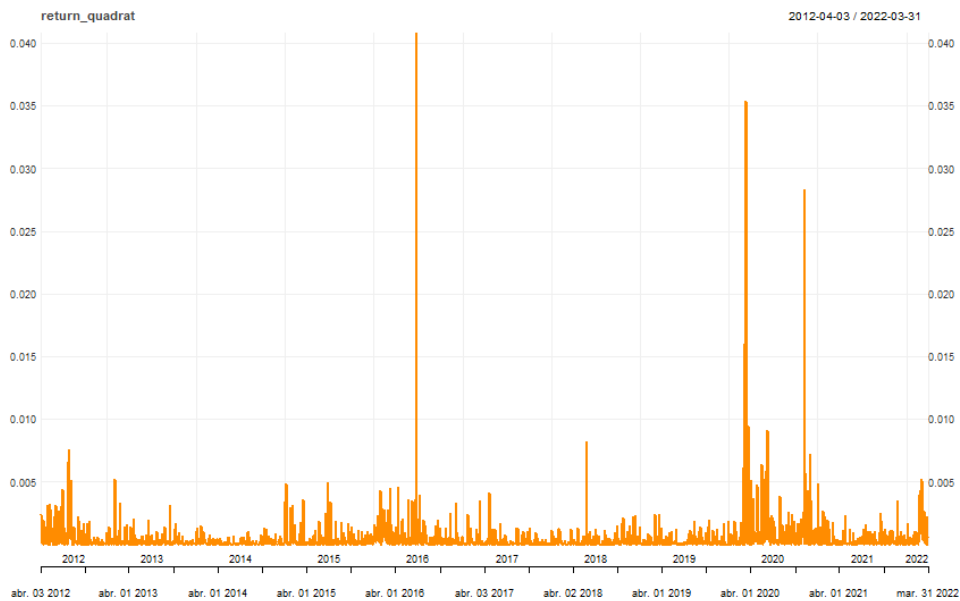
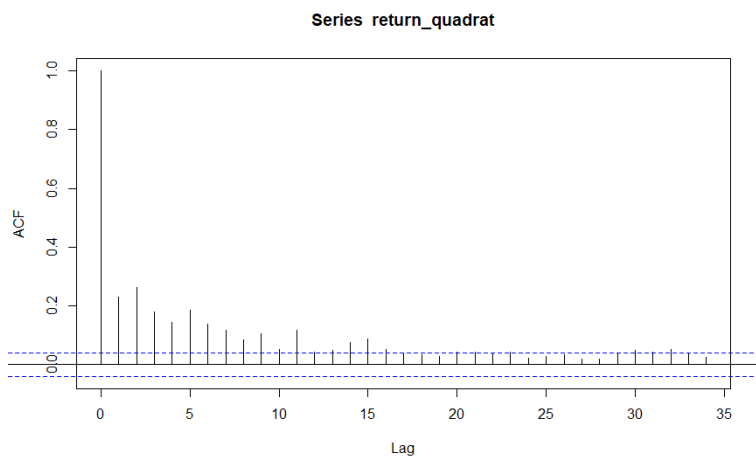


Figura 5: Gràfic de la sèrie de retorns quadrats

Com es pot observar en la figura 5, els retorns al quadrat no són soroll blanc. Tal i com hem fet amb els retorns, passarem a analitzar el correlograma de la funció d'autocorrelació simple (ACF) i la funció d'autocorrelació parcial (PACF) per tal d'afirmar l'existència o no de correlació (figura 6).



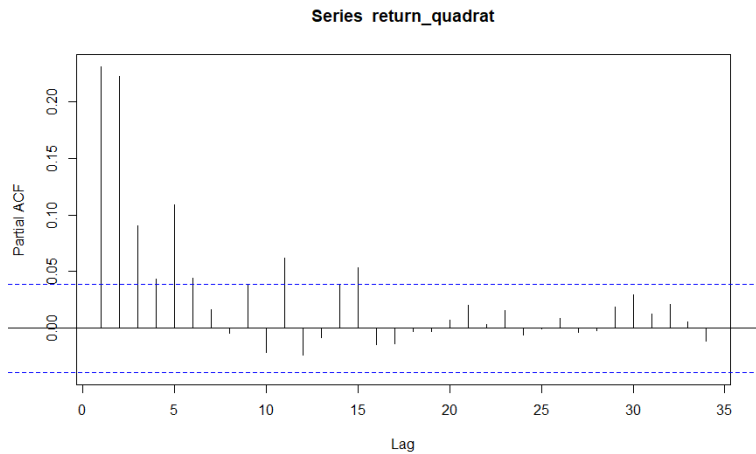


Figura 6: ACF i PACF de la sèrie de retorns quadrats

A diferència dels correlogrames dels retorns (figura 3), en aquest cas podem confirmar que els retorns al quadrat no són soroll blanc mitjançant l'ACF i la PACF. L'ACF dels retorns al quadrat té un nombre elevat de valors significatius i no tendeix a zero al llarg dels retards, un clar indicatiu que els retorns quadrats (ϵ_t^2) estan fortament autocorrelacionats. Aquesta propietat no és incompatible amb la suposició de soroll blanc del retorn però indica que no és un soroll IID. Per tant, podem fer servir alguna de les extensions dels models amb heteroscedasticitat condicional estudiats anteriorment per modelitzar la sèrie.

Començarem a estudiar un model autoregressiu amb heteroscedasticitat condicional de grau p , és a dir, un model ARCH(p). Obtindrem una orientació sobre el grau d'un model autoregressiu mitjançant el PACF. El grau p es pot estimar a partir del nombre de retards significatius que apareixen en la PACF. Tal i com es pot comprovar a la figura 6, en el nostre cas tenim els 6 primers retards significatius i, per tant, podem agafar de referència un model ARCH (6).

El procediment que seguirem per obtenir el grau òptim del nostre model ARCH serà estimar un model ARCH (p) i comprovar que els paràmetres i el test ARCH-LM ⁴ explicat prèviament siguin significatius. Partirem d'un model ARCH(1) i anirem augmentant el grau fins que la significació ens ho indiqui. La primera estimació on ha sortit un paràmetre no significatiu ha sigut en el model ARCH(7).

Taula 4: Resultat de l'estimació del model ARCH(7)

Optimal Parameters				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000148	0.000370	-0.40111	0.688336
omega	0.000179	0.000014	12.98141	0.000000
alpha1	0.178170	0.029373	6.06577	0.000000
alpha2	0.109117	0.025619	4.25920	0.000021
alpha3	0.090456	0.025180	3.59242	0.000328
alpha4	0.086708	0.024132	3.59306	0.000327
alpha5	0.091822	0.028080	3.27000	0.001075
alpha6	0.080560	0.027011	2.98250	0.002859
alpha7	0.003080	0.015910	0.19357	0.846509

⁴Test d'homoscedasticitat, capítol 4.10.4

Analizant el resultat de l'estimació (taula 4) tenim 6 retards d'alfa que són clarament significatius ja que presenten un t-valor més gran a 2 i un p-valor més petit que 0,05. En canvi, el setè retard d'alfa no és significatiu perquè té un t-valor de 0,194 i un p-valor de 0,847. A més, si realitzem el test ARCH-LM obtenim que l'estadístic té un valor de 0,985 i un p-valor de 0,32087, per tant, no és el millor candidat per a la nostra sèrie. Si ens hi fixem, en l'estimació del model ARCH de grau 6 (taula 5), tots els paràmetres són significatius excepte la constant μ i el resultat del test ARCH-LM és significatiu amb un valor de l'estadístic de 20,82 i un p-valor de 1,925e-05. Aleshores, podem concloure que el model ARCH òptim és un model ARCH(6). A continuació es mostren els resultats de l'estimació del ARCH(6):

Taula 5: Resultat de l'estimació del model ARCH(6)

Optimal Parameters				
	Estimate	std. Error	t value	Pr(> t)
μ	-0.000147	0.000370	-0.39643	0.691785
ω	0.000180	0.000013	13.48526	0.000000
α_1	0.178413	0.029286	6.09208	0.000000
α_2	0.107491	0.025442	4.22503	0.000024
α_3	0.092013	0.024940	3.68933	0.000225
α_4	0.086839	0.024150	3.59578	0.000323
α_5	0.092364	0.028082	3.28904	0.001005
α_6	0.080179	0.026883	2.98254	0.002859

Un cop ja hem decidit el model ARCH òptim, podem estudiar l'opció de modelitzar la sèrie emprant un model GARCH(p,q) o qualsevol de les seves extensions estudiades prèviament. Cal destacar que amb un ordre tant elevat del model ARCH, és difícil que aquest sigui adequat degut al gran nombre de paràmetres a estimar. Procedim a realitzar una taula amb els criteris d'informació d'Akaike, Bayes, Hannan-Quinn i Shibata i amb el valor de log-versemblança dels diferents models proposats.

Taula 6: Comparació dels criteris d'informació

	GARCH(1,1)	GARCH(1,2)	GARCH(2,1)	GARCH(2,2)	ARCH(6)	TGARCH(1,1)	GJRGARCH(1,1)
AKAIKE	-4.9923	-4.9918	-4.9908	-4.991	-4.9739	-4.9899	-4.9945
BAYES	-4.983	-4.9802	-4.9791	-4.997	-4.9553	-4.9783	-4.9828
SHIBATA	-4.9924	-4.9918	-4.9908	-4.991	-4.974	-4.9899	-4.9945
HANNAN_QUINN	-4.9889	-4.9876	-4.9865	-4.986	-4.9672	-4.9857	-4.9903
LOGLIKELIHOOD	6234,415	6234,815	6233,488	6234,815	6215,479	6232,438	6238,147

En la taula 6, tal i com havíem comentat anteriorment, podem apreciar que el model ARCH(6) és el model entre tots els candidats que té els valors dels diferents criteris d'informació més elevats i, per tant, és el model que menys s'adequa a les nostres dades. Si analitzem el model GARCH, els ordres que presenten uns millors resultats són els del model GARCH(1,1) o el model GARCH(2,2). Dels model asimètrics que hem provat, EGARCH, Treshold GARCH, GJR-GARCH i del model diferenciat IGARCH, els models que millors criteris d'informació tenen són el TGARCH(1,1) i el GJR-GARCH(1,1).

Els dos models finalistes són el GJR-GARCH(1,1) ja que té els criteris d'informació Akaike, Shibata, Hannan-Quinn i el valor log-versemblança més baixos i el model GARCH(2,2) perquè té el criteri d'informació de Bayes més baix. També considerarem el GARCH(1,1) perquè en alguns criteris és millor que el GARCH(2,2) i en altres és millor que el GJR-GARCH(1,1).

A continuació es mostrarà la taula de les estimacions d'aquests tres models:

Taula 7: Comparació dels resultats de l'estimació

Models finalistes									
	GJR-GARCH(1,1)			GARCH(2,2)			GARCH(1,1)		
	Estimació	s.e.	p-valor	Estimació	s.e.	p-valor	Estimació	s.e.	p-valor
mu	-0.000226	0,000369	0,539081	-0.000052	0,000382	0,891189	-0.000027	0,000366	0,94177
omega	0,000015	0,000002	0	0,00002	0,000049	0,688241	0,000016	0,000006	0,006101
alpha1	0,07007	0,008061	0	0,128957	0,063166	0,041195	0,104185	0,013398	0
alpha2	-	-	-	0,000006	0,369957	0,999986	-	-	-
beta1	0,873707	0,008757	0	0,569144	2,757535	0,836482	0,863245	0,018383	0
beta2	-	-	-	0,261678	2,348172	0,911268	-	-	-
gamma	0,053231	0,018195	0,003438	-	-	-	-	-	-

Si ens fixem en la taula 7, podem observar que els p-valors de les estimacions del model GARCH(2,2) no són significatives excepte el paràmetre alpha1. A més, si mirem els errors estàndards (s.e.) podem veure que per alguns paràmetres aquests valors són molt més grans que la pròpia estimació. Degut a que el GARCH(2,2) és el model que més paràmetres té i per als motius que acabem d'esmentar, decidim descartar aquest model.

Si analitzem els resultats del model GJR-GARCH(1,1), podem observar que tots els paràmetres són significatius excepte la constant mu. Pel que fa als errors estàndards, són relativament grans però assumibles. El model GARCH(1,1) també té tots els paràmetres significatius excepte la constant mu que té un p-valor de 0,941770. Els errors estàndards d'aquest model són lleugerament superiors en proporció respecte als del model GJR-GARCH(1,1).

Com que el model GJR-GARCH(1,1) té els criteris d'informació Akaike, Shibata, Hannan-Quinn i el valor log-versemblança més petits que el model GARCH(1,1) i també els errors estàndards dels paràmetres proporcionalment més petits, decidim que aquest serà el model òptim per a les nostres dades. Podem raonar que el criteri de Bayes és millor en el cas de GARCH(1,1) perquè penalitza notòriament la utilització de paràmetres addicionals i el model GJR-GARCH(1,1) té un paràmetre a estimar més. Remarcem que la suma dels paràmetres alpha, beta i gamma és inferior a 1 ($0,07007 + 0,873707 + 0,053231 = 0,997008$) i per tant, el nostre model és estacionari.

A continuació es mostrarà una comparació dels retorns de la sèrie i la volatilitat obtinguda a partir del model estimat GJR-GARCH(1,1).

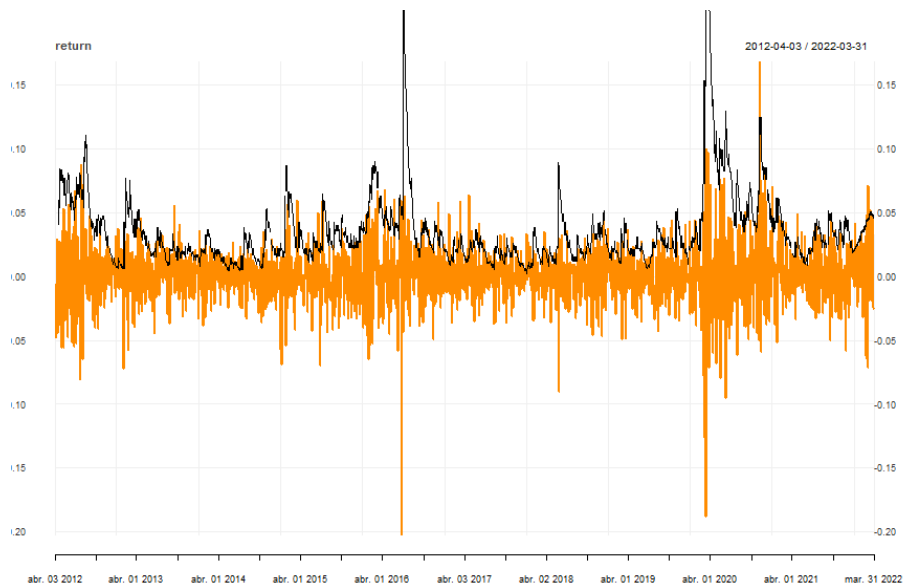


Figura 7: Gràfica comparativa de la volatilitat estimada i els retorns

En la figura 7, el valor dels retorns està dibuixat en taronja i el de la volatilitat en negre. Es pot observar que els moments de gran volatilitat coincideixen amb les dates on els valors dels retorns són més extrems. Per exemple, quan els valors dels retorns són pròxims a zero es pot observar com la volatilitat és baixa mentre que quan els valors dels retorns difereixen del zero, la volatilitat creix fortament, com és el cas del valor extrem posterior a l'abril del 2016 o el valor del març de 2020.

Una altra manera de comprovar que el nostre model s'ajusta adequadament a les dades és utilitzant els intervals de confiança. Direm que un interval de $(1-a)100\%$ de confiança per l'estimació d'un paràmetre poblacional θ que segueix una determinada distribució de probabilitat és un interval del tipus $[\theta_1, \theta_2]$ tal que $P[\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2] = 1 - a$.

Com podem observar en la figura 8, els intervals acompanyen bé les fluctuacions dels retorns. També és cert que hi ha alguns valors que sobresurten d'aquesta franja de confiança, encara que és un nombre molt petit tenint en compte que la mostra és sobre 2516 observacions.

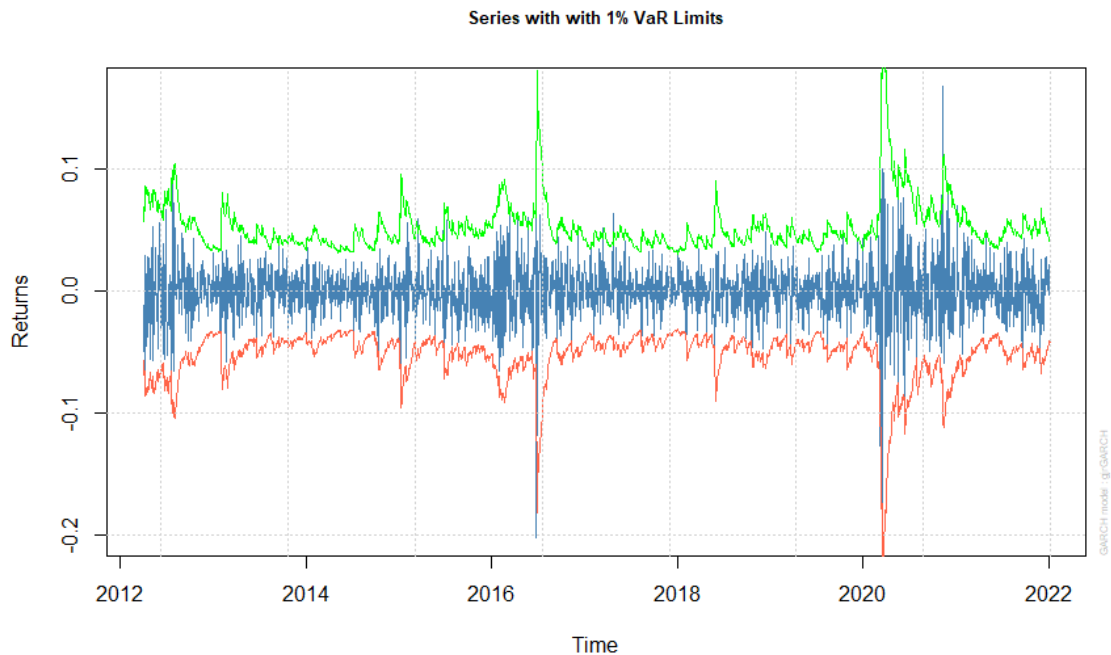


Figura 8: Gràfica VaR⁵ 1%

Ara que ja hem seleccionat el model òptim i hem vist que les estimacions s'ajusten correctament a la realitat, cal comprovar que els residus són soroll blanc. Per veure si es compleix aquesta condició realitzarem el test de Ljung-Box tant per als residus, com per als residus al quadrat. Els resultats obtinguts són un p-valor de 0,8108 per als residus, i com és més gran que el nivell de significació no rebutgem la hipòtesi nul·la. El p-valor obtingut de realitzar el test per als residus quadrats és de 0,36 i, per tant, tampoc rebutgem la hipòtesi nul·la. Aleshores, concloem que els residus i els residus al quadrat es comporten com un soroll blanc.

⁵Value at Risk

Arribats a aquest punt, donem per tancades les tasques d'estimació de models i de selecció del model òptim. El que farem a continuació seran una sèrie de prediccions, tant de la volatilitat com del preu de tancament de les accions del Santander, emprant el model GJR-GARCH(1,1) que hem escollit.

Primerament farem una predicció de vint dies de mercat de la volatilitat. Com podem observar en la figura 9, la predicció obtinguda de la volatilitat és que decreixarà.

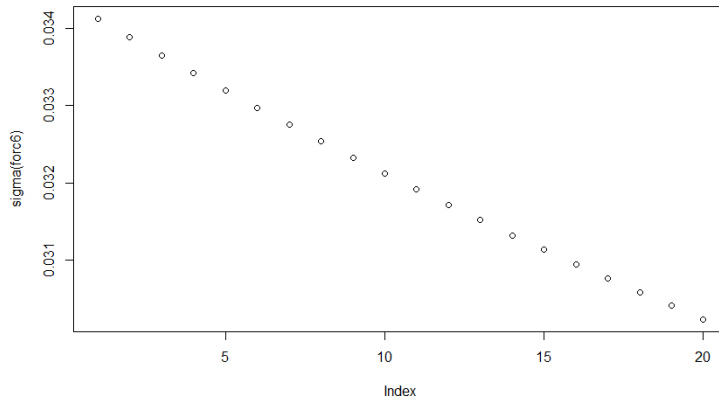


Figura 9: Predicció de la volatilitat

Finalment realitzarem tres⁶ simulacions del preu de tancament de les accions del Santander, utilitzant el model GJR-GARCH(1,1) amb les estimacions dels paràmetres corresponents (figura 10). Aquestes simulacions tenen una durada de 60 dies de mercat i prenen de referència l'última data i preu agafades en la nostra mostra, és a dir, la simulació començarà el dia 1 d'abril i el preu de tancament del dia anterior serà de 3,38 euros.

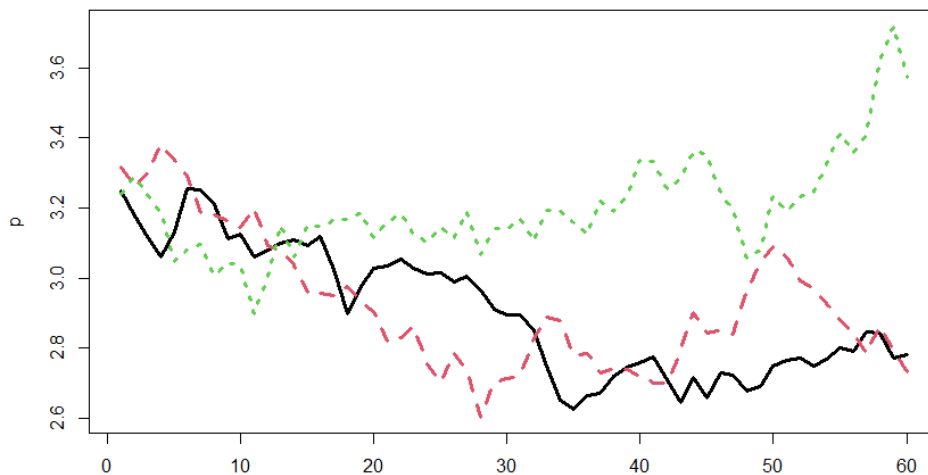


Figura 10: Gràfica de les 3 simulacions del preu de tancament

⁶S'ha considerat fer 3 simulacions per a poder analitzar diferents possibles escenaris de la sèrie.

Cal comentar que aquestes simulacions no tenen perquè reflectir el succeït en la realitat i servirà per analitzar si alguna de les simulacions es comporta de manera semblant als preus veritables. També destacar que degut a que les dades de la nostra mostra acaben el 31 de març de 2022 i la data de lliurament del treball (13 de juny de 2022), no es podrà comparar els resultats al llarg dels 60 preus sinó que s'analitzaran els primers 36 preus.

Si examinem les simulacions de la figura 10, la simulació pintada de color verd té una baixada durant els primers 11 dies, es manté estable fins el dia 40 i després es produeix una pujada i un descents dels preus de la mateixa magnitud i finalment el preu s'eleva fins arribar a un preu superior als 3,6 euros l'acció. Pel que fa a les simulacions dibuixades de color vermell i negre, ambdues arriben al final de la simulació amb un preu proper als 2,8 euros l'acció. La simulació en vermell pateix un caiguda prolongada fins el dia 28, moment en que torna a augmentar el valor fins el dia 50 situant-se prop dels 3,10 euros l'acció i posteriorment tornar a descendir fins el preu final comentat anteriorment. Si ens fixem ara en la simulació representada en negre, presenta una tendència decreixent fins el dia 35, arribant a assolir un preu de 2,65 euros l'acció. Posteriorment el preu augmenta lleugerament sense grans alts i baixos fins els ja comentats 2,8 euros.

A continuació es mostrarà la gràfica amb les dades reals del preu de tancament de les accions del Santander (figura 11):

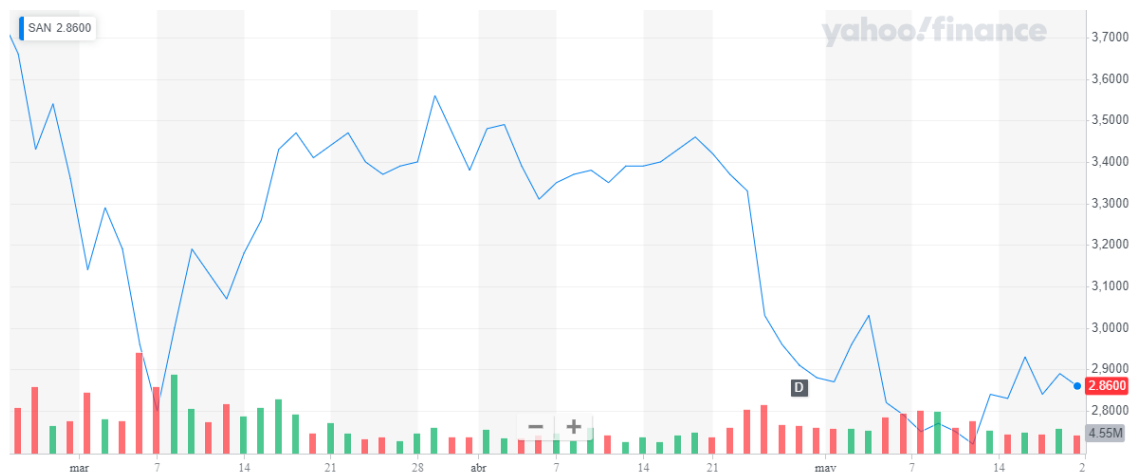


Figura 11: Gràfica del preu real de tancament de les accions del Santander⁷

Tal i com s'ha detallat, cal fixar-nos en el comportament dels preus a partir del dia 1 d'abril. També és rellevant matisar que els dies de mercat no corresponen amb els dies naturals d'un any, aquest fet és provocat pel fet que els dies festius no s'obre el mercat, per tant, un any per conveni té 365 dies però un any de mercat en té 252. Així doncs, observem que en els primers 16 dies de mercat el preu de les accions s'ha mantingut estable fluctuant sobre el mateix valor. Passats aquests dies, el preu ha caigut fortament fins arribar a un valor de 2,86 euros l'acció en el dia 36 de mercat. En el dia 36 de les simulacions els preus de tancament són 2,67 euros en la simulació dibuixada en color negre, 2,80 euros en la de color vermell i 3,17 euros en la de color verd. Si comparem els fets reals amb els resultats obtinguts en les simulacions, podem concloure que cap simulació és plenament fidel amb la realitat, no obstant, la sèrie presenta la mateixa tendència a la baixa que les simulacions de color vermell i negre.

⁷Gràfica obtinguda de la pàgina web de Yahoo Finance [4].

5.2 Preu de l'or

En aquesta secció modelitzarem el preu d'un metall, l'or, del mercat de primeres matèries. L'or ha estat un dels metalls més valorats per la societat des de fa milers d'anys. En l'actualitat no només té utilitat en la indústria o en la joieria, sinó que també és considerat un dipòsit de valor o de riquesa.

A més, és un dels pocs béns que té valor per sí mateix, de manera que no es veu afectat per temes fluctuants com la inflació, o el tipus de canvi de forma directa, però sí ho fa per la llei d'oferta i demanda. Per tant, quan hi ha un augment de demanda però la renda dels usuaris no evoluciona al mateix nivell, existeix escassetat i el seu preu puja. És per això que molts inversors recomanen invertir capital en aquesta matèria primera.

L'or ha sigut considerat durant molt temps com una reserva de valor, i pot ser un possible actiu refugi quan es produeix períodes de gran volatilitat en els mercats i les perspectives són incertes.

La mostra que s'ha agafat correspon al preu de tancament de l'or, en dòlars/unça bruta, en el mercat COMEX des del 2 d'abril de 2018 fins al 31 de març de 2022. El Commodity Exchange o COMEX és la principal borsa de comerç de futurs de metalls, tals com l'or, la plata, el coure, etc. del món. Per tal d'apreciar l'evolució del bé al llarg d'aquest període es mostraran les primeres i les últimes 5 dades de la nostra mostra.

Taula 8: Taula de dades de la sèrie temporal ⁸

▲	GC=F.Open ◊	GC=F.High ◊	GC=F.Low ◊	GC=F.Close ◊	GC=F.Volume ◊	GC=F.Adjusted ◊
2018-04-02	1327.0	1344.2	1324.7	1342.1	649	1342.1
2018-04-03	1340.4	1341.5	1328.5	1332.8	702	1332.8
2018-04-04	1331.8	1347.3	1331.6	1335.8	718	1335.8
2018-04-05	1333.5	1333.7	1322.6	1324.3	258	1324.3
2018-04-06	1326.5	1333.0	1319.0	1331.9	348	1331.9
2022-03-25	1953.8	1953.8	1953.8	1953.8	83	1953.8
2022-03-28	1932.6	1939.6	1932.6	1939.6	7	1939.6
2022-03-29	1893.5	1912.0	1893.5	1912.0	128051	1912.0
2022-03-30	1918.4	1937.0	1914.5	1933.5	17765	1933.5
2022-03-31	1933.5	1949.9	1919.1	1949.2	3617	1949.2

Com es pot observar a la taula 8, el preu de tancament en l'inici de la mostra és de 1342,1 euros/unça i al final varia per sobre dels 1900 euros/unça, és a dir, el preu de l'or ha augmentat considerablement en el transcurs de la mostra. Aquest fet resulta més evident si mirem valors anteriors a l'abril de 2018, per exemple, en el mateix mes del 2008 el preu era de 900 euros/unça. Encara que la tendència sembla clarament positiva, remarcar que hi ha un període estable pel que fa el preu durant el 2013 fins el 2019. En la figura 12 es mostra el gràfic del preu de tancament de l'or al llarg de la nostra mostra.

⁸Dades sobre el preu de tancament de l'or obtinguda de la pàgina web de Yahoo Finance [5].



Figura 12: Gàfic del preu de tancament de l'or

Hi ha una clara tendència creixent del preu de l'or. El pic més alt data del setembre de 2020, pic provocat per la situació econòmica durant la Covid19 i el valor més baix es troba al mateix mes de l'any 2018, degut a la força del dòlar en aquell moment. Per tal de poder ajustar un model caldrà treballar amb la sèrie de retorns.

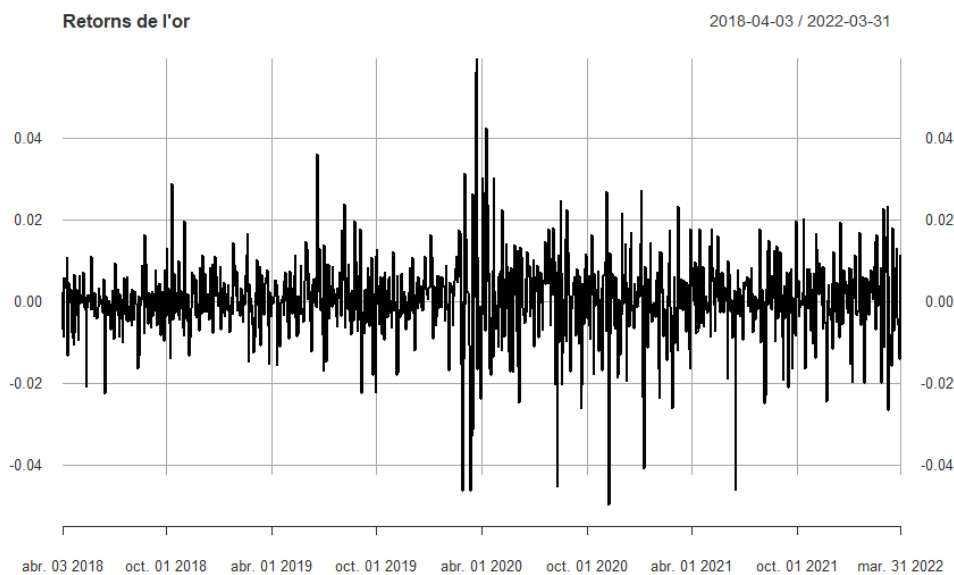


Figura 13: Gàfic dels retorns

Tal i com es volia, en la gràfica dels retorns (figura 13) ja no hi ha tendència ja que els valors tendeixen a variar al voltant de la constant igual a zero. No obstant, pel que fa a la variància sembla que no és constant i per tant, podria presentar heteroscedasticitat. Abans de contrastar aquest fet, veurem algunes dades rellevants dels retorns:

Taula 9: Taula de dades dels retorns

Mínim	Màxim	Mitjana	Mediana
-0,0498	0,0595	0,0004	0,0005

Skewness	Curtosi	Desviació estàndard	1r Quartil	3r Quartil
-0,1755	5,5168	0,0098	-0,0037	0,0059

En la taula 9 podem observar una mitjana relativament pròxima a zero i una mediana positiva. També destacar que la curtosi és més gran que 3 i tenim una asimetria negativa, per tant, el model a seleccionar podria ser alguna de les extensions asimètriques de GARCH estudiades en aquest treball. Seguint el mateix procediment que en les accions del Santander, caldria comprovar si la nostra sèrie és un soroll IID. Per fer-ho analitzarem la ACF i la PACF de la sèrie de retorns.

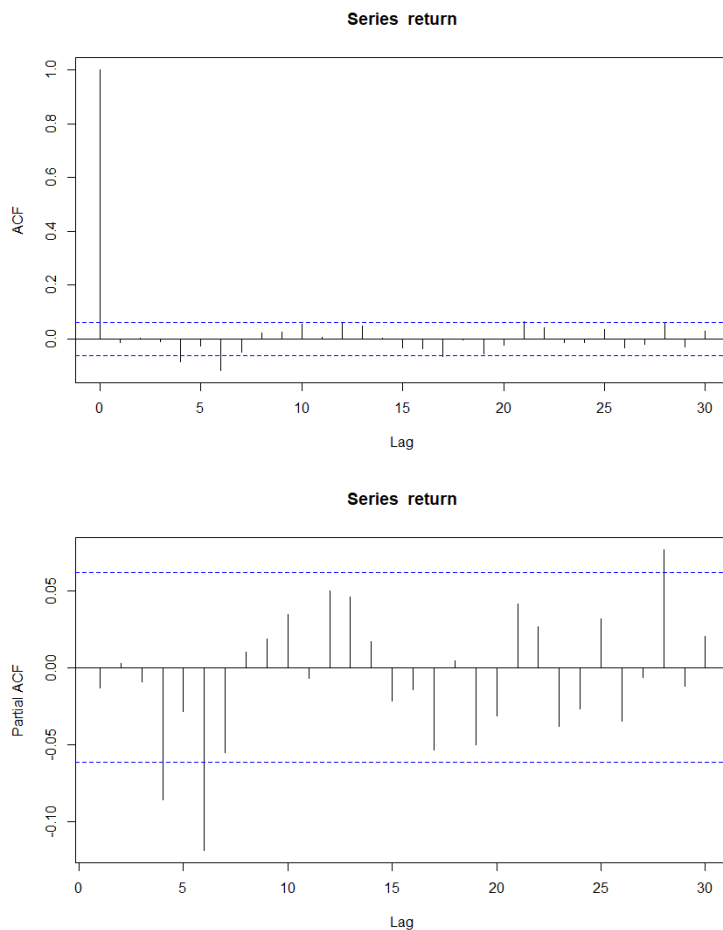


Figura 14: ACF i PACF dels retorns

En la ACF hi ha 3 retards que superen la línia de significació i en la PACF també (figura 14). A diferència de la sèrie del preu de les accions del Santander, en aquest cas sembla suficientment clar que mitjançant el correlograma de la funció d'autocorrelació es pot afirmar que estem davant d'una sèrie sense correlació entre retards. Procedim a realitzar el test de Ljung Box per a ratificar la decisió. Els resultats del test per la sèrie de retorns dona un valor de l'estadístic del 0,17 i d'un p-valor de 0,68, clarament més gran

que el nivell de significació del 5%. Efectivament, en el cas dels retorns de l'or, hi ha molt més marge que en els retorns de les accions, per acceptar la hipòtesi nul·la i concloure que es comporta com un soroll IID.

Ara que sabem que les dades es distribueixen de forma independent i idènticament distribuïda, cal saber si aquesta distribució és la distribució normal. Per aquest motiu passem a estudiar l'histograma dels retorns.

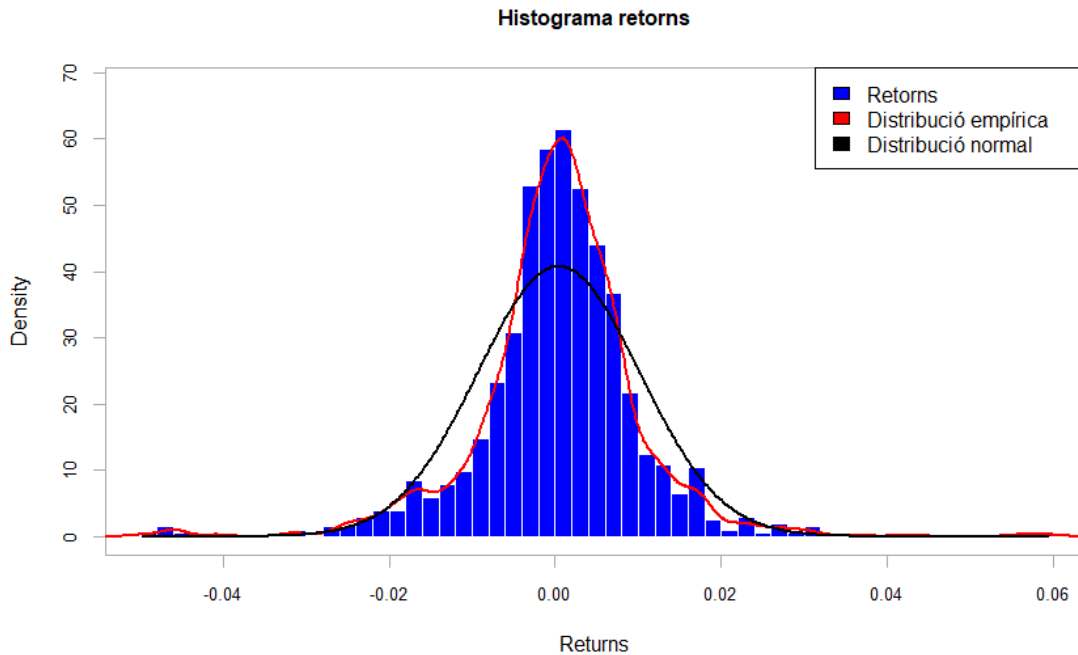


Figura 15: Histograma de la sèrie de retorns

De la mateixa forma que en la secció 5.1, l'histograma dels retorns (figura 15) presenta un pic més llarg i afilat i les cues són lleugerament més pesades que les d'una distribució normal. També hem pogut veure en la Taula 9 que el valor de la curtosi dels retorns era 5,5168, és a dir, un excés de curtosi del 2,5168 respecte la curtosi de la distribució normal. Cal destacar que la curtosi de l'or és molt més baixa que la presentada en les accions. Encara que sembla obvi que les dades no venen donades per una distribució normal, emprarem el test de Shapiro Wilk per confirmar-ho. Els resultats del test per a la sèrie de retorns són un estadístic W de 0,9277 i un p-valor de $2,2e-16$, aleshores podem rebutjar la hipòtesi nul·la i concloure que la distribució de les nostres dades és diferent de la normal.

Passem a veure si podem aplicar models amb heteroscedasticitat. Si bé és cert que en el gràfic dels retorns ja hem apreciat que la variància no era constant, ho comprovarem primerament veient la sèrie de retorns al quadrat:

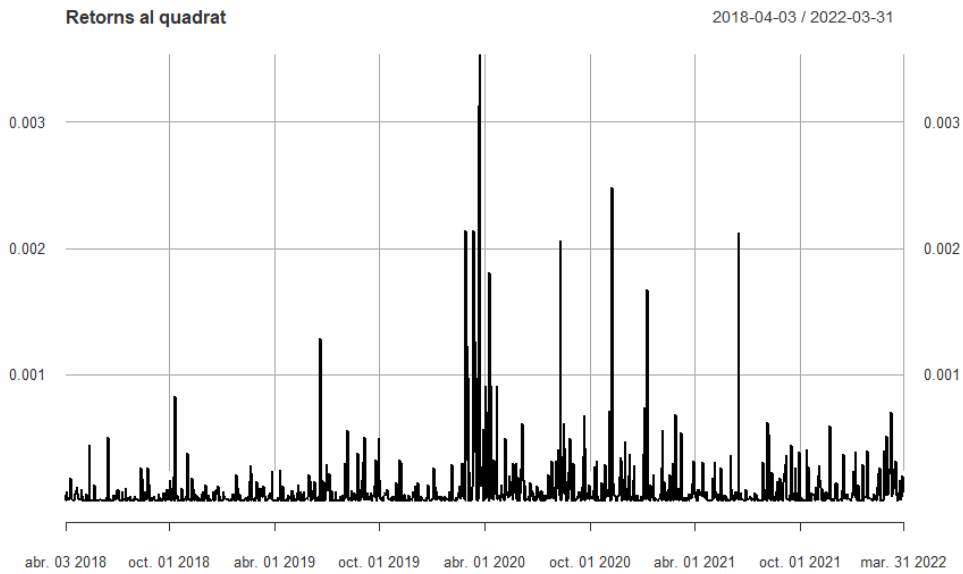
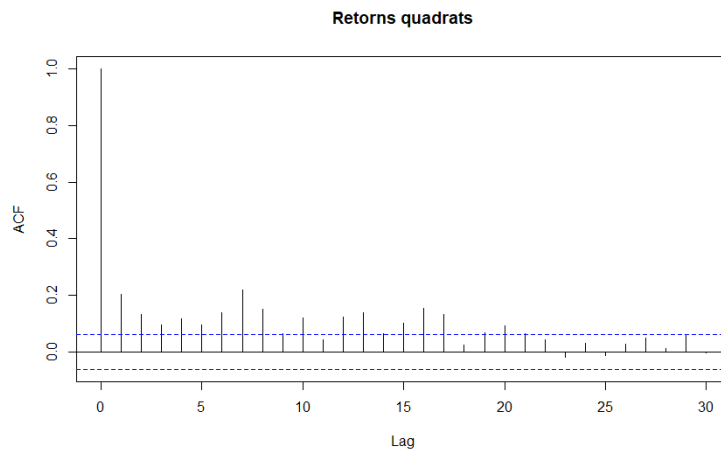


Figura 16: Gràfic de la sèrie de retorns quadrats

Com es pot observar en la figura 16, els retorns al quadrat no són soroll blanc. Tal i com hem fet amb els retorns, passarem a analitzar el correlograma de la funció d'autocorrelació simple (ACF) i la funció d'autocorrelació parcial (PACF) per tal d'afirmar l'existència o no de correlació (figura 17).



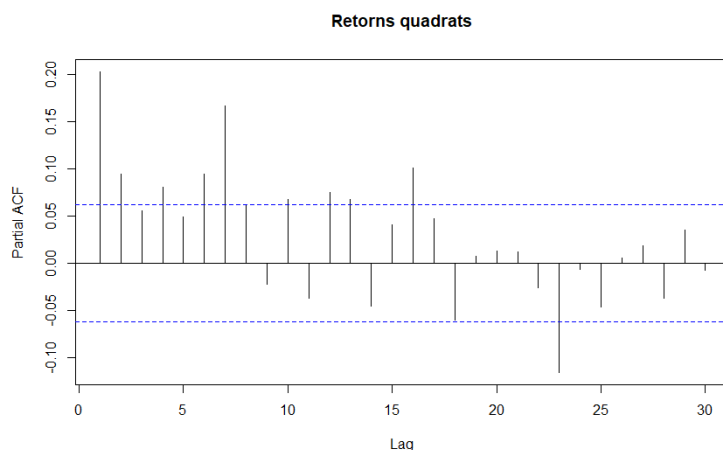


Figura 17: ACF i PACF de la sèrie de retorns quadrats

Com es pot apreciar en la ACF, els primers 11 retorns superen la línia de significació de color blau i no sembla decaure exponencialment al llarg dels retards, per tant, confirmem que els retorns al quadrat no és un soroll IID. Si ens fixem en la PACF, veiem que el primer i el segon coeficients són significatius, el tercer ja no ho és però el quart torna a ser-ho. Podem provar d'estimar un model ARCH(1) i anar augmentant el seu ordre fins que un dels paràmetres autoregressius no sigui significatiu o el test ARCH-LM així ens ho indiqui, tal i com hem fet en el cas de les accions del Santander. Obtenim que el model ARCH(2) és la millor opció dins dels models ARCH. En aquest cas, no descartem la utilització d'un ARCH(2) ja que no és un ordre excessivament elevat.

Passem a realitzar l'estimació dels nostres candidats. Podem començar amb la següent selecció: ARCH(2), GARCH(p,q), GJR-GARCH(p,q), EGARCH(p,q), TGARCH(p,q). Encara que a vegades els models més simples com els ARCH o GARCH solen ser els millors, es decideix introduir tantes variants asimètriques per tal d'aconseguir plasmar amb la major exactitud possible l'efecte leverage.

Després de realitzar les proves adients, ens hem quedat amb els dos models amb valors més petits en els criteris d'informació. Els finalistes són els següents: EGARCH(1,1) i GARCH(1,1). A continuació es mostraran els resultats de l'estimació d'aquests dos models.

Taula 10: Resultats de l'estimació

Models finalistes						
	EGARCH(1,1)			GARCH(1,1)		
	Estimació	s.e.	p-valor	Estimació	s.e.	p-valor
mu	0,000267	0,000194	0,170445	0,000325	0,000278	0,242807
omega	-0,102612	0,006692	0	0,000001	0,000001	0,326934
alpha1	0,036324	0,02091	0,082351	0,035853	0,007228	0,000001
beta1	0,988728	0,000681	0	0,963147	0,002377	0
gamma	0,105984	0,035185	0,000793	-	-	-

Si ens fixem en la taula 10, l'estimació del model EGARCH(1,1) presenta dos paràmetres no significatius, la constant mu i alpha, mentre que a l'estimació del model GARCH(1,1) els dos paràmetres no significatius són mu i omega. Si observem l'error estàndard (s.e.) de les estimacions, veiem que són relativament grans. Tot i així, són proporcionalment menors els del model EGARCH(1,1). A simple vista no podríem afirmar quin dels dos models

s'ajusta millor a les nostres dades. Per aquest motiu, realitzarem una taula comparativa dels criteris d'informació i del valor de log-versemblança (taula 11).

Taula 11: Resultats dels criteris d'informació

	EGARCH(1,1)	GARCH(1,1)
Akaike	-6,7235	-6,7226
Bayes	-6,6889	-6,6929
Shibata	-6,7236	-6,7226
Hannan-Quinn	-6,7103	-6,7113
LogLikelihood	3331,776	3330,335

Els criteris d'informació d'Akaike i de Shibata resulten millors en el model EGARCH(1,1), en canvi els valors dels criteris d'informació de Bayes i de Hannan-Quinn són menors i aleshores, millors, en el model GARCH(1,1). El valor de log-versemblança és més gran i per tant, millor, en el cas del model EGARCH(1,1).

Si bé és cert que no hi ha gaire diferència entre els dos models, es decideix que el model òptim per a les nostres dades és el GARCH(1,1) ja que té un nombre menor de paràmetres a estimar i té tant alpha com beta significatius. Remarcar que el model GARCH(1,1) és estacionari ja que la suma dels paràmetres alpha i beta és menor que 1 ($0,035853 + 0,963147 = 0,999$).

Ara que ja hem seleccionat el model òptim, cal comprovar que els residus són soroll blanc. Com ja hem fet amb anterioritat, realitzarem el test de Ljung Box. Els resultats obtinguts són un p-valor de 0,4369 per als residus i un p-valor de 0,90 per als residus al quadrat. Els residus no segueixen una distribució normal.

Podem provar a veure si una distribució t-Student seria adient per les dades. La distribució t-Student va ser descrita l'any 1908 per William Sealy Gosset, que degut a la prohibició de publicar articles científics de la fàbrica on treballava, William va decidir publicar els seus resultats sota el pseudònim de Student.

Sigui X una variable aleatòria i $v > 0$, si X té una distribució t amb v graus de llibertat, la distribució t-Student té com funció de densitat:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}},$$

on $x \in \mathbb{R}$ i Γ és la funció gamma.

Per saber si és una distribució adequada podem realitzar el test de bondat d'ajustament de Pearson vist al capítol 4.10. Com el p-valor obtingut en efectuar el test és de 0,81, i per tant, és més gran que 0,05, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la i concloem que la distribució t-Student és prou bona per als residus. Cal destacar que a mesura que augmenten els graus de llibertat, els p-valors del test de Pearson són cada cop més petits, és a dir, que quan més semblant és a una distribució normal, menys s'ajusta la distribució empírica.

Un cop tenim un model adequat, podem fer algunes prediccions i comparar-les amb el que realment ha succeït. Primerament, en realitzar la predicció de la volatilitat (figura 18), hem obtingut una volatilitat creixent en els 20 pròxims dies a partir de l'1 d'abril de 2022.

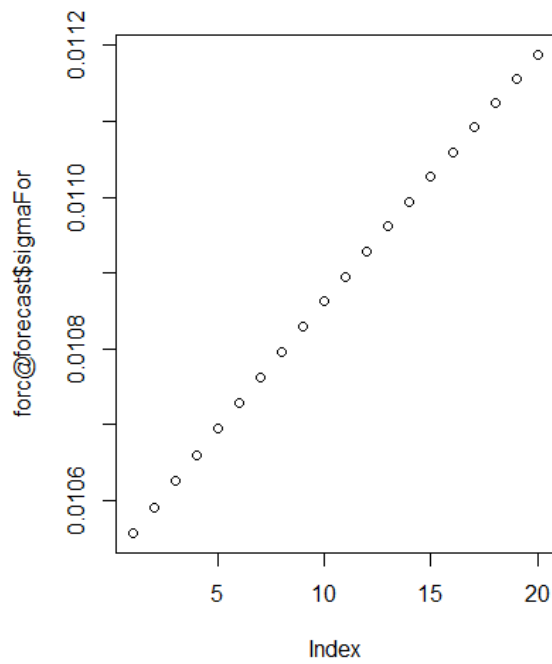


Figura 18: Simulació de la volatilitat

A continuació procedirem a simular tres vegades els preus de tancament de l'or dels futurs 60 dies a partir del model GARCH(1,1) que hem estimat.

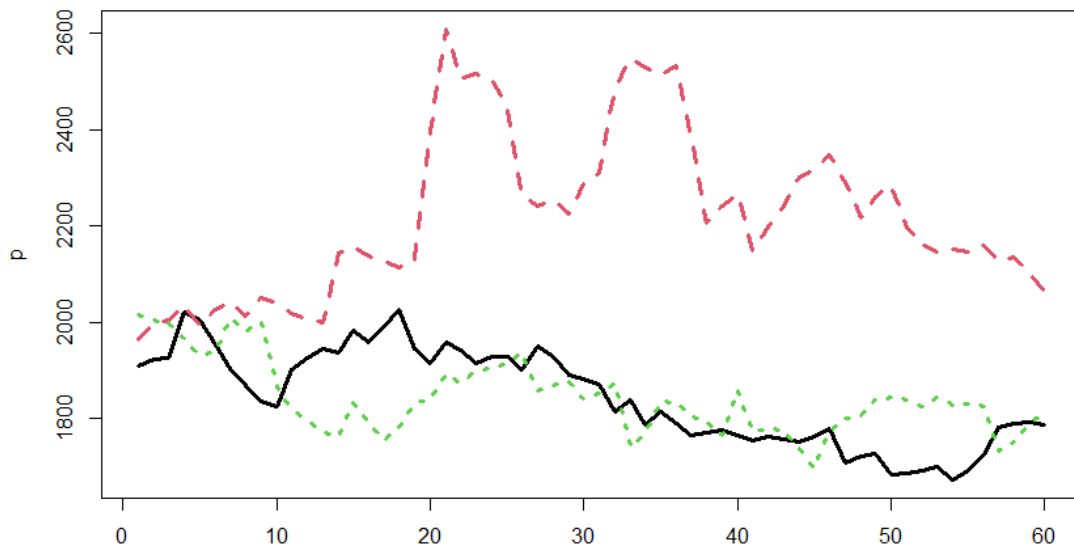


Figura 19: Simulacions del preu de tancament de l'or

Com podem observar en la figura 19, la simulació pintada de color vermell en els primers 10 dies presenta una baixa volatilitat i després d'aquests 10 dies, hi ha dues fortes pujades seguides cada una d'una baixada de gairebé la mateixa magnitud. El preu de tancament de l'or al final d'aquesta simulació és lleugerament superior, 2080 dòlars/unça, a la del 31 de març de 2022, 1949 dòlars/unça.

Si ens fixem ara en les simulacions representades de color verd i negre, ambdues presenten una petita tendència a la baixa, acabant al cap de 60 dies amb un preu de tancament prop dels 1800 dòlars/unça. Hi ha dos períodes on la diferència entre ambdues simulacions és notòria, la primera es produeix entre els dies 10 i 20 i la segona entre els dies 46 i 56.

A continuació es mostra la gràfica real dels preus de tancament de l'or.



Figura 20: Gràfica del preu de tancament de l'or real ⁹

La gràfica de valors reals (figura 20) es comporta de manera semblant a les prediccions pintades de color verd i negre. Passats 36 dies de mercat del 31 de març el preu de tancament és de 1845,10 dòlars/unça, mentre que en la predicció de color verd el preu de tancament és de 1810 dòlars/unça i en la de color negre és de 1801 dòlars/unça.

⁹Gràfica obtinguda de la pàgina web de Yahoo Finance [5].

6 Conclusions

Estem en una època d'incertesa, tant social com econòmica, degut en gran part a la irrupció de la Covid-19 arreu del món i els diferents conflictes geopolítics. Aquesta incertesa s'ha vist reflectida en mercats com el borsari o el de matèries primeres a través d'una major volatilitat. Davant d'aquest context resulta important poder predir la volatilitat i uns dels models que més destaquen en aquest àmbit són els models GARCH i les seves variants.

Per aquest motiu, al llarg d'aquesta memòria s'ha estudiat aquest tipus de models i s'ha portat a la pràctica tota la teoria explicada amb l'objectiu de poder veure de primera mà les seves aplicacions en sèries temporals financeres reals. Per realitzar la part pràctica he seleccionat dues sèries temporals financeres: el preu d'una acció de borsa i el preu de l'or, ja que, tot i ser dos tipus diferents de sèries financeres, mantenen una certa relació. Aquesta relació s'explica pel fet que l'or és considerat un actiu refugi i, per tant, els ja esmentats efectes de la Covid-19 i la invasió de Rússia a Ucraïna, han tingut impactes totalment diferents en les dues sèries temporals financeres.

Un cop seleccionades les sèries temporals financeres, s'ha procedit a la modelització del preu de tancament de les accions del Santander i el preu de l'or. S'ha pogut comprovar que es complien les diferents característiques estudiades que acostumen a presentar les sèries financeres: la no estacionarietat de les sèries de preus, la no autocorrelació de les variacions dels retorns, l'autocorrelació dels quadrats dels retorns, distribució amb cues pesades. S'ha pogut determinar que el model que millor s'ajusta al preu de les accions del Santander en l'interval de temps agafat és un model GJR-GARCH(1,1), mentre que el model seleccionat pel preu de l'or ha estat un model GARCH(1,1). Encara que s'ha inclòs per a les dues sèries models asimètrics com a models candidats, només en les accions de borsa ha resultat eficaç. Es podria intuir que l'efecte leverage està més present en aquesta sèrie. A partir dels models òptims per a cada sèrie, s'ha fet una predicció a vint dies vista de la volatilitat i s'ha realitzat unes simulacions que ens ha permès contrastar les dades obtingudes amb les dades reals.

Com a estudiant de matemàtiques amb menció en economia, la temàtica d'aquest treball ha sigut ideal per combinar els coneixements que ja tenia dels dos àmbits i poder aprofundir més en una branca de coneixement que m'és d'especial interès. Tot i això, no dono per acabada la meua recerca en aquesta branca ja que les sèries temporals és un món molt ampli i molt utilitzat avui en dia i animo a tota la gent que li hagi agradat aquest treball a fer el mateix.

Referències

- [1] Francq, Christian, and Jean-Michel Zakoian: *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*.. Segona Edició. Chichester: Wiley, 2010.
- [2] Gouriéroux, C.: *ARCH Models and Financial Applications*. Nova York: Springer, 1997.
- [3] Vives Santa Eulàlia, J.: *Apunts de l'assignatura Anàlisi de Sèries Temporals*, Màster de Fonaments de la Ciència de Dades, Universitat de Barcelona.
- [4] Yahoo! Finance, "Banco Santander, S.A. (SAN)". [Online]. Available: <https://es.finance.yahoo.com/quote/SAN?p=SAN&.tsrc=fin-srch>
- [5] Yahoo! Finance, "Gold Aug 22 (GC=F)". [Online]. Available: <https://es.finance.yahoo.com/quote/GC%3DF?p=GC%3DF&.tsrc=fin-srch>
- [6] Shumway, Robert H. & Stoffer, David S: *Time Series and Its Applications with R examples*. New York: Springer, 2017 .
- [7] Dayal, Vikram: *Quantitative Economics with R.: A Data Science Approach* Singapore: Springer Singapore, 2020.
- [8] Carrion-i-Silvestre, Josep Lluís: *Apunts de l'assignatura Econometria III*, Grau d'Economia, Universitat de Barcelona.
- [9] *RDocumentation*. [Online]. Available: <https://www.rdocumentation.org/>

7 Annex

Codi corresponent al capítol 5.

```
#Llibreries utilitzades:
```

```
library(rmgarch)
library(fGarch)
library(PerformanceAnalytics)
library(tseries)
library(dplyr)
library(quantmod)
library(rugarch)
library(nortsTest)
library(dynlm)
library(forecast)
library(vrtest)
library(tidyverse)
library(xts)
library(FinTS)
```

```
#Funció per a agafar les dades del banc Santander a Yahoo! Finance i seleccionar el
preu de tancament.
```

```
df= getSymbols("SAN", from ="2012-04-01", to="2022-04-01")
View(SAN)
san.close= SAN[,4]
```

```
#Funció per a fer la gràfica i el resum dels preus de tancament plot(san.close, type
="l")
Summary(san.close)
kurtosis(san.close)
sd(san.close)
Skewness(san.close)
```

```
#Funció per calcular els retorns.
```

```
return=CalculateReturns(san.close)
return=return[-c(1),]
```

```
#Funció per a fer la gràfica i el resum dels retorns
```

```
plot(return, type="l")
Summary(return)
kurtosis(return)
sd(return)
Skewness(return)
```

```

#Funció per a fer l'ACF i la PACF

acf(return)
pacf(return)

#Funció per dibuixar l'histograma

chart.Histogram(return, method = c('add.density', 'add.normal'), colorset = c('blue', 'red', 'black'))
legend("topright", legend = c("Retorns", "Distribució empírica", "Distribució normal"),
fill = c(blue, red, black))

#Test de Ljung Box i de Shapiro Wilk

Box.test(return, type = "Ljung-Box")
shapiro.test(return)

#Retorns quadrats, ACF i PACF

returnquadrat <- return ^ 2
acf(returnquadrat, main="Retorns quadrats")
pacf(returnquadrat, main="Retorns quadrats")

#Procediment per obtenir un ARCH(p)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(p,0)), mean.model = 1
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Test ARCH-LM

Lm.test(return, lag.max = 4, alpha = 0.05)

#Procediment per obtenir un GARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = 1
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un GJR-GARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="gjrGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = 1
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un EGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="eGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = 1
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un IGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="iGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = 1

```



```

mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un TGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="fGARCH", garchOrder=c(1,1), submodel = "TG
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#La funció ugarchfit ja ens dona els valors dels criteris d'informació i el resultat del
test de Ljung Box pels residus i els residus al quadrat

#Funció per dibuixar el VAR 1%

plot(mod_fitting6, which='all')

#predicció de la volatilitat

forc6=ugarchforecast(fitORspec = mod_fitting6, n.ahead = 20)
plot(sigma(forc6))

#Funció per fer les simulacions

sim<-ugarchpath(spec = mod_specify6, m.sim = 3, n.sim=60, rseed = n)
p<-3.38*apply(fitted(sim), 2, 'cumsum')+3.38
matplot(p, type="l", lwd=3)

```

El procediment per el preu de l'or és el següent:

```

#Per obtenir les dades s'ha utilitzat

df= getSymbols("GC=F", from ="2018-04-01", to="2022-04-01")
View('GC=F')
or.close= 'GC=F'[4]
#Funció per a fer la gràfica i el resum dels preus de l'or plot(or.close, type ="l")
Summary(or.close)
kurtosis(or.close)
sd(or.close)
Skewness(or.close)

#Funció per calcular els retorns.

return=CalculateReturns(or.close)
return=return[-c(1),]

#Funció per a fer la gràfica i el resum dels retorns

plot(return, type="l")
Summary(return)
kurtosis(return)

```

```

sd(return)
Skewness(return)

#Funció per a fer l'ACF i la PACF

acf(return)
pacf(return)

#Funció per dibuixar l'histograma

chart.Histogram(return, method = c('add.density', 'add.normal'), colorset = c('blue', 'red', 'black'))
legend("topright", legend = c("Retorns", "Distribució empírica", "Distribució normal"),
fill = c(blue, red, black))

#Test de Ljung Box i de Shapiro Wilk

Box.test(return, type = "Ljung-Box")
shapiro.test(return)

#Retorns quadrats, ACF i PACF

returnquadrat <- return ^ 2
acf(returnquadrat, main="Retorns quadrats")
pacf(returnquadrat, main="Retorns quadrats")

#Procediment per obtenir un ARCH(p)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(p,0)), mean.model = I
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Test ARCH-LM

Lm.test(return, lag.max = 4, alpha = 0.05)

#Procediment per obtenir un GARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = I
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un GJR-GARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="gjrGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = I
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un EGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="eGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = I
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

```

```

#Procediment per obtenir un IGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="iGARCH", garchOrder=c(p,q)), mean.model = list(model="iARMA", arOrder=c(p,q)), out.sample = 20)
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#Procediment per obtenir un TGARCH(p,q)

mod_specify6=ugarchspec(variance.model = list(model="fGARCH", garchOrder=c(1,1), submodel = "TGARCH"), mean.model = list(model="iARMA", arOrder=c(p,q)), out.sample = 20)
mod_fitting6=ugarchfit(data = return, spec = mod_specify6, out.sample = 20)

#La funció ugarchfit ja ens dona els valors dels criteris d'informació, el test de Ljung
Box pels residus i els residus al quadrat i el test de bondat d'ajustament de Pearson

#Funció per dibuixar el VAR 1%

plot(mod_fitting6, which='all')

#predicció de la volatilitat

forc6=ugarchforecast(fitORspec = mod_fitting6, n.ahead = 20)
plot(sigma(forc6))

#Funció per fer les simulacions

sim<-ugarchpath(spec = mod_specify6, m.sim = 3, n.sim=60, rseed = n)
p<-1949.2*apply(fitted(sim), 2, 'cumsum')+1949.2
matplot(p, type="l", lwd=3)

```