Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

JOCS AMB INFORMACIÓ INCOMPLETA: JOCS BAYESIANS I SUBHASTES

Autora: Laura Batlle Masmiquel

Director:	**Dr. Josep Vives Santa Eulàlia**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona,	**13 de juny de 2022**

Abstract

In this work we introduce the sealed-bid auction theory, and we compute its equilibrium when values are private and affiliated. Then we compare the seller's expected revenue of first and second price auctions under different scenarios. Finally, we simulate an auction and check that the Revenue equivalence holds when values are uniformly distributed on [0,1].

Resum

En aquest treball introduirem la teoria de subhastes a sobre tancat i buscarem els equilibris quan les valoracions són privades i afiliades. Compararem els ingressos esperats del subhastador quan les subhastes són a primer i a segon preu en diferents escenaris. Finalment, farem una simulació d'una subhasta i veurem com es compleix el Principi d'equivalència quan les valoracions són idènticament distribuïdes segons una distribució uniforme en l'interval [0,1].

2020 Mathematics Subject Classification. 91A27, 91B26

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, el Dr. Josep Vives, per haver-me ajudat i guiat en l'elaboració del treball.

També m'agradaria donar les gràcies als meus amics per ajudar-me i recolzar-me en tot moment. En especial a la Irene, per haver estat al meu costat durant els anys de facultat i creure sempre en mi. Gràcies també a l'Aleix, per donar-me suport en el moment més delicat.

Finalment, agrair als meus pares, a la meva germana i a en Quim pel seu suport incondicional sempre que ho he necessitat.

Índex

1 Introducció

El projecte

Aquest projecte neix de la curiositat que se'm genera a l'assignatura de Teoria de Jocs al parlar de les aplicacions de l'estudi de John Harsanyi (1920-2000) per resoldre jocs amb informació incompleta. El principal objectiu és introduir aquest model i usar-lo per analitzar la teoria de subhastes a sobre tancat.

La teoria de jocs és la branca matemàtica-econòmica que té com a finalitat predir el comportament estratègic d'un conjunt de jugadors, que actuen de forma racional, i trobar la millor estratègia per cada un d'ells. Aquesta teoria anticipa el comportament de la "resta"de jugadors a través de prediccions i troba l'estratègia que maximitza els beneficis de cada jugador.

Es considera que la teoria de jocs va néixer amb la publicació de *Game Theory and Economic Behaviour* (1944) de Von Neumann (1903-57) i Oskar Morgenstern (1902-1977). Tot i això, als anys 20, hi va haver alguns estudis d'Emile Borel (1871-1956) i del mateix Von Neumann en els quals ja hi apareixien alguns conceptes bàsics. Als anys 50, els models sobre la teoria de jocs es van començar a aplicar per entendre la teoria econòmica, política i social.

Podem classificar els jocs per la informació de la qual disposen els jugadors: jocs amb informació completa o incompleta. En el projecte tractarem els jocs amb informació incompleta, que es caracteritzen pel fet que els jugadors només disposen d'informació parcial sobre el joc. Aquests jocs van ser estudiats per Jonh Harsanyi [6], el qual va demostrar que tot joc amb informació incompleta pot convertir-se en un joc amb informació imperfecta introduint un nou concepte: l'atzar (o natura).

Una de les aplicacions de la teoria de jocs és la teoria de subhastes, o teoria de negociació. Entenem per subhasta el sistema de venda d'un o diversos objectes, en el qual guanya aquell participant que fa una oferta més elevada. Centrarem la nostra atenció en les subhastes a sobre tancat: aquelles en les que cada participant fa l'oferta de manera confidencial.

Dins les subhastes a sobre tancat, les subhastes a primer preu són les més conegudes. En aquestes el guanyador paga exactament la seva oferta. Són utilitzades pels organismes públics per adjudicar béns entre diferents empreses privades. N'és un bon exemple les subhastes dels drets d'explotació de recursos naturals, contractes de construcció de carreteres, etc. [2] Serà d'especial interès estudiar quina és la millor estratègia dels participants en aquestes situacions.

Les subhastes a segon preu són menys conegudes, però també són força emprades. En aquestes, el guanyador paga exactament la segona millor oferta de la subhasta. Algunes empreses, per exemple Google, fan ús d'aquestes subhastes per determinar l'ordre de publicació dels anuncis.

Els anuncis estan enllaçats a unes pàgines web de diverses empreses que paguen a Google per cada persona que accedeix a la seva web. Cada vegada que cliquem en un enllaç es genera una subhasta a segon preu: l'empresa que vulgui posar un anunci ha de declarar quin és el màxim que està disposat a pagar per cada usuari que entri a la seva

[2] Està clar que, en la majoria de casos, s'han de complir altres requisits per poder participar en la subhasta, però no entrarem en el detall.

pàgina. L'anunci que apareixerà en primer lloc serà de l'empresa que hagi fet la millor oferta, i aquesta pagarà el preu de la segona millor oferta.

D'entrada, si ens basem en la trajectòria de Google i ens fixem en la seva facturació, que prové en gran part dels anuncis, podem pensar que una subhasta a segon preu és un bon format de subhasta des de la perspectiva del subhastador. Al llarg del projecte analitzarem si realment són eficients aquests tipus de subhasta i els compararem amb les subhastes a primer preu.

Per fer-ho ens basarem en els estudis de Krishna [8], Milgrom i Weber [11] i Mezenes i Monteiro [10], sempre que no es digui el contrari.

Estructura de la Memòria

La memòria està estructurada en 5 seccions. En la primera secció introduïm conceptes bàsics sobre la teoria de jocs i el concepte d'estadístics d'ordre.

La segona secció expliquem el model que va presentar Harsanyi per tractar els jocs amb informació incompleta i definim l'equilibri de Nash Bayesià. A continuació, a la tercera secció, presentem les subhastes com a jocs Bayesians i en donem una classificació.

En la quarta secció, definim les subhastes a primer i a segon preu amb valoracions privades i en calculem un equilibri simètric de cada cas. D'altra banda, comparem els ingressos esperats del subhastador i presentem el principi d'equivalència. A més, estudiarem com varien els ingressos esperats si el subhastador posa un preu de reserva i si els jugadors passen a ser aversos al risc. Finalment, realitzarem una simulació de subhastes on les valoracions són privades i tenen una distribució uniforme.

Per acabar, analitzarem com afecta la interdependència entre les valoracions dels jugadors i presentarem el concepte d'afiliació. També calcularem els equilibris d'una subhasta a primer i a segon preu i comprovarem que no es compleix el principi d'equivalència trobat en la secció anterior.

2 Preliminars

2.1 Conceptes bàsics de la Teoria de Jocs

En primer lloc, és necessari introduir una sèrie de conceptes bàsics de la teoria de jocs per tal de poder entendre els models explicats més endavant.

Un *joc* és un model estàtic que descriu situacions d'interacció entre dos o més jugadors. Cada jugador té un conjunt de possibles accions i una funció de pagaments associada. Aquests pagaments depenen de les accions que prenen la resta de participants durant el joc. Es poden representar de dues maneres, en forma estratègica o en forma extensiva.

Definició 2.1. *Un joc en forma estratègica (o forma normal) consisteix en una tripleta* $G = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$ *formada per:*

- $N = \{1, ..., n\}$*, un conjunt finit de jugadors.*
- *Per a cada jugador* $i \in N$*, escriurem* S_i *l'espai d'estratègies d'aquest jugador. Considerem* $S = S_1 \times \ldots \times S_i \times \ldots \times S_n$ *i direm que* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ *és un perfil d'estratègies.*
- *Per a cada jugador* $i \in N$ *i per cada perfil d'estratègies* $s \in S$*, escriurem*

  $$u_i : S_1 \times \ldots \times S_i \times \ldots S_n \to \mathbb{R}$$

  la funció que assigna els beneficis al jugador i *quan s'ha jugat el perfil d'estratègies* s*.*

  Direm que $s_i \in S_i$ *és una estratègia del jugador* i*. En general, és d'especial interès expressar el resultat quan un jugador canvia la seva estratègia i la resta de jugadors mantenen fixes les seves. Així doncs, donat un jugador* $i \in N$*, escriurem* S_{-i} *el conjunt de tots els perfils d'estratègies de la resta de jugadors, és a dir,* $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots S_n$*. Per tant, el perfil d'estratègies* $s_{-i} \in S_{-i}$*, representarà el perfil d'estratègies de tots els jugadors menys el jugador* i*.*

Definició 2.2. *Un joc en forma extensiva és una 8-tupla*

$$\Gamma = (N, X, C, \{P_i\}_{i=1}^n, \{I_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$$

formada per:

- $N = \{1, ..., n\}$ *, un conjunt finit de jugadors.*[3]
- (X, C) *un arbre finit. Aquest està format per* X*, un conjunt finit de nodes i* $C \subset X \times X$*, un conjunt finit de costats. Un node* $x \in X$ *direm que és terminal si no hi ha cap costat que hi comença. Considerem* $T(X)$ *el conjunt de nodes terminals. En tot arbre es compleix que per tot* $y \in X \setminus x$ *existeix un únic camí connectant* x *i* y*, on un camí és un conjunt de costats consecutius. Destacarem* x_0*, el node d'origen, on s'inicia el joc. Escriurem* $D(X) = X \setminus T(X)$ *el conjunt de nodes on s'ha de prendre una decisió.*
- *Una partició* $P = \{P_0, \ldots, P_n\}$ *de* $X \setminus T(X)$ *que indica, en cada node no terminal* $x \in X \setminus T(X)$*, quin jugador ha de prendre la decisió.*

[3] En el cas que hi hagi atzar en el joc afegirem un jugador extra.

- *Una partició d'informació* $I = \{I_1, \ldots, I_n\}$ *on per tot* $i \in N$, I_i *és una partició de* $D(X)$. *Cada* $w \in I_i$ *conté els nodes de* $D(X)$ *on el jugador* i *té la mateixa informació sobre el que ha passat fins aquell moment en el joc. Per tant, si un jugador es troba en* I_i, *format per més d'un node, el jugador* i *sap que ha de prendre una decisió, però desconeix en quin node es troba. Direm que* $w \in I_i$ *és un conjunt d'informació del jugador* i.

- *Sigui* F *una funció que assigna a cada costat del node inicial* x_0 *una probabilitat.*

- *Una conjunt d'accions* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. *Tot jugador ha d'escollir una acció per cada conjunt d'informació.*

- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *on* u_i *és la funció que assigna els pagaments del jugador* i *en cada node terminal* $x \in T$ *en funció del perfil d'estratègies que s'ha jugat.*

El format estratègic organitza la descripció del joc centrant-se en les estratègies del jugadors, com si aquests fossin capaços de prendre totes les decisions a la vegada. A diferència de la representació en forma estratègica, la forma extensiva ho fa en format d'arbre, ressaltant la seqüència del joc. Aquest format ens mostra la manera en la que poden desenvolupar les accions dels jugadors i quins serien els seus pagaments finals.

Exemple 2.3. Un dels jocs estratègics més coneguts és el *Dilema del Presoner*.

El dilema del presoner consisteix en un joc on dos sospitosos d'un homicidi són tancats a dues cel·les separades. Hi ha suficients proves per poder condemnar-los per un crim menor. Tot i això, no són suficients per condemnar-los per homicidi, a no ser que un dels dos declari en contra de l'altre. Els policies els donen dues opcions: confessar (C) o no confessar (NC). Si cap dels dos confessen, els dos estaran condemnats a un crim menor i tan sols estaran un any a la presó. Si només un d'ells confessa, el que ha confessat quedarà lliure de presó i l'altre serà condemnat a quinze anys de presó. Si els dos confessen, tots dos passaran deu anys a la presó.

Aquesta situació la podem modelar com un joc estratègic.

- $N = \{Jugador_1, Jugador_2\}$.
- $S_1 = \{C, NC\}, S_2 = \{C, NC\}$.
- $u_1(C,C) = -10, u_2(C,C) = -10, u_1(NC,C) = -15, u_2(NC,C) = 0, u_1(C,NC) = 0, u_2(NC,C) = -15, u_1(NC,NC) = -1, u_2(NC,NC) = -1$.

Sovint és més convenient representar els jocs de forma matricial de la manera següent:

$Jugador_1$/ $Jugador_2$	Confessar (C)	No confessar (NC)
Confessar (C)	-10,-10	0, -15
No confessar (NC)	-15, 0	-1, -1

Taula 1: Dilema del Presoner

Per acabar, representem el joc en forma extensiva.

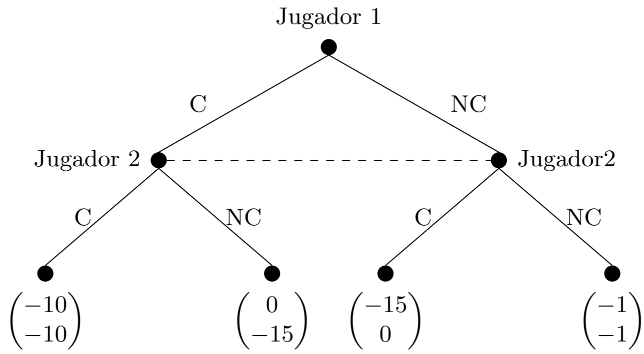

Figura 1: Forma extensiva del dilema del Presoner.

2.1.1 Classificació dels jocs

Podem classificar els jocs per diversos criteris. En destacarem tres: (1) segons la relació hi ha entre els jugadors, (2) segons l'ordre en què prenen les decisions i (3) segons la informació de la qual disposen.

Segons la relació entre jugadors: tenim els jocs cooperatius i no cooperatius. Els jocs cooperatius, es caracteritzen pel fet que els jugadors poden parlar entre ells, coordinar plans o crear coalicions. A diferència d'aquests, en els jocs no cooperatius no es permet fer acords entre jugadors.

Segons l'ordre de presa de decisions: poden ser de forma simultània o seqüencial. Quan es prenen les decisions simultàniament direm que es tracta d'un joc estàtic. D'altra banda, si les decisions es prenen seqüencialment, direm que es tracta d'un joc dinàmic.

Segons la informació de la qual disposen els jugadors: jocs amb informació completa o incompleta. En els jocs amb informació completa, tota la informació del joc és coneguda per tots els jugadors. Entenem per informació, la funció de beneficis, les regles del joc, el nombre de participants, etc. En cas contrari, quan els manca algun tipus d'informació, direm que es tracta d'un joc amb informació incompleta.

A més a més, hem d'afegir el concepte d'informació perfecta i imperfecta. Un joc en forma extensiva (Γ) té informació perfecta si per tot $i \in N$ tot conjunt d'informació té exactament un node, és a dir, cada jugador sap perfectament on és quan li toca jugar. Quan el jugador es troba en un conjunt d'informació format per diversos nodes direm que es tracta d'informació imperfecta.

En aquest treball ens centrarem en els jocs no cooperatius, estàtics i amb informació incompleta.

Exemple 2.4. Fixem-nos que el dilema del presoner, descrit en l'exemple 2.3, es tracta d'un joc no cooperatiu, els jugadors no poden fer acords entre ells un cop han estat arrestats. Els jugadors prenen les decisions simultàniament i coneixen a la perfecció tota la informació del joc, aleshores és un joc estàtic amb informació completa.

2.1.2 Equilibri de Nash

Un dels principals objectius en la teoria de jocs és trobar un concepte de solució per poder descriure com s'haurien de comportar els jugadors racionals. El concepte més rellevant de solució dels jocs estratègics el va proposar John Nash, *l'equilibri de Nash*. Aquest consisteix en aconseguir un perfil d'estratègies tal que cap jugador vulgui canviar d'estratègia.

Definició 2.5. *(Dominació) Sigui $G = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$ un joc en forma normal. Una estratègia $s_i \in S_i$ domina estrictament a l'estratègia $s_i' \in S_i$ si*

$$u_i(s_{-i}, s_i) > u_i(s_{-i}, s_i')$$

per a qualsevol $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, on $s_{-i} \in S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots S_n$.

Fixem-nos que els jugadors racionals utilitzaran sempre estratègies estrictament dominants, ja que de totes les possibles combinacions d'estratègies que esculli la resta de jugadors sempre serà aquesta la més òptima.

Definició 2.6. *(Equilibri de Nash) Sigui $G = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$ un joc en forma estratègica. Un equilibri de Nash en estratègies pures de G és un perfil d'estratègies $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ tal que cap jugador té incentius a canviar unilateralment d'estratègia. És a dir, s'ha de complir que per tot $i \in N$ i per tot $s_i \in S_i$*

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*).$$

Exemple 2.7. En l'exemple 2.3 del dilema del presoner, l'únic equilibri de Nash és (C,C). Fixem-nos que l'estratègia de no confessar és estrictament dominada per l'estratègia de confessar en tots dos jugadors, ja que:

i. Si el jugador 1 confessa, la millor resposta del jugador 2 és confessar, ja que

$$u_2(C, C) = -10 > u_2(C, NC) = -15.$$

ii. Si el jugador 1 no confessa, la millor resposta del jugador 2 és confessar, ja que

$$u_2(NC, C) = 0 > u_2(NC, NC) = -1.$$

Així demostrem que l'estratègia de no confessar és estrictament dominada per l'estratègia de confessar pel jugador 1. El cas del jugador 2 és anàleg.

Per tant, l'equilibri de Nash és que els dos sospitosos confessin. Tot i això, cal comentar que aquest equilibri no coincideix amb la millor opció per tots dos jugadors, ja que aquesta seria no confessar cap dels dos amb pagaments (-1,-1). El fet d'actuar de forma simultània fa que els dos jugadors siguin egoistes, davant de la incertesa de què farà l'altre.

2.2 Estadístics d'ordre

Suposem que $X_1, \ldots, X_n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes. És a dir, $F_{X_1} = \ldots = F_{X_n} = F$.

Considerem $max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Volem trobar $H_1^{(n)}$, la seva funció de distribució. Aleshores,

$$\begin{aligned} H_1^{(n)}(x) &= Pr[X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x] \\ &= Pr[X_1 \leq x] \ldots Pr[X_n \leq x] \\ &= \prod_{i=1}^{n} Pr[X_i \leq x] \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x) \\ &= (F(x))^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sigui $f(\cdot)$ la funció densitat de F. La funció densitat de $H_1^{(n)}$ serà $h_1^{(n)}(x) = (H_1^{(n)}(x))' = n(F(x))^{n-1} f(x)$.

Definició 2.8. *Considerarem $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ una reorganització de les variables $X_1, \ldots, X_n$ tal que $Y_1^{(n)} \geq \ldots \geq Y_n^{(n)}$. Les variables aleatòries $Y_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, n$ les anomenarem estadístics d'ordre.*

Considerem $Y_2^{(n)}$ la variable aleatòria que retorna el segon valor més alt de n valors. L'esdeveniment $Y_2^{(n)} \leq y$ és la unió de dos esdeveniments: (i) totes les X_k són menors que y i (ii) n-1 de les X_k són menors que y i una d'elles és més gran que y. Hi ha n combinacions possibles en les quals (ii) pot passar, aleshores

$$H_2^{(n)}(y) = F(y)^n + nF(y)^{n-1}(1 - F(y)) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n.$$

La seva funció de densitat associada és

$$h_2^{(n)}(y) = n(n-1)(1 - F(y))F(y)^{n-2} f(y).$$

Observem que

$$H_2^{(n)}(y) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n = nH_1^{(n-1)}(y) - (n-1)H_1^{(n)}(y)$$

i com que $h_1^{(n-1)}(y) = (n-1)F(y)^{n-2} f(y)$ tenim, $h_2^{(n)}(y) = n(1 - F(y))h_1^{(n-1)}(y)$.

3 Jocs Bayesians: Model de Harsanyi

D'aquí en endavant, centrarem la nostra atenció en els jocs amb informació incompleta.

Els *Jocs Bayesians* (també coneguts com a jocs amb informació incompleta) es caracteritzen perquè els jugadors només tenen informació parcial sobre les dades del joc: els pot faltar informació sobre el conjunt d'accions, les funcions de pagament o informació sobre altres jugadors.

Podem pensar un joc Bayesià com un joc amb n-jugadors que prenen decisions de manera simultània. Fixem-nos que un jugador que tingui informació parcial sobre les dades del joc es veurà obligat a tenir les seves pròpies *creences* sobre els paràmetres desconeguts o incerts. Per tant, les creences són rellevants pel desenvolupament del joc, de la mateixa manera que ho són les seves accions.

Harsanyi, un dels grans investigadors dels jocs amb informació incompleta, va modelar aquests jocs introduint un nou jugador, l'atzar (o la natura), que determina a l'inici del joc la informació privada rellevant de cada jugador. D'aquesta manera, a l'inici del joc cada jugador rebrà una informació i tindrà unes creences sobre la informació privada que ha rebut la resta. Harsanyi va proposar un nou concepte per referir-se a una descripció completa sobre la informació de la qual disposa cada jugador a l'inici del joc: *el tipus.*

Tot seguit, seguirem l'estudi que va fer Harsanyi. Aquest es basa en que els jocs amb informació incompleta poden ser representats com a jocs extensius amb informació imperfecta.

Descriurem els elements dels jocs bayesians segons [5].

Definició 3.1. *Direm joc Bayesià a una 6-tupla*

$$BG = (N, \Omega, \{T_i\}_{i=1}^n, \{F_i\}_{i=1}^n, \{A_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$$

que consisteixen en:

- $N = \{1, \ldots, n\}$*, conjunt finit de jugadors.*
- Ω *el jugador extra que assigna els tipus a cada jugador.*
- T_i *conjunt de tipus possibles per cada jugador* i*.*
- A_i *el conjunt d'accions possibles del jugador* i*.*
- $F_i(t_{-i}|t_i)$ *és la probabilitat que la resta de tipus siguin* t_{-i} *condicionada al seu tipus* t_i*. Els jocs Bayesians tenen precedent comú, aleshores* $F_i(t_{-i}|t_i) = F(t_{-i}|t_i)$*, és a dir, la distribució de probabilitat* F *sobre els tipus dels jugadors és la mateixa i és coneguda per tots.*
- $u_i : A \times T \to \mathbb{R}$ *una funció de beneficis del jugador* i*, on* $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ *i* $T = T_1 \times \ldots \times T_n$*.*

Definició 3.2. *En un joc Bayesià $BG = (N, \Omega, \{T_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$, una estratègia del jugador i és una funció $s_i(t_i)$ on per a cada tipus $t_i \in T_i$ es determina una acció del conjunt A_i. El perfil d'estratègies (pures) del jugador i, S_i, és el conjunt de totes les funcions possibles amb domini T_i i recorregut A_i.*

La funció de pagaments Bayesians[4] és

$$\mathbb{E}[u_i((s_i, s_{-i}), t_i)]) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(t_{-i}|t_i) \cdot u_i((s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i})), t_i).$$

3.1 Model de Harsanyi

Segons Harsanyi, podem pensar un joc amb informació incompleta com un joc en dues etapes. A la primera etapa, abans que els participants comencin a jugar, l'atzar escull els tipus de cada jugador. En la segona etapa, un cop conegut el seu tipus i la funció de distribució F, cada jugador escollirà la seva estratègia. El desenvolupament temporal d'un joc Bayesià estàtic és el següent:

1. L'atzar determina un vector de tipus $t = (t_1, \ldots, t_n)$ on cada $t_i \in T_i$.
2. L'atzar revela t_i solament al jugador i.
3. Els jugadors prenen les seves decisions simultàniament. Per tot $i \in N$ el jugador i escull $a_i \in A_i$.
4. Cada jugador rep els guanys[5] $u_i(a_1, \ldots, a_n, t_i)$.

Un cop intoduït l'atzar, hem passat de tenir un joc amb informació incompleta a un joc en forma extensiva amb informació incompleta i imperfecta.

3.2 Equilibri de Nash Bayesià

Ens és d'especial interès buscar l'equilibri dels jocs Bayesians estàtics. Això ho podem fer redefinint l'equilibri de Nash per aquest tipus de jocs.

Definició 3.3. *Sigui $BG = (N, \Omega, \{T_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$ un joc Bayesià. Un equilibri de Nash Bayesià amb estratègies pures és un perfil d'estratègies $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ si per tot $i \in N$ i tot tipus $t_i \in T_i$, $s^*(t_i)$ compleix*

$$\mathbb{E}[u_i((s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i)] \geq \mathbb{E}[u_i((s_i(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})), t_i]$$

per tot $s_i(t_i) \in S_i$.

Com hem vist abans, un cop assolit l'equilibri, cap jugador vol canviar la seva estratègia.

[4]Cal tenir en compte que en cas de tenir variables contínues com a tipus haurem de substituir els sumatoris per integrals.

[5]En cas de que els jugadors estiguin informats de la resta de tipus, $u_i(a_1, \ldots, a_n, t_1, \ldots, t_n)$.

4 Subhastes

En aquesta secció farem una petita introducció a la teoria de subhastes. Aquesta és una branca de la teoria de jocs que ens mostra la relació d'aquesta amb l'economia, com per exemple, els dissenys de mecanismes i la teoria de contractes.

Una subhasta és un procediment de venda on un nombre de persones competeixen entre si per adjudicar-se un bé o un servei. El guanyador és el participant que n'ofereix un preu més elevat. A més, cada participant disposa d'una valoració sobre l'objecte: la quantitat màxima que està disposat a pagar.

Ben mirat, les subhastes existeixen precisament perquè el subhastador té incertesa sobre les valoracions que tenen els jugadors, en aquest cas compradors[6], sobre l'objecte. Ja que en el cas que el subhastador conegués les valoracions dels compradors directament oferiria l'objecte a aquell que tingui una valoració més alta.

4.1 Classificació de tipus de subhastes

Les subhastes poden ser classificades segons diferents criteris. Per exemple, podem classificar-les pel seu format, a *viva veu* o a *sobre tancat*, o bé per la informació de la qual disposen els jugadors, *privades* o *de valoracions interdependents*. En aquest apartat veurem quines són les característiques de cada classe.

Si un jugador únicament coneix la informació sobre la seva valoració abans de començar la subhasta direm que les valoracions són *privades*. La consideració de valoracions privades és apropiada, per exemple, en el cas d'una subhasta d'una obra d'art, en la qual cada jugador coneix la seva valoració sobre la bellesa de l'objecte, però no la dels altres.

En altres situacions, podem trobar que els jugadors desconeguin la seva valoració, però que disposin d'alguna informació externa que els ajudi a fer-ne una estimació. Si la valoració de cada jugador depèn d'informació dels altres, direm que les valoracions són interdependents. N'és un bon exemple la subhasta d'una extensió petrolífera en la qual cada comprador ha realitzat una prova. El resultat de la prova li dóna informació al jugador sobre la mida de les reserves i, per tant, pot treure'n la seva valoració. A més, pot ser que conegui els resultats dels tests fets per la resta de jugadors i, doncs, podria ajustar-ne encara més la valoració. Un cas particular de les valoracions interdependents són les subhastes de valoracions comunes, en les quals tots els jugadors tenen exactament la mateixa valoració de l'objecte.

Les subhastes a *viva veu* són les més conegudes. Els jugadors coneixen les ofertes dels seus rivals al llarg de la subhasta i poden modificar la seva oferta amb l'objectiu de superar la quantitat màxima oferta. Dins d'aquest tipus de subhastes trobem dos subgrups:

1. **Subhasta ascendent (Anglesa)**: Tal com el seu nom indica, és un tipus de subhasta en el que el bé es ven a través d'ofertes de valor ascendent. A l'inici, el subhastador fixa un preu base de l'objecte i els compradors fan ofertes per sobre d'aquest. L'objecte es ven al comprador que ha fet la millor oferta.

2. **Subhasta descendent (Holandesa)**: El subhastador posa un preu alt al bé, la qual va disminuint fins que algun comprador decideix acceptar-lo.

[6]D'aquí en endavant direm compradors o jugadors indistintament.

Les subhastes a *sobre tancat* són aquelles en què els jugadors no tenen la possibilitat de conèixer les ofertes de la resta. En destaquem dos grups:

1. **A primer preu**: Els compradors introdueixen en un sobre tancat els valor que ofereixen sobre un bé. El que posi l'oferta més alta s'endurà el bé i pagarà el valor de la seva oferta.

2. **A segon preu:** Igual que en la subhasta a primer preu guanya el que fa una oferta més gran del bé, però en lloc de pagar la seva oferta, pagarà la segona millor oferta.

4.2 Subhastes com a jocs Bayesians

Podem considerar una subhasta com a un joc Bayesià

$$S = (N, \{T_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i^I\}_{i=1}^n).$$

Seguirem la notació que hem vist a la secció anterior.

- $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunt finit de possibles compradors.

- $T = T_1 \times \ldots \times T_n$ on $T_i = [0, \bar{v}]$ és el conjunt de tipus possibles del jugador i amb $\bar{v} \geq 0$. En el cas de les subhastes podem pensar el tipus com a una "senyal"de la valoració sobre l'objecte.

- $F : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow [0, 1]$ la funció de distribució conjunta dels tipus. I $f : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la seva funció densitat associada. Imposem que per tot $t_i \in T_i$, $f(t_{-i}|t_i) > 0$.

- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ perfil d'accions possibles on $A_i = [0, \infty)$ per tot $i \in N$. Una estratègia pura del jugador i és una funció

  $$\hat{a}_i : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow A_i.$$

  Sigui $\hat{A}_i$ el conjunt d'estratègies pures[7] del jugador i. Notem que en el cas de les subhastes, una estratègia serà a fer una oferta per l'objecte.

- $\pi^I = \pi_1^I \times \ldots \times \pi_n^I$ on per tot $i \in N$

  $$\pi_i : [0, \bar{v}]^n \times [0, \infty)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

  és la funció de beneficis del jugador i. Aquesta dependrà del comportament del jugador pel que fa al risc, de la funció de valoracions $V_i(t_1, \ldots, t_n)$ i de les normes de la subhasta.

Direm que $V_i : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow [0, \bar{v}]$ és la funció que assigna la valoració de l'objecte al jugador i quan ha rebut la informació privada.

En les properes seccions estudiarem les subhastes a sobre tancat quan les valoracions són privades i interdependents.

[7] Hem intercanviat la notació de les estratègies s_i a $\hat{a}_i$ per evitar confusions amb la notació subhasta S.

5 Subhastes amb valoracions privades

A continuació, utilitzarem els jocs Bayesians per analitzar les subhastes a sobre tancat, quan les valoracions són privades i independents.

Direm que les valoracions són privades si per tot jugador i la seva valoració només depèn del seu tipus. Aleshores,

$$V_i(t_1, \ldots, t_n) = V_i(t_i).$$

De fet, quan les valoracions són privades es compleix[8] $V_i(t_i) = t_i$.

Considerem una subhasta on hi ha un sol objecte a la venda entre n compradors neutrals al risc. Direm que són neutrals al risc en $[0, \bar{v}]$ si els hi és indiferent jugar una subhasta que té uns beneficis esperats d'un cert valor x o rebre x del cert.

Podem considerar T_i com a variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes que prenen valors a l'interval $[0, \bar{v}]$ segons F amb la seva respectiva funció densitat $f = F'$.

En presentar la seva oferta, cada jugador coneixerà la seva valoració $t_i \in T_i$ i que les valoracions de la resta de jugadors són independents i idènticament distribuïdes segons F. Suposarem que tots els components del model, tret de les valoracions, són de coneixement comú. També, suposarem que tots els jugadors són capaços de pagar almenys la seva valoració. [9]

Definició 5.1. *Una subhasta a primer preu és una 5-tupla*

$$S^I = (N, \{T_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i^I\}_{i=1}^n)$$

amb funció de beneficis definida per:

$$\pi_i^I(t_i, a) = \begin{cases} t_i - a_i, & si \quad a_i > \max\limits_{j \neq i} a_j \\ \dfrac{t_i - a_i}{m}, & si \quad a_i = \max\limits_{j \neq i} a_j \\ 0, & si \quad a_i < \max\limits_{j \neq i} a_j \end{cases}$$

on m és el número d'ofertes guanyadores empatades.

Per tot $i \in N$ els seus ***pagaments esperats*** *són*

$$\mathbb{E}[\pi_i^I] = \int_{t \in [0,\bar{v}]^n} f(t_{-i}|t_i) \pi_i^I(t_i, \hat{a}(t)) dt_1 \ldots dt_n.$$

La resta d'elements són els elements definits en la secció 4.2. Amb la particularitat que valoracions són privades i, per tant, l'estratègia pura del jugador i és una funció

$$\hat{a}_i : T_i \longrightarrow A_i$$

que només dependrà del seu tipus t_i.

[8] En el cas de les valoracions privades, parlar del tipus d'un jugador és el mateix que parlar de la seva valoració.

[9] Si no es compleix aquest requisit les subhastes a primer preu generen més ingressos que les de a segon preu. Veure Milgrom [12], secció 4.3.2.

Definició 5.2. *Una subhasta a segon preu és una 5-tupla*

$$S^{II} = (N, \{T_i\}_{i=1}^n, F, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i^{II}\}_{i=1}^n)$$

tal que els seus elements són els mateixos que en les subhastes a primer preu a diferència de la funció de beneficis. En aquest cas és la següent:

$$\pi_i^{II}(t_i, a) = \begin{cases} t_i - \max_{j \neq i} a_j, & si \quad a_i > \max_{j \neq i} a_j \\ \dfrac{t_i - \max_{j \neq i} a_j}{m}, & si \quad a_i = \max_{j \neq i} a_j \\ 0, & si \quad a_i < \max_{j \neq i} a_j \end{cases}$$

on m és el número d'ofertes guanyadores empatades.

Per tot $i \in N$ els seus ***pagaments esperats*** *són*

$$\mathbb{E}[\pi_i^{II}] = \int_{t \in [0, \bar{v}]^n} f(t_{-i}|t_i) \pi_i^{II}(t_i, \hat{a}(t)) dt_1 \dots dt_n.$$

A continuació, compararem els dos tipus de subhasta: a primer preu i a segon preu i n'estudiarem els seus equilibris Bayesians. El conjunt format pels equilibris Bayesians és força ampli, per aquesta raó ens centrarem en els que són simètrics, diferenciables i dèbilment creixents a $[0, \bar{v}]$.

5.1 Equilibri d'una subhasta a primer preu

Sota aquestes línies construirem un equilibri de Nash Bayesià d'una subhasta a primer preu, simètric, diferenciable i dèbilment creixent.

Sigui S^I una subhasta a primer preu sense opció a empats, definida en 5.1. Considerem

$$y : [0, \bar{v}] \longrightarrow [0, \infty)$$

una estratègia diferenciable (oferta) del jugador 1 i $(y, y_2, \dots, y_n)$ un possible equilibri de Nash Bayesià.

Escriurem l'oferta del jugador 1 amb valoració t com $y(t) = x$. Com que hem restringit aquest equilibri al fet que sigui simètric s'ha de complir que $y_i = y$ per tot jugador $i \neq 1$. En altres paraules, tot jugador té la mateixa estratègia y.

Notem que cap jugador amb una valoració 0 farà una oferta positiva, ja que tindria pèrdues en el cas de guanyar la subhasta. Per tant, $y(0) = 0$.

Sembla raonable pensar que en equilibri y serà una funció estrictament creixent, pel fet que els jugadors amb valoracions més altes faran ofertes més altes.

Escriurem $G(x)$ la probabilitat de què donada y, l'oferta de qualsevol jugador és com a molt $x \in [0, \infty)$. Sota la suposició de què y és creixent, l'oferta de qualsevol jugador i és com a molt x, si i només si, es compleix:

$$G(x) = Pr[t_i \leq y^{-1}(x)] = F(y^{-1}(x)).$$

Volem veure quina és la millor resposta del jugador 1 quan la resta de jugadors tenen segueixen l'estratègia y. Suposarem que el jugador 1 té tipus t.

Per la *definició* 5.1, la funció de pagaments esperats del jugador 1 serà

$$\mathbb{E}[\pi_1^I] = (t-x)Pr[y(t_i) \leq x, \forall j \neq i].$$

Fixem-nos que $Pr[y(t_i) \leq x, \forall j \neq i] = (G(x))^{n-1}$. Aleshores, els pagaments esperats són,

$$\mathbb{E}[\pi_1^I] = (t-x)(G(x))^{n-1}. \tag{5.1}$$

Ara, sigui $y^*(t) \in [0,\infty)$ la millor oferta del jugador 1. Si volem que $(y^*,\dots,y^*)$ sigui un equilibri de Nash Bayesià y^* ha de maximitzar els pagaments esperats i, per tant, satisfà que la derivada respecte x de l'equació (5.1) és igual a 0. En aquest cas,

$$\frac{d\mathbb{E}[\pi_1^I]}{dx}(y^*(t)) = (t-y^*(t))(n-1)(G(y^*(t))^{n-2}G'(y^*(t)) - (G(y^*(t))^{n-1} = 0. \tag{5.2}$$

Per la definició de $G(x)$ tenim $G(y^*(t)) = F((y^*)^{-1}(y^*(t)) = F(t)$, i per qualsevol y,

$$G'(x) = F'(y^{-1}(x))(y^{-1})'(x) = \frac{F'(y^{-1}(x))}{y'(y^{-1}(x))}.$$

Per tant, $G'(y^*(t)) = \frac{F'(t)}{{y^*}'(t)}$.
Si substituïm als resultats anteriors a l'equació (5.2) tenim

$$(t-y^*(t))(n-1)(F(t))^{n-2}\frac{F'(t)}{{y^*}'(t)} - (F(t))^{n-1} = 0.$$

Si multipliquem per ${y^*}'(t)$ queda,

$$y^*(t)(n-1)(F(t))^{n-2}F'(t) + {y^*}'(t)(F(t))^{n-1} = t(n-1)(F(t))^{n-2}F'(t).$$

Per resoldre l'anterior equació diferencial, fixem-nos que el que queda a l'esquerra de la igualtat és precisament la derivada respecte t de $y^*(t)(F(t))^{n-1}$. D'aquesta manera, integrant els dos costats obtenim:

$$\begin{aligned} y^*(t)(F(t))^{n-1} &= \int_0^t x(n-1)(F(x))^{n-2}F'(x)dx \\ &= t(F(t))^{n-1} - \int_0^t (F(x))^{n-1}dx. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En conseqüència tenim,

$$y^*(t) = t - \frac{\int_0^t (F(x))^{n-1}dx}{(F(t))^{n-1}}. \tag{5.4}$$

Una expressió alternativa a l'equilibri que acabem de trobar pot ser calculada de la manera següent. Considerem el jugador 1, podem denotar $Y_1^{(n-1)}$ la variable aleatòria que retorna el nombre més alt de les $n-1$ valoracions de la resta de jugadors.

És a dir, $Y_1^{(n-1)}$ serà el màxim estadístic ordenat de les variables aleatòries $T_2, \ldots, T_n$. Tindrem H la funció de distribució associada a la variable $Y_1^{(n-1)}$ definida per $H(x) = (F(x))^{n-1}$ i $h(\cdot)$ la seva respectiva funció densitat.[10] Aleshores, l'esperança de $Y_1^{(n-1)}$ condicionada a ser més petita que t és

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < t] &= \frac{\int_0^t xH'(x)dx}{H(t)} \\
&= \frac{\int_0^t x(n-1)(F(x))^{n-2}F'(x)dx}{(F(t))^{n-1}} \\
&= y^*(t).
\end{aligned}$$

Ens falta comprovar que y^* és realment un equilibri. Ho verificarem a la següent proposició.

Proposició 5.3. *El perfil d'estratègies y^* donat per $y^*(t) = \mathbb{E}[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < t]$ és un equilibri de Nash Bayesià d'una subhasta a primer preu que és simètric, diferenciable i creixent.*

Demostració. Suposem que tot jugador $j \neq 1$ segueix l'estratègia y^*. Veurem que és òptim pel jugador 1 seguir la mateixa estratègia y^*.

En la construcció de y^* tenim que és una funció continua i creixent, ja que a l'equilibri el jugador amb major valoració farà una oferta més elevada i guanyarà la subhasta.

Sigui $z = y^{*-1}(b)$ el valor pel qual b és l'oferta a l'equilibri, és a dir, $y^*(z) = b$. Aleshores podem escriure els beneficis esperats pel jugador 1 quan ofereix $y^*(z)$ i la seva valoració és t com:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi^I(t, (b, y^*_{-i}))] &= H(z)(t - y^*(z)) \\
&= H(z)t - H(z)\mathbb{E}[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < z] \\
&= H(z)t - \int_0^z yh(y)dy \\
&= H(z)t - H(z)z + \int_0^z H(y)dy \\
&= H(z)(t - z) + \int_0^z H(y)dy.
\end{aligned}$$

Falta comparar els beneficis esperats obtinguts si el jugador 1 fa $y^*(z) = b$ i el que obté si escull l'estratègia $y^*(t)$.

$$\mathbb{E}[\pi^I(t, (y^*(t), y^*_{-i}))] - \mathbb{E}[\pi^I(t, (y^*(z), y^*_{-i})))] = H(z)(z - t) - \int_t^z H(y)dy.$$

[10] Podem trobar el càlcul de la funció de distribució del màxim d'un conjunt de variables aleatòries a la secció 2.1.

En distingim dos casos:

- $z \geq t$: En aquest cas tenim $\mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(t),y^*_{-i}))] - \mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(z),y^*_{-i})))] = H(z)(z - t) - \int_t^z H(y)dy$. Com que H és creixent, tenim
$$\int_t^z H(y)dy \leq H(z)(z-t).$$
- $z \leq t$: D'altra banda $\mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(t),y^*_{-i}))] - \mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(z),y^*_{-i})))] = \int_t^z H(y)dy - H(z)(t-z)dy$. Com que H és creixent, tenim
$$\int_t^z H(y)dy \geq H(z)(z-t).$$

Ambdós casos es compleix $\mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(t),y^*_{-i}))] \geq \mathbb{E}[\pi^I(t,(y^*(z),y^*_{-i})))]$. Per tant, oferir qualsevol valor que no sigui t ens comportaria pèrdues. Llavors

$$y^* = \mathbb{E}[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < t]$$

és un equilibri simètric d'una subhasta a primer preu. $\square$

Teorema 5.4. *En una subhasta a primer preu amb dos jugadors tal que les seves valoracions t_1, t_2 són variables aleatòries independents d'una distribució uniforme en l'interval $[0,1]$, $(\frac{1}{2}t_1, \frac{1}{2}t_2)$ és un equilibri de Nash Bayesià.*

Demostració. Considerem a_1, a_2 les ofertes dels respectius jugadors 1 i 2. Suposem que el jugador 2 ofereix $a_2(t_2) = \frac{1}{2}t_2$. Anem a veure quina és la millor resposta esperada del jugador 1. Recordem que els guanys esperats per un jugador i són els següents:

$$\pi_1^I(a_1,a_2,t_1) = \begin{cases} (t_1 - a_1), \text{ si } & a_1 > a_2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - a_1), \text{ si } & a_1 = a_2 \\ 0, \text{ si } & a_1 < a_2 \end{cases}$$

Els guanys esperats del jugador 1 són

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_1^I] &= Pr[\text{guanya } 1](t_1 - a_1) + Pr[\text{empaten}]\frac{1}{2}(t_1 - a_1) + Pr[\text{perd } 1] \cdot 0 \\ &= Pr[a_1 > \frac{t_2}{2}](t_1 - a_1) = Pr[t_2 < 2a_1](t_1 - a_1).\end{aligned}$$

Ara $Pr[t_2 < 2a_1] = \int_0^{2a_1} f(u)du$, on f és la funció de densitat d'una uniforme en l'interval [0,1]. Aleshores,

$$Pr[t_2 < 2a_1] = \begin{cases} 0, \text{ si } & 2a_1 \leq 0 \\ 2a_1, \text{ si } & 0 < 2a_1 \leq 1 \\ 1, \text{ si } & 2a_1 > 1 \end{cases}$$

Per tant,

$$\mathbb{E}[\pi_1^I] = \begin{cases} 0, \text{ si } & 2a_1 \leq 0 \\ 2a_1(t_1 - a_1), \text{ si } & 0 < 2a_1 \leq 1 \\ (t_1 - a_1), \text{ si } & 2a_1 > 1 \end{cases}$$

Podem trobar la millor resposta del jugador 1 a l'estratègia del jugador 2 derivant l'equació $2a_1(t_1 - a_1)$ i igualant-la a 0.

$$\frac{\partial 2a_1(t_1 - a_1)}{\partial a_1} = 2t_1 - 4a_1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}t_1.$$

Aleshores quan el jugador 2 ofereix la meitat de la seva valoració, la millor estratègia del jugador 1 és oferir la meitat de la seva valoració. El càlcul de la millor resposta del jugador 2 en cas que el jugador 1 ofereixi la meitat de la seva valoració és anàleg. Per tant, hem vist que $(\frac{1}{2}t_1, \frac{1}{2}t_2)$ és un equilibri de Nash Bayesià. □

Exemple 5.5. (Exemple d'equilibri de Nash Bayesià d'una subhasta a primer preu amb n jugadors). Considerem una subhasta a primer preu amb n jugadors tal que les seves valoracions $t_1, \ldots, t_2$ són variables aleatòries independents d'una distribució uniforme en l'interval $[0, 1]$. Per tota valoració $t \in [0, 1]$, tenim $F(t) = t$. Per trobar un equilibri de Nash Bayesià utilitzarem l'estratègia (5.4). Llavors tenim

$$\begin{aligned} y^*(t) &= t - \frac{\int_0^t F(x)^{n-1} dx}{F(t)^{n-1}} \\ &= t - \frac{\int_0^t x^{n-1} dx}{t^{n-1}} \\ &= t - \frac{1}{t^{n-1}} \frac{t^n}{n} \\ &= (1 - \frac{1}{n})t. \end{aligned}$$

Per tant, $((1 - \frac{1}{n})t_1, \ldots, (1 - \frac{1}{n})t_n)$ és un equilibri de Nash Bayesià.

5.2 Equilibri d'una subhasta a segon preu

Proposició 5.6. *Sigui S^{II} una subhasta a segon preu. Per tot $i \in N$, l'estratègia definida per $a_i^*(t_i) = t_i$ és una estratègia dominant, és a dir, per tot $\hat{a}_{-i} \in \hat{A}_{-i}$ i per tot $\hat{a}_i \in \hat{A}_i$,*

$$\mathbb{E}[\pi_i^{II}(\hat{a}_{-i}, a_i^*)] \geq \mathbb{E}[\pi_i^{II}(\hat{a}_{-i}, \hat{a}_i)].$$

Demostració. Sigui $t \in [0, \bar{v}]^n$. Volem provar que oferir el tipus t_i és una estratègia dèbilment dominant pel jugador i. Sigui $\hat{b} := \max_{j \neq i} a_j^*(t_j)$.
En primer lloc, veurem que no és òptim pel jugador i oferir $b < t_i$. En distingim quatre casos:

1. $t_i > b > \hat{b}$: Si el jugador i ofereix b, i s'emporta l'objecte amb beneficis de $t_i - \hat{b}$. Fixem-nos que és el mateix que guanyaria en cas d'haver ofert t_i.

2. $t_i > b = \hat{b}$: Si el jugador i ofereix b, i s'emporta l'objecte amb beneficis de $\frac{t_i - \hat{b}}{m}$. Així doncs, està clar que tindria més beneficis si ofereixo t_i.

3. $\hat{b} \geq t_i > b$: Com que la t_i és inferior a $\hat{b}$, oferir t_i o b no són suficients per guanyar la subhasta, aleshores els beneficis són 0.

4. $t_i > \hat{b} > b$: En aquest cas tampoc podem guanyar la subhasta, ja que un altre jugador ha ofert més, haver ofert t_i hauria sigut millor opció. Així doncs, oferir un valor per sota de t_i mai és millor que oferir t_i.

En segon lloc, veurem que no és òptim pel jugador i oferir $b > t_i$. En distingim quatre casos:

1. $t_i < b < \hat{b}$: Com que la b és inferior a $\hat{b}$ no és suficient per guanyar la subhasta, aleshores els beneficis són 0.

2. $t_i < b = \hat{b}$: Si el jugador i ofereix b, i s'emporta l'objecte amb beneficis de $\frac{t_i - \hat{b}}{m}$. En aquest cas, $t_i - \hat{b} < 0$. Així doncs, està clar que tindria millors beneficis si ofereixo t_i, ja que els beneficis són 0.

3. $t_i < \hat{b} < b$: Si el jugador i ofereix b, i s'emporta l'objecte amb beneficis de $t_i - \hat{b} < 0$. Així doncs, està clar que tindria millors beneficis si ofereixo t_i, ja que els beneficis són 0.

4. $\hat{b} < t_i < b$: En aquest cas guanya el jugador i. Els seus beneficis són $t_i - \hat{b} \geq 0$, que és el mateix benefici que si hagués ofert t_i.

En definitiva, oferir un valor per sobre de t_i mai és millor que oferir t_i. Aleshores oferir $a_i^*(t_i) = t_i$ és una estratègia dèbilment dominant i $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ és un equilibri bayesià de Nash d'una subhasta a segon preu.

$\square$

5.3 Comparació d'ingressos entre subhastes a primer i a segon preu

Una vegada hem definit d'equilibri simètric en els dos formats de subhastes podem comparar els ingressos esperats pel subhastador en cada cas.

En les subhastes a primer preu els ingressos esperats pel subhastador en l'equilibri, I^I, és exactament l'esperança de l'oferta més alta. Això és,

$$\begin{aligned} I^I &= \mathbb{E}[\max\{y^*(t_1), \ldots, y^*(t_n)\}] \\ &= \mathbb{E}[y^*(\max\{t_1, \ldots, t_n\})] \\ &= \mathbb{E}[y^*(Y_1^{(n)})] \end{aligned}$$

Pel subhastador, tots els jugadors seran ex-ante[11] idèntics. Per tant, la probabilitat associada a què totes les valoracions siguin menors a un cert valor t és $H^{(n)}(t) = F(t)^n$.

[11] Ex-ante és un terme que prové del llatí que significa abans de l'esdeveniment.

Aleshores,

$$I^I = \int_0^{\bar{v}} nf(x) \cdot y^*(x)F(x)^{n-1}dx \tag{5.5}$$

En les subhastes a segon preu tot jugador ofereix la seva valoració en l'equilibri. Llavors, els ingressos esperats pel subhastador I^{II} és exactament l'esperança de la segona valoració més alta. En la *secció* 2.2 hem vist que la probabilitat que la segona valoració més alta sigui menor a un cert valor t és $H_2^{(n)}(t) = F(t)^n + nF(t)^{n-1}(1 - F(t))$, amb derivada $h_2^{(n)}(t) = n(n-1)(1 - F(t))F(t)^{n-2}f(t)$. Aleshores,

$$I^{II} = \int_0^{\bar{v}} nx(n-1)(1 - F(x))F(x)^{n-2}f(x)dx.$$

Tot seguit provarem que els ingressos esperats de les dues subhastes coincideixen.

Utilitzant la integració per parts a l'equació (5.5) i substituint $y^*(x)$ segons (5.4), tenim:

$$\begin{aligned}
I^I &= ny^*(\bar{v}) - \int_0^{\bar{v}} nF(x) \cdot (y^*(x)F(x)^{n-1})'dx \\
&= ny^*(\bar{v}) - \int_0^{\bar{v}} n(n-1)xf(x)F(x)^{n-1}dx \\
&= n\int_0^{\bar{v}} (n-1)xf(x)F(x)^{n-2} - \int_0^{\bar{v}} n(n-1)xf(x)F(x)^{n-1}dx \\
&= \int_0^{\bar{v}} n(n-1)xf(x)F(x)^{n-2}(1 - F(x))dx = I^{II}.
\end{aligned}$$

Podem concloure que aquests ingressos són els mateixos en els dos tipus de subhastes S=I o II. En particular, són exactament l'esperança de la segona valoració més alta, $I^S = \mathbb{E}[Y_2^{(n)}]$.

Per acabar, comprovarem com es veuen afectats els ingressos del subhastador si s'incrementa el nombre de participants. Podem reescriure l'esperança en funció de n: $I^S = I^S(n)$.

$$\begin{aligned}
I^S &= \int_0^{\bar{v}} n(n-1)y(F(y)^{n-2} - F(y)^{n-1})f(y)dy \\
&= \int_0^{\bar{v}} y \cdot (nF(y)^{n-1} - (n-1)F(v)^n)'dy \\
&= y(nF(y)^{n-1} - (n-1)F(v)^n)|_0^{\bar{v}} - \int_0^{\bar{v}} (nF(y)^{n-1} - (n-1)F(v)^n)dy \\
&= \bar{v} - \int_0^{\bar{v}} (nF(y)^{n-1} - (n-1)F(v)^n)dy.
\end{aligned}$$

Considerem $g(n) = [nF(y)^{n-1} - (n-1)F(v)^n]$. Sabem que $F(y) \geq 1$ i $(F(y)-1)^2 \geq 0$ aleshores,

$$\begin{aligned} g(n+1) - g(n) &= -nF(y)^{n-1} + ((n-1) + (n+1))F(y)^n - nF(y)^{n+1} \\ &= -nF(y)^{n-1} + 2nF(y)^n - nF(y)^{n+1} \\ &= -nF(y)^{n-1}(1 - 2F(y) + F(y)^2) \\ &= -nF(y)^{n-1}(F(y)-1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Tenim, doncs, $\int_0^{\bar{v}} g(y)dy$ és negativa[12] i $I^S = \bar{v} - \int_0^{\bar{v}} g(y)dy$ creix quan augmenten els jugadors.

5.4 Principi d'equivalència

En la secció anterior hem vist que els ingressos esperats en una subhasta simètrica a primer i a segon preu coincideixen. Tot i això, les subhastes no són estratègicament equivalents i, en algunes ocasions, el preu de venda és més gran un que l'altre.[13] En aquesta secció veurem que podem emprar l'equivalència a altres formats de subhastes. [14]

Teorema 5.7. *Considerem una subhasta d'un sol objecte amb n jugadors, neutrals al risc, tal que les seves valoracions són independents i idènticament distribuïdes amb funció de distribució F. Aleshores, per qualsevol equilibri simètric i creixent d'una subhasta tal que* (1) *sempre el guanya l'objecte el jugador que fa una millor oferta en l'equilibri i,* (2) *a tot jugador amb valoració 0 ofereix* 0*, el subhastador tindrà la mateixa quantitat d'ingressos esperats.*

Demostració. Sigui S una subhasta on sempre guanya l'objecte el jugador que fa una millor oferta. Sigui

$$\begin{aligned} \gamma \quad : \quad [0, \bar{v}] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

una estratègia creixent. Considerem $P^S(t)$ els pagaments esperats en S d'un comprador de tipus t en l'equilibri simètric $(\gamma, \ldots, \gamma)$.

Considerem un jugador en particular, per exemple l'1, i suposarem que la resta segueixen l'estratègia γ. Igual que abans, sempre que 1 ofereixi $z > Y_1^{(n-1)}$ guanyarà la subhasta i els seus beneficis esperats seran

$$\mathbb{E}[\pi^S(z,t)] = H(z)t - P^S(z)$$

on $Y_1^{(n-1)}$ és el màxim estadístic d'ordre de les n-1 valoracions dels jugadors $j \neq i$ i H la seva funció de distribució.

Fixem-nos que $P^S(z)$ no depèn del tipus t del jugador. Si maximitzem els pagaments tenim,

$$\frac{d}{dz}\mathbb{E}[\pi^S(z,t)] = h(z)t - \frac{d}{dz}P^S(z) = 0.$$

[12] Hem utilitzat que per tota funció g(x) negativa dins l'interval $[a,b]$, la integral definida $\int_a^b g(y)dy$ també és negativa.

[13] Podrem veure exemple en la *secció* 5.7.

[14] Al llarg de la secció considerarem $H(t) = H_1^{(n-1)}(t)$.

A l'equilibri tindrem que és òptim oferir $z = t$, aleshores

$$h(t)t = \frac{d}{dt}P^S(t).$$

Per hipòtesi (2), $P^S(0) = 0$. Si integrem entre 0 i t,

$$\begin{aligned} P^S(t) &= P^S(0) + \int_0^t yh(y)dy \\ &= \int_0^t yh(y)dy \\ &= H(t)\mathbb{E}[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < t]. \end{aligned}$$

Fixem-nos que els pagaments esperats pel subhastador no és res més que la suma dels pagaments esperats de cada jugador i. Ho podem expressar com:

$$I^S = n \cdot P^S(t).$$

Fixem-nos que els pagaments $P^S(t)$ tant sols depèn de la funció de distribució $H(\cdot)$ i aquesta no depèn del format de la subhasta. Aleshores els ingressos esperats pel subhastador són els mateixos per qualsevol classe de subhastes que satisfacin les hipòtesis (1) i (2) del teorema. □

5.5 Preus de reserva

Durant l'anàlisi fet fins ara, el subhastador ha jugat un rol relativament estàtic. En realitat hem suposat que el subhastador vendria l'objecte a qualsevol preu. Malgrat això, en la majoria de casos els subhastadors tenen en dret a no vendre un objecte si el valor de venda que li ofereixen és menor que un cert valor $r \in \mathbb{R}_+$, el preu de reserva.

Notem que el preu de reserva pot generar dos efectes: reduir els incentius dels jugadors a participar en la subhasta i la possibilitat que el subhastador tingui més beneficis, ja que els jugadors seran més agressius en les seves ofertes.

A continuació, estudiarem els efectes del preu de reserva en l'equilibri i els ingressos esperats per part del subhastador.

5.5.1 Preus de reserva en una subhasta a segon preu

Fixem-nos que el preu de venda de l'objecte mai serà menor que r. De fet, un comprador amb valoració $t < r$ mai obtindrà benefici de la subhasta i, per tant, decidirà no participar. A més, en el cas de les subhastes a segon preu, l'estratègia $a^*(t) = t$ encara és dominant.

Hi ha dos escenaris possibles en el qual el jugador 1 guanya la subhasta: (1) totes les $T_i < r$ per tot $i \neq 1$ i, (2) la segona millor oferta és major que el preu de reserva però menor que l'oferta de 1.

Els pagaments esperats del jugador 1 són

$$\begin{aligned}
P^{II}(t,r) &= \int_0^t yh(y)dy \\
&= \int_0^r yh(y)dy + \int_r^t yh(y)dy \\
&= rH(r) + \int_r^t yh(y)dy
\end{aligned}$$

si $t \geq r$, doncs el guanyador pagarà el preu de reserva r en cas que la segona millor oferta sigui menor a r.

5.5.2 Preus de reserva en una subhasta a primer preu

Considerem una S^I amb preu de reserva $r \in \mathbb{R}_+$.

Podem pensar que el preu de reserva r és el valor tal que si $t_i < r$, el jugador i no participa en la subhasta. I si $t_i > r$, i participa. Suposarem que els jugadors $2, \ldots, n$ segueixen una estratègia diferenciable $y(\cdot)$, i calcularem la millor estratègia del jugador 1.

Notem que en l'equilibri es complirà $y(r) = r$. Això es deu al fet que un jugador amb valoració r guanya si tota la resta dels jugadors tenen valoració menor que r. Així doncs, en fa prou en oferir r per guanyar.

Suposarem que la valoració del jugador 1 és t. El jugador 1 ha d'escollir l'oferta z que li maximitzi els beneficis esperats:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi^I] &= \mathbb{E}[(t-z) \geq \max\{y(Z), r\}] \\
&= (t-z)Pr[\max\{y(Z), r\} \leq z] \\
&= (t-z)Pr[\max\{y(Z), y(r)\} \leq z]
\end{aligned}$$

on $Z = max\{t_j; t_j \geq r, j \in N, \quad j \neq 1\}$.

Ara,

- Si $z = r$, aleshores $\mathbb{E}[\pi^I] = (t-r)H(r)$.
- Si $z = y(s) > r$, aleshores $\mathbb{E}[\pi^I] = (t-z)Pr[y^{-1}(z) > Z] = (t - y(s))H(s)$.

Si comparem els pagaments esperats, coincideixen amb els d'una subhasta sense preus de reserva. L'única condició diferent és que el jugador que tingui valoració r li ha de ser indiferent participar o no.

Per tant, podem obtenir un equilibri simètric per tot jugador amb valoració $t \geq r$, afegint una condició a l'equilibri trobat en (5.3).

$$y^*(t,r) = \begin{cases} t - \dfrac{\int_r^t H(x)dx}{H(t)}, & \text{si } \ t \geq r \\ \text{no participar}, & \text{si } \ t < r \end{cases}$$

Podem comparar l'equilibri trobat amb el de la *proposició* 5.3. En primer lloc, tot jugador amb poca valoració no participa en la subhasta. En segon lloc, aquells que participen ho faran de manera més agressiva, ja que ara, les valoracions de la resta de participants es trobaran dins l'interval $[r, \bar{v}]$.

Notem que podem escriure $y^*(t,r) = \mathbb{E}[\max\{Y_1, r\}|Y_1 < t]$. Doncs, els pagaments esperats pel jugador amb valoració $t \geq r$ són:

$$\begin{aligned}
P^I(t,r) &= H(t) \cdot y^*(t,r) \\
&= rH(r) + \int_r^t yh(y)dy \\
&= P^{II}(t,r).
\end{aligned}$$

Podem concloure que es compleix la igualtat d'ingressos entre subhastes, ja que els preus esperats pels jugadors coincideixen.

5.5.3 Màxim dels ingressos totals d'una subhasta

El fet de que el subhastador sigui el que ha d'imposar el preu de reserva fa que sigui interessant veure el benefici que en pot treure segons el valor que decideixi. Resulta evident que voldrà maximitzar els seus beneficis esperats, per això volem trobar les condicions que ha de complir el preu de reserva. Els ingressos esperats quan hi ha preu de reserva són:

$$I^S = n \int_r^{\bar{v}} y^*(x)H(x)f(x)dx$$

on S=I o II.

$$\begin{aligned}
I^S &= n \int_r^{\bar{v}} \left(x - \frac{\int_r^x H(s)ds}{H(x)} \right) H(x)f(x)dx \\
&= \int_r^{\bar{v}} nxH(x)f(x)dx - n \int_r^{\bar{v}} \left(\int_r^x H(s)ds \right) f(x)dx.
\end{aligned}$$

Si canviem els ordres d'integració en la doble integral tenim $r < s < x$ i $r < x < \bar{v}$ i, per tant, $s < x < \bar{v}$ amb $\int_s^{\bar{v}} f(x)dx = 1 - F(s)$:

$$\begin{aligned}
I^S &= n \int_r^{\bar{v}} \left(x - \frac{\int_r^t H(s)ds}{H(x)} \right) H(x)f(x)dx \\
&= \int_r^{\bar{v}} nxH(x)f(x)dx - n \int_r^{\bar{v}} (1 - F(x))H(x)dx.
\end{aligned}$$

Com que estem buscant el valor r que maximitzi I^S,

$$\begin{aligned}
\frac{dI^S}{dr} &= -rnH(r)f(r) + n(1 - F(r))H(r) \\
&= nH(r)[-rf(r) + 1 - F(r)].
\end{aligned}$$

Maximitzarem els ingressos esperats si es compleix $\frac{dI^S}{dr} = 0$. Serà necessari que:

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)}.$$

La condició que acabem de trobar, ens mostra el preu de reserva que maximitza els ingressos esperats del subhastador.

5.6 Jugadors aversos al risc

Fixem-nos que perquè es compleixi el principi d'equivalència ha estat necessari que: hi hagi simetria entre els jugadors, que les valoracions estiguin distribuïdes de manera independent i que els jugadors siguin neutrals al risc. Sota aquestes línies veurem com afecta als ingressos esperats el fet que els jugadors siguin aversos al risc i la resta d'hipòtesis es mantenen.

Recordem que en el cas que els jugadors siguin neutrals al risc, els seus beneficis esperats són la diferència entre els guanys esperats i els pagaments esperats. Per analitzar l'aversió al risc, suposem que cada jugador vol maximitzar una funció d'utilitat,

$$\begin{aligned} u \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto u(x). \end{aligned}$$

on u és diferenciable, creixent, que satisfà $u(0) = 0$, $u' > 0$ i $u'' < 0$.

En una subhasta a segon preu veurem que oferir la teva valoració encara és un equilibri. Suposem que els jugadors $2, \ldots, n$ ofereixen el seu tipus t_i. Si el jugador 1 ofereix z la seva utilitat esperada és

$$q(z) = \mathbb{E}[u(t_1 - Y_1)\mathbf{1}_{z>Y_1}] = \int_0^z u(t_1 - s)h(s)ds.$$

Recordem que $H(t) = (F(t))^{n-1}$ és la distribució de les valoracions dels jugadors $2, \ldots, n$ i $h = H'$.

Derivant tenim,

$$q'(z) = u(t_1 - z)h(z).$$

Llavors, utilitzant que $u(\cdot)$ és una funció creixent, $q'(z) > 0$ es compleix si $u(t_1 - z) > 0$ i si $t_1 > z$. Anàlogament, $q'(z) < 0$ es compleix si $u(t_1 - z) < 0$ i si $t_1 < z$. Per tant, $z = t_1$ és un màxim de la funció d'utilitat u.

Considerem ara una subhasta a primer preu. Suposem $b(\cdot)$ l'estratègia estrictament creixent i contínua que han jugat tots els jugadors excepte l'1. Podem suposar que ofereix $z = b(s)$ i que els seus beneficis esperats seran

$$q(s) = u(t_1 - b(s))H(s).$$

Derivant tenim,

$$q'(s) = -b'(s)u'(t_1 - b(s))H(s) + u(t_1 - b(s))h(s).$$

En un equilibri simètric hem vist que és òptim oferir $b(t_1)$. Perquè sigui la millor resposta del jugador 1 s'ha de complir que $q'(t_1) = 0$ i llavors,

$$b'(t_1) = \frac{u(t_1 - b(t_1))}{u'(t_1 - b(t_1))} \frac{h(t_1)}{H(t_1)}. \tag{5.6}$$

Proposició 5.8. *Suposem que els jugadors són aversos al risc amb la mateixa funció d'utilitat u. Els jugadors són simètrics i les seves valoracions són independents i privades. Aleshores, els ingressos esperats en una subhasta a primer preu són majors que una subhasta a segon preu.*

Demostració. Considerem $b(\cdot)$ l'equilibri d'una subhasta a primer preu quan els jugadors són aversos al risc trobat en (5.6).

Fixem-nos si u es còncava per tot $x > 0$ es compleix $u'(x) > u'(x) + xu''(x)$ ja que $u''(x) < 0$. Tanmateix, podem escriure $u'(x) > (u'(x)x)'$ i integrant als dos costats tenim que $\frac{u(x)}{u'(x)} > x$ per tot $x > 0$. Llavors,

$$b'(t_1) = \frac{u(t_1 - b(t_1))}{u'(t_1 - b(t_1))} \frac{h(t_1)}{H(t_1)} > (t_1 - b(t_1))\frac{h(t_1)}{H(t_1)}. \tag{5.7}$$

Sigui y^* l'equilibri d'una subhasta a primer preu que hem trobat en (5.3), on els jugadors són neutrals al risc. En el cas tenim, u(t)=t per tant,

$$(y^*)'(t_1) = (t_1 - y^*(t_1))\frac{h(t_1)}{H(t_1)}.$$

Suposem que $y^*(t_1) > b(t_1)$ es compleix que

$$(t_1 - b(t_1))\frac{h(t_1)}{H(t_1)} > (t_1 - y^*(t_1))\frac{h(t_1)}{H(t_1)}$$

i per (5.7) tenim $b'(t_1) > (y^*)'(t_1)$.

Notem també que $y^*(0) = b(0) = 0$. Per tant, les dues funcions tenen el mateix origen i no es pot complir que $y^*(t_1) > b(t_1)$ i $b'(t_1) > (y^*)'(t_1)$. Doncs, per tot $t_1 > 0$,

$$y^*(t_1) < b(t_1).$$

Acabem de veure que l'aversió al risc augmenta les ofertes en l'equilibri a primeu preu. A més, hem vist que els ingressos esperats en una subhasta a segon preu són no varia respecte a l'equilibri amb jugadors neutrals al rics.

Recordem que quan els jugadors eren neutrals al risc els preus a l'equilibri coincidien. En conseqüència, quan hi ha aversió al risc els ingressos esperats pel subhastador són majors en les subhastes a primer preu. □

5.7 Simulació d'una subhasta amb distribució U[0,1]

Una vegada calculats els equilibris simètrics de les subhastes a primer i segon preu pot resultar interessant crear una simulació per fer una comparació analítica i gràfica per veure que realment es compleix el principi d'equivalència d'ingressos.

En la realització d'aquest programa hem utilitzat Python, un llenguatge d'alt nivell que ens permet escriure i visualitzar de manera més o menys senzilla els resultats que pretenem. Adjuntem el codi del programa de simulació a l'annex.

Per aquesta simulació hem generat cent mil subhastes on, a cada una d'elles les valoracions dels jugadors són donades a través d'una funció de distribució uniforme $U[0,1]$. Ens hem focalitzat en tres casos diferents, segons si tenim 2, 10 o 100 jugadors. Finalment, hem aplicat els equilibris simètrics trobats en aquesta secció i hem calculat els estadístics dels preus de cada tipus de subhasta, a la taula següent podem apreciar els resultats:

		Estadístic	N=2	N=10	N=100
0	Subhasta a primer preu	Mitjana	0.333902	0.817731	0.98015
1		Std	0.117664	0.07505	0.009762
2	Subhasta a segon preu	Mitjana	0.334064	0.817832	0.980173
3		Std	0.235542	0.111746	0.013791

Figura 2: Estadístics dels preus en l'equilibri amb distribució U[0,1] i N=2,10,100.

Podem veure que es compleix el principi d'equivalència, ja que la mitjana dels preus en l'equilibri coincideixen en els dos tipus de subhasta. A més a més, a mesura que afegim jugadors els preus en l'equilibri augmenten i la diferència entre les dues mitjanes es redueix lleugerament. Cal remarcar que en la majoria dels casos el preu de venda en els dos tipus de subhastes no coincidiran, només coincideixen en la mitjana.

Tot seguit compararem les distribucions dels preus en l'equilibri dels dos tipus de subhastes segons el nombre de jugadors:

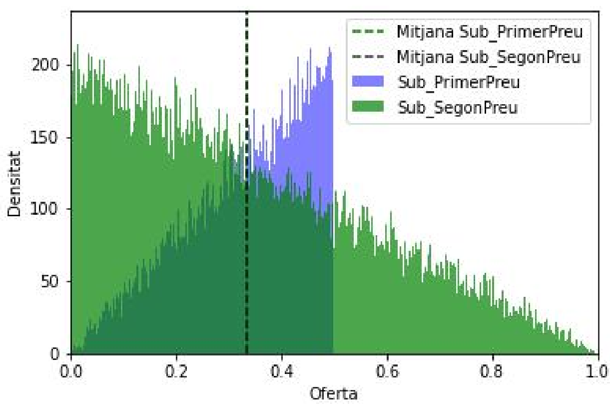

Figura 3: Distribució dels preus de venda amb N=2.

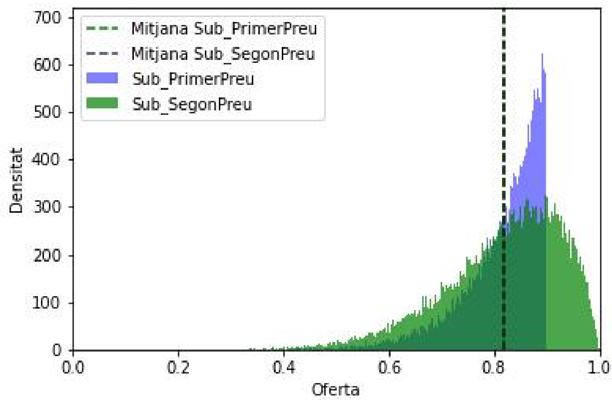

Figura 4: Distribució dels preus de venda amb N=10.

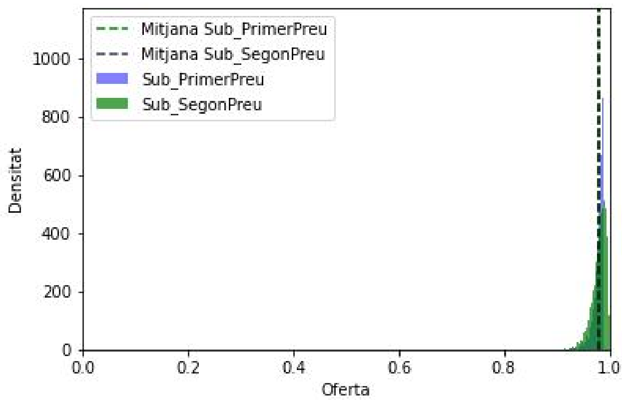

Figura 5: Distribució dels preus de venda amb N=100.

Ara podem analitzar amb una mica més de profunditat la distribució dels preus de venda de les dues subhastes. Clarament, els preus són molt més variables en les de segon preu que en les de primer preu. De fet, els preus de venda de les subhastes a segon preu poden estar entre $[0, 1]$ mentre que les de primer preu només poden variar entre $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, ja que s'ha de complir $\mathbb{E}[Y_1|Y_1 < t] \leq \mathbb{E}[Y_1]$.

Anem a veure si les funcions de densitat observades corresponen a allò que esperem. Com hem vist en la *Secció* 2.2 les subhastes a primer preu tenen associada la funció de densitat $h_1^{(n)}(t) = n \cdot F(t)^{n-1} f(t)$, en aquesta simulació hem utilitzat que $F(t) = t$ per tant, $h_1^{(n)}(t) = n \cdot t^{n-1}$. En particular:

$$h_1^{(2)}(t) = 2 \cdot t \qquad h_1^{(10)}(t) = 10 \cdot t^9 \qquad h_1^{(100)}(t) = 100 \cdot t^{99}.$$

Si agafem l'equilibri simètric de les subhastes a primer preu $y^*(t) = (1 - \frac{1}{n})t$ i l'apliquem a la funció de densitat obtindrem $h_1^{(n)}(t) = (n-1) \cdot t^{n-1}$.

A més a més, les funcions de densitat en les subhastes a primer preu queden limitades, com ja hem vist amb anterioritat, pel mateix factor $(1-1/n)$, per això les veiem acotades a 0.5, 0.9 i 0.99 respectivament.

En el cas de les subhastes a segon preu, en l'equilibri tenen associada la funció de densitat $h_2^{(n)}(t) = n(n-1)(1-F(t))F(t)^{n-2}f(t)$. Aplicant de nou el cas concret d'aquesta simulació obtenim $h_2^{(n)}(t) = n(n-1)(1-t)t^{n-2}$. En particular:

$$h_2^{(2)}(t) = 2(1-t) \qquad h_2^{(10)}(t) = 90(1-t)t^8 \qquad h_2^{(100)}(t) = 9900(1-t)t^{98}.$$

Tant en el cas de les subhastes a primer preu com en el cas de les subhastes a segon preu podem observar com efectivament les gràfiques en la simulació segueixen el perfil de les funcions de densitat esperades.

Per concloure, hem trobat interessant representar gràficament les ofertes en funció de les valoracions en l'equilibri en el cas de N=100 jugadors.

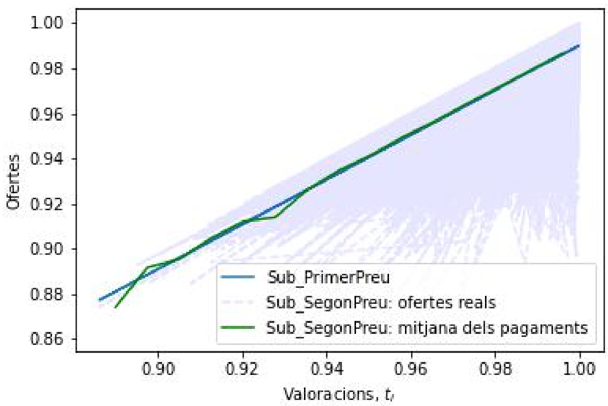

Figura 6: Ofertes en l'equilibri d'una subhasta N=100 jugadors.

Notem que les ofertes de la subhasta a primer preu venen definides justament per la recta $y^*(t) = (1-1/n)t$. En canvi, en les subhastes a segon preu hi ha més depressió entre les ofertes. Tot i això, es compleix el requisit indispensable que qualsevol oferta en l'equilibri és més petita que la seva valoració, ja que en cas contrari el jugador tindria pèrdues.

6 Subhastes amb valoracions afiliades

Considerem una subhasta d'un sol objecte entre un conjunt d'n participants. Al llarg d'aquesta secció suposarem que el subhastador i els jugadors són neutrals al risc.

Sigui t_i el tipus del jugador $i = 1, \ldots, n$. A diferència d'abans, suposarem que la valoració de cada jugador dependrà del vector de tipus $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Notem que en aquest cas podem expressar la valoració del jugador i com $V_i = u_i(t_1, \ldots, t_n)$. Direm que les valoracions són interdependents.

Ens basarem en l'estudi de Milgrom i Weber [11]. Introduirem la noció d'afiliació i buscarem quins són els equilibris de les subhastes a primer i a segon preu quan les valoracions d'aquestes són afiliades. Direm que les valoracions són afiliades si no estan correlacionades negativament. A la pràctica, l'afiliació ens diu que si un jugador té una valoració alta de l'objecte, la resta de jugadors també la tenen.

Finalment, veurem que no es compleix el principi d'equivalència entre subhastes. En particular, comprovarem que les subhastes a segon preu generen més ingressos esperats que les subhastes a primer preu.

6.1 El model bàsic

Considerem $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunt finit de jugadors i $T = [0, \bar{v}]^n$ el conjunt format pels seus tipus. Assumim que el model compleix el següent:

(i) Existeix una funció $u : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_i(t) = u(t_i, t_{-i})$ per tot jugador $i \in N$. On u és simètrica en les últimes n-1 variables.

(ii) La funció $u : [0, \bar{v}]^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $V_i = u(t_i, t_{-i})$ és contínua, no negativa i estrictament creixent per tot $i = 1, \ldots, n$.

(iii) Per tot $i \in N$, $\mathbb{E}[V_i] < \infty$.

Definició 6.1. *Una funció $f : T \to \mathbb{R}$ és simètrica en les últimes n-1 variables si per tota permutació σ del conjunt $\{2, \ldots, n\}$ i per tot $t \in T$,*

$$f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)}).$$

Fixem-nos que (ii) implica que des de la perspectiva d'un jugador, la resta de tipus poden ser intercanviats sense alterar la seva valoració.

Considerem $f(\cdot)$ la funció densitat conjunta de les variables $T_1, \ldots, T_n$. Imposem que $f(\cdot)$ sigui simètrica en les n variables.

Definició 6.2. *Una funció $f : [0, \bar{v}]^n \to \mathbb{R}$ té raó de versemblança monòtona si per tot $x, y \in [0, \bar{v}]^n$,*

$$f(x \wedge y) f(x \vee y) \geq f(x) f(y),$$

on $x \wedge y = (min\{x_1, y_1\}, \ldots, min\{x_n, y_n\})$ i $x \wedge y = (max\{x_1, y_1\}, \ldots, max\{x_n, y_n\})$.

Definició 6.3. *Les variables aleatòries $T_1, \ldots, T_n$ són afiliades si la funció de densitat conjunta f té raó de versemblança monòtona .*

Com hem vist en les subhastes amb valoracions privades estudiem l'equilibri de les subhastes en funció dels estadístics d'ordre. Considerem $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ els estadístics ordenats de $T_2, \ldots, T_n$. Seguint la notació de les seccions anteriors, considerem les diferents subhastes des de la perspectiva del jugador 1. Fixem-nos que podem reescriure $V_1(t) = u(t_1, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Lema 6.4. *Considerem $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ un vector de variables aleatòries amb densitat conjunta f(t). Suposem que $u(t)$ és una funció integrable Riemann. Aleshores,*

$$\mathbb{E}[u(T)|T_1 = t_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u(T)|T_1, T_2]|T_1 = t_1].$$

Demostració. Veure en Menezes F. i Monteiro P. [10], secció A.9. □

Teorema 6.5. *Sigui $(T_1, \ldots, T_n)$ un vector aleatòri de variables afiliades, aleshores per tota funció $u : T \to \mathbb{R}$ tenim que*

$$\mathbb{E}[u(T)|T_{k+1} = t_{k+1}, \ldots, T_n = t_n]$$

és creixent en $(t_{k+1}, \ldots, t_n)$.
En cas que $u(T)$ sigui estrictament creixent en t_i, tindrem que per un cert $k < i$,

$$\mathbb{E}[u(T)|T_{k+1} = t_{k+1}, \ldots, T_n = t_n]$$

també és estrictament creixent en t_i.

Demostració. Podeu trobar la demostració a l'apèndix de Milgrom i Weber [11]. □

6.2 Subhasta a primer preu

El nostre propòsit en aquesta secció és caracteritzar un equilibri d'una subhasta a primer preu amb valoracions afiliades. Suposem que $b_1(\cdot)$ és l'estratègia simètrica i creixent que segueixen els jugadors $i = 2, \ldots, n$.

Sigui
$$v(t, y) = \mathbb{E}[V_1|T_1 = t, Y_1 = y],$$
l'esperança de la valoració del jugador 1 quan el seu tipus és t i el tipus més alt de la resta de jugadors, Y_1 és y.

Notem que:

- Pel *teorema* 6.5 la funció $v(t, y)$ és estrictament creixent en t i en y.
- $v(t, y)$ és la mateixa per tots els jugadors per ser simètrica.

Els beneficis esperats pel jugador 1 de tipus t quan ha ofert $b_1(z)$ són:

$$g_1(t, z) = \mathbb{E}[(V_1 - b_1(z))\mathbf{1}_{b_1(z) > b_1(Y_1)}|T_1 = t].$$

Pel lema 6.4 podem escriure $g_1(t, z) = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[V_1|T_1, Y_1] - b_1(z))\mathbf{1}_{b_1(z) > b_1(Y_1)}|T_1 = t]$.

Aleshores,

$$\begin{aligned}
g_1(t,z) &= \mathbb{E}[(v(t,y)-b_1(z))\mathbf{1}_{b_1(z)>b_1(Y_1)}|T_1=t] \\
&= \int_0^z (v(t,y)-b_1(z))f_{Y_1|T_1}(y|t)dy \\
&= \int_0^z v(t,y)f_{Y_1|T_1}(y|t)dy - b_1(z)F_{Y_1|T_1}(z|t).
\end{aligned}$$

On $f_{Y_1|T_1}$ és la funció densitat condicionada de Y_1 donada T_1. Derivant respecte z, obtenim

$$g_1^{'}(t,z) = v(t,z)f_{Y_1|T_1}(z|t) - b_1'(z)F_{Y_1|T_1}(z|t) - b_1(z)f_{Y_1|T_1}(z|t).$$

Hem vist que en un equilibri simètric s'ha de complir $g_1^{'}(t,z)=0$ i és òptim que $z=t$. Aleshores,

$$b_1'(t) = (v(t,t)-b_1(t))\frac{f_{Y_1|T_1}(t|t)}{F_{Y_1|T_1}(t|t)}. \tag{6.1}$$

La condició (6.1) és una de les condicions necessàries $b_1(\cdot)$ sigui un equilibri. Un altre requisit és que $(v(t,t)-b_1(t)) \geq 0$. En cas contrari, els beneficis esperats pel jugador 1 serien negatius i obtindria millor resultats canviant d'estratègia. També és necessari que $v(0,0)-b_1(0)=0$. Doncs, si $T_1=0$, incrementar l'oferta $b_1(0)$ a $b_1(0)+\epsilon$ augmentaria els beneficis del jugador 1. Així doncs, serà indispensable que:

$$\begin{cases} b_1'(t) = (v(t,t)-b_1(t))\frac{f_{Y_1|T_1}(t|t)}{F_{Y_1|T_1}(t|t)} \\ b_1(0) = v(0,0) \end{cases} \tag{6.2}$$

Definim

$$\gamma(z,t) = \frac{f_{Y_1|T_1}(z|t)}{F_{Y_1|T_1}(z|t)} \quad \text{i} \quad \gamma(z) = \frac{f_{Y_1|T_1}(z|z)}{F_{Y_1|T_1}(z|z)}.$$

Reescriurem (6.1) com

$$b_1'(t) + b_1(t)\gamma(t) = v(t,t)\gamma(t). \tag{6.3}$$

Notem que es tracta d'una equació diferencial de primer ordre. [15]

Busquem el nostre factor integrador $P(t)$ tal que $P'(t) = P(t)\gamma(t)$. Llavors, $\frac{P'(t)}{P(t)} = \gamma(t)$. Si integrem els dos costats entre t i $\bar{v}$ tenim:

$$\begin{aligned}
\int_t^{\bar{v}} \frac{P'(z)}{P(z)}dz &= ln(P(\bar{v})) - ln(P(t)) \\
&= -ln(P(t)) = \int_t^{\bar{v}} \gamma(z)dz.
\end{aligned}$$

[15] Direm que una equació diferencial és de primer ordre si es pot escriure en forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ on P(x) i Q(x) són funcions reals.

Per acabar, si apliquem l'exponencial als dos costats de l'equació trobem el factor integrador $P(t) = e^{-\int_t^{\bar{v}} \gamma(z)dz}$. Aleshores aplicant $P(t)$ als dos costats de l'equació 6.3 tenim:

$$b_1'(t)P(t) + b_1(t)\gamma(t)P(t) = v(t,t)\gamma(t)P(t).$$

Fixem-nos que,

$$\begin{aligned}(b_1(t)P(t))' &= b_1'(t)P(t) + b(t)P'(t) \\ &= P(t)b_1'(t) + \gamma(t)P(t)b(t) \\ &= P(t)v(t,t)\gamma(t).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Recordem que també s'ha de complir la condició inicial $b_1(0) = v(0,0) = 0$. Per tant, integrant (6.2) entre 0 i t tenim:

$$P(t)b_1(t) = \int_0^t P(z)v(z,z)\gamma(z)dz.$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned}b_1(t) &= (P(t))^{-1}\int_0^t P'(z)v(z,z)dz \\ &= (P(t))^{-1}\left(P(t)v(t,t) - \int_0^t P(z)v'(z,z)dz\right) \\ &= v(t,t) - (P(t))^{-1}\int_0^t P(z)v'(z,z)dz \\ &= v(t,t) - \frac{\int_0^t e^{-\int_z^{\bar{v}} \gamma(x)dx} v'(z,z)dz}{e^{-\int_t^{\bar{v}} \gamma(x)dx}} \\ &= v(t,t) - \int_0^t e^{-\int_z^{\bar{v}} \gamma(x)dx} e^{-\int_{\bar{v}}^t \gamma(x)dx} \cdot v'(z,z)dz \\ &= v(t,t) - \int_0^t e^{-\int_z^t \gamma(x)dx} \cdot v'(z,z)dz.\end{aligned}$$

Considerem $L(z,t) = e^{-\int_z^t \gamma(x)dx}$. Llavors podem reescriure $b_1(t)$ com,

$$b_1(t) = v(t,t) - \int_0^t L(z,t) \cdot v'(z,z)dz.$$

Notem que,

$$\begin{aligned}\int_0^t L'(z,t) \cdot v(z,z)dz &= v(t,t)L(t,t) - \int_0^t L(z,t) \cdot v'(z,z)dz \\ &= v(t,t) - \int_0^t L(z,t) \cdot v'(z,z)dz = b_1(t).\end{aligned}$$

Tenim que $b_1(t)$ una solució a l'equació diferencial (6.2). Queda pendent comprovar que aquesta solució realment és un equilibri. Per fer-ho necessitem el següent lema.

Lema 6.6. *Si la funció densitat conjunta de* (T_1, Y_1) *satisfà la raó de versemblança monòtona, aleshores per tot* $y \in [0, \bar{v}]$, $\frac{F_{Y_1|T_1}(y|t)}{f_{Y_1|T_1}(y|t)}$ *decreix en t.*

Demostració. La funció densitat de Y_1 condicionada a $T_1 = t$ és $f_{Y_1|T_1}(y|t) = \frac{f(t,y)}{\int_0^{\bar{v}} f(t,z)dz}$. Llavors, la seva funció de distribució ve donada per:

$$F_{Y_1|T_1}(y|t) = \int_0^y f_{Y_1|T_1}(z|t)dz = \frac{\int_0^y f(t,s)ds}{\int_0^{\bar{v}} f(t,z)dz}.$$

Aleshores,

$$\frac{F_{Y_1|T_1}(y|t)}{f_{Y_1|T_1}(y|t)} = \frac{\frac{\int_0^y f(t,s)ds}{\int_0^{\bar{v}} f(t,z)dz}}{\frac{f(t,y)}{\int_0^{\bar{v}} f(t,z)dz}} = \frac{\int_0^y f(t,s)ds}{f(t,y)}.$$

Suposem que $t' > t$. Llavors per tot $s < y$, la raó versemblança monòtona implica que $f(t',y)/f(t',s) \geq f(t,y)/f(t,s)$. Recíprocament, $f(t,s)/f(t,y) \geq f(t',s)/f(t',y)$. Així doncs, integrant tenim:

$$\frac{F_{Y_1|T_1}(y|t)}{f_{Y_1|T_1}(y|t)} = \frac{\int_0^y f(t,s)ds}{f(t,y)} \geq \frac{\int_0^y f(t',s)ds}{f(t',y)} = \frac{F_{Y_1|T_1}(y|t')}{f_{Y_1|T_1}(y|t')}.$$

□

Teorema 6.7. *El perfil d'estratègies* $(b_1, \ldots, b_1)$ *és un equilibri d'una subhasta a primer preu si:*

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \int_0^t v(y,y)dL(y|t), \\ L(y|t) &= e^{-\int_y^t \frac{f_{Y_1|T_1}(s|s)}{F_{Y_1|T_1}(s|s)}ds} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Demostració. Per comprovar que b_1 és realment una solució a l'equilibri d'una subhasta a primer preu, ens queda pendent veure:

(i) $b_1(t)$ és creixent.

(ii) $b_1(t)$ maximitza els pagaments esperats.

Fixem-nos que $v(y,y)$ és creixent en y, per tant, falta que $L(\cdot|t)$ també ho sigui.

Notem que podem considerar $L(\cdot|t)$ com una funció de distribució sobre l'interval $[0,t]$. Pel lema 6.6, tenim que per tot $s > 0$, $\frac{f_{Y_1|T_1}(s|s)}{F_{Y_1|T_1}(s|s)} \geq \frac{f_{Y_1|T_1}(s|0)}{F_{Y_1|T_1}(s|0)}$.

Aleshores,

$$\begin{aligned} -\int_0^t \frac{f_{Y_1|T_1}(s|s)}{F_{Y_1|T_1}(s|s)}ds &\leq -\int_0^t \frac{f_{Y_1|T_1}(s|0)}{F_{Y_1|T_1}(s|0)}ds \\ &= -\int_0^t \frac{d}{ds}(ln(F_{Y_1|T_1}(s|0))ds \\ &= ln(F_{Y_1|T_1}(0|0)) - ln(F_{Y_1|T_1}(t|0)) \\ &= -\infty. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Si apliquem l'exponencial als dos costats de l'equació tenim que per tot t, $L(0|t) = 0$ i $L(t|t) = 1$. A més a més, $L(\cdot|t)$ és creixent i, per tant, és una funció de distribució. Per tant, podem concloure que b_1 és creixent en y.

Per comprovar (ii) podem expressar els pagaments esperats de la subhasta,

$$g_1(t,z) = \int_0^z v(t,y) f_{Y_1|T_1}(y|t)dy - b_1(z)F_{Y_1|T_1}(z|t),$$

amb

$$g_1^{'}(t,z) = (v(t,z) - b_1(z))f_{Y_1|T_1}(z|t) - b_1'(z)F_{Y_1|T_1}(z|t).$$

Fixem-nos que el primer sumand de la derivada anterior el podem escriure com:

$$\begin{aligned}(v(t,z) - b_1(z))f_{Y_1|T_1}(z|t) &= (v(t,z) - v(z,z))f_{Y_1|T_1}(z|t) + (v(z,z) - b_1(z))f_{Y_1|T_1}(z|t) \\ &= (v(t,z) - v(z,z))f_{Y_1|T_1}(z|t) + b_1'(z)\frac{f_{Y_1|T_1}(z|t)}{\gamma(z)}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Llavors,

$$\begin{aligned}g_1^{'}(t,z) &= (v(t,z) - v(z,z))f_{Y_1|T_1}(z|t) + b_1'(z)\left(\frac{f_{Y_1|T_1}(z|t)}{\gamma(z)} - F_{Y_1|T_1}(z|t)\right) \\ &= (v(t,z) - v(z,z))f_{Y_1|T_1}(z|t) + b_1'(z)f_{Y_1|T_1}(z|t)\left(\frac{1}{\gamma(z)} - \frac{1}{\gamma(z,t)}\right).\end{aligned} \tag{6.8}$$

- Si $z > t$, aleshores $v(t,z) - v(z,z) < 0$ per ser creixent en el seu primer argument. També, notem que pel lema 6.6 $\frac{f_{Y_1|T_1}(z|t)}{F_{Y_1|T_1}(z|t)} - \frac{f_{Y_1|T_1}(z|z)}{F_{Y_1|T_1}(z|z)} \leq 0$. Per tant, $g_1^{'} < 0$.
- Si $z < t$, aleshores $v(t,z) - v(z,z) > 0$ i pel lema 6.6 $\frac{f_{Y_1|T_1}(z|t)}{F_{Y_1|T_1}(z|t)} - \frac{f_{Y_1|T_1}(z|z)}{F_{Y_1|T_1}(z|z)} \geq 0$. Per tant, $g_1^{'} > 0$.

Finalment $z = t$ maximitza els beneficis esperats del jugador 1. És a dir, $b_1(t)$ és un equilibri simètric d'una subhasta a primer preu.

□

6.3 Subhasta a segon preu

Volem trobar un equilibri simètric d'una subhasta a segon preu amb valoracions afiliades.

Proposició 6.8. *L'equilibri simètric d'una subhasta a segon preu quan les valoracions són afiliades és:*

$$b_2(t) = v(t,t).$$

Demostració. Suposem que els jugadors $2, \ldots, n$ segueixen l'estratègia $b_2(\cdot)$, continua i creixent amb $\hat{b} = max_{j\neq 1} b_2(t_j)$. Els beneficis esperats pel jugador 1 condicionat a haver rebut el tipus t i haver ofert s mentre la resta de jugadors juguen $b_2(\cdot)$, són:

$$g_2(t,s) = \mathbb{E}[(V_1 - \hat{b})\mathbf{1}_{s>\hat{b}}|T_1 = t]. \tag{6.9}$$

Notem que per guanyar la subhasta s'ha de complir que $s > \hat{b}$, en cas contrari $g_2(t,s) = 0$. Busquem un equilibri simètric.

Tenim que b_2 és creixent en t per tant, $\hat{b} = max_{j\neq 1} b_2(t_j) = b_2(Y_1)$. Podem reescriure (6.9) com:

$$g_2(t,s) = \mathbb{E}[(V_1 - b_2(Y_1))\mathbf{1}_{s>b_2(Y_1)}|T_1 = t].$$

Podem suposar que existeix un cert $z \in [0, \bar{v}]$ tal que $b_2(z) = s$. Per tant, podem escriure la funció de beneficis en funció d'una sola variable z,

$$g_2(z) = \mathbb{E}[(V_1 - b_2(Y_1))\mathbf{1}_{z>Y_1}|T_1 = t].$$

Tenim que $V_1 - b_2(Y_1)$ és una funció creixent. Per tant, també és integrable Riemann[16], pel *lema* 6.4 podem escriure,

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(V_1 - b_2(Y_1))\mathbf{1}_{z>Y_1}|T_1, Y_1]|T_1 = t] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[V_1|T_1, Y_1] - b_2(Y_1))\mathbf{1}_{z>Y_1}|T_1 = t] \\ &= \int_0^z (v(t,y) - b_2(y)) f_{Y_1|T_1}(y|t) dy. \end{aligned}$$

Derivant els dos costats obtenim, $g_2^{'}(z) = (v(t,z) - b_2(z)) f_{Y_1|T_1}(z|t)$.

Notem que $v(t,z)$ és creixent en la seva primera variable pel teorema 6.5. Aleshores per tot $z > t$, $v(t,z) - v(z,z) < 0$ i per tot $z < t$ $v(t,z) - v(z,z) > 0$. Per tant tindrem equilibri si $z = t$ i $b_2(t) = v(t,t)$. □

6.4 Comparació d'ingressos entre subhastes

Seguidament, veurem que un subhastador tindrà més beneficis esperats en una subhasta a segon preu que en una a primer preu. Recordem que en el cas que els tipus eren independents i idènticament distribuïts, les dues subhastes generaven els mateixos ingressos esperats i es complia el principi d'equivalència entre subhastes.

Els pagament esperat del guanyador d'una subhasta a primer segon preu és:

$$P^{II}(t) = \int_0^t v(s,s) f_{Y_1|T_1}(s|s) ds.$$

D'altra banda, en una subhasta a primer preu tenim:

$$P^I(t) = b_1(t) F_{Y_1|T_1}(t|t).$$

[16] Tota funció contínua és integrable Riemann. També tota funció amb un conjunt numerable de discontinuïtats és integrable Riemann.

Aleshores,

$$
\begin{aligned}
P^{II}(t) &= \int_0^t (v(s,s) - b_1(s)) f_{Y_1|T_1}(s|t) ds + \int_0^t b_1(s) f_{Y_1|T_1}(s|t) ds \\
&= \int_0^t b_1'(s) \frac{F_{Y_1|T_1}(s|s)}{f_{Y_1|T_1}(s|s)} f_{Y_1|T_1}(s|t) ds + \int_0^t b_1(s) f_{Y_1|T_1}(s|t) ds \\
&\geq \int_0^t b_1'(s) F_{Y_1|T_1}(s|t) ds + \int_0^t b_1(s) f_{Y_1|T_1}(s|t) ds \\
&= b_1(t) F_{Y_1|T_1}(t|t) = P^I(t).
\end{aligned}
$$

A la segona igualtat hem utilitzat l'equació (6.1) i l'hem substituït en la primera integral. Com que hi ha afiliació entre les variables, la desigualtat es compleix pel *lema* 6.6. Per acabar, en l'última igualtat hem integrat per parts.

Recordem que els ingressos esperats pel subhastador són n vegades el pagament esperat del guanyador, llavors $I^S = n \cdot P^S$. Per tant, hem comprovat que una subhasta a segon preu genera més ingressos que una subhasta a primer preu quan les valoracions són afiliades[17].

[17] Milgrom i Weber [11] va explicar un rànquing de subhastes quan aquestes tenien valoracions afiliades, el *Linkage priciple*.

7 Conclusions

La subhasta és un dels sistemes de venda més antics. Tot i això, l'estudi de la seva teoria és relativament recent. De fet, els economistes Paul Milgrom (Detroit, 1948) i Robert Wilson (Nevraska, 1937) van rebre un premi Nobel l'any 2020 per nous descobriments sobre la teoria de subhastes.

En aquest projecte, hem vist com podem modelar les subhastes a sobre tancat seguint la idea de Harsanyi d'afegir l'atzar en el joc. El model ens ha permès trobar els equilibris de les subhastes a primer i a segon preu quan les valoracions sobre l'objecte són privades. Hem pogut comprovar que, si els jugadors són simètrics i neutrals al risc, els pagaments esperats per un jugador coincideixen en les dues classes de subhastes. En conseqüència, els ingressos esperats pel subhastador també coincidiran.

En particular hem pogut observar com es compleix el Principi d'equivalència d'ingressos sempre que els jugadors siguin simètrics, neutrals al risc i tot jugador amb valoració 0 ofereixi 0. Altrament, hem vist que el Principi d'equivalència no es compleix quan els jugadors són aversos al risc. En aquest cas, els ingressos esperats en una subhasta a primer preu són majors. Per concloure, hem realitzat una simulació de les subhastes amb Python i ens ha servit per verificar que es compleix el principi d'equivalència quan les valoracions estan distribuïdes uniformement en l'interval $[0, 1]$.

També hem considerat les subhastes quan les valoracions són interdependents i afiliades. La idea central de l'afiliació és que les valoracions estan correlacionades positivament entre elles. Val la pena dir que en aquests casos trobar l'equilibri ha estat més complex. A més a més, quan les valoracions són afiliades no es compleix el principi d'equivalència, ja que les subhastes a segon preu generen més ingressos que les subhastes a primer preu.

Hi ha possibles línies futures d'aquest estudi. Es podria profunditzar i estudiar els efectes que comportaria l'asimetria entre jugadors. També podríem ampliar l'estudi utilitzant variables aleatòries amb funcions de distribució més complexes. Finalment, resultaria interessant estudiar el funcionament de les subhastes quan hi ha més d'un objecte a la venda, com per exemple una subhasta combinatòria de rellotge, (vegeu Bichler [3]) i desenvolupar algoritmes que ens permetin simular-la.

Durant l'última etapa del grau de matemàtiques vaig tenir l'oportunitat de cursar assignatures del grau d'economia. Allà, vaig poder estudiar una branca de l'economia vinculada amb les matemàtiques, la teoria de jocs. Al llarg de l'assignatura empràvem teoremes i proposicions, però quasi mai s'aprofundia en les demostracions. En aquesta memòria he pogut abordar diferents aspectes de la teoria de jocs i aplicar-los en les subhastes d'una manera rigorosa i analítica.

Per acabar, vull deixar constància que al llarg d'aquest projecte he pogut posar en pràctica coneixements rebuts al llarg del grau, sobretot de les branques de l'estadística, la probabilitat i el càlcul integral. També he adquirit nous coneixements, alguns gens trivials, amb l'ajuda de recursos bibliogràfics. Convé ressaltar que estudiar les subhastes, entendre quins elements intervenen i conèixer com es busquen els equilibris ens pot donar recursos per saber com comportar-nos en altres situacions semblants en les quals disposem d'informació incompleta.

Referències

[1] Aumann, R.; Hart, S.: *Handbook of Game Theory*, Vol 2, North Holland, 1994.

[2] Berz, G.: *Game Theory Bargaining and Auction Strategies*, 2a edició, Palgrave Macmillan, 2015.

[3] Bichler, M.: *Market Desing*, Cambridge University Press, 2018.

[4] Gibbons, R.; *Un primer curso de teoría de juegos*, Calvo, P.; Vilà, X.; Antoni Bosch, 1993.

[5] González-Díaz,J.; García-Jurado, I; Fiestras-Janeiro, M. G.: *An introductory course on mathematical game theory,* Vol 115, American Mathematical Society, 2010.

[6] Harsanyi, J.; *Games with incomplete information*, University of California, 1994.

[7] Harsanyi, J.; *Games with incomplete information played by "Bayesian"players, I-III*, Management Sience, Vol. 14, 1967.

[8] Krishna, V.: *Auction theory*, Academic Press, 2002.

[9] Martin, J. Osborne: *An introduction to game theory*, Oxford University Press, 2000.

[10] Menezes, F.M; Monteiro, P.K: *An introduction to auction theory*, Oxford University Press, 2005.

[11] Milgrom, P.R.; Weber, R.J.: *A theory of auction and competitive bidding*, Econometrica, 50(5), 1089-1122, 1982.

[12] Milgrom, P.R: *Putting Auction Theory to work*, Cambridge University Press, 2004.

[13] Pérez Navarro, J.; Jimeno Pastor, J.L.; Cerdá Tena, E.: *Teoría de Juegos*, Pearson Educación, S.A., 2004.

[14] Rasmusen, E.; *Games and information*, Blackwell Publishing, 4a edició, 2006.

8 Annex

A. Codi subhastes amb distribució U[0,1]

```python

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stats
from bokeh.io import export_png, export_svgs

class Solution:
   def solve(self, matrix):
      R = len(matrix)
      C = len(matrix[0])
      res = [[0] * C for _ in range(R)]
      for col in range(C):
         values = [r[col] for r in matrix]
         values.sort(reverse=True)
         for row in range(R):
            res[row][col] = values.pop()
      return res
ob = Solution()

#(N,S) Cada columna són els resultats de la subhasta i les files corresponen a cada jugador. La distribució de les valoracions és uniforme en l'interval [0,1].

N = [2,10,100]
S = 100000

df = pd.DataFrame(columns=['','Estadístic',2, 10, 100])
df['']=['Subhasta a primer preu','','Subhasta a segon preu','']
df['Estadístic']=['Mitjana', 'Std','Mitjana', 'Std']
ruta=r'D:\tfg'

for n in N:
    t = np.random.uniform(0,1,(n,S))
    # Sigui y_sol l'equilibri trobat a l'exercici 4.5
    y_sol = lambda ti,n :(1-(1/n)) * ti
    y = y_sol(t,n)

    #Recordem que l'equilibri és una funció creixent per tant ens és indiferent ordenar per les valoracions o bé per les ofertes y.

    y=ob.solve(y)#Ordenem les ofertes en funció de qui guanya la subhasta.
    y=np.array(y)
    t=ob.solve(t)#Ordenem de cada subhasta les valoracions.
    t=np.array(t)

    prim_oferta = y[-1,:]  # L'oferta guanyadora d'una subhasta a primer preu.
    seg_oferta = t[-2,:]  # El preu que s'ha pagat en una subasta a segon preu: la 2na oferta més alta.

    #Guardem els resultats a la taula resum
    df[n][0]=prim_oferta.mean()
    df[n][1]=prim_oferta.std()
    df[n][2]=seg_oferta.mean()
    df[n][3]=seg_oferta.std()
```

```
    #Construïm el gràfic de les distribucions dels pagaments de les dues subhastes. Observeu que es compleix que les mitjanes coincideixen.
    fig, graf = plt.subplots()

    graf.axvline(prim_oferta.mean(), ls='--', c='g', label='Mitjana Sub_PrimerPreu')
    graf.axvline(seg_oferta.mean(),alpha=0.8, ls='--', c='k', label='Mitjana Sub_SegonPreu')
    graf.hist(prim_oferta,alpha=0.5, color=['b'],label='Sub_PrimerPreu', bins=1000)
    graf.hist(seg_oferta, alpha=0.7,color=['g'],label='Sub_SegonPreu', bins=1000)

    graf.set_xlim([0,1])
    graf.legend(loc='best')
    graf.set_xlabel('Oferta')
    graf.set_ylabel('Densitat')

    if n==2:
        nom='\graf_N2.jpg'
    if n==10:
        nom='\graf_N10.jpg'
    if n==100:
        nom='\graf_N100.jpg'

    plt.savefig(ruta+nom)

    #Calcularem 100+1 intervals sobre la distribució dels tipus guanyadors t[-1,:]. De cada un d'aquests intervals, en el seu punt mig li assignarem la mitjana dels tipus.
    intervals = stats.binned_statistic(t[-1,:], t[-2,:], statistic='mean', bins=15)

    x = intervals.bin_edges
    x =[(x[i]+x[i+1])/2 for i in range(len(x)-1)]
    y_eix = intervals.statistic

    # Calculat quina és la mitjana dels pagaments esperats d'una subhasta a segon preu, per cada interval.
    fig, graf = plt.subplots()

    graf.plot(t[-1,:], y[-1,:], '-', alpha = 1, label = 'Sub_PrimerPreu')
    graf.plot(t[-1,:], t[-2,:], 'b--', alpha = 0.1, label = 'Sub_SegonPreu: ofertes reals')
    graf.plot(x, y_eix, 'g-', label='Sub_SegonPreu: mitjana dels pagaments')

    graf.set_xlabel('Valoracions, $t_i$')
    graf.set_ylabel('Ofertes')

    if n==2:
        nom1='\linia_N2.jpg'
    if n==10:
        nom1='\linia_N10.jpg'
    if n==100:
        nom1='\linia_N100.jpg'
    plt.savefig(ruta+nom1)

df.rename(columns={2: "N=2", 10: 'N=10', 100: 'N=100'},inplace=True)
```