



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

GRAFS I SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Autor: Ana Blanco Lara

Director: Dr. Joan Carles Naranjo del Val

Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

“Les matemàtiques són una ciència que dibuixa conclusions necessàries.”

Benjamin Peirce

Abstract

This memory presents basic notions and results about Riemann surfaces which are later seen applied in an analogous way in graphs. The analogy is given in divisors' context, enunciating a version for graphs of the known Riemann-Roch Theorem.

In addition, other results analogous to classical facts about Riemann surfaces theory are shown and proved, like the jacobian or the Abel-Jacobi map.

Finally, the analogy with divisors is used for observing a possible application on a Chip-Firing game, a graphs' game, making it possible to characterise the existence or non-existence of a winning strategy.

Resum

Aquesta memòria presenta nocions bàsiques i resultats sobre superfícies de Riemann que posteriorment es veuen aplicats de forma anàloga en grafs. L'analogia es dona en el context de divisors, enunciant una versió per grafs del conegut Teorema de Riemann Roch.

A més, es mostren i es proven altres resultats anàlegs a fets clàssics de la teoria de superfícies de Riemann, com ara la jacobiana o l'aplicació d'Abel-Jacobi.

Finalment, s'utilitza l'analogia amb divisors per veure una possible aplicació sobre un joc Chip-Firing, un joc de grafs, fent possible una caracterització de l'existència o no d'una estratègia guanyadora.

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agrair al meu tutor, el Dr. Joan Carles Naranjo, el temps, l'esforç i la dedicació que m'ha ofert en tot moment durant tot el desenvolupament del treball. L'ajut proporcionat per aprofundir i aprendre ha estat un element clau per donar-li consistència.

També vull donar les gràcies a totes aquelles persones que han estat al meu costat durant aquests quatre anys, recolzant-me i confiant en mi i en les meves capacitats.

Finalment, agrair els meus pares el haver-me donat la possibilitat d'estudiar. Sense ells no hauria arribat mai al punt en el que em trobo. Gràcies de tot cor!

Índex

1	Introducció	1
2	Superfícies de Riemann	3
2.1	Definició de superfície de Riemann	3
2.2	Funcions holomorfes, singularitats i funcions meromorfes	5
2.2.1	Ordre d'una funció meromorfa en un punt p	6
2.3	Funcions harmòniques	7
2.4	Conseqüències de resultats bàsics de variable complexa	8
2.5	Aplicacions holomorfes entre superfícies de Riemann	8
2.5.1	Propietats d'aplicacions holomorfes	10
2.5.2	Grau de l'aplicació	11
2.6	Fórmula de Hurwitz	12
2.7	Formes diferencials	13
2.8	Divisors	14
2.9	Teorema de Riemann-Roch	16
2.10	Aplicació d'Abel-Jacobi	18
3	Conceptes previs	20
3.1	Grafs	20
3.2	Xarxes	21
4	La jacobiana d'un graf finit	23
4.1	Divisors i grup de Picard	23
4.2	La jacobiana d'un graf finit. Aplicació d'Abel-Jacobi	26
5	El Teorema de Riemann-Roch	32
5.1	Sistemes lineals i el Teorema de Riemann-Roch	32
5.2	Demostració del Teorema de Riemann-Roch per grafs	33
5.2.1	Un criteri de Riemann-Roch	33
5.2.2	Demostració del teorema	35
5.3	Conseqüències del Teorema de Riemann-Roch	36
6	Aplicació: Joc Chip-Firing	37
6.1	Joc Chip-Firing de Björner-Lovász-Shor	40
7	Conclusions	43

1 Introducció

La geometria algebraica complexa és el camp de les matemàtiques que combina l'àlgebra abstracta amb la geometria analítica. I és precisament aquest camp, juntament amb la geometria diferencial, l'encarregat d'estudiar les superfícies de Riemann. Aquesta és una noció basada en funcions de variable complexa que ens arriba avui en dia presentada per Riemann després d'una immensa investigació prèvia per part de diferents autors.

La teoria de grafs és una branca no només de les matemàtiques, sinó també de la ciència de la computació, que s'encarrega d'estudiar els grafs i les seves propietats. Ambdós camps poden arribar a ser relacionats mitjançant l'aplicació de la teoria d'un en l'altre amb analogies.

Aquesta possibilitat d'analogia és el fonament d'aquesta memòria, un treball que proporciona un resum, sense entrar en detalls, de la teoria de les superfícies de Riemann per unes posteriors construccions sobre grafs, el tema principal, inspirades en aquesta teoria.

El Teorema de Riemann-Roch té una gran rellevància en geometria algebraica i anàlisi complexa, ja que permet calcular l'existència d'unes certes funcions meromorfs. Aquest va ser enunciat amb una desigualtat per Bernhard Riemann i posteriorment, Gustav Roch va trobar el terme que faltava i va demostrar la igualtat.

L'aplicació d'Abel-Jacobi, que és capaç de relacionar una superfície de Riemann amb la seva jacobiana i, un divisor, que és una combinació lineal finita de punts amb coeficients enters són, entre altres, conceptes que tradicionalment s'han aplicat en geometria de Riemann, però es poden traslladar més enllà. En particular, es poden aplicar sobre grafs de forma anàloga, obrint un gran ventall de possibles aplicacions.

Aquesta memòria té com a objectiu desenvolupar amb definicions i resultats els conceptes mencionats, fent especial èmfasi en el Teorema de Riemann-Roch, i finalment, veure una petita aplicació d'alguns dels conceptes sobre un joc Chip-Firing per caracteritzar la finitud i l'existència o no existència d'una estratègia guanyadora.

El projecte

Aquest projecte sorgeix d'una inquietud per aprofundir en el camp de la geometria després d'haver cursat les assignatures d'aquesta branca.

L'objectiu d'aquesta memòria és veure un graf finit com un anàleg discret d'una superfície de Riemann. En particular, veure com teoria que aplicada en superfícies de Riemann funciona és anàloga en grafs finits.

Per assolir aquest objectiu, aquest treball està centrat en veure l'analogia amb divisors, fins arribar al clàssic Teorema de Riemann-Roch, que posteriorment s'utilitza per explicar l'aplicació dels conceptes construïts sobre grafs en un joc. Per complementar-ho, també es proven altres resultats per donar consistència a la teoria esmentada anteriorment, com ara l'analogia amb l'aplicació d'Abel-Jacobi.

Durant el desenvolupament del treball, s'introdueixen totes les nocions i resultats necessaris per superfícies de Riemann i posteriorment s'apliquen en grafs, tot observant i comentant algunes de les analogies entre ells.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria consta de cinc capítols. En el primer de tots, es troba tota la teoria de superfícies de Riemann, entrant en definicions i resultats rellevants per a la posterior analogia amb grafs.

En el segon capítol, s'introdueixen conceptes bàsics sobre grafs i xarxes necessaris pel desenvolupament de les següents seccions.

El tercer capítol explica la teoria relacionada amb la jacobiana d'un graf finit. Comença amb les nocions necessàries per definir el grup de Picard i la jacobiana i finalment, mitjançant l'aplicació d'Abel-Jacobi, es prova que els dos grups són isomorfs.

El quart capítol es centra en el Teorema de Riemann-Roch per a grafs. Es comença exposant conceptes previs que són requerits per enunciar el teorema, es prossegueix enunciant i demostrant aquest i finalment s'expliquen conseqüències.

En el darrer capítol, s'explica què és un joc Chip-Firing i s'aplica la teoria de divisors en grafs que s'ha vist durant els capítols anteriors per donar resultats sobre l'estratègia guanyadora i la finitud del joc.

2 Superfícies de Riemann

Aquest primer capítol exposa la teoria sobre superfícies de Riemann, sense entrar en detalls, per adquirir tots els conceptes necessaris per poder fer les posteriors analogies amb grafs. Inicialment es presenta la pròpia definició de superfície de Riemann. A continuació s'expliquen conceptes i propietats de funcions holomorfes, meromorfe i harmòniques. Finalment, el capítol acaba amb formes diferencials i divisors per enunciar el teorema de Riemann-Roch i introduir l'aplicació d'Abel-Jacobi.

2.1 Definició de superfície de Riemann

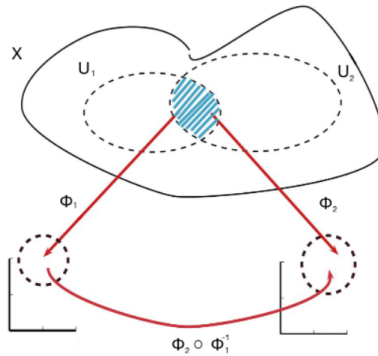
La idea bàsica d'una superfície de Riemann és un espai que, localment, es veu com un conjunt obert en el pla complex. En aquesta secció, introduïm els conceptes necessaris per poder donar una definició precisa.

Definició 2.1. *Sigui X un espai topològic.*

1. *Una carta complexa, o simplement carta, en X és un homeomorfisme $\phi : U \rightarrow V$, on $U \subset X$ és un conjunt obert en X , i $V \subset \mathbb{C}$ és un conjunt obert en el pla complex.*
2. *Diem que la carta ϕ està centrada en un punt $p \in U$ si $\phi(p) = 0$.*
3. *Siguin $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ i $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ dues cartes complexes en X . Diem que ϕ_1 i ϕ_2 són compatibles si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, o bé si*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

és holomorfa.



4. *Un atlas complex, o simplement atlas, \mathcal{A} en X és una col·lecció $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartes compatibles dos a dos tals que $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.*
5. *Dos atlas són equivalents si cada carta d'un és compatible amb cada carta de l'altre.*

Proposició 2.2. *Sigui T una funció de transició entre dues cartes compatibles. Aleshores la derivada T' mai és zero en el domini de T .*

Demostració. Denotem S a la inversa de T , amb el que $S \circ T$ és la identitat en el domini de T , és a dir, $S(T(w)) = w, \forall w$. Derivant aquesta equació obtenim $S'(T(w))T'(w) = 1$, amb el que $T'(w) \neq 0$. \square

Definició 2.3. *Sigui X un espai topològic. Una estructura complexa en X és un atlas complex maximal en X o, equivalentment, una classe d'equivalència d'atles complexos en X .*

Definició 2.4. *Sigui X un espai topològic.*

1. *Diem que X és Hausdorff si per a cada dos punts $x, y \in X, x \neq y$, existeixen entorns disjunts U i V de x i y , respectivament.*
2. *Diem que X satisfà el segon axioma de numerabilitat si existeix una base numerable per a la seva topologia.*

Ara, amb aquestes conceptes podem donar la definició de superfície de Riemann.

Definició 2.5. *Una superfície de Riemann és un espai topològic X connex amb una estructura complexa que satisfà el segon axioma de numerabilitat i que és Hausdorff.*

Com a espai topològic és una superfície topològica connexa, compacta i orientable. Denotem $g(X)$ el seu gènere topològic.

Exemples 2.6. 1. El pla complex \mathbb{C} , considerat topològicament com \mathbb{R}^2 .

2. L'esfera de Riemann $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Fixem-nos que l'esfera és connexa i Hausdorff i veiem que és superfície de Riemann presentant-la de dues formes diferents.

(a) Definim una estructura sobre S^2 via dues cartes

$$(S^2 \setminus (0, 0, 1), \phi_+), (S^2 \setminus (0, 0, -1), \phi_-)$$

on ϕ_{\pm} són les projeccions estereogràfiques

$$\phi_+(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \phi_-(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}$$

des del pol nord i el pol sud, respectivament. Ara, si

$$p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$$

amb $x_3 \neq \pm 1$, aleshores

$$\phi_+(p)\phi_-(p) = 1.$$

Això prova que l'aplicació de transició entre les dues cartes és $z \mapsto \frac{1}{z}$ des de $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

- (b) La compactificació per un punt de \mathbb{C} denotada per \mathbb{C}_{∞} . La base d'entorns de ∞ en \mathbb{C}_{∞} ve donada pels complements de tots els conjunts compactes de \mathbb{C} . De nou, hi ha dues cartes

$$(\mathbb{C}, z), (\mathbb{C}_{\infty} \setminus \{0\}, \frac{1}{z}),$$

i per tant l'aplicació de transició de nou ve donada per $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

3. Tor complex. Siguin z_1 i z_2 nombres complexos linealment independents sobre \mathbb{R} i sigui $L = \mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2 = \{n_1z_1 + n_2z_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Fixem-nos que L és un subgrup de \mathbb{C} isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ara bé, sigui $X = \mathbb{C}/L$ i $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ la projecció que dota a X de la topologia quocient. L'espai quocient X s'anomena tor complex.

Veiem ara que és una superfície de Riemann. Si escollim ϵ suficientment petit, podem trobar un punt en la intersecció entre qualsevol disc $D(z_0, \epsilon) \in \mathbb{C}$ i qualsevol classe d'equivalència. Per tant, establint una correspondència bijectiva entre els discs i un obert a X , podem introduir coordenades locals holomorfes a X via π i per tant podem definir un atlas. En conseqüència, podem afirmar que X és una superfície de Riemann. Observem que $g(X) = 1$.

El tor complex podem escriure'l per més dimensions, quedant un quocient de la forma $X = \mathbb{C}^g/L$, on $L = \mathbb{Z}^{\oplus 2g} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{2g}$, e_i \mathbb{R} -linealment independents.

2.2 Funcions holomorfes, singularitats i funcions meromorfes

Durant aquesta secció estudiarem diferents propietats d'una funció f definida sobre X , X superfície de Riemann, en un punt $p \in X$.

Definició 2.7. *Siguin X una superfície de Riemann i $p \in X$ un punt. Sigi f una funció de valor complex definida en un entorn W de p . Diem que f és holomorfa en el punt p si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa a $\phi(p)$. Diem que f és holomorfa en W si és holomorfa en tot punt de W .*

Definició 2.8. *Siguin X una superfície de Riemann, $p \in X$ un punt i f una funció de valor complex holomorfa en $U - \{p\}$, on U és un entorn de p .*

1. *Diem que f té una singularitat evitable en p si i només si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat evitable en $\phi(p)$.*
2. *Diem que f té un pol en p si i només si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té un pol en $\phi(p)$.*
3. *Diem que f té una singularitat essencial en p si i només si existeix una carta $\phi : U \rightarrow V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat essencial en $\phi(p)$.*

Observació 2.9. Fixem-nos que si f està definida i és holomorfa en $U - \{p\}$, U entorn de p , podem decidir quin tipus de singularitat té f en el punt p investigant el comportament de $f(x)$ per x proper a p .

1. Si $|f(x)|$ està acotat en un entorn de p , aleshores f té una singularitat evitable en p . A més, el límit $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existeix, i si definim $f(p)$ com aquest límit, f serà holomorfa en p .
2. Si $|f(x)|$ tendeix a infinit quan x tendeix a p , aleshores f té un pol en p .
3. Si $|f(x)|$ no té límit quan x tendeix a p , aleshores f té una singularitat essencial en p .

Definició 2.10. Sigui X una superfície de Riemann i $p \in X$ un punt. Sigui f una funció de valor complex holomorfa en $U - \{p\}$, on U és un entorn de p . Una funció f en X és meromorfa en un punt $p \in X$ si és holomorfa, o té una singularitat evitable o té un pol en p . Diem que f és meromorfa en un conjunt obert W si és meromorfa en qualsevol punt de W .

Al conjunt de funcions meromorfes en un subconjunt obert $W \subset X$ se'l denota com

$$\mathcal{M}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ és meromorfa}\}.$$

2.2.1 Ordre d'una funció meromorfa en un punt p

Sigui X una superfície de Riemann i sigui f definida i holomorfa en $U - \{p\}$, U entorn de $p \in X$. Sigui $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X amb $p \in U$. Si pensem en z com una coordenada local en X a prop de p , de manera que $z = \phi(x)$ per x proper a p , tenim que $f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa en un entorn de $z_0 = \phi(p)$. Per tant, podem expandir $f \circ \phi^{-1}$ en sèrie de Laurent al voltant de z_0 :

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Definició 2.11. El desenvolupament anterior s'anomena sèrie de Laurent per f al voltant de p respecte ϕ (o respecte a la coordenada local z). Els coeficients $\{c_n\}$ de la sèrie de Laurent s'anomenen coeficients de Laurent.

Observació 2.12. Evidentment, la sèrie de Laurent depèn de l'elecció de la coordenada local, que és, l'elecció de la carta ϕ .

Podem utilitzar la sèrie de Laurent per definir la naturalesa d'una singularitat. A més, per funcions meromorfes, podem extreure l'ordre d'un zero o un pol a partir d'aquesta.

Definició 2.13. Sigui f una funció meromorfa en p i sigui $\sum_n c_n (z - z_0)^n$ la seva sèrie de Laurent en una coordenada local z . L'ordre de f a p , que es denota $\text{ord}_p(f)$, és el mínim exponent que apareix (amb coeficient diferent de zero) en la sèrie de Laurent:

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}.$$

Proposició 2.14. $\text{ord}_p(f)$ està ben definit, és a dir, és independent de quina coordenada local utilitzem per definir la sèrie de Laurent.

Demostració. Suposem que $\psi : U' \rightarrow V'$ és una altra carta amb $p \in U'$, donant una coordenada local $w = \psi(x)$ per x a prop de p . Suposem que $\psi(p) = w_0$. Considerem la funció de transició holomorfa $T(w) = \phi \circ \psi^{-1}$, la qual expressa z com una funció holomorfa de w . Donat que T és invertible en w_0 , per la Proposició 2.2, tenim que $T'(w_0) \neq 0$. Si escrivim la sèrie de potències per T , serà de la forma

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n,$$

amb el coeficient del terme lineal $a_1 \neq 0$.

Suposem ara que $c_{n_0} (z - z_0)^{n_0} +$ (termes d'ordre major) és la sèrie de Laurent de f en p en termes de la coordenada z , amb $c_{n_0} \neq 0$, pel que l'ordre de f calculat via z és n_0 . Per

obtenir la sèrie de Laurent per f en termes de w , només cal compondre la sèrie de Laurent anterior amb la sèrie de potències $z - z_0 = \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n$. Veiem que el terme de menor ordre possible en la variable $w - w_0$ de la composició és $c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0}$. Donat que ni c_{n_0} ni a_1 són zero, aquest terme està present i l'ordre de f calculat via w és també n_0 . Per tant, l'ordre de f en p està ben definit. \square

Lema 2.15. *Suposem que f és meromorfa en p . Aleshores f és holomorfa en p si i només si $\text{ord}_p(f) \geq 0$. En aquest cas $f(p) = 0$ si i només si $\text{ord}_p(f) > 0$. f té un pol en p si i només si $\text{ord}_p(f) < 0$. f no és ni un zero ni un pol si i només si $\text{ord}_p(f) = 0$.*

Lema 2.16. *Sigui X una superfície de Riemann. Sigui f i g funcions meromorfes diferents de zero en $p \in X$. Aleshores:*

1. $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$
2. $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$
3. $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$
4. $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$

2.3 Funcions harmòniques

Les funcions harmòniques són un objecte de gran interès en la teoria que involucra l'anàlisi complexa de les superfícies de Riemann. A continuació s'introdueixen de forma bàsica.

Definició 2.17. *Una funció de valor real d'una variable complexa $z = x + iy$ és C^∞ en un punt z_0 si, com a funció de x i y , té derivades parcials contínues de tots ordres en z_0 . Una funció de valor complex de z és C^∞ si les seves parts reals i imaginàries ho són.*

Definició 2.18. *Una funció C^∞ de valor real $h(x, y)$ de dues variables reals x i y definida en un conjunt obert $V \subset \mathbb{R}^2$ és harmònica si*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

idènticament en V . Una funció de valor complex és harmònica si i només si les seves parts real i imaginària són harmòniques.

Proposició 2.19. *Les parts real i imaginària de qualsevol funció holomorfa de $z = x + iy$ són harmòniques.*

Demostració. Sigui f una funció holomorfa que escrivim com $f = u + iv$, on u i v depenen de z . Com f és holomorfa, podem afirmar que f és \mathbb{R} -diferenciable i que satisfà les equacions de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Per tant, tenint en compte que les derivades creuades són iguals, obtenim

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

i podem afirmar que són harmòniques. \square

2.4 Conseqüències de resultats bàsics de variable complexa

Teorema 2.20. (DISCRECIÓ DE ZEROS I POLS)

Sigui f una funció meromorfa definida en un conjunt obert connex W d'una superfície de Riemann X . Si f no és idènticament zero, aleshores els zeros i els pols de f formen un subconjunt discret de punts de W .

Demostració. Volem veure que els zeros i els pols són aïllats. Sigui $Z(f) = \{z \in W : f(z) = 0\}$ i agafem $z_0 \in Z(f)$. Podem escriure $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, on m és la multiplicitat de z_0 i $g(z)$ és una funció meromorfa amb $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $g(z) \neq 0, z \in D(z_0, \varepsilon)$, amb el que $f(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \varepsilon)$ amb $z \neq z_0$. \square

Teorema 2.21. (PRINCIPI DE PROLONGACIÓ ANALÍTICA)

Suposem que f i g són dues funcions meromorfes definides en un conjunt obert connex W d'una superfície de Riemann X . Suposem que $f = g$ en un subconjunt $S \subset W$ que té un punt d'acumulació en W . Aleshores $f = g$ en W .

Demostració. Sigui $h = f - g$, amb el que h és meromorfa i $h = 0$ en S , i $z_0 \in W$ un punt d'acumulació de S , és a dir, existeix $z_n \in S$ amb $z_n \rightarrow z_0$. Com h és contínua, llavors $h(z_0) = \lim_n h(z_n) = 0$, amb el que $z_0 \in S$, i llavors z_0 és un zero de h que no és aïllat. Com sabem que els zeros d'una funció meromorfa no idènticament nul·la són aïllats, això implica que $h \equiv 0$, i per tant $f \equiv g$. \square

Teorema 2.22. (MÒDUL MÀXIM)

Sigui f holomorfa en un conjunt obert connex W d'una superfície de Riemann X . Suposem que existeix un punt $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ per a tot $x \in W$. Aleshores f és constant en W .

Teorema 2.23. Sigui X una superfície de Riemann compacta. Suposem que f és holomorfa en tot X . Aleshores f és una funció constant.

Demostració. Donat que f és holomorfa, el seu valor absolut $|f|$ és una funció contínua, per tant, com X és compacte, $|f|$ aconsegueix el seu màxim valor en algun punt de X . Pel Teorema del Mòdul Màxim, f ha de ser constant en X , ja que X és connexa. \square

Aquest teorema no té perquè ser cert per funcions en dominis complexos, però sí és cert per superfícies de Riemann. El més proper per funcions en dominis complexos és el Teorema de Liouville, que afirma que tota funció entera i acotada és constant.

2.5 Aplicacions holomorfes entre superfícies de Riemann

Sigui X i Y superfícies de Riemann.

Definició 2.24. Una aplicació $F : X \rightarrow Y$ és holomorfa a $p \in X$ si i només si existeixen cartes $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X amb $p \in U_1$ i $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y amb $F(p) \in U_2$ tals que la descomposició $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ és holomorfa en $\phi_1(p)$. Si F està definida en un conjunt obert $W \subset X$, aleshores diem que F és holomorfa en W si F és holomorfa en tot punt de W . En particular, F és una aplicació holomorfa si i només si F és holomorfa en tot punt de X .

Exemple 2.25. Clarament, l'aplicació identitat $id : X \rightarrow X$ és holomorfa per a qualsevol superfície de Riemann X .

Lema 2.26.

1. Si F és holomorfa, aleshores F és contínua i C^∞ .
2. La composició d'aplicacions holomorfes és holomorfa, és a dir, si $F : X \rightarrow Y$ i $G : Y \rightarrow Z$ són aplicacions holomorfes, llavors $G \circ F : X \rightarrow Z$ és una aplicació holomorfa.
3. La composició d'una aplicació holomorfa amb una funció holomorfa és holomorfa. Més concretament, si $F : X \rightarrow Y$ és holomorfa i g és una funció holomorfa en un conjunt obert $W \subset Y$, llavors $g \circ F$ és una funció holomorfa en $F^{-1}(W)$.
4. La composició d'una aplicació holomorfa amb una funció meromorfa és meromorfa. Més concretament, si $F : X \rightarrow Y$ és holomorfa i g és una funció meromorfa en un conjunt obert $W \subset Y$, llavors $g \circ F$ és una funció meromorfa en $F^{-1}(W)$, sempre i quan la imatge $F(X)$ no sigui un subconjunt del conjunt de pols de g .

Definició 2.27. Un isomorfisme entre superfícies de Riemann és una aplicació holomorfa $F : X \rightarrow Y$ que és bijectiva i té inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ holomorfa. Si existeix un isomorfisme entre X i Y , diem que X i Y són isomorfes.

Per aplicacions entre superfícies de Riemann trobem l'anàleg al Principi de Prolongació Analítica (Teorema 2.21) i l'anomenem Teorema de Identitat.

Teorema 2.28. (TEOREMA DE IDENTITAT)

Si F i G dues aplicacions holomorfes entre superfícies de Riemann X i Y . Si $F = G$ en un subconjunt S de X amb un punt d'acumulació en X , llavors $F = G$.

Proposició 2.29. Sigui X una superfície de Riemann compacta, i sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant. Aleshores Y és compacta i F és exhaustiva.

Demostració. Donat que F és holomorfa i X és obert en si mateix, $F(X)$ és obert en Y . Per altra banda, donat que X és compacta, $F(X)$ és compacte, i com Y és Hausdorff, $F(X)$ ha de ser tancat en Y . Ara, com $F(X)$ és obert i tancat alhora en Y , i Y és connexa, cal que $F(X) = Y$. Per tant F és exhaustiva, i Y és compacta. \square

Proposició 2.30. Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació no constant entre superfícies de Riemann. Aleshores, per a cada $y \in Y$, l'antiimatge $F^{-1}(y)$ és un subconjunt discret de X . En particular, si X i Y són compactes, aleshores $F^{-1}(y)$ és un conjunt finit no buit per a cada $y \in Y$.

Demostració. Fixem una coordenada local z centrada en $y \in Y$, i per un punt $x \in F^{-1}(y)$ escollim una coordenada local w centrada en x . Aleshores l'aplicació F , escrita en termes d'aquestes coordenades locals, és una funció holomorfa no constant $z = g(w)$. A més, g té un zero en l'origen, ja que x (que és $w = 0$) va a y (que és $z = 0$). Donat que els zeros de funcions holomorfes no constants són discrets, veiem que, en un entorn de x , x és la única antiimatge de y . Això prova que $F^{-1}(y)$ és un subconjunt discret de X . La segona part se satisfà ja que F ha de ser exhaustiva per la proposició anterior i els subconjunts discrets d'espais compactes són finits. \square

2.5.1 Propietats d'aplicacions holomorfes

Proposició 2.31. *Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant definida en $p \in X$. Existeix un únic enter $m \geq 1$ que satisfà la següent propietat: per a cada carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y centrada en $F(p)$, existeix una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

Demostració. Fixem una carta ϕ_2 en Y centrada en $F(p)$, i escollim una carta qualsevol $\psi : U \rightarrow V$ en X centrada en p . Aleshores la sèrie de Taylor per la funció $T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$ ha de ser de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

amb $c_m \neq 0$, i $m \geq 1$ ja que $T(0) = 0$. Per tant, tenim $T(w) = w^m S(w)$ on $S(w)$ és una funció holomorfa en $w = 0$, i $S(0) \neq 0$. En aquest cas existeix una funció $R(w)$ holomorfa a prop del 0 tal que $R(w)^m = S(w)$, i per tant $T(w) = (wR(w))^m$. Sigui $\eta(w) = wR(w)$. Donat que $\eta'(0) \neq 0$, pel Teorema de la Funció Implícita, la funció η és invertible a prop de 0 i, evidentment, holomorfa. Per tant, la composició $\phi_1 = \eta \circ \psi$ és també una carta en X definida i centrada a prop de p . Si pensem en η definint una nova coordenada z (via $z = \eta(w)$), podem veure que z i w estan relacionades per $z = wR(w)$. Per tant

$$\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) = T(\eta^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^m = z^m.$$

Falta veure la unicitat de m . Aquesta ve donada pel fet de que si hi ha coordenades locals en p i $F(p)$ tals que l'aplicació F és de la forma $z \mapsto z^m$, aleshores a prop de p , hi ha exactament m antiimatges de punts a prop de $F(p)$. Per tant, aquest exponent m es detecta únicament estudiant les propietats topològiques de l'aplicació F a prop de p , i és per tant, independent de l'elecció de les coordenades locals. \square

Definició 2.32. *La multiplicitat de F en p , denotada per $\text{mult}_p(F)$, és l'únic enter m tal que existeixen coordenades locals a prop de p i $F(p)$ amb F de la forma $z \mapsto z^m$.*

Agafem coordenades locals z i w , a prop de p i $F(p)$, respectivament. Diem que p correspon a z_0 i $F(p)$ a w_0 . En termes d'aquestes coordenades, l'aplicació F es pot escriure com $w = h(z)$ on h és holomorfa. Aleshores tenim $w_0 = h(z_0)$.

Lema 2.33. *Amb la notació anterior, la multiplicitat $\text{mult}_p(F)$ de F en p és*

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz).$$

En particular, la multiplicitat és l'exponent del terme estrictament positiu més baix de la sèrie de potències per h : si $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ amb $m \geq 1$ i $c_m \neq 0$, aleshores $\text{mult}_p(F) = m$.

Demostració. Acabem de veure en la demostració de la Proposició 2.31 que la multiplicitat és el menor terme que apareix en la sèrie de potències T de F quan coordenades locals centrades s'utilitzen en p i en la imatge $F(p)$. Amb la notació anterior, $z - z_0$ i $w - w_0$ són aquestes coordenades locals centrades. Per tant, donat que $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$, veiem que la multiplicitat és el menor terme que apareix en l'expansió en sèrie de potències de $h(z) - h(z_0)$ sobre $z = z_0$. Per Taylor, això és un més que l'ordre de la derivada d' h en z_0 . \square

Definició 2.34. Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant. Un punt $p \in X$ és un punt de ramificació de F si $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Un punt $y \in Y$ és un punt discriminant de F si és la imatge d'un punt de ramificació de F .

Lema 2.35. Sigui f una funció meromorfa en una superfície de Riemann X amb l'aplicació holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ associada.

1. Si $p \in X$ és un zero de f , aleshores $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.
2. Si p és un pol de f , aleshores $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.
3. Si p no és ni un zero ni un pol de f , aleshores $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

2.5.2 Grau de l'aplicació

Proposició 2.36. Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. Per a cada $y \in Y$, definim $d_y(F)$ com la suma de les multiplicitats de F en els punts de X assignats a y :

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Aleshores $d_y(F)$ és constant, independent de y .

Demostració. Per provar-ho anem a veure que la funció $y \mapsto d_y(F)$ és una funció localment constant de Y als enters \mathbb{Z} , ja que com Y és connex, si és localment constant, serà constant.

Considerem el disc unitat obert $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ i l'aplicació $f : D \rightarrow D$ donada per $f(z) = z^m$ per algun enter $m \geq 1$. Aquesta aplicació f és holomorfa i exhaustiva; l'únic punt de ramificació per f es troba en $z = 0$, on la multiplicitat és m . Tots els altres punts tenen multiplicitat 1. Per qualsevol $w \in D$, si $w \neq 0$ hi ha exactament m antiimatges (les m m -èsimes arrels de w), cada una amb multiplicitat 1. Si $w = 0$, l'única antiimatge és $z = 0$, que té multiplicitat m . Per tant, l'aplicació f satisfà una condició de constància: la suma de les multiplicitats de punts antiimatge és constantment m .

Clarament si tenim una unió disjunta d'aquestes aplicacions, és a dir, una aplicació de la unió disjunta de diferents d'aquests discs a D , la condició de constància es segueix satisfent. Ara, l'objectiu és provar que per a qualsevol aplicació F holomorfa no constant, F és localment la unió disjunta d'aquestes aplicacions.

Fixem un punt $y \in Y$. Sigui $\{x_1, \dots, x_n\}$ la imatge inversa de y per F . Escollim una coordenada local w sobre Y centrada en y . Per la Proposició 2.31, hem d'escollir coordenades $\{z_i\}$ sobre X , amb z_i centrada en x_i per a cada $i = 1, \dots, n$, tals que en un entorn de x_i l'aplicació F envia z_i a $w = z_i^{m_i}$. Per tant, si mirem aquests entorns d' x_i , tenim exactament la descripció d'unió disjunta desitjada de F .

Falta veure que, a prop de y , no hi ha altres antiimatges sense contemplar que es trobin en els entorns dels x_i 's. Suposem que, arbitràriament a prop de y , existeixen antiimatges que no es troben en els entorns dels x_i 's. Amb aquesta suposició hem de trobar una seqüència de punts de X , on cap d'aquests punts es trobi en cap entorn dels x_i 's, de manera que les imatges d'aquests punts sota F convergeixen a $y \in Y$. Donat que X és compacte, podem extreure una subseqüència convergent $\{p_n\}$. Aquesta té la propietat de que convergeix (diguem que ho fa a un punt $x \in X$) i la seqüència d'imatges $F(p_n)$ convergeix a y . Per això, per la suposició, x és un dels x_i 's, i obtenim una contradicció ja que cap dels p_n 's està en els entorns dels x_i 's. \square

Definició 2.37. Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. El grau de F , denotat per $\deg(F)$, és l'enter $d_y(F)$ per a qualsevol $y \in Y$.

Corol·lari 2.38. Una aplicació holomorfa entre superfícies de Riemann compactes és un isomorfisme si i només si té grau u.

Proposició 2.39. Sigui f una funció meromorfa no constant en una superfície de Riemann compacta X . Aleshores

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostració. Sigui $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ l'aplicació holomorfa associada a l'esfera de Riemann. Siguin $\{x_i\}$ els punts de X amb imatge 0, i siguin $\{y_j\}$ els punts de X amb imatge ∞ . Les x_i 's són exactament els zeros de f , i les y_j 's són els pols. Sigui d el grau de l'aplicació F . Per definició de grau, tenim

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \text{ i } d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Ara els únics punts de X on f té ordre no nul és en els seus zeros i pols, que són aquests punts $\{x_i\}$ i $\{y_j\}$. Pel Lema 2.35, tenim que

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \text{ i } \text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f).$$

Per tant,

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) = 0$$

ja que els dos sumatoris són iguals al grau d . □

2.6 Fórmula de Hurwitz

La fórmula de Hurwitz combina el grau d'una aplicació holomorfa entre superfícies de Riemann compactes i els seus gèneres topològics.

Teorema 2.40. (FÓRMULA DE HURWITZ)

Sigui $F : X \rightarrow Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann compactes. Aleshores

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1].$$

Demostració. Donat que X és compacte, el conjunt de punts de ramificació és finit, per tant el sumatori (que ha de ser restringit a punts de ramificació de F) és finit.

Agafem una triangulació de Y , tal que cada punt discriminant de F és un vèrtex. Suposem que hi ha v vèrtexs, e arestes i t triangles. Elevem la triangulació a X via l'aplicació F , i suposem que hi ha v' vèrtexs, e' arestes i t' triangles en X .

Donat que no hi ha punts de ramificació sobre el punt general de qualsevol triangle, cada triangle de Y eleva a $\deg(F)$ triangles en X . Per tant, $t' = \deg(F)t$. De forma similar

$e' = \deg(F)e$. Ara fixem un vèrtex $q \in Y$. El nombre d'antiimatges de q en X és $|F^{-1}(q)|$, que es pot reescriure com

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)].$$

Per tant, el nombre total d'antiimatges de vèrtexs de Y , que correspon amb el nombre v' de vèrtexs de X , és

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\text{vèrtex } q \text{ de } Y} (\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)]) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vèrtex } q \text{ de } Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Per tant, tenint en compte que cada punt de ramificació de F és un vèrtex de X

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -e(X) = -v' + e' - t' \\ &= -\deg(F)v + \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)e - \deg(F)t \\ &= -\deg(F)e(Y) + \sum_{\text{vèrtex } p \text{ de } X} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

□

2.7 Formes diferencials

Les formes són aquells objectes que es poden integrar i que s'utilitzen per transportar la teoria d'integració a superfícies de Riemann.

Definició 2.41.

1. Una 1-forma holomorfa en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

on f és una funció holomorfa en V . Diem que ω és una 1-forma holomorfa en la coordenada z .

2. Suposem que $\omega_1 = f(z)dz$ és una 1-forma holomorfa en la coordenada z , definida en un conjunt obert V_1 . Suposem també que $\omega_2 = g(w)dw$ és una 1-forma holomorfa en la coordenada w , definida en un conjunt obert V_2 . Sigui $z = T(w)$ una aplicació holomorfa des de el conjunt obert V_2 a V_1 . Diem que ω_1 transforma a ω_2 sota T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

3. Una 1-forma meromorfa en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

on f és una funció meromorfa en V . Diem que ω és una 1-forma meromorfa en la coordenada z .

4. Suposem que $\omega_1 = f(z)dz$ és una 1-forma meromorfa en la coordenada z , definida en un conjunt obert V_1 . Suposem també que $\omega_2 = g(w)dw$ és una 1-forma meromorfa en la coordenada w , definida en un conjunt obert V_2 . Sigui $z = T(w)$ una aplicació holomorfa des de el conjunt obert V_2 a V_1 . Diem que ω_1 transforma a ω_2 sota T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Definició 2.42. L'ordre de ω a p , denotat per $\text{ord}_p(\omega)$, és l'ordre de la funció f en 0 .

Diem que p és un zero de ω d'ordre n si $\text{ord}_p(\omega) = n > 0$. Diem que p és un pol de ω d'ordre n si $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$. El conjunt de zeros i pols d'una 1-forma meromorfa és un conjunt discret.

2.8 Divisors

Sigui X una superfície de Riemann.

Definició 2.43. Donada una funció $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$, definim el suport de D com el conjunt de punts $p \in X$ tals que $D(p) \neq 0$.

Definició 2.44. Un divisor de X és una funció $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ el suport de la qual és un subconjunt discret de X . Els divisors de X formen un grup sota la suma puntual, denotat per $\text{Div}(X)$.

Observació 2.45. Fixem-nos que, si X és una superfície de Riemann, aleshores una funció $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ és un divisor si i només si té un suport finit.

Denotarem un divisor D utilitzant notació de sumatori, i escriurem

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p,$$

on el conjunt de punts p tal que $D(p) \neq 0$ és discret.

Definició 2.46. El grau d'un divisor D en una superfície de Riemann és la suma dels valors de D :

$$\text{deg}(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Amb això que acabem de veure podem afirmar que un divisor consisteix en triar un nombre finit de punts p_1, \dots, p_k de X i enters $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ i posar-los de la forma

$$D = \sum_{i=1}^k n_i p_i,$$

on $n_i = D(p_i)$.

Observació 2.47. La funció grau $deg : Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ és un homomorfisme de grups. El seu nucli és el subgrup $Div^0(X)$, que consisteix en els divisors de grau 0.

Exemple 2.48. Siguin $p_1, p_2 \in X$ dos punts. El divisor $D = p_1 - p_2$ té grau $deg(D) = 1 - 1 = 0$, i per tant pertany al subgrup $Div^0(X)$.

Definició 2.49. Sigui f una funció meromorfa en X no idènticament zero. Un divisor de f , denotat per $div(f)$, és el divisor definit per la funció ordre:

$$div(f) = \sum_p ord_p(f) \cdot p.$$

Qualsevol divisor d'aquesta forma s'anomena divisor principal en X . El conjunt de divisors principals en X el denotem per $Prin(X)$.

Exemple 2.50. Amb la notació anterior, si tenim $div(f) = np_1 - mp_2$, $m, n \in \mathbb{N}$, vol dir que existeix f meromorfa amb un sol zero p_1 amb multiplicitat n i un sol pol p_2 amb multiplicitat m .

Lema 2.51. Siguin f i g funcions meromorfes en X no idènticament zero. Aleshores:

1. $div(fg) = div(f) + div(g)$
2. $div(f/g) = div(f) - div(g)$
3. $div(1/f) = -div(f)$

Observació 2.52. El conjunt de divisors principals sobre X forma un subgrup de $Div(X)$. En particular, és un subgrup de $Div^0(X)$ quan X és compacte, ja que en aquest cas $deg(div(f)) = 0$ per la Proposició 2.39.

Definició 2.53. El divisor dels zeros de f , denotat per $div^0(f)$, és el divisor

$$div^0(f) = \sum_{p \text{ amb } ord_p(f) > 0} ord_p(f) \cdot p.$$

Similarment, el divisor dels pols de f , denotat per $div^\infty(f)$, és el divisor

$$div^\infty(f) = \sum_{p \text{ amb } ord_p(f) < 0} (-ord_p(f)) \cdot p.$$

Observació 2.54. Ambdues funcions són no negatives, amb suport disjunt i

$$div(f) = div^0(f) - div^\infty(f).$$

Definició 2.55. Sigui ω una 1-forma meromorfa en X que no és idènticament zero. El divisor de ω , que denotem per $div(\omega)$, és el divisor definit per la funció ordre:

$$div(\omega) = \sum_p ord_p(\omega) \cdot p.$$

Qualsevol divisor d'aquesta forma s'anomena divisor canònic en X i el denotem per K .

Observació 2.56. Usant la diferencial $\{dz, \frac{-1}{z^2}\}$ en l'esfera, obtenim que si $g(X) = 0$, com en la primera carta no tenim cap zero ni cap pol i en l'altra tenim un pol d'ordre 2, $deg(K) = -2$. Ara, considerant un morfisme de X a l'esfera, podem obtenir mitjançant les antiimatges, una forma en X que té pols d'ordre 2 en les n antiimatges del pol en l'esfera. Usant la fórmula de Hurwitz es dedueix que $deg(K) = 2g(X) - 2$.

2.9 Teorema de Riemann-Roch

Posant tots els conceptes anteriors junts, obtenim el Teorema de Riemann-Roch. Aquest ens permet calcular la dimensió de l'espai de funcions meromorfe amb zeros i pols prefixats. Abans d'enunciar-lo, donem alguns conceptes i resultats importants que ens condueixen a ell.

Definició 2.57. *Sigui D un divisor d'una superfície de Riemann. L'espai de les funcions meromorfe amb pols prefixats per D , denotat per $L(D)$, és el conjunt de les funcions meromorfe*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(f) \geq -D\}.$$

Fixem-nos que $L(D)$ és un \mathbb{C} -e.v. i té dimensió finita. Per veure la finitud, definim l'aplicació

$$\begin{aligned} L(D) &\longrightarrow \mathbb{C}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{r_n} \\ f &\mapsto \{\text{coeficients de la part de Laurent en } p_1, \dots, p_n\}. \end{aligned}$$

Aquesta aplicació és una aplicació lineal i si f està en el nucli, aleshores és holomorfa i per tant constant. Per tant, aplicant el primer teorema d'isomorfa obtenim que la dimensió de $L(D)$ és la suma de la dimensió de la imatge i la del nucli, i en conseqüència és finita.

D'ara en endavant usem la notació $l(D) = \dim(L(D))$.

Proposició 2.58. *Siguin D i D' dos divisors d'una superfície de Riemann. Si $D \sim D'$, aleshores $l(D) = l(D')$.*

Demostració. Suposem que $D' = D + \text{div}(g)$. Definim $\phi : L(D) \rightarrow L(D')$ definint $\phi(f) = fg$. Donat que ϕ és un isomorfisme, podem afirmar que les dimensions de $L(D)$ i $L(D')$ són iguals, és a dir, $l(D) = l(D')$. \square

Proposició 2.59. *Sigui f meromorfa no constant, $Z = (f)_0$ lloc de zeros de f i n el grau de l'extensió $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)]$ aleshores:*

1. $\deg Z = n$, $Z \geq 0$ i és un divisor efectiu.
2. Existeix $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $l(rZ) \geq rn - \tau, \forall r$.

Teorema 2.60. (TEOREMA DE RIEMANN)

Existeix un enter g tal que $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ per a tot divisor D . El g més petit amb aquesta propietat és un enter no negatiu i s'anomena gènere geomètric.

Demostració. Per cada D , sigui $s(D) = \deg(D) + 1 - l(D)$. Volem trobar g tal que $s(D) \leq g$ per a tot D , és a dir, volem afitar $s(D)$ superiorment.

1. Com $s(0) = 0 + 1 - l(0) = 1 - 1 = 0$, $g \geq 0$ si existeix.
2. Donat que si $D \sim D'$, aleshores $l(D) = l(D')$ i $\deg(D) = \deg(D')$, tenim que si $D \sim D'$, aleshores $s(D) = s(D')$.
3. Si $D \leq D'$, aleshores $l(D') \leq l(D) + \deg(D' - D)$, és a dir, $\deg(D) - l(D) \leq \deg(D') - l(D')$. Per tant, si $D \leq D'$, aleshores $s(D) \leq s(D')$.

4. Afirmem que si Z és el lloc de zeros d'una funció meromorfa f , aleshores existeix una constant τ tal que $s(rZ) = \tau + 1$ per r suficientment gran. Veiem-ho. Tenim $f \in \mathcal{M}(C)$ no constant i $Z = (f)_0$. Per la proposició anterior, existeix τ tal que

$$l(rZ) \geq rn - \tau = r \cdot \deg(Z) - \tau = \deg(rZ) - \tau.$$

És a dir,

$$\tau + 1 \geq \deg(rZ) - l(rZ) + 1 = s(rZ).$$

Aplicant (3) sabem que si augmentem r , la funció $s(rZ)$ creix, i per tant, tenim una successió d'enters positius creixent i afitada, per tant, podem afirmar que existeix r_0 tal que $\forall r \geq r_0$

$$s(rZ) = s((r+1)Z).$$

És a dir, podem afirmar que a partir de r_0 és constant. Per tant, agafant τ el més petit possible tenim que $s(rZ) = \tau + 1, \forall r \geq r_0$.

Per tant, per Z lloc de zeros d'una funció meromorfa no constant i $r \gg 0$, posem $g = \tau + 1$ i tenim que $s(rZ) = g$.

Finalment, per (2) i (3) és suficient veure que:

5. Donat D qualsevol, existeixen $D' \sim D$ i un enter $r \geq 0$ tals que $D' \leq rZ$. Notem que si provem (5), aleshores $s(D) = s(D') \leq s(rZ) = g$ i haurem acabat. Per provar (5), posem $D = \sum m_P P$ divisor qualsevol. La suma és sobre tots els punts, però llevat d'un nombre petit de punts, $m_P = 0$. Ara, posem $Z = \sum n_P P$. Busquem $f \in \mathcal{M}(C)$ i $r \gg 0$ tals que

$$D' = D - \text{div}(f) = \sum (m_P - \text{ord}_P(f))P \leq rZ = \sum rn_P P.$$

Per tant, cal que $m_P - \text{ord}_P(f) \leq rn_P, \forall P$. Sigui $T = \{P \in X \mid m_P > 0 \text{ i } \text{ord}_P(\frac{1}{x}) \geq 0\}$, agafant $f = \prod_{P \in T} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x(P)})^{m_P}$ se satisfà la igualtat.

□

Teorema 2.61. (TEOREMA DE RIEMANN-ROCH)

Sigui X una corba algebraica de gènere g . Aleshores per a qualsevol divisor D i per a qualsevol divisor canònic K , tenim

$$\dim(L(D)) - \dim(L(K - D)) = \deg(D) + 1 - g.$$

Definició 2.62. El sistema lineal complet de D , denotat per $|D|$, és el conjunt de tots els divisors no negatius $E \geq 0$ que són linealment equivalents a D :

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) \mid E \sim D \text{ i } E \geq 0\}.$$

Observació 2.63. Aquest teorema també es pot expressar en termes de la dimensió del sistema lineal complet $|D|$. D'aquesta manera, queda

$$\dim|D| - \dim|K - D| = \deg(D) + 1 - g$$

i cal tenir en compte que si el sistema lineal és buit, per conveni la dimensió és -1.

Corol·lari 2.64. *L'enter g del teorema de Riemann correspon amb el gènere de la superfície $g(S)$. És a dir, els gèneres geomètrics i topològics són iguals.*

Demostració. Claim: $\dim(L(K)) = g(S)$.

Sigui K un divisor canònic. Pel teorema de Riemann-Roch podem afirmar que

$$\dim(L(K)) - \deg(K) - 1 + g = \dim(L(0))$$

Ara bé, per la fórmula de Hurwitz sabem que $\deg(K) = 2g(S) - 2$ i, donat que les funcions holomorfes en superfícies de Riemann són constants, tenim que $\dim(L(0)) = 1$. Per tant, ens queda

$$g(S) - 2g(S) + 2 - 1 + g = 1 \Rightarrow g(S) = g.$$

□

2.10 Aplicació d'Abel-Jacobi

Sigui X una superfície de Riemann compacta i connexa. Posem $\Omega(X) = \{\text{formes diferencials holomorfes en } X\}$. Si K és un divisor canònic, aleshores els espais vectorials $\Omega(X)$ i $L(K)$ són isomorfs i, pel teorema de Riemann-Roch, tenim que $\dim(\Omega(X)) = g$. També, posem $\Lambda = \mathbb{Z}^{2g}$ a l'abelianitzat del grup fonamental.

Definició 2.65. *Sigui X una superfície de Riemann compacta. La jacobiana de X , denotada per $Jac(X)$, és el grup quocient*

$$Jac(X) = \frac{\Omega^1(X)^*}{\Lambda}.$$

Exemples 2.66. 1. La jacobiana de l'esfera de Riemann és trivial: $Jac(\mathbb{C}_\infty) = \{0\}$.

2. Sigui X un tor complex \mathbb{C}/L . Aleshores $Jac(X) \simeq X$.

Ara, escollim un punt base p_0 en X . Per cada punt $p \in X$, escollim un camí γ_p en X de p_0 a p .

Definició 2.67. *L'aplicació $A : X \rightarrow Jac(X)$ definida per*

$$A(p)(w) = \int_{\gamma_p} \omega$$

s'anomena aplicació d'Abel-Jacobi per X .

Veiem que l'aplicació està ben definida. Escollim un camí diferent γ'_p de p_0 a p . Donat que $\alpha = \gamma'_p{}^{-1} \circ \gamma_p$ és un camí tancat, tenim que $\int_\alpha \omega \in \Lambda$ i per tant, l'aplicació anterior està ben definida sobre $\Omega^1(X)^*/\Lambda$, ja que qualsevol camí de p_0 a p pertany a la classe del zero en el quocient.

Observació 2.68. L'aplicació d'Abel-Jacobi depèn del punt p_0 escollit.

Ara, podem estendre aquesta aplicació des de X al grup $\text{Div}(X)$ de divisors de X , definint

$$A\left(\sum n_p p\right) = \sum n_p A(p).$$

Això ens dóna una aplicació, també anomenada aplicació d'Abel Jacobi, que és un homomorfisme de grups:

$$A : Div(X) \rightarrow Jac(X).$$

La restricció d'aquesta aplicació al subgrup de divisors de grau zero de X és independent del punt base p_0 escollit

$$A_0 : Div^0(X) \rightarrow Jac(X).$$

El Teorema d'Abel afirma que el nucli d'aquesta aplicació és el conjunt $Prin(X)$, és a dir, els divisors principals de X . I, el de Jacobi afirma que l'aplicació és exhaustiva.

Aquests dos teoremes són fonamentals en l'estudi de les superfícies de Riemann compactes, però van molt més enllà de l'objectiu d'aquest treball. S'han enunciat perquè quedi clara l'analogia entre la teoria de grafs i la de superfícies de Riemann tal com veurem en els propers capítols.

3 Conceptes previs

Aquest capítol es divideix en dues parts. La primera exposa les definicions bàsiques de grafs com a recordatori per a les seccions que apareixen a continuació. La segona explica conceptes i resultats bàsics de teoria de xarxes, també necessaris per una àgil lectura dels capítols que prossegueixen.

3.1 Grafs

Definició 3.1. *Un graf és una parella $G = (V, E)$ on V (o $V(G)$) és el conjunt de vèrtexs i E (o $E(G)$) és el conjunt d'arestes.*

Posarem \mathbb{E} al conjunt d'arestes orientades, denotant \bar{e} a la inversa d'una aresta orientada $e \in \mathbb{E}$. Fixem-nos que $2\#\mathbb{E} = \#\mathbb{E}$.

Definició 3.2. *Diem que dues arestes són paral·leles si uneixen el mateix parell de vèrtexs. Si una aresta uneix un vèrtex amb ell mateix, l'anomenem llaç.*

Definició 3.3. *Diem que dos vèrtexs són veïns si estan units per una aresta.*

Definició 3.4. *El grau d'un vèrtex $v \in V(G)$ és el nombre d'arestes incidents a v i es denota $\deg(v)$. Anomenem E_v (o $E_v(G)$) a aquest conjunt d'arestes.*

Definició 3.5. *Un graf és connex si existeix un camí entre cada parell de vèrtexs.*

Definició 3.6. *Un camí tancat és una seqüència d'arestes que comença i acaba en el mateix vèrtex. Diem que un camí tancat és un cicle si totes les arestes i vèrtexs intermedis són diferents.*

Definició 3.7. *Sigui G un graf i v_1, \dots, v_n els vèrtexs de G (amb un ordre escollit). La matriu d'adjacència de G és una matriu $n \times n$, on el terme (i, j) representa el nombre d'arestes que connecten v_i i v_j .*

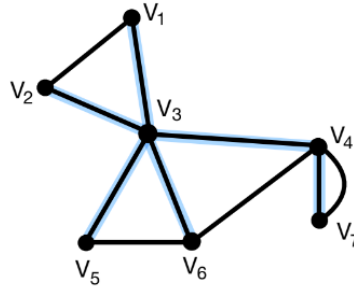
Observació 3.8. Donat que el nombre d'arestes que connecten v_i i v_j és el mateix que el nombre d'arestes que connecten v_j i v_i , és evident que la matriu d'adjacència és simètrica.

Definició 3.9. *Sigui G un graf connex. Anomenarem pes a una funció $W : E(G) \rightarrow (0, \infty)$, que assigna a cada aresta un valor pes. (G, W) s'anomenarà graf ponderat.*

Definició 3.10. *Sigui G un graf.*

1. *Un arbre és un graf connex sense cicles.*
2. *Un graf d'expansió de G és un subgraf de G que conté tots els vèrtexs de G i és un arbre.*

Exemple 3.11.



Sigui G aquest graf i observem que:

1. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$.
2. Donat que hi ha dues arestes unint v_4 i v_7 , diem que són paral·leles. Fixem-nos que G no té cap llaç.
3. $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_5) = \deg(v_7) = 2$, $\deg(v_3) = 5$, $\deg(v_6) = 3$ i $\deg(v_4) = 4$.
4. Donat que existeixen camins entre qualsevol parell de vèrtexs, el graf és connex, però no és un arbre ja que hi ha cicles, com per exemple el que formen les arestes v_1v_2 , v_2v_3 i v_3v_1 .
5. La matriu d'adjacència del graf G és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si agafem les arestes que estan marcades en blau, veiem que aquestes formen un graf d'expansió de G , ja que és un arbre i recull tots els vèrtexs de G .

3.2 Xarxes

Definició 3.12. Sigui \mathcal{H} un espai euclidià, amb el producte escalar associat de dos vectors $x, y \in \mathcal{H}$ denotat per $\langle x, y \rangle$. Una xarxa en \mathcal{H} és un subgrup discret Λ de \mathcal{H} tal que el quocient \mathcal{H}/Λ és compacte.

Ara bé, amb aquesta definició de xarxa, podem afirmar que aquestes són grups abelians lliures. I, per tant, per teoria de grups abelians finitament generats, tenim que si $\Lambda \subset \mathcal{H}$ i \mathcal{H} té rang r , aleshores existeixen una base (e_1, \dots, e_r) de \mathcal{H} , un enter natural $s \leq r$ i enters positius d_1, \dots, d_s tals que (d_1e_1, \dots, d_se_s) és base de Λ i $d_i \mid d_{i+1}$, per a $1 \leq i < s$.

Proposició 3.13. El quocient \mathcal{H}/Λ és compacte si i només si $r = s$.

Demostració. Agafem $\mathcal{H} = \mathbb{R}^r$ sense pèrdua de generalitat.

Demostrem primer la implicació d'esquerra a dreta. Suposem que $s < r$. Per definició de xarxa, podem afirmar que $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^s$, i per tant podem posar $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_s$, amb e_1, \dots, e_s linealment independents. Ara bé, com són linealment independents, podem ampliar fins a una base de \mathbb{R}^r , $e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_r$. Fixem-nos que, escrivint $\mathbb{R}^r = \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_r$, obtenim que $\mathbb{R}^r/\Lambda = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, que no és compacte. Per tant, arribem a contradicció i en conseqüència, $r = s$. Veiem ara la implicació de dreta a esquerra. Si $r = s$, aleshores $\mathbb{R}^r/\Lambda = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$, que és compacte. \square

Definició 3.14. Si Λ és una xarxa en un espai euclidià \mathcal{H} , el seu determinant $\det(\Lambda)$ és el quadrat del volum d'un domini fonamental per a l'acció de Λ sobre \mathcal{H} per translacions. La seva norma minimal és el nombre $\min(\Lambda) = \min\{\langle \lambda, \lambda \rangle \mid \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}$.

Definició 3.15. La xarxa dual, també anomenada xarxa polar, és

$$\Lambda^\# = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Definició 3.16. Una xarxa Λ és una xarxa integral si $\langle \lambda, \mu \rangle \in \mathbb{Z}$ per a tot $\lambda, \mu \in \Lambda$. O, equivalentment, si $\Lambda \subset \Lambda^\#$.

Definició 3.17. El grup determinant d'una xarxa integral Λ és el grup $\Lambda^\#/\Lambda$.

Proposició 3.18. El grup determinant és un grup finit d'ordre $\det(\Lambda)$.

Demostració. Podem suposar $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$.

Escrivim $\Lambda = \sum_{\beta_i \in \mathbb{Z}} \beta_i e_i$, on e_1, \dots, e_n són generadors de Λ . Ara, posem $e_i = (a_1^i, \dots, a_n^i)$ i definim la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Donat que \mathcal{H}/Λ és compacte, per la Proposició 3.13, tenim que $r = n$ i e_1, \dots, e_n és una base de Λ . Ara bé, sabem que per definició de xarxa integral tenim que $\Lambda \subset \Lambda^\#$, i per tant, existeix una base (v_1, \dots, v_n) de $\Lambda^\#$ i enters positius d_1, \dots, d_n tals que $(d_1 v_1, \dots, d_n v_n)$ és base de Λ . Així doncs, per teoria de grups abelians finitament generats, tenim $\Lambda^\#/\Lambda \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$. Per tant, podem afirmar que el quocient és finit i té cardinal $d_1 \cdot \dots \cdot d_n$. Falta veure que l'ordre d'aquest grup és $\det(\Lambda)$. Observem que

$$\#\Lambda^\#/\Lambda = d_1 \cdot \dots \cdot d_n = \det \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \det_{\Lambda^\#} \Lambda, \text{ tal i com volíem veure. } \quad \square$$

4 La jacobiana d'un graf finit

Durant aquest capítol, es comença a veure la teoria de superfícies de Riemann aplicada sobre grafs. Es defineixen els divisors i el grup de Picard. Finalment, mitjançant teoria de xarxes i diversos resultats s'arriba a definir la jacobiana d'un graf finit i es prova, utilitzant l'aplicació d'Abel-Jacobi, que ambdós grups són isomorfs.

4.1 Divisors i grup de Picard

Des d'aquesta secció i fins al final del treball un graf G voldrà dir un graf connex finit, no ponderat i sense llaços.

Definició 4.1. *Sigui G un graf i v_1, \dots, v_n el conjunt de vèrtexs de G escollits amb un ordre. La matriu Laplaciana Q associada a G és una matriu $n \times n$ tal que $Q = D - A$, on A és la matriu d'adjacència associada al graf G i D és la matriu diagonal que té en l'entrada (i, i) el grau del vèrtex v_i .*

Observació 4.2. La matriu Laplaciana Q és simètrica i té rang $n-1$.

Exemple 4.3. Considerem el graf G de l'exemple 3.11. Calculem la seva matriu Laplaciana, que és evidentment simètrica:

$$\begin{aligned}
 Q = D - A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Definició 4.4. *Sigui $Div(G)$ el grup abelià lliure en el conjunt de vèrtexs de G . Anomenem divisor de G a cada $D \in Div(G)$, és a dir, als elements de $Div(G)$.*

Observació 4.5. Els elements de $Div(G)$ els podem pensar com una combinació lineal entera formal d'elements de $V(G)$, i escriure'ls com $\sum_{v \in V(G)} a_v(v)$, $a_v \in \mathbb{Z}$.

Observació 4.6. S'anomenen divisors per analogia amb les superfícies de Riemann.

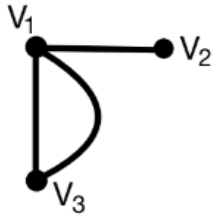
Per conveniència, escriurem $D(v)$ pel coeficient a_v de (v) en D .

Definició 4.7. *Diem que $D \geq D'$ si i només si $D(v) \geq D'(v), \forall v \in V(G)$. Diem que $E \in Div(G)$ és efectiu si $E \geq 0$, i escrivim $Div^+(G)$ al conjunt de tots els divisors efectius de G .*

Definició 4.8. Anomenem funció grau a la funció $deg : Div(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida per $deg(D) = \sum_{v \in V(G)} D(v)$.

Observació 4.9. Per com està definida aquesta funció, és evident que si $D \geq D'$ aleshores $deg(D) \geq deg(D')$, i que si E és un divisor efectiu, aleshores $deg(E) \geq 0$.

Exemple 4.10.



Anomenem G a aquest graf. Donat que un divisor d'un graf consisteix en triar vèrtexs del graf i fer una suma d'aquests amb coeficients enters, podem dir que

$$D = 2v_1 + v_2 + 3v_3 \text{ i } D' = 3v_1 + 6v_2 + 4v_3$$

són divisors del graf G . Ara, observem que:

1. $deg(D) = 2 + 1 + 3 = 6$ i $deg(D') = 3 + 6 + 4 = 13$.
2. D i D' són divisors efectius.
3. $D' \geq D$, ja que $D(v_1) = 2 < 3 = D'(v_1)$, $D(v_2) = 1 < 6 = D'(v_2)$ i $D(v_3) = 3 < 4 = D'(v_3)$.

Definició 4.11. Denotem $\mathcal{M}(G) = Hom(V(G), \mathbb{Z})$ al grup abelià finit que consisteix en totes les funcions de valors enters en els vèrtexs de G .

Observació 4.12. Podem pensar $\mathcal{M}(G)$ com l'anàleg al conjunt de funcions meromorfes en una superfície de Riemann.

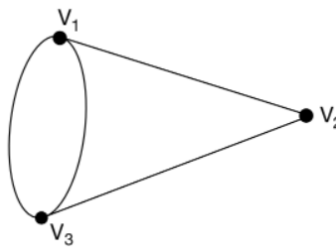
Definició 4.13. L'operador Laplacià $\Delta : \mathcal{M}(G) \rightarrow Div(G)$ ve donat per la fórmula

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f)(v)$$

on

$$\Delta_v(f) = deg(v)f(v) - \sum_{e=vw \in E_v} f(w) = \sum_{e=vw \in E_v} (f(v) - f(w)).$$

Exemple 4.14.



La matriu Laplaciana d'aquest graf és

$$Q = D - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ara, calculem $\Delta(f)$ per $f = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\Delta v_1(f) = 2(f(v_1) - f(v_3)) + f(v_1) - f(v_2) = 3f(v_1) - 2f(v_3) - f(v_2) = 26$$

$$\Delta v_2(f) = f(v_2) - f(v_1) + f(v_2) - f(v_3) = -2$$

$$\Delta v_3(f) = 2(f(v_3) - f(v_1)) + f(v_3) - f(v_2) = -24$$

Per tant,

$$\Delta(f) = 26(v_1) - 2(v_2) - 24(v_3)$$

Definició 4.15. Per a cada $k \in \mathbb{Z}$, definim $Div^k(G) = \{D \in Div(G) : deg(D) = k\}$, que és un subgrup de $Div(G)$.

Observació 4.16. El subgrup de divisors de grau zero $Div^0(G)$, és el nucli de la funció deg .

Definició 4.17. Denotem $Prin(G)$ al subgrup de $Div(G)$ que resulta de fer la imatge de $\mathcal{M}(G)$ sota l'operador Laplaciana, és a dir,

$$Prin(G) = \Delta(\mathcal{M}(G))$$

Els seus elements s'anomenen divisors principals.

Fixem-nos que, per com està definida Δ tots els divisors principals tenen grau zero, i en conseqüència $Prin(G)$ és un subgrup de $Div^0(G)$.

Definició 4.18. El grup de Picard de G , que denotem per $Pic(G)$, és el grup quocient definit com

$$Pic(G) = Div(G)/Prin(G)$$

Fixem-nos que té sentit definir el subgrup

$$Pic^0(G) = Div^0(G)/Prin(G),$$

que és l'objecte del nostre interès.

Proposició 4.19. El subgrup $Pic^0(G)$ és un grup abelià finit.

Per poder demostrar aquesta proposició és necessari introduir nous conceptes i resultats. Més endavant la veurem.

Observació 4.20. Es podria haver definit així el grup de $Pic(X)$ d'una superfície de Riemann i el subgrup $Pic^0(X)$. Amb aquest llenguatge, el Teorema d'Abel-Jacobi diu que $Pic^0(X) \simeq Jac(X)$.

4.2 La jacobiana d'un graf finit. Aplicació d'Abel-Jacobi

Sigui Γ un graf finit. Definim l'espai de vèrtexs $C^0(\Gamma, \mathbb{R})$ de totes les funcions reals sobre el conjunt de vèrtexs V i l'espai d'arestes $C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ de totes les funcions $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $g(\bar{e}) = g(e)$ per a tot $e \in \mathbb{E}$. Aquests dos espais són espais euclidians amb els productes escalars definits, respectivament, com

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{v \in V} f_1(v) f_2(v)$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} g_1(e) g_2(e)$$

per a tot $f_1, f_2 \in C^0(\Gamma, \mathbb{R})$ i $g_1, g_2 \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$.

Definició 4.21. *Siguin e_- i e_+ el principi i el final d'una aresta orientada e . La funció $d : C^0(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ definida per $(df)(e) = f(e_+) - f(e_-)$ s'anomena diferencial exterior. L'operador adjunt $d^* : C^1(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\Gamma, \mathbb{R})$ està definit per $(d^*g)(v) = \sum_{e \in \mathbb{E}, e_+ = v} g(e)$.*

Veiem amb que d i d^* són adjunts, és a dir, $\langle df, g \rangle = \langle f, d^*g \rangle$.

Per definició tenim que

$$\langle df, g \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} df(e)g(e) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} (f(e_+) - f(e_-))g(e)$$

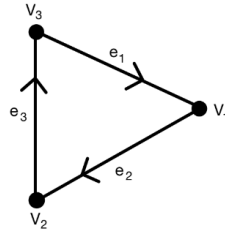
$$\langle f, d^*g \rangle = \sum_{v \in V} f(v) \left(\sum_{e \in \mathbb{E}, v=e_+} g(e) \right).$$

Ara bé, tenint en compte que $g(e) = -g(\bar{e})$ i que el principi i el final d'una aresta e són el final i el principi de l'aresta \bar{e} , respectivament, tenim que

$$\begin{aligned} \langle df, g \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} (f(e_+) - f(e_-))g(e) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(e) + \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(\bar{e}) - \sum_{v \in V, v=e_-} f(v)g(e) - \sum_{v \in V, v=e_-} f(v)g(\bar{e}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(e) - \sum_{v \in V, v=e_-} f(v)g(e) - \sum_{v \in V, v=e_-} f(v)g(e) + \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(e) \right) \\ &= \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(e) - \sum_{v \in V, v=e_-} f(v)g(e) = \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(e) + \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)g(\bar{e}) \\ &= \sum_{v \in V, v=e_+} f(v)(g(e) + g(\bar{e})) = \sum_{v \in V} f(v) \left(\sum_{e \in \mathbb{E}, v=e_+} g(e) \right) = \langle f, d^*g \rangle \end{aligned}$$

tal i com volíem veure. Així doncs, queda provat que d i d^* són adjunts.

Exemple 4.22.



En aquest graf en particular

$$\begin{aligned} \langle df, g \rangle &= \frac{1}{2}[(f(v_1) - f(v_3))g(e_1) + (f(v_2) - f(v_1))g(e_2) + (f(v_3) - f(v_2))g(e_3) + \\ &\quad (f(v_3) - f(v_1))g(\bar{e}_1) + (f(v_1) - f(v_2))g(\bar{e}_2) + (f(v_2) - f(v_3))g(\bar{e}_3)] = \\ &\quad (f(v_1) - f(v_3))g(e_1) + (f(v_2) - f(v_1))g(e_2) + (f(v_3) - f(v_2))g(e_3), \end{aligned}$$

que evidentment és igual a

$$\begin{aligned} \langle f, d^*g \rangle &= f(v_1)(g(e_1) + g(\bar{e}_2)) + f(v_2)(g(e_2) + g(\bar{e}_3)) + f(v_3)(g(e_3) + g(\bar{e}_1)) = \\ &= f(v_1)g(e_1) - f(v_1)g(e_2) + f(v_2)g(e_2) - f(v_2)g(e_3) + f(v_3)g(e_3) - f(v_3)g(e_1). \end{aligned}$$

Definició 4.23. Les corresponents Laplacianes s'escriuen com

$$\Delta_0 = d^*d : C^0(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\Gamma, \mathbb{R})$$

$$\Delta_1 = dd^* : C^1(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(\Gamma, \mathbb{R})$$

i venen donades per les fórmules

$$(\Delta_0 f)(v) = \deg(v)f(v) - \sum_{e \in \mathbb{E}, e_+ = v} f(e_-)$$

$$(\Delta_1 g)(e) = 2g(e) - \sum_{e' \in \mathbb{E}, e'_+ = e_-} g(e') - \sum_{e'' \in \mathbb{E}, e''_- = e_+} g(e'')$$

Proposició 4.24. Es satisfan les següents descomposicions ortogonals:

$$C^0(\Gamma, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\Delta_0) \oplus \text{Im}(d^*)$$

$$C^1(\Gamma, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\Delta_1) \oplus \text{Im}(d)$$

Demostració. Veurem que $C^0(\Gamma, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\Delta_0) \oplus \text{Im}(d^*)$, l'altra igualtat es demostra de forma anàloga. Primer, veiem que $x \in \text{Ker}(\Delta_0) \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(d)$ (es podria veure de forma anàloga que $x \in \text{Ker}(\Delta_1) \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(d^*)$). Aplicant la definició de Δ_0 i que d i d^* són adjunts tenim

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\Delta_0) &\Leftrightarrow \Delta_0(x) = 0 \Rightarrow 0 = \langle \Delta_0(x), x \rangle = \langle d^*dx, x \rangle = \langle dx, dx \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(d) \end{aligned}$$

Ara, l'altra implicació és directa, ja que si $dx = 0$ aleshores $\Delta_0(x) = d^*dx = 0$. Per tant, hem de veure que $C^0(\Gamma, \mathbb{R}) = Ker(d) \oplus Im(d^*)$. Si veiem que $Ker(d)$ és el complement ortogonal de $Im(d^*)$ ja ho tindrem. Ara bé, utilitzant novament que d i d^* són adjunts obtenim

$$y \in (Im(d^*))^\perp \Leftrightarrow \langle y, d^*x \rangle = 0, \forall x \Leftrightarrow \langle dy, x \rangle = 0, \forall x \Leftrightarrow dy = 0 \Leftrightarrow y \in Ker(d)$$

□

Observació 4.25. El nucli $Ker(\Delta_0)$ es pot veure com el conjunt de funcions $V \rightarrow \mathbb{R}$ que són constants en les components connexes d'un graf. Veiem això amb un petit exemple agafant el graf de l'exemple 4.14.

Volem veure que si $f \in Ker(\Delta_0)$, aleshores f constant. Sigui $f(v_1, v_2, v_3) = (r_1, r_2, r_3)$. El fet de que $f \in Ker(\Delta_0)$ és equivalent a dir que $\Delta_0(f)(v_1) = \Delta_0(f)(v_2) = \Delta_0(f)(v_3) = 0$. En aquest cas, aplicant la definició de Δ_0 obtenim el següent sistema:

$$\Delta_0(f)(v_1) = 3r_1 - r_2 - 2r_3 = 0$$

$$\Delta_0(f)(v_2) = 2r_2 - r_1 - r_3 = 0$$

$$\Delta_0(f)(v_3) = 3r_3 - r_2 - 2r_1 = 0$$

De la segona equació obtenim que $r_1 = 2r_2 - r_3$. Substituint en la primera, $6r_2 - 3r_3 - r_2 - 2r_3 = 0 \Rightarrow 5r_2 - 5r_3 = 0 \Rightarrow r_2 = r_3$. I en conseqüència, $r_1 = r_2$. Per tant, tenim $r_1 = r_2 = r_3$, i podem afirmar que f és constant.

La demostració en general és anàloga però amb més complexitat combinatoria.

Definició 4.26. Anomenem a les interseccions següents

$$\Lambda^1(\Gamma) = C^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cap Ker(\Delta_1)$$

$$N^1(\Gamma) = C^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cap Im(d)$$

xarxa de fluxos integrals i xarxa de talls integrals, respectivament.

A continuació, definim la Jacobiana d'un graf finit que serà un anàleg a la jacobiana d'una superfície de Riemann.

Sigui Γ un graf connex. Donat que podem identificar el grup de cohomologia $H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ amb $Ker(\Delta_1)$ (per la descomposició anterior de $C^1(\Gamma, \mathbb{R})$), tenim una projecció ortogonal $\pi : C^1(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{R})$. Denotem per

$$\tilde{A} : C^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow (\Lambda^1(\Gamma))^\#$$

a la restricció de π a $C^1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Lema 4.27. *L'aplicació \tilde{A} està ben definida.*

Demostració. Recordem que, per la Proposició 4.24, sabem que podem expressar $C^1(\Gamma, \mathbb{R}) = Ker(\Delta_1) \oplus Im(d)$. Per tant, per definició, és evident que si escrivim $g \in C^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ com $g = g_1 + df$ amb $g_1 \in Ker(\Delta_1)$, $df \in Im(d)$, aleshores $\tilde{A}(g) = g_1$.

Ara, comprovem que $g_1 \in (\Lambda^1(\Gamma))^\#$. Cal veure que $\langle g_1, j \rangle \in \mathbb{Z}, \forall j \in \Lambda^1(\Gamma)$. Com $j \in \Lambda^1(\Gamma)$, en particular tenim que $j \in (\Lambda^1(\Gamma))^\#$ ja que $\Lambda^1(\Gamma) \subset (\Lambda^1(\Gamma))^\#$. Per tant,

$$\langle g, j \rangle \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle g_1 + df, j \rangle = \langle g_1, j \rangle + \langle df, j \rangle \in \mathbb{Z}$$

Utilitzant que d i d^* són adjunts i que si $j \in \Lambda^1(\Gamma)$, per definició de $\Lambda^1(\Gamma)$, $j \in \text{Ker}(\Delta_1) = \text{Ker}(d^*)$, obtenim que

$$\langle df, j \rangle = \langle f, d^*j \rangle = 0$$

i en conseqüència $\langle g_1, j \rangle \in \mathbb{Z}$, tal i com volíem veure.

Finalment, comprovem que $\tilde{A}(C^1(\Gamma, \mathbb{Z})) \subset \text{Ker}(\Delta_1)$. Però això és evident, ja que per definició tenim que $\tilde{A}(g) = g_1 \in \text{Ker}(\Delta_1)$. \square

Per $e \in \mathbb{E}$, sigui $\delta_e \in C^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ definida per

$$\delta_e(e) = 1, \delta_e(\bar{e}) = -1 \text{ i } \delta_e(e') = 0 \text{ per } e' \in \mathbb{E} \setminus \{e, \bar{e}\}$$

Escollim ara un punt base $v_0 \in V$. Per a cada $v \in V$ i per a cada camí orientat γ de v_0 a v , tenim el següent element corresponent:

$$\tilde{A}(\gamma) = \sum_{e \in \gamma} \tilde{A}(\delta_e) \in (\Lambda^1(\Gamma))^\#.$$

Observació 4.28. Si agafem un camí tancat orientat γ de v_0 a v_0 , aleshores $\tilde{A}(\gamma) \in \Lambda^1(\Gamma)$.

Per tant, per l'observació, la següent aplicació:

$$A_{v_0} : V \longrightarrow (\Lambda^1(\Gamma))^\# / \Lambda^1(\Gamma)$$

està ben definida ja que si escollim dos camins diferents de v_0 a v , la composició d'aquests serà un camí tancat i per tant tindran la mateixa classe dins del quocient.

Donat $v_0 \in V$, aquesta aplicació s'anomena aplicació d'Abel-Jacobi.

Definició 4.29. La jacobiana d'un graf finit connex Γ és el grup determinant

$$J(\Gamma) = (\Lambda^1(\Gamma))^\# / \Lambda^1(\Gamma).$$

Observació 4.30. $J(\Gamma)$ és l'anàleg a la jacobiana d'una superfície de Riemann. Identifiquem el quocient que ens donava un tor complex amb aquest quocient entre xarxes.

Proposició 4.31. Si Γ és un polígon de n vèrtexs i n arestes, la seva jacobiana $(\Lambda^1(\Gamma))^\# / \Lambda^1(\Gamma)$ és un grup cíclic d'ordre n .

Demostració. Si Γ és un polígon de n vèrtexs. Primer de tot, veiem que si $g \in \Lambda^1(\Gamma)$, aleshores g és constant. Si $g = (n_1, \dots, n_n) \in \Lambda^1(\Gamma)$, en particular $g \in \text{Ker}(d^*)$. Recordem que

$$\begin{aligned} d^* : C^1(\Gamma, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^0(\Gamma, \mathbb{R}) \\ g(v) &\longmapsto \sum_{e \in \mathbb{E}, e_+ = v} g(e). \end{aligned}$$

Per tant, si ordenem els vèrtexs i orientem les arestes en sentit antihorari de manera que l'aresta e_i va de v_i a v_{i+1} , per a $1 \leq i < n$ i l'aresta e_n va de v_n a v_1 , obtenim que

$$\begin{aligned} g(v_1) &= g(e_n) - g(\bar{e}_1) = n_n - n_1 = 0 \\ g(v_2) &= g(e_1) - g(\bar{e}_2) = n_1 - n_2 = 0 \\ &\vdots \\ g(v_{n-1}) &= g(e_{n-2}) - g(\bar{e}_{n-1}) = n_{n-2} - n_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

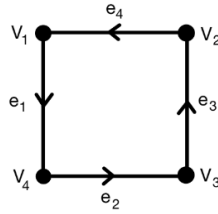
$$g(v_n) = g(e_{n-1}) - g(\bar{e}_n) = n_{n-1} - n_n = 0$$

I evidentment, $n_1 = n_2 = \dots = n_n$.

Així doncs, pel que acabem de veure, podem expressar $g = (m, \dots, m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Ara bé, si $h \in \Lambda^1(\Gamma)^\#$, pel mateix motiu podem afirmar que h és de la forma $h = (r, \dots, r)$ i per definició de xarxa dual tenim $\langle (r, \dots, r), (m, \dots, m) \rangle = r \cdot m + \dots + r \cdot m = nr m \in \mathbb{Z}, \forall m \Leftrightarrow r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$ per algun $k \in \mathbb{Z}$.

Veiem que aquestes dues expressions són equivalents. La implicació d'esquerra a dreta és immediata, ja que agafant $m = 1$, obtenim que $nr \in \mathbb{Z}$ i tenint en compte que $n \in \mathbb{N}$, obtenim el resultat. Ara veiem l'altra implicació. Si $r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$ per algun $k \in \mathbb{Z}$, podem afirmar que $rn \in \mathbb{Z}$ i en conseqüència $rn m \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}$. Per tant, tenim que els elements de $\Lambda^1(\Gamma)^\#$ són de la forma $(\frac{k}{n}, \dots, \frac{k}{n}), k \in \mathbb{Z}$ i els de $\Lambda^1(\Gamma)$ es poden escriure com $(k, \dots, k), k \in \mathbb{Z}$. Amb això, és evident que $\Lambda^1(\Gamma)^\#/\Lambda^1(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. \square

Exemple 4.32.



Sigui G el graf orientat de la imatge i sigui $g \in \Lambda^1(\Gamma)$. Sabem que aquesta és de la forma $g = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4$. Ara bé, com $g \in \text{Ker}(d^*)$ tenim que

$$g(v_1) = g(e_4) - g(\bar{e}_1) = n_4 - n_1 = 0$$

$$g(v_2) = g(e_3) - g(\bar{e}_4) = n_3 - n_4 = 0$$

$$g(v_3) = g(e_2) - g(\bar{e}_3) = n_2 - n_3 = 0$$

$$g(v_4) = g(e_1) - g(\bar{e}_2) = n_1 - n_2 = 0,$$

i per tant, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, i podem afirmar que g és constant. Posem m a aquesta constant.

Ara, pel mateix motiu tenim que $h = (r, r, r, r) \in \Lambda^1(\Gamma)^\#$ també és constant. Per definició de xarxa i seguint els passos de la demostració anterior, podem afirmar que $h = (s/4, s/4, s/4, s/4), s/4 \in \mathbb{Z}$.

Per tant tenim que les $g \in \Lambda^1(\Gamma)$ són de la forma $g = (m, m, m, m), m \in \mathbb{Z}$ i les $h \in \Lambda^1(\Gamma)^\#$ de la forma $h = (s/4, s/4, s/4, s/4), s/4 \in \mathbb{Z}$. En conseqüència, el quocient $\Lambda^1(\Gamma)^\#/\Lambda^1(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Definició 4.33. Una aplicació harmònica d'un graf $\Gamma = (V, \mathbb{E})$ a un grup abelià G és una aplicació $h : V \rightarrow G$ tal que

$$\text{deg}(v)h(v) = \sum_{w \in V, e_- = w, e_+ = v} h(w), \forall v \in V$$

Observació 4.34. Denotem $P_{v_0} : V \rightarrow \text{Pic}^0(\Gamma)$ a la funció que assigna a $v \in V$ la classe de $v - v_0$ dins de $\text{Pic}^0(\Gamma)$.

Recordem que aquest subgrup del grup de Picard estava definit com

$$Pic^0(\Gamma) = Div^0(\Gamma)/Prin(\Gamma).$$

Proposició 4.35. *Sigui Γ un graf connex i sigui v_0 un vèrtex de Γ . L'aplicació $A_{v_0} : V \rightarrow J(\Gamma)$ és harmònica i la seva imatge genera $J(\Gamma)$.*

Demostració. Sigui v un vèrtex de Γ . Donat que $d(\delta_v) \in Im(d)$ és ortogonal a $\Lambda^1(\Gamma)^\#$, tenim

$$\tilde{A}(d(\delta_v)) = \sum_{e \in \mathbb{E}, e_+ = v} \tilde{A}(\delta_e) = 0.$$

Escollim un camí orientat γ de v_0 a v . Unim v_0 a cada $w \sim v$ mitjançant un camí orientat γ_w que comença amb γ i acaba amb l'aresta que va de v a w . Aleshores

$$deg(v)\tilde{A}(\gamma) - \sum_{w \in V, w \sim v} \tilde{A}(\gamma_w) = - \sum_{e \in \mathbb{E}, e_- = v} \tilde{A}(\delta_e) = - \sum_{e \in \mathbb{E}, e_+ = v} \tilde{A}(\delta_e) = 0$$

i en conseqüència tenim que

$$deg(v)A_{v_0} - \sum_{w \in V, w \sim v} A_{v_0}(w) = 0.$$

Per tant, podem dir que A_{v_0} és harmònica.

Falta veure que la seva imatge genera $J(\Gamma)$. Donat que l'aplicació $\tilde{A} : C^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \rightarrow (\Lambda^1(\Gamma))^\#$ és exhaustiva, tenim que $(\Lambda^1(\Gamma))^\#$ està generat per elements de la forma $\tilde{A}(\gamma)$, i per tant, la imatge de A_{v_0} és un conjunt de generadors de $J(\Gamma)$. \square

Teorema 4.36. *(TEOREMA D'ABEL-JACOBI) Sigui Γ un graf connex. Existeix un isomorfisme de grups $Pic^0(\Gamma) \rightarrow J(\Gamma)$.*

A continuació donem les idees per a un esquema de la demostració del teorema.

Demostració. Primer, s'estén l'aplicació A_{v_0} des de V a $Div(X)$ definit la suma formal de vèrtexs en el grup $J(\Gamma)$ com

$$A_{v_0}(\sum n_i v_i) = \sum n_i A_{v_0}(v_i).$$

Un cop fet això, es defineix una aplicació $\alpha : Div(\Gamma) \rightarrow J(\Gamma)$ i es restringeix a $\alpha_0 : Div^0(\Gamma) \rightarrow J(\Gamma)$. Finalment, es veu que el nucli d'aquesta aplicació és $Prin(\Gamma)$, obtenint així l'isomorfisme desitjat entre $Div^0(\Gamma)/Prin(\Gamma)$ i $J(\Gamma)$. \square

Ara, podem donar una demostració de la Proposició 4.19.

Demostració. Pel teorema d'Abel-Jacobi, si veiem que $J(\Gamma)$ és finit tindrem que $Pic^0(\Gamma)$ és finit. Donat que $J(\Gamma) = \Lambda^1(\Gamma)^\#/\Lambda^1(\Gamma)$, aplicant la Proposició 3.18, podem afirmar que la jacobiana és finita, i en conseqüència també ho és $Pic^0(\Gamma)$. \square

5 El Teorema de Riemann-Roch

Aquest capítol es divideix en tres seccions. La primera de totes exposa els conceptes necessaris per enunciar el teorema i finalment s'enuncia. La segona es centra en donar una demostració del teorema, per fer-ho, prèviament es donen tots els resultats necessaris per poder arribar a provar-lo. Finalment, en la tercera part s'enuncia i es demostra el teorema de Clifford per grafs, mostrant així una possible aplicació del Teorema de Riemann-Roch.

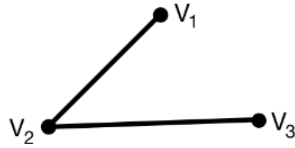
5.1 Sistemes lineals i el Teorema de Riemann-Roch

Sigui G un graf finit i $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$ el gènere de G (evidentment, és l'analogia amb el gènere d'una superfície de Riemann).

Definició 5.1. *Definim una relació d'equivalència en el grup $Div(G)$ declarant que $D \sim D'$ si i només si $D - D' \in Prin(G)$. Anomenem a aquesta relació equivalència lineal.*

Observació 5.2. Fixem-nos que, donat que un divisor principal té grau zero, els divisors linealment equivalents tenen el mateix grau. La jacobiana de G és el conjunt de classes d'equivalència lineal de divisors de grau zero de G .

Exemple 5.3.



Sigui G aquest graf i siguin $D = 2v_1 + v_2 - v_3$ i $D' = v_1 + v_2$ dos divisors. Volem veure que són linealment equivalents. Primer de tot, fixem-nos que $deg(D) = deg(D') = 2$ i a més, $deg(D - D') = deg(v_1 - v_3) = 0$. Per definició, tenim que $Prin(G) = \Delta(\mathcal{M}(G))$, per tant, per veure que $D - D' \in Prin(G)$, hem de trobar $f \in \mathcal{M}(G)$ tal que $\Delta(f) = D - D'$. Agafant $f = (1, 0, -1)$, tenim que

$$\Delta v_1(f) = deg(v_1)f(v_1) - f(v_2) = 1$$

$$\Delta v_2(f) = deg(v_2)f(v_2) - f(v_1) - f(v_3) = 0$$

$$\Delta v_3(f) = deg(v_3)f(v_3) - f(v_2) = -1.$$

Per tant $\Delta(f) = v_1 - v_3 = D - D'$, i per definició, podem dir que D i D' són linealment equivalents.

Definició 5.4. *Per $D \in Div(G)$, definim que el sistema lineal associat a D és el conjunt $|D|$ de tots els divisors efectius linealment equivalents a D :*

$$|D| = \{E \in Div(G) : E \geq 0, E \sim D\}.$$

Definició 5.5. *Definim la dimensió $r(D)$ del sistema lineal $|D|$ establint que $r(D) = -1$ si $|D| = \emptyset$, i declarant que per a cada enter $s \geq 0$, $r(D) \geq s$ si i només si $|D - E| \neq \emptyset$ per a tot divisor efectiu E de grau s .*

Exemple 5.6. Agafant els divisors de l'exemple anterior, veiem que D' és un divisor efectiu. Per tant, com $D \sim D'$, podem afirmar que $|D| \neq \emptyset$.

Observació 5.7. En comptes de generalitzar $L(D)$ com en superfícies de Riemann, es considera $|D|$.

Definició 5.8. El divisor canònic de G és el divisor K donat per

$$K = \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 2)(v).$$

Tenim que $\deg(K) = 2|E(G)| - 2|V(G)| = 2g - 2$, ja que la suma de tots els vèrtexs v de $\deg(v)$ és igual al nombre d'arestes en G i $g = -|V(G)| + |E(G)| + 1$.

Exemple 5.9. Calculem ara el divisor canònic del graf de l'exemple 5.3.

$$K = (\deg(v_1) - 2)v_1 + (\deg(v_2) - 2)v_2 + (\deg(v_3) - 2)v_3 = -v_1 - v_3.$$

Fixem-nos que se satisfà que $\deg(K) = 2|E(G)| - 2|V(G)| = -2$.

Observació 5.10. Aquesta definició de divisor canònic és poc intuïtiva, però queda justificada pel Teorema de Riemann-Roch per grafs.

Teorema 5.11. (RIEMANN-ROCH PER GRAFS)

Sigui G un graf, i sigui D un divisor de G . Aleshores

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

5.2 Demostració del Teorema de Riemann-Roch per grafs

5.2.1 Un criteri de Riemann-Roch

Sigui X un conjunt no buit.

Lema 5.12. Per a tot $D, D' \in \text{Div}(X)$ tal que $r(D), r(D') \geq 0$, tenim que $r(D + D') \geq r(D) + r(D')$.

Demostració. Sigui $E_0 = (x_1) + \dots + (x_{r(D)+r(D')})$ un divisor efectiu arbitrari de grau $r(D) + r(D')$, i siguin $E = (x_1) + \dots + (x_{r(D)})$ i $E' = (x_{r(D)+1}) + \dots + (x_{r(D)+r(D')})$. Aleshores $|D - E|$ i $|D' - E'|$ són no buits, amb el que $D - E \sim F$ i $D' - E' \sim F'$ amb $F, F' \geq 0$. Per tant, $(D + D') - (E + E') = (D + D') - E_0 \sim F + F' \geq 0$, i això implica que $r(D + D') \geq r(D) + r(D')$. \square

Sigui g un enter no negatiu, definim

$$\mathcal{N} = \{D \in \text{Div}(X) : \deg(D) = g - 1, |D| = \emptyset\}$$

Teorema 5.13. Sigui K un element de $\text{Div}(X)$ amb grau $2g - 2$. Definim $\epsilon : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ declarant que $\epsilon(D) = 0$ si $|D| \neq \emptyset$ i $\epsilon(D) = 1$ si $|D| = \emptyset$. Aleshores la fórmula de Riemann-Roch

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

se satisfà per a tot $D \in \text{Div}(X)$ si i només si se satisfan les dues propietats següents:

(RR1) Per cada $D \in \text{Div}(X)$, existeix $\nu \in \mathcal{N}$ tal que $\epsilon(D) + \epsilon(\nu - D) = 1$.

(RR2) Per cada $D \in \text{Div}(X)$ amb $\deg(D) = g - 1$, tenim $\epsilon(D) + \epsilon(K - D) = 0$.

Per demostrar aquest teorema són necessaris una definició i un resultat previs.

Definició 5.14. *Sigui $D = \sum_i a_i(x_i) \in \text{Div}(X)$, definim*

$$\text{deg}^+(D) = \sum_{a_i \geq 0} a_i.$$

Lema 5.15. *Si (RR1) se satisfà aleshores per a cada $D \in \text{Div}(X)$ tenim*

$$r(D) = (\min_{D' \sim D, \nu \in \mathcal{N}} \text{deg}^+(D' - \nu)) - 1.$$

Demostració. Denotem $r'(D)$ a la part dreta de la igualtat. Si $r(D) < r'(D)$, aleshores existeix un divisor efectiu E de grau $r'(D)$ pel qual $r(D - E) = -1$. Per (RR1), això vol dir que existeix un divisor $\nu \in \mathcal{N}$ i un divisor efectiu E' tal que $\nu - D + E \sim E'$. Però llavors $D' - \nu = E - E'$ per algun divisor $D' \sim D$, i per tant

$$\text{deg}^+(D' - \nu) - 1 \leq \text{deg}(E) - 1 = r'(D) - 1,$$

contradient la definició de $r'(D)$. Per tant, $r(D) \geq r'(D)$.

D'altra banda, si escollim divisors $D' \sim D$ i $\nu \in \mathcal{N}$ aconseguint el mínim, aleshores $\text{deg}^+(D' - \nu) = r'(D) + 1$, i en conseqüència hi ha divisors efectius E, E' amb $\text{deg}(E) = r'(D) + 1$ tals que $D' - \nu = E - E'$. Però, aleshores $D - E \sim \nu - E'$, i donat que $\nu - E'$ no és equivalent a cap divisor efectiu, tenim que $|D - E| = \emptyset$. Per tant, $r(D) \leq r'(D)$. \square

Ara, podem demostrar el Teorema 5.13.

Demostració. Primer veiem que la fórmula de Riemann-Roch implica (RR1) i (RR2).

Sigui D un divisor en X , i $d = \text{deg}(D)$. Si $\text{deg}(D) = g - 1$, aleshores $r(D) = r(K - D)$ i se satisfà (RR2).

No podem tenir que $\epsilon(D) = \epsilon(\nu - D) = 0$, ja que pel Lema 5.12, això implicaria que $r(\nu) \geq 0$, que contradiu la definició de \mathcal{N} . Fixem-nos que, si veiem que \mathcal{N} és no buit, aleshores per demostrar (RR1) és suficient amb provar que si $r(D) = -1$ aleshores $r(\nu - D) \geq 0$ per algun $\nu \in \mathcal{N}$.

Si $r(D + E) \geq 0$ per a tot $E \in \text{Div}_+^{g-1-d}(X)$, llavors per la fórmula de Riemann-Roch $r(K - D - E) \geq 0$ per a tots aquests E , i en conseqüència $r(K - D) \geq g - 1 - d$. Tornant a aplicar la fórmula, podem afirmar que $r(D) = r(K - D) + d + 1 - g \geq 0$.

Per tant, quan $r(D) = -1$, existeix un divisor efectiu E de grau $g - 1 - d$ tal que $r(D + E) = -1$. Donat que $\text{deg}(D + E) = g - 1$, això implica que $D + E \in \mathcal{N}$, i per tant $D + E = \nu$ per algun $\nu \in \mathcal{N}$. Per aquesta elecció de ν , tenim que $r(\nu - D) \geq 0$, que demostra (RR1).

Ara hem de veure que (RR1) i (RR2) impliquen la fórmula de Riemann-Roch. Sigui $D \in \text{Div}(X)$. Per a cada $\nu \in \mathcal{N}$, la propietat (RR2) implica que $\bar{\nu} := K - \nu$ també està en \mathcal{N} . Si escrivim

$$\nu - D' = K - D' - \bar{\nu},$$

obtenim que

$$\begin{aligned} \text{deg}^+(D' - \nu) - \text{deg}^+((K - D') - \bar{\nu}) &= \text{deg}^+(D' - \nu) - \text{deg}^+(\nu - D') \\ &= \text{deg}(D' - \nu) = \text{deg}(D) + 1 - g. \end{aligned}$$

Donat que la diferència $\text{deg}^+(D' - \nu) - \text{deg}^+((K - D') - \bar{\nu})$ té valor constant $\text{deg}(D) + 1 - g$ per a tot D' i ν , i donat que $\bar{\nu} = K - \nu$ passa per tots els possibles elements de \mathcal{N} com ho fa ν , aplicant el lema anterior obtenim que $r(D) - r(K - D) = \text{deg}(D) + 1 - g$ tal i com volíem. \square

5.2.2 Demostració del teorema

Pel Teorema 5.13, demostrar que es verifiquen les propietats (RR1) i (RR2), quan $X=G$ és un graf, és suficient per provar el Teorema de Riemann-Roch (Teorema 5.11).

Un ordre lineal en els vèrtexs d' $V(G)$, vol dir ordenar els vèrtex en una línia horitzontal, és a dir, col·locar un dels vèrtexs en primera posició, un altre en segona i així successivament. Per cada ordre lineal $<_P$ en $V(G)$, definim

$$\nu_P = \sum_{v \in V(G)} (|\{e = vw \in E(G) : w <_P v\}| - 1)(v).$$

Observem que $\deg(\nu_P) = |E(G)| - |V(G)| = g - 1$.

Exemple 5.16. Agafem de nou el graf de l'exemple 5.3, i fixem el següent ordre lineal: $v_1 < v_2 < v_3$. Fixem-nos que

$$\nu_P = (0 - 1)v_1 + (1 - 1)v_2 + (1 - 1)v_3 = -v_1,$$

que satisfà que $\deg(\nu_P) = |E(G)| - |V(G)| = 2 - 3 = -1$.

Lema 5.17. Per a cada ordre lineal $<_P$ en $V(G)$ tenim $\nu_P \in \mathcal{N}$.

Demostració. Sigui $D \in \text{Div}(G)$ un divisor qualsevol de la forma $D = \nu_P - \Delta(f)$ per a alguna $f \in \mathcal{M}(G)$. Sigui V_f^{\max} el conjunt de vèrtexs $v \in G$ en el que f aconsegueix el seu valor màxim, i sigui u l'element minimal de V_f^{\max} respecte l'ordre $<_P$. Llavors $f(w) \leq f(u)$ per a tot $w \in V(G)$, i si $w <_P u$ llavors $f(w) < f(u)$. Per tant,

$$\begin{aligned} D(u) &= (|\{e = uw \in E(G) : w <_P u\}| - 1) - \sum_{e=uw \in E(G)} (f(u) - f(w)) \\ &= -1 + \sum_{e=uw \in E(G), u <_P w} (f(w) - f(u)) + \sum_{e=uw \in E(G), w <_P u} (f(w) - f(u) + 1) \leq -1, \end{aligned}$$

ja que cada terme en aquests sumatoris és no positiu per l'elecció de u . Per tant, ν_P no és equivalent a cap divisor efectiu. \square

Teorema 5.18. Per cada $D \in \text{Div}(G)$, se satisfà exactament un dels següents:

(N1) $r(D) \geq 0$

(N2) $r(\nu_P - D) \geq 0$ per algun ordre $<_P$ en $V(G)$.

Corol·lari 5.19. Per $D \in \text{Div}(G)$ amb $\deg(D) = g - 1$ tenim $D \in \mathcal{N}$ si i només si existeix un ordre lineal $<_P$ en $V(G)$ tal que $D \sim \nu_P$.

Demostració. És suficient veure que si $\nu_P - D \sim E$ amb $E \geq 0$, llavors $\deg(E) = 0$ i per tant $E = 0$, amb el que $D \sim \nu_P$. \square

Ara ja podem demostrar el Teorema de Riemann-Roch per grafs (Teorema 5.11.).

Demostració. Pel Teorema 5.13, és suficient provar que es satisfan les condicions (RR1) i (RR2).

Sigui $D \in \text{Div}(G)$, i suposem primer que $r(D) \geq 0$. Per a cada $\nu \in \mathcal{N}$ tenim $r(\nu - D) = -1$, i per tant $\epsilon(D) + \epsilon(\nu - D) = 0 + 1 = 1$ i se satisfà (RR1). Ara, suposem que $r(D) < 0$. Aleshores, pel Teorema 5.18, hem de tenir $r(\nu_P - D) \geq 0$ per algun ordre $<_P$ en $V(G)$, i

llavors $\epsilon(D) + \epsilon(\nu_P - D) = 1 + 0 = 1$. Com $\nu_P \in \mathcal{N}$, pel Lema 5.17, es satisfà la condició (RR1).

Per demostrar (RR2), és suficient veure que per a cada $D \in \mathcal{N}$ tenim $K - D \in \mathcal{N}$. Pel Corol·lari 5.19, tenim $D \sim \nu_P$ per algun ordre lineal $<_P$ en $V(G)$. Sigui \bar{P} l'invers de P , és a dir, $v <_P w \Leftrightarrow w <_{\bar{P}} v$. Aleshores per cada $v \in V(G)$, tenim

$$\begin{aligned} \nu_P(v) + \nu_{\bar{P}}(v) &= (|\{e = vw \in E(G) : w <_P v\}| - 1) \\ &+ (|\{e = vw \in E(G) : w <_{\bar{P}} v\}| - 1) = \deg(v) - 2 = K(v). \end{aligned}$$

Per tant, $K - D \sim K - \nu_P = \nu_{\bar{P}} \in \mathcal{N}$. □

5.3 Conseqüències del Teorema de Riemann-Roch

Igual que en el cas de les superfícies de Riemann, en el cas dels grafs també podem trobar diferents conseqüències interessants de la fórmula de Riemann-Roch. Un exemple és el Teorema de Clifford. Abans d'enunciar-lo és necessària una definició.

Definició 5.20. *Sigui D un divisor. Direm que D és especial si $|K - D| \neq \emptyset$, en cas contrari direm que és no especial.*

Corol·lari 5.21. *(Teorema de Clifford per grafs)*

Sigui D un divisor efectiu especial en un graf G . Aleshores

$$r(D) \leq \frac{1}{2} \deg(D)$$

Demostració. Si D és efectiu i especial, aleshores $K - D$ és també efectiu, i pel Lema 5.12, tenim que

$$r(D) + r(K - D) \leq r(K) = g - 1.$$

Per altre costat, per Riemann-Roch tenim

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Per tant, amb aquestes dues expressions obtenim que

$$2r(D) \leq \deg(D) \Rightarrow r(D) \leq \frac{1}{2} \deg(D),$$

tal i com volíem veure. □

6 Aplicació: Joc Chip-Firing

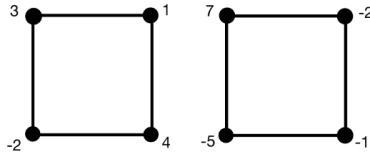
Un joc Chip-Firing sobre un graf G comença amb un conjunt de chips, que anomenarem dòlars, ja que s'usa més convencionalment, a cada vèrtex, és a dir, la configuració inicial assigna a cada vèrtex v de G un nombre enter de dòlars. Aquesta configuració la podem identificar amb un divisor $D \in \text{Div}(G)$. En el cas de que un vèrtex tingui un nombre negatiu de dòlars assignat, direm que aquest vèrtex està en deute. Un moviment del joc consisteix en que un vèrtex v doni un dòlar a cada un dels seus vèrtexs veïns o rebi un dòlar de cada vèrtex veí. Fixem-nos que fent això el nombre total de dòlars no varia. L'objectiu del joc és aconseguir, a través d'una seqüència de moviments, una posició guanyadora, és a dir, una configuració sense cap vèrtex en deute. La seqüència que ens porta a la posició guanyadora s'anomena estratègia guanyadora.

Sigui $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$.

Teorema 6.1. *Sigui $N = \text{deg}(D)$ el nombre total de dòlars present en qualsevol pas del joc.*

1. *Si $N \geq g$, aleshores hi ha sempre una estratègia guanyadora.*
2. *Si $N \leq g - 1$, existeix sempre una configuració inicial per la qual no existeix estratègia guanyadora.*

Exemples 6.2.



Anomenem G al graf sense cap configuració de dòlars. Tenim que $g = 4 - 4 + 1 = 1$. En el cas de l'esquerra, tenim que $N = 3 + 1 - 2 + 4 = 6 > 1 = g$, per tant existeix una estratègia guanyadora. En aquest cas concret existeix més d'una possibilitat. Una possible estratègia guanyadora és la següent:

1. El vèrtex superior esquerre dóna un dòlar a cada un dels vèrtexs veïns.
2. El vèrtex inferior dret dóna un dòlar a cada un dels vèrtexs veïns.

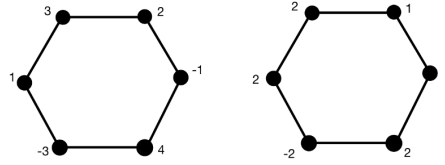
D'aquesta manera no queda cap vèrtex en deute i per tant s'aconsegueix una posició guanyadora.

En el cas de la dreta, tenim $N = 7 - 2 - 5 - 1 = -1 < 1 = g$, per tant, existeix una configuració per la qual no existeix estratègia guanyadora. Intuïtivament, podem veure que la configuració donada mai podrà acabar en una guanyadora ja que amb el nombre de dòlars que hi ha sempre hi haurà algun vèrtex en deute.

Lema 6.3. *Dos divisors D i D' de G són linealment equivalents si i només si existeix una seqüència de moviments que transforma la configuració corresponent a D en la configuració corresponent a D' .*

Demostració. Una seqüència de moviments en el joc Chip-Firing es pot codificar com la funció $f \in \mathcal{M}(G)$ per la qual $f(v)$ és el nombre de cops que el vèrtex v dona dòlars als vèrtexs veïns menys el nombre de cops que els rep. Fixem-nos que el joc és commutatiu, en el sentit de que l'ordre dels moviments no importa. La configuració final, començant per la configuració inicial D i jugant els moviments que corresponen a f , ve donada pel divisor $D + \Delta(f)$. Per tant, les distribucions de dòlars a les que es pot arribar des de la configuració inicial D són exactament els divisors linealment equivalents a D . \square

Exemples 6.4.



Anomenem G al graf. Ordenem els vèrtexs en sentit horari començant pel vèrtex superior esquerre. El divisor associat al graf de l'esquerra és $D = 3v_1 + 2v_2 - v_3 + 4v_4 - 3v_5 + v_6$ i l'associat al de la dreta és $D' = 2v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4 - 2v_5 + 2v_6$. Els passos per arribar del primer al segon graf són:

1. El vèrtex v_1 dona un dòlar a cada veí (v_2 i v_6).
2. El vèrtex v_4 dona un dòlar a cada veí (v_3 i v_5).
3. El vèrtex v_2 dona dòlars a cada veí (v_1 i v_3).

Així doncs, donat que hi ha una seqüència de moviments que transforma D en D' , pel Lema 6.3, D i D' han de ser linealment equivalents. Veiem-ho. Sabem que si D i D' són linealment equivalents, aleshores $D - D' \in Prin(G)$. Per definició, $Prin(G) = \Delta(\mathcal{M}(G))$, per tant hem de trobar $f \in \mathcal{M}(G)$ tal que $\Delta(f) = D - D' \in Prin(G)$. Primerament, donat que $D - D' = v_1 + v_2 - 2v_3 + 2v_4 - v_5 - v_6$, evidentment tenim que el seu grau és zero. Falta trobar la f . Sabem que

$$\Delta v_1(f) = 2f(v_1) - f(v_2) - f(v_6) = 1$$

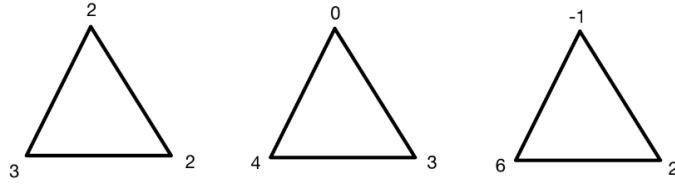
$$\Delta v_2(f) = 2f(v_2) - f(v_1) - f(v_3) = 1$$

$$\Delta v_3(f) = 2f(v_3) - f(v_2) - f(v_4) = -2$$

$$\Delta v_4(f) = 2f(v_4) - f(v_5) - f(v_3) = 2$$

$$\Delta v_5(f) = 2f(v_5) - f(v_4) - f(v_6) = -1$$

Per tant, resollem el sistema i veiem que una possible f (el sistema té infinites solucions) és $f = (1, 1, 0, 1, 0, 0) \in \mathcal{M}(G)$.



En aquest cas, tornem a anomenar G al graf que apareix representat. Ordenem els vèrtexs en sentit horari començant pel vèrtex superior. Veiem representats dos moviments diferents:

1. Per passar del primer al segon graf, v_1 dóna un dòlar als altres.
2. Per passar del segon graf al tercer, v_3 rep dòlars dels altres dos.

Sigui $D = 2v_1 + 2v_2 + 3v_3$ el divisor associat a la configuració inicial (primer graf) i $D' = -v_1 + 2v_2 + 6v_3$ l'associat al graf resultant (tercer graf). Tenim que $D - D' = 3v_1 - 3v_2$. Prenent $f = (1, 0, -1) \in \mathcal{M}(G)$ veiem que es satisfan les següents equacions

$$\Delta v_1(f) = 3 = 2f(v_1) - f(v_2) - f(v_3)$$

$$\Delta v_2(f) = 0 = 2f(v_2) - f(v_1) - f(v_3)$$

$$\Delta v_3(f) = -3 = 2f(v_3) - f(v_1) - f(v_2)$$

Per tant, tenim que D i D' són linealment equivalents.

Corol·lari 6.5. *Existeix una estratègia guanyadora en el joc Chip-Firing amb configuració inicial D si i només si D és linealment equivalent a un divisor efectiu.*

Observació 6.6. És evident que l'estratègia guanyadora ha de ser linealment equivalent a un divisor efectiu, ja que per definició, tenir un divisor efectiu voldrà dir que tots els vèrtexs tindran un nombre de dòlars ≥ 0 , que és precisament una posició guanyadora.

Lema 6.7. *Existeix una estratègia guanyadora amb configuració inicial D si i només si existeix una seqüència de préstecs per vèrtexs que tenen un nombre negatiu de dòlars que transforma D en un divisor efectiu.*

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta és immediata pel corol·lari anterior. Per tant, és suficient veure que si $D \sim E$ amb $E \geq 0$, aleshores podem arribar des de D a un divisor efectiu E' via una seqüència de préstecs per vèrtexs que tenen un nombre negatiu de dòlars. Donat que $D \sim E$, tenim que $E = D + \Delta(f)$ per algun $f \in \mathcal{M}(G)$.

Sigui $E' = D + \Delta(f')$ tal que:

1. E' es pot aconseguir des de D via una seqüència de préstecs per vèrtexs que tenen un nombre negatiu de dòlars.
2. $f' \leq f$
3. $\sum_{v \in V(G)} f'(v)$ és maximal sota les condicions (1) i (2).

Hem de tenir $E'(v) \geq 0$ per cada $v \in V(G)$ tal que $f'(v) < f(v)$, de lo contrari la configuració $E' + \Delta(\mathcal{X}_{\{v\}})$, on $\mathcal{X} : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ representa la funció característica, obtinguda des de E' fent que v agafi un dòlar de cadascun dels seus veïns, contradiria l'elecció d' E' . A més, $E'(v) \geq E(v) \geq 0$ per cada $v \in V(G)$ tal que $f'(v) = f(v)$. Per tant, E' és efectiu i queda provat el lema. □

6.1 Joc Chip-Firing de Björner-Lovász-Shor

Ara considerarem un joc Chip-Firing en particular, l'estudiat per Björner, Lovász i Shor en [6]. En aquest cas el joc procedeix com s'explica a continuació. Cada vèrtex del graf connex G donat comença amb un nombre no negatiu de chips, i un moviment consisteix en escollir un vèrtex amb almenys tants chips com el seu grau, i fer que aquest envii un chip a cada un dels seus vèrtexs veïns (en aquest cas diem que el vèrtex s'encén). El joc acaba quan no hi ha vèrtexs amb aquesta condició.

Els principals teoremes s'exposen a continuació i són sobre la finitud del joc de Björner, Lovász i Shor.

Teorema 6.8. *La finitud o no finitud del joc, així com la configuració final i el nombre total de moviments quan el joc és finit, és independent dels moviments en particular que s'hagin fet.*

Teorema 6.9. *Sigui N el nombre de chips present en qualsevol punt durant el joc.*

1. *Si $N > 2|E(G)| - |V(G)|$, el joc és infinit.*
2. *Si $|E(G)| \leq N \leq 2|E(G)| - |V(G)|$, aleshores existeix una configuració inicial que garanteix una terminació finita, i també una que garanteix un joc infinit.*
3. *Si $N < |E(G)|$, el joc acaba en un nombre finit de moviments.*

Demostració. Sigui $m = |E(G)|$ i $n = |V(G)|$. És evident que si $N > 2m - n$ aleshores el joc no pot acabar, sempre hi haurà un vèrtex v amb almenys $\deg(v)$ chips. També és evident que si $N \leq 2m - n$ aleshores com a màxim pot haver $\deg(v) - 1$ chips en cada node v , i per tant, hi ha configuracions amb les que no es pot fer cap moviment.

Ara veiem que, si el nombre de chips és com a mínim m , aleshores existeix una configuració inicial que porta a un joc infinit. Clarament, és suficient veure-ho per $N = m$. Considerem qualsevol orientació acíclica de G , i sigui $\deg^+(v)$ el grau de sortida del vèrtex v . Sigui $\deg^+(v)$ el nombre de chips a cada node. Assumim que aquest joc és infinit.

Observem primer que existeix un vèrtex que es pot encendre, ja que com l'orientació és acíclica, existeix un vèrtex v amb $\deg(v) = \deg^+(v)$. Ara, realitzem un moviment agafant aquest vèrtex i observem que la distribució resultant de chips és també una orientació acíclica. Si invertim les arestes incidents a v , disminuïm el grau de sortida de v en $\deg^+(v)$, i augmentem el grau de sortida de cadascun dels seus veïns en 1. Donat que invertir així les arestes incidents no crea un cicle directe, podem trobar sempre un vèrtex v que satisfaci que $\deg(v) = \deg^+(v)$ i, per tant, sempre podem realitzar un moviment nou.

Amb això hem provat les condicions (1) i (2), veiem ara la prova de (3). Considerem

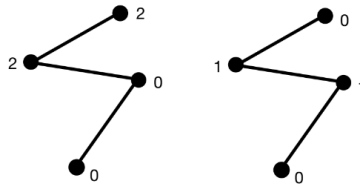
qualsevol distribució de $N < m$ chips en els vèrtexs, i sigui $f(v)$ el nombre de chips en el vèrtex v . Considerem també una orientació acíclica del graf G i la quantitat

$$T = \sum_{v \in V(G)} \max\{0, f(v) - \deg^+(v)\}.$$

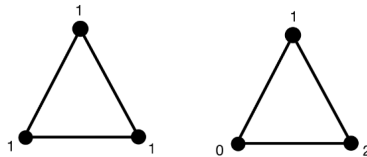
Diem que un vèrtex u és deficient si $f(u) < \deg^+(u)$. Per la hipòtesi $N < m$, ha d'existir un vèrtex deficient. Anem a provar que podem modificar la orientació durant el joc tal que T mai augmenta, i si el conjunt de vèrtexs deficientes canvia, aleshores T disminueix. Si el joc és infinit, aleshores cada vèrtex pot fer un moviment de forma infinitament sovint, i per tant, el nombre de vèrtexs deficientes canvia infinitament sovint (ja que amb un vèrtex deficient no es pot fer un moviment). Donat que T no pot disminuir infinitament sovint, això implica que el joc és finit.

Considerem el vèrtex v que pot fer el primer moviment. Tenim $f(v) \geq \deg(v)$. Fem un moviment amb el vèrtex v i invertim la orientació de totes les arestes que surten de v . No creem cap cicle. A més, no augmentem T , ja que el terme en T que correspon a v disminueix $\deg(v) - \deg^+(v)$, mentre que el corresponent a cada vèrtex veí de v augmenta en 1. També, fixem-nos que si algun d'aquests vèrtexs veïns era deficient, aleshores T disminueix, i si cap ho era, llavors el conjunt vèrtexs deficientes no canvia. Això prova el teorema. \square

Exemples 6.10.



Sigui G aquest graf. Per a G tenim que $2|E(G)| - |V(G)| = 2$. En el primer cas, $N = 4 > 2$ i per tant el joc és infinit. Fixem-nos que en aquesta situació els únics vèrtexs que poden fer un moviment són els dos superiors. Sigui quin sigui el moviment que es realitzi, un d'aquests dos sempre podrà fer un altre moviment. En el segon cas, $N = 2 < |E(G)| = 3$, i per tant el joc acaba en un nombre finit de moviments. En aquest cas, el graf donat ja és posició guanyadora.



Si mirem aquest graf G i agafem $N = 3$, resulta que $|E(G)| = N = 2|E(G)| - |V(G)| = 3$. Per tant, aplicant el teorema, existeix una configuració inicial que garanteix una terminació finita i una que garanteix un joc infinit. Fixem-nos que la primera imatge garanteix joc finit, ja que és ja una posició guanyadora, i la segona garanteix un joc infinit, sempre hi haurà un vèrtex amb 2 chips com a mínim, fent possible un nou moviment.

Definició 6.11. Per $D \in \text{Div}(G)$, definim $D^* = K^+ - D$, on

$$K^+ = \sum_{v \in V(G)} (\text{deg}(v) - 1)(v).$$

Observacions 6.12. Si posem $D = \sum a_v(v)$ i $D^* = \sum a_v^*(v)$.

1. $a_v^* = \text{deg}(v) - 1 - a_v$.
2. $a_v^* \geq 0$ si i només si $a_v \leq \text{deg}(v) - 1$.
3. $(D^*)^* = D$.

Exemple 6.13. Agafem el primer graf de l'exemple 6.10 i ordenem els vèrtexs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de dalt a baix. Tenim que $D = 2v_1 + 2v_2$ i

$$K^+ = (1 - 1)v_1 + (2 - 1)v_2 + (2 - 1)v_3 + (1 - 1)v_4 = v_2 + v_3,$$

per tant,

$$D^* = -2v_1 - v_2 + v_3.$$

Observem que evidentment es satisfan les observacions (1) i (2) anteriors. Comprovem que se satisfà (3):

$$(D^*)^* = K^+ - (-2v_1 - v_2 + v_3) = v_2 + v_3 - (-2v_1 - v_2 + v_3) = 2v_1 + 2v_2 = D.$$

Lema 6.14. Si $D = \sum a_v(v) \in \text{Div}(G)$ amb $a_v \leq \text{deg}(v) - 1$ per a tot $v \in V(G)$, aleshores $|D| \neq \emptyset$ si i només si existeix una seqüència legal de moviments que comença amb la configuració D^* i acaba amb un nombre finit de moviments.

Demostració. Pel Lema 6.3 i pel Lema 6.7, tenim que $|D| \neq \emptyset$ si i només si existeix una seqüència de préstecs per vèrtexs v_1, \dots, v_k de G que condueixen a un divisor no negatiu $E = \sum e_v(v)$, i tal que només els vèrtexs que estan en deute reben dòlars. Utilitzant les definicions, això només passa si i només si encendre v_1, \dots, v_k en el joc començant a D^* produeix una seqüència legal de moviments acabant amb un divisor $E^* = \sum e_v^*(v)$ amb $e_v^* \leq \text{deg}(v) - 1$ per a tot $v \in V(G)$. \square

Amb aquest lema, acaben els resultats sobre la finitud d'un joc Chip-Firing.

7 Conclusions

Aquest treball presenta dues parts molt diferenciades: superfícies de Riemann i grafs. Els coneixements adquirits durant els últims quatre anys, en especial, els relacionats amb geometria diferencial, anàlisi complexa i grafs han sigut la base per poder entendre els nous. Tot i això, la major part de la teoria d'aquest treball ha sigut nova i per això, s'ha realitzat un estudi exhaustiu per arribar a entendre i aplicar nous conceptes i resultats.

Aquesta memòria és una petita aproximació a les superfícies de Riemann, en especial als conceptes de la jacobiana i el Teorema de Riemann-Roch, i a la seva possible aplicació en grafs. La idea de poder aplicar la teoria de superfícies de Riemann de forma anàloga sobre grafs ha sigut un gran descobriment que pot arribar a anar molt més enllà del que arriben aquestes pàgines.

En particular, vull fer especial èmfasi en com la teoria de divisors, que inicialment està proposada per superfícies de Riemann, és capaç de demostrar, mitjançant les eines estudiades durant els capítols anteriors, si un joc és finit o té estratègia guanyadora.

El treball m'ha servit per ampliar el meu coneixement i tenir una visió global sobre aquesta temàtica, en la qual ja tenia interès per la seva relació amb la geometria, alhora que he pogut veure una possible aplicació que mai hagués contemplat.

Finalment, aquesta memòria es podria estendre aprofundint en conceptes i demostracions donats i veient noves aplicacions.

Referències

- [1] Ahlfors, L. V.; Sario, L.: *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960.
- [2] Bacher, R.; De la Harpe, P.; Nagnibeda, T.: *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph*, Bull. Soc. Math. France 125(2):167-198, 1997.
- [3] Baker, M.; Norine, S.: *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2007.
- [4] Biggs, N.: *Algebraic Graph Theory*, 2a edició, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [5] Biggs, N.: *Chip-firing and the critical group of a graph*, J. Algebraic Combin., 9(1):25-45, 1999.
- [6] Björner, A.; Lovász, L.; Shor, P.W.: *Chip-firing games on graphs*, European J. Combin., 12(4):283-291, 1991.
- [7] Donaldson, S.: *Riemann Surfaces*, Oxford University Press, 2011.
- [8] Fulton, W.: *Algebraic Curves. An introduction to Algebraic Geometry*, 2008.
- [9] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, v.5, American Mathematical Society, 1953.
- [10] Schlag, W.: *A course in Complex Analysis and Riemann Surfaces, Graduate Studies in Mathematics, v.154*, American Mathematical Society, 2014.