Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

PERSISTÈNCIA DE SOLUCIONS QUASI-PERIÒDIQUES

Autor: Javier Camí Buzón

Director: Dr. Àngel Jorba
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In this work, we study the persistence of invariant tori. Initially, we work on functional analysis in order to prove the mean value theorem and the inverse function theorem in Banach spaces, which will allow us to state and prove the implicit function theorem. Then, we apply those results to study a dynamical system which is perturbated by a quasi-periodic function in the neighborhood of an equilibrium point. During this analysis, we face the small divisors problem and we see the concept of the diophantine condition. Finally, we state and prove the Moser's KAM theorem for twist maps.

Resum

En aquest treball estudiem la persistència de tors invariants. Inicialment, donem eines d'anàlisi funcional per tal de provar el teorema del valor mitjà i el teorema de la funció inversa en espais de Banach, els quals ens permetran enunciar i demostrar el teorema de la funció implícita en espais de Banach. Tot seguit, apliquem aquests resultats en l'estudi d'un sistema dinàmic pertorbat per una funció quasi-periòdica a l'entorn d'un punt d'equilibri. Durant aquesta anàlisi ens hi trobem amb el problema dels petits divisors i veiem el concepte de condició diofàntica. Finalment, enunciem i demostrem el teorema KAM de Moser per a aplicacions twist.

2020 Mathematics Subject Classification. 37C55, 37C05, 37E40, 37J40

Agraïments

Vull agrair infinitament al meu tutor de treball, Àngel Jorba, per tota la dedicació, recursos i temps que m'ha proporcionat de bona fe durant aquest procés.

Índex

1 Introducció

L'estudi de l'estabilitat de punts d'equilibri i de solucions periòdiques i quasi-periòdiques sota l'efecte de pertorbacions és un objecte d'estudi fonamental en sistemes dinàmics.

Andrey Kolmogorov, el 1954, va enunciar una sèrie de resultats sobre la persistència d'òrbites quasi-periòdiques sota pertorbacions. El 1962, Jürgen Moser va provar rigorosament aquests resultats per al cas de dimensió 2. El 1963, Vladimir Arnold va demostrar els resultats per un cas més general i els va estendre per a sistemes hamiltonians. Aquests estudis originats a mitjans del segle XX i els resultats posteriors s'engloben en l'anomenada teoria KAM.

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar la persistència de les solucions quasi-periòdiques. Una funció quasi-periòdica es pot pensar com una combinació de funcions periòdiques de períodes incommensurables, de manera que el concepte de quasi-periodicitat estén el de periodicitat.

Així doncs, veurem primerament una sèrie d'eines i teoremes d'anàlisi funcional. En concret, voldrem provar el teorema de la funció implícita en espais de Banach i, per poder-ho demostrar rigorosament, veurem els teoremes del valor mitjà i de la funció inversa en espais de Banach, així com tota una sèrie de propietats sobre derivació en aquests espais necessàries per a provar-los.

Tot seguit, voldrem estudiar l'efecte d'una pertorbació quasi-periòdica prou petita en un sistema dinàmic amb un punt d'equilibri. Veurem que, sota determinades condicions, podrem aplicar el teorema de la funció implícita per tal de deduir que, en pertorbar el sistema, es dona origen a òrbites invariants quasi-periòdiques que convergeixen al punt fix quan la pertorbació tendeix a zero.

Durant l'anàlisi del nostre sistema dinàmic ens apareixerà l'anomenat *problema dels petits divisors*, el qual tractarem utilitzant conceptes de teoria de la mesura i de teoria de nombres, i veurem el concepte de condició diofàntica.

Finalment, discutirem sobre la forma normal dels difeomorfismes en el pla al voltant d'un punt el·líptic. Tot seguit, enunciarem el teorema twist de Moser i veurem la prova proposta per Rüssmann. Aquesta demostració es basa en una parametrització de les varietats a partir de l'equació d'invariància. Una aplicació twist és aquella aplicació de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que deixa invariant tot cercle al voltant de l'origen, els quals els fa girar amb un nombre de rotació que depèn del radi de cada cercle. El teorema ens garanteix que, si es compleixen certes condicions, *molts* dels cercles definits per una aplicació twist donen lloc a corbes invariants en pertorbar l'aplicació.

Estructura de la Memòria

En el capítol 2, introduïm el concepte de diferenciabilitat en espais de Banach i veiem tota una sèrie de resultats i propietats que es compleixen, com ara el teorema del valor mig i el teorema de la funció inversa, per tal de poder enunciar i demostrar el teorema de la funció implícita.

En el capítol 3, aplicarem el que hem estudiat al capítol anterior a un sistema dinàmic format per una equació autònoma, introduint el concepte de funció quasi-periòdica, i ens hi trobarem amb el problema dels petits divisors, el qual tractarem en el capítol 4.

Finalment, en el capítol 5 enunciarem i provarem el teorema twist de Moser.

2 Diferenciabilitat en Espais de Banach

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar el concepte de diferenciabilitat en espais de Banach per tal de poder enunciar i demostrar el teorema de la funció implícita. Comencem, doncs, amb algunes definicions i conceptes bàsics.

Definició 2.0.1. *Siguin E i F espais de Banach i sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Diem que f és contínua al punt $x_o \in E$ si per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, aleshores $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.*

Definició 2.0.2. *Siguin E i F espais vectorials normats. Denotem per $\mathscr{L}(E; F)$ l'espai vectorial format per totes les aplicacions lineals i contínues de E en F. Definim la norma en $\mathscr{L}(E; F)$ com*

$$\|f\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|f(x)\| .$$

Proposició 2.0.3. *Si E és un espai vectorial normat i F és un espai de Banach, aleshores $\mathscr{L}(E; F)$ és un espai de Banach.*

Definició 2.0.4. *Diem que una àlgebra A és una àlgebra de Banach si està dotada d'una norma $\|\cdot\|_A$ que satisfà que*

$$\|u \circ v\| \le \|u\| \|v\| , \quad \forall u, v \in A,$$

i que és completa respecte aquesta norma.

Proposició 2.0.5. *Sigui E un espai de Banach. Aleshores $\mathscr{L}(E; E)$ forma una àlgebra de Banach respecte l'operació de la composició $\circ$.*

Proposició 2.0.6. *Sigui E un espai de Banach i sigui $u \in \mathscr{L}(E; E)$ tal que $\|u\| < 1$. Aleshores, $1 - u$ té invers en l'àlgebra $\mathscr{L}(E; E)$.*

Demostració. Diem v a la suma $\sum_{n \ge 0} u^n$. Notem que la sèrie és normalment convergent, ja que $\|u^n\| \le \|u\|^n$ i $\sum_{n \ge 0} \|u\|^n$ és convergent, en ser $\|u\| < 1$. En particular, és absolutament convergent. Ara, és evident que

$$u \circ v = v \circ u$$

i que aquest terme és la suma $\sum_{n \ge 1} u^n$. Per tant, es té que

$$v \circ (1 - u) = (1 - v) \circ u = 1,$$

i aleshores, v és l'invers de $1 - u$.

□

Definició 2.0.7. *Siguin E i F espais de Banach. Designem per $Isom(E, F)$ el subconjunt de $\mathcal{L}(E; F)$ format pels isomorfismes de E en F.*

Observació 2.0.8. $Isom(E, F)$ pot ser buit, en el cas que E i F no siguin isomorfs.

Proposició 2.0.9. *Siguin E i F espais de Banach. Aleshores es compleix que*

(i) $Isom(E;F)$ és un obert en $\mathcal{L}(E;F)$;

(ii) L'aplicació $u \mapsto u^{-1}$ de $Isom(E;F)$ en $\mathcal{L}(E;F)$ és contínua.

Demostració. Si $Isom(E;F)$ és buit, el teorema és trivialment cert. Suposem, doncs, que $Isom(E;F)$ és no buit i sigui $u_0 \in Isom(E;F)$. Per tal de provar (i) és necessari veure que, per a tot $u \in \mathcal{L}(E;F)$ suficientment proper a u_0, u és isomorfisme de E en F.

Per tal que u sigui isomorfisme, és necessari i suficient que $(u_0)^{-1}u : E \to E$ també ho sigui. Per tant, volem veure quan $(u_0)^{-1}u$ és un element invertible de $\mathcal{L}(E;F)$. Si posem $(u_0)^{-1}u = 1 - v$, per la proposició (2.0.6), tenim que serà suficient demanar que $\|v\| < 1$. Aleshores, com $v = 1 - (u_0)^{-1}u = (u_0)^{-1}(u_0 - u)$, deduïm que

$$\|v\| \leq \left\|u_0^{-1}\right\| \|u - u_0\| .$$

I, per tant, si

$$\|u - u_0\| < \frac{1}{\left\|u_0^{-1}\right\|},$$

es pot assegurar que $\|v\| < 1$ i, per tant, que u és isomorfisme. Per tant, queda provat que $Isom(E;F)$ és un obert de $\mathcal{L}(E;F)$.

Ara només resta provar (ii). Tenim que

$$u^{-1} = (u_0(1-v))^{-1} = (1-v)^{-1}(u_0)^{-1},$$

i per tant,

$$u^{-1} - (u_0)^{-1} = \big((1-v)^{-1} - 1\big)(u_0)^{-1}.$$

Ara, com

$$(1-v)^{-1} = \sum_{n \geq 0} v^n,$$

tenim que

$$\left\|(1-v)^{-1} - 1\right\| \leq \sum_{n \geq 1} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}.$$

Això implica, per tant, que

$$\left\|u^{-1} - u_0^{-1}\right\| \leq \left\|u_0^{-1}\right\| \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}.$$

I si u tendeix cap a u_0, $\|v\|$ tendirà cap a 0 i, per tant, u^-1 tendirà cap a u_0^{-1}, provant així el teorema.

$\square$

2.1 El concepte d'aplicació diferenciable

Feta aquesta petita introducció, ja podem introduir el concepte de diferenciabilitat en un espai de Banach. Per fer-ho, però, vegem primerament el concepte de *tangència*. En tota aquesta secció, E i F seran espais de Banach i $U \subseteq E$ serà un obert de E.

Definició 2.1.1. *Siguin E i F espais de Banach i sigui $U \subset E$ un obert no buit de E. Siguin $f_1, f_2 : U \to F$ aplicacions. Diem que f_1 i f_2 són tangents en un punt $a \in U$ si el valor*

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f_1(x) - f_2(x)\|, \tag{2.1}$$

definit per $r > 0$ suficientment petit (ja que U és un obert), satisfà la condició

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m(r)}{r} = 0. \tag{2.2}$$

Aquesta condició l'escriurem sovint com $o(r)$.

Notem que aquesta condició implica que la funció $f_1 - f_2$ és contínua en el punt a, on pren el valor 0.

Proposició 2.1.2. *La noció "ser tangents a" és una relació d'equivalència.*

Demostració. Per la pròpia definició, tenim que la relació és reflexiva i simètrica. Veiem la transitivitat. Siguin $f, g, h : U \to F$ aplicacions tals que f i g són tangents en un punt $a \in U$ i g i h són tangents en $a \in U$. Aleshores,

$$\begin{aligned} m(r) = \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f(x) - h(x)\| &= \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f(x) - g(x)\| + \sup_{\|x-a\| \leq r} \|g(x) - h(x)\|. \end{aligned}$$

I, per tant,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} \frac{m(r)}{r} &= \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|x-a\| \leq r} \|f(x) - h(x)\|}{r} \\ &\leq \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|x-a\| \leq r} \|f(x) - g(x)\|}{r} + \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{\|x-a\| \leq r} \|g(x) - h(x)\|}{r} = 0. \end{aligned}$$

□

Definició 2.1.3. *Diem que una aplicació $f : U \subseteq E \to F$ és diferenciable en el punt $a \in U$ si es verifiquen les condicions següents:*

(i) f és contínua en el punt a;

(ii) Existeix una aplicació lineal $g : E \to F$ tal que les aplicacions $x \mapsto f(x) - f(a)$ i $x \mapsto g(x-a)$ són tangents en el punt a.

Aquesta condició l'escriurem com:

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\| = o(\|x-a\|) \tag{2.3}$$

Si f és una aplicació diferenciable, l'única aplicació lineal g que defineix és contínua segons la relació anterior. La denotarem habitualment per $f'(a)$ i l'anomenem la derivada de l'aplicació f en el punt a. Amb aquesta notació, la condició (2.3) la reescrivim com

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|) \tag{2.4}$$

Definició 2.1.4. *Diem que $f : U \to F$ és diferenciable en el punt $a \in U$ si existeix una aplicació $g \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que es compleix (2.3).*

Observació. Notem que les definicions (2.1.3) i (2.1.4) són equivalents. En efecte, per la condició (2.3) la continuïtat de g implica la continuïtat de f en el punta a.

Definició 2.1.5. *Diem que $f : U \to F$ és diferenciable en U si f és diferenciable en tot punt $a \in U$.*

L'element $f'(a) \in \mathcal{L}(E;F)$ depèn del punt $a \in U$. Tenim, per tant, una aplicació $a \mapsto f'(a)$ que representarem simplement per f':

$$f' : U \to \mathcal{L}(E;F).$$

Notem, doncs, que l'aplicació derivada f' no pren els seus valors en el mateix espai F que l'aplicació f.

Definició 2.1.6. *Diem que $f : U \to F$ és diferenciable amb continuïtat, o de classe $\mathcal{C}^1$, si*

1. *f és diferenciable en U;*
2. *L'aplicació derivada $f' : U \to \mathcal{L}(E;F)$ és contínua.*

2.2 Algunes propietats de la derivada

En aquesta secció, enumerarem una sèrie de propietats que compleix la derivada d'una aplicació en un espai de Banach.

Proposició 2.2.1. *La noció de diferenciabilitat és independent de la norma triada (respecte de normes equivalents). És a dir, si $f : U \subseteq E \to F$ és diferenciable en un punt $a \in U$ segons una norma $\|\cdot\|_1$, aleshores també és diferenciable en el punt $a \in U$ per a tota norma $\|\cdot\|_2$ equivalent, i les derivades coincideixen.*

Demostració. Suposem que f és diferenciable en un punt $a \in U$ i té per derivada $g \in \mathscr{L}(E; F)$ respecte de la primera norma. Aquesta condició s'expressa com:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_1}{\|x - a\|_1} = 0. \tag{2.5}$$

Ara, com $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ són equivalents, existeixen constants positives λ i ρ tals que

$$\lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1, \quad \forall x \in E,$$

i per tant, es complirà que

$$\frac{1}{\|x-a\|_1} \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\|x-a\|_2},$$

i també que

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_2 \leq \rho \|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_1.$$

I així, obtenim que

$$\frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_2}{\|x-a\|_2} \leq \frac{\rho}{\lambda} \frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_1}{\|x-a\|_1} \tag{2.6}$$

Com el segon terme tendeix a zero, el primer també ho farà, tot provant així la proposició.

□

Teorema 2.2.2. *Siguin E, F i G espais de Banach, $U \subseteq E$ un obert de E i $V \subseteq F$ un obert de F. Considerem les aplicacions contínues $f : U \to F$ i $g : V \to G$ i sigui $a \in U$. Suposem que $b = f(a) \in F$ és dins de V i que $f^{-1}(V) \subset U$ és un entorn obert de E que conté a, diguem-ne U'. En aquest obert U', tenim definida l'aplicació composta*

$$h = g \circ f : U' \to G.$$

Sota aquestes hipòtesis, si f és diferenciable en a i si g és diferenciable en el punt $b = f(a)$, aleshores $h = g \circ f$ és diferenciable en el punt a, i es verifica

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

És a dir, l'aplicació lineal $h'(a) : E \to G$ és l'aplicació composta de les aplicacions lineals $f'(a) : E \to F$ i $g'(f(a)) : F \to G$.

Demostració. Per hipòtesi, es compleix que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x-a), \tag{2.7}$$

on $\|\varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|)$ (és a dir, φ és tangent a 0 a l'origen), i també es compleix que

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \psi(y-a), \tag{2.8}$$

amb $\|\psi(y-b)\| = o(\|y-b\|)$. Com $h = g \circ f$, tenim que

$$h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a)).$$

Aplicant (2.8) amb $y = f(x)$ i $b = f(a)$, obtenim que

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \psi(f(x) - f(a)),$$

i si hi substituïm $f(x) - f(a)$ pel valor obtingut a (2.7), aleshores resulta que

$$h(x) - h(a) = (g'(f(a)) \circ f'(a))(x-a) + g'(f(a))\varphi(x-a) + \psi(f(x) - f(a))$$

Per tal de veure que h és diferenciable en a i que la seva derivada és $g'(f(a)) \circ f'(a)$ només resta veure que el segon i el tercer terme són tangents a 0 a l'origen. Ara, de la desigualtat següent:

$$\|g'(f(a))\varphi(x-a)\| \leq \|g'(f(a))\| \, \|\varphi(x-a)\| \, ,$$

en deduïm directament que $\|g'(f(a))\varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|)$. Finalment, de (2.7) tenim que per a un $M > \|f'(a)\|$ donat, per a $\|x-a\|$ suficientment petit es verifica que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M \, \|x-a\| \, ,$$

i, per tant, com $\|\psi(f(x) - f(a))\| = o(\|f(x) - f(a)\|)$, tenim que $\|\psi(f(x) - f(a))\| = o(\|x-a\|)$, tal i com volíem.

□

Proposició 2.2.3. *La derivada d'una aplicació lineal contínua $f : U \subseteq E \to F$ és constant (com a element de $\mathcal{L}(E;F)$), és a dir,*

$$f'(x) = f \quad \forall x \in U$$

Demostració. La demostració és trivial.

Proposició 2.2.4. *El conjunt d'aplicacions $f : U \subseteq E \to F$ que són diferenciables al punt $a \in U$ és un subespai vectorial V_a de l'espai vectorial de totes les aplicacions de U en F. L'aplicació $f \to f'(a)$ és, per tant, una aplicació lineal de V_a en $\mathscr{L}(E;F)$.*

Demostració. Si considerem dues aplicacions $f, g : U \subseteq E \to F$, la seva suma h és l'aplicació $h : U \subseteq E \to F$ definida per

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

És evident que si f i g són diferenciables en el punt a, aleshores h també ho serà, i si denotem les derivades per $f'(a)$ i $g'(a)$ respectivament, es compleix que

$$h'(a) = f'(a) + g'(a).$$

En efecte, tenim que

$$\begin{aligned}\|h(x)-h(a)-h'(a)(x-a)\| &= \big\|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)-\big(f'(a)+g'(a)\big)(x-a)\big\| \\ &\leq \|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\| \\ &+ \|g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|).\end{aligned}$$

Per tant, $\|h(x)-h(a)-h'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|)$ i obtenim que h és diferenciable en $a \in U$ i que la seva derivada és la que volíem. Anàlogament, si $h = \lambda f$, per a un cert escalar λ, si f és diferenciable en $a \in U$, aleshores h també ho serà, i es complirà que

$$h'(a) = \lambda f'(a).$$

Així doncs, el conjunt d'aplicacions diferenciables en el punt $a \in U$ forma un subespai vectorial.

□

Teorema 2.2.5. *Siguin E i F espais de Banach. Sigui $u \in Isom(E, F)$ i $\varphi(u) = u^{-1}$. Aleshores φ és de classe $\mathcal{C}^1$ en l'obert $Isom(E; F) \subset \mathcal{L}(E; F)$ i la seva derivada ve donada per*

$$\varphi'(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}, \text{ per a } h \in \mathcal{L}(E; F). \tag{2.9}$$

Demostració. Recordem que en la proposició (2.0.9) hem vist que l'aplicació $u \to u^{-1}$ és contínua de l'espai $Isom(E; F)$ en $Isom(F; E)$. Pot considerar-se, doncs, que φ pren els seus valors en $\mathscr{L}(F; E)$. La seva derivada φ' serà aleshores un element de $\mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E)\big)$. Notem que el terme de la dreta de (2.9) està ben definit, en tant que és un element de $\mathscr{L}(F; E)$ tal i com cal esperar. Així doncs, notem que

$$\begin{aligned}\varphi(u+h) - \varphi(u) &= (u+h)^{-1} - u^{-1} = (u+h)^{-1} \circ (u - (u+h)) \circ u^{-1} \\ &= -(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1}.\end{aligned}$$

Per tal de provar la igualtat del teorema és suficient veure que, fixat $u \in Isom(E; F)$, la diferència entre $(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ i la funció lineal (en h) $u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ és $o(\|h\|)$. Ara, com que

$$(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} = \big((u+h)^{-1} - u^{-1}\big) \circ h \circ u^{-1},$$

deduïm que

$$\left\|(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} - u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\right\| \leq \left\|\big((u+h)^{-1} - u^{-1}\big)\right\| \cdot \|h\| \cdot \left\|u^{-1}\right\|.$$

i, per la continuïtat de $u \mapsto u^{-1}$, tenim que aquest terme tendeix a 0 quan h tendeix a 0. Per tant, hem vist que φ és diferenciable per a tot $u \in Isom(E; F)$ i que la seva derivada és (2.9). Per tal de completar la prova, resta veure que φ és de classe $\mathcal{C}^1$, i per tant, tan sols queda veure que l'aplicació

$$\varphi' : Isom(E; F) \to \mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E)\big)$$

és contínua. Per veure-ho, notem que podem expressar φ' com la composició d'aplicacions $\psi(u^{-1}, u^{-1})$, on

$$\begin{aligned}\psi(v,w) : \mathscr{L}(E;F) &\longrightarrow \mathscr{L}(F;E)\\ h \quad &\longmapsto -v\circ h\circ w.\end{aligned}$$

ψ és una aplicació bilineal i contínua, ja que

$$\|\psi(v,w)\cdot h\| = \|v\circ h\circ w\| \leq \|v\|\cdot\|h\|\cdot\|w\|\,,$$

desigualtat que implica que

$$\|\psi(v,w)\| \leq \|v\|\cdot\|w\|\,,$$

i per tant, ψ és efectivament bilineal i contínua. Així doncs, com φ' és composició d'aplicacions contínues, deduïm que φ' és contínua.

$\square$

2.3 Teorema del valor mitjà

Teorema 2.3.1. ***(Teorema del valor mitjà)*** *Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sigui F un espai de Banach i siguin f, g dues aplicacions contínues*

$$f : [a,b] \to F, \quad g : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Suposem que f i g són diferenciables en tot punt de l'interval obert (a,b) i que

$$\|f'(x)\| \leq g'(x), \quad x \in (a,b).$$

Aleshores, es compleix que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Demostrarem, però, un resultat més fort. Per fer-ho, necessitem el concepte de derivada lateral.

Definició 2.3.2. *Diem que una aplicació $f : [a,b] \to F$ admet derivada per la dreta en $x \in [a,b)$ si existeix el límit*

$$f'_d(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big).$$

Anàlogament, diem que f admet derivada per l'esquerra en $x \in (a,b]$ si existeix el límit

$$f'_g(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big).$$

Observació 2.3.3. Clarament, per tal que f admeti una derivada $f'(x)$ en $x \in [a, b]$ és necessari i suficient que $f'_d(x)$ i $f'_g(x)$ existeixin i coincideixin.

Teorema 2.3.4. ***(Teorema del valor mitjà, versió forta)*** *Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sigui F un espai de Banach i siguin f, g dues aplicacions contínues*

$$f : [a, b] \to F, \quad g : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Suposem que f i g admeten derivada per la dreta en tot punt de l'interval obert (a, b) i que

$$\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x), \quad x \in (a, b).$$

Aleshores, es compleix que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$. Volem veure que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon, \quad x \in [a, b]. \tag{2.10}$$

Sigui U el conjunt de punts tals que no és compleix (2.10), i volem veure que U és buit. Raonem pel contrarecíproc i suposem, doncs, que U no és buit. Notem que U és un obert, ja que f i g són funcions contínues en x i U és un conjunt de punts que satisfan una desigualtat estricta. Sigui c una cota inferior de U. Aleshores, es compleix que

(i) $c > a$, ja que (2.10) és certa per a tota x suficientment propera a a.

(ii) $c \notin U$, ja que U és un obert.

(iii) $c < b$, ja que altrament U es reduiria a b i, per tant, no seria un obert.

Així doncs, $a < c < b$, podem aplicar la hipòtesi de l'enunciat:

$$\|f'_d(c)\| \leq g'_d(c).$$

Per la definició de les derivades laterals, existeix un interval $x \in [c, c + \eta]$ $(\eta > 0)$ en el qual es compleix que

$$\|f'_d(c)\| \geq \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ i}$$
$$g'_d(c) \leq \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ajuntant aquestes tres últimes tres desigualtats, tenim que

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c).$$

Ara, com $c \notin U$, es verifica que

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a),$$

i finalment, obtenim que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a).$$

Com aquesta desigualtat és certa per a $x \in [c, c+\eta]$, tenim que (2.10) és certa per a tota $x \in [c, c+\eta]$ i, per tant, la cota inferior de U és major o igual a $c+\eta$. Això és una contradicció i, així doncs, U és buit i el teorema queda provat.

$\square$

Corol·lari 2.3.5. *Sigui F un espai de Banach i sigui $f : [a, b] \to F$ una aplicació contínua, que suposarem que admet derivada per la dreta $f'_d(x)$, per a tot $x \in (a, b)$. Si per a una certa constant $K > 0$ es compleix que*

$$\|f'_d(x)\| \leq K, \quad x \in (a, b),$$

aleshores per a tot x_1, x_2, es compleix que

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k|x_2 - x_1|.$$

Fins ara, l'aplicació f era una funció de variable real. Ara ens interessa el cas general on f pren valors en un espai de Banach E.

Proposició 2.3.6. *Siguin E i F espais de Banach i sigui $U \subseteq E$ un obert de E. Si $f : U \to F$ és diferenciable en U i el segment d'extrems a i b està contingut dins de U, aleshores es verifica que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| f'\big((1-t)a + tb\big) \right\|.$$

Demostració. Sigui $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$. Com és una composició d'aplicacions derivables, tenim que h és derivable, i la seva derivada és:

$$h'(t) = f'\big((1-t)a + tb\big) \cdot (b - a),$$

i per tant, tenim que

$$\|h'(t)\| \leq \left\| f'\big((1-t)a + tb\big) \right\| \cdot \|(b - a)\|.$$

Aplicant el corol·lari (2.3.5) a la funció h obtenim la desigualtat desitjada.

$\square$

Si suposem que U és convex, és a dir, que per a tota parella de punts $(a, b) \in U$, el segment d'extrems a i b està contingut en U, aleshores la proposició (2.3.6) ens implica clarament el següent teorema:

Teorema 2.3.7. *(Teorema del valor mitjà en espais de Banach)* *Siguin E, F espais de Banach i sigui $U \subseteq E$ un obert de E. Si $f : U \to F$ és una aplicació diferenciable que, per a una certa constant $K > 0$, compleix que*

$$\|f'(x)\| \leq K, \quad \forall x \in U,$$

aleshores, per a qualssevol $x_1, x_2 \in U$, es compleix que

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|.$$

Vist aquest teorema, ara el volem aplicar per tal de tractar la noció de *diferenciabilitat estricta.*

Definició 2.3.8. *Siguin E i F espais mètrics i $f : E \to F$ una aplicació entre aquests espais. Diem que f és una aplicació k-Lipschitz si per a una certa constant positiva k es compleix que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\,, \quad \forall x, y \in E.$$

Si $k < 1$, aleshores diem que f és contractiva.

Definició 2.3.9. *Sigui f una aplicació entre dos espais de Banach E, F, i sigui $U \subseteq E$. Diem que $f : U \to F$ és estrictament tangent a zero en el punt $a \in U$ si es verifiquen les següents condicions:*

(i) $f(a) = 0$;

(ii) Per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un $r > 0$ tal que, en la bola $\|x - a\| \leq r$, f és ε-Lipschitz.

Observació 2.3.10. En particular, si f és estrictament tangent a zero, tenim que per a $\|x - a\| \leq r$ es compleix que $\|f(x)\| = \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon\,\|x - a\|$, i per tant, f és tangent a zero.

Definició 2.3.11. *Diem que f_1 i f_2 són estrictament tangents en $a \in U$ si $f_1 - f_2$ són estrictament tangents a zero.*

Definició 2.3.12. *Diem que $f : U \to F$ és estrictament diferenciable en el punt $a \in U$ si existeix una aplicació lineal $g : E \to F$ tal que les aplicacions $x \mapsto f(x) - f(a)$ i $x \mapsto g(x - a)$ són estrictament tangents en el punt a.*

Observació 2.3.13. En particular, aquestes dues aplicacions són tangents i, per tant, f és diferenciable en el punt $a \in U$ la derivada $f'(a)$ és g. Per tant, per tal que f sigui estrictament diferenciable en $a \in U$ és necessari i suficient que f sigui diferenciable en a i que per a tot $\varepsilon > 0$ existeixi un $r > 0$ tal que l'aplicació

$$x \mapsto g(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)$$

sigui ε-Lipschitz en la bola $\|x - a\| \leq r$.

Teorema 2.3.14. *Siguin E, F espais de Banach i U un obert de E. Si $f : U \to F$ és diferenciable en U i si $f' : U \to \mathscr{L}(E; F)$ és contínua en a, aleshores f és estrictament diferenciable en el punt a.*

Demostració. La demostració és simplement una aplicació del teorema del valor mitjà (2.3.7). Si posem

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a),$$

aleshores g és diferenciable i tenim que

$$g'(x) = f'(x) - f'(a),$$

i per tant, per hipòtesi tenim que

$$\lim_{x \to a} \|g'(x)\| = 0,$$

i per tant, donat $\varepsilon > 0$, existeix un $r > 0$ tal que per a tot x en la bola $\|x - a\| \leq r$ es compleix que

$$\|g'(x)\| \leq \varepsilon.$$

En virtut del teorema del valor mitjà, deduïm que g és ε-Lipschitz en la bola $\|x - a\| \leq r$, i per tant, f és estrictament diferenciable en el punt a.

$\square$

2.4 Teorema de la funció inversa

Definició 2.4.1. *Siguin E i F espais de Banach, U un obert de E i W un obert de F. Es diu que $f : U \to W$ és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ si f és bijectiva, de classe $\mathcal{C}^1$ (considerada com a aplicació de U en F) i l'aplicació recíproca $g = f^{-1} : W \to U$ és de classe $\mathcal{C}^1$ (considerada com a aplicació de W en E).*

Lema 2.4.2. *Sigui $f : U \to W$ un homeomorfisme. Suposem que f és diferenciable en el punt $a \in U$. Per tal que $g = f^{-1}$ sigui diferenciable en el punt $b = f(a) \in W$ és necessari i suficient que $f'(a) \in Isom(E; F)$ i, en tal cas, tenim que*

$$g'(b) = (f'(a))^{-1}$$

Demostració. La condició és clarament necessària, ja que si g és diferenciable en el punt b, aleshores en virtut del teorema (2.2.2) (derivada d'una aplicació composta) tenim que

$$g'(b) \circ f'(a) = 1_E, \quad f'(a) \circ g'(b) = 1_F,$$

i per tant, $f'(a)$ és un isomorfisme de E en F i $g'(b)$ és l'isomorfisme recíproc. Per tal de veure l'altra implicació, suposem que $f'(a) \in Isom(E; F)$. Com f és diferenciable en el punt a, tenim que

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \|x - a\| \cdot \varphi(x - a)$$

amb $\|x - a\| \cdot \varphi(x - a) = o(\|x - a\|)$. Si ara apliquem la transformació lineal $(f'(a))^{-1}$, resulta que

$$x - a = (f'(a))^{-1} \cdot (f(x) - a) - \|x - a\| \, (f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a),$$

i simplement resta veure que $\|x - a\| \, (f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a) = o(\|f(x) - f(a)\|)$.

El terme $(f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a)$ clarament tendeix a 0 quan x tendeix a a, ja que $(f'(a))^{-1}$ és una aplicació lineal contínua de F en E. Així doncs, la relació anterior implica que

$$\|x - a\| \leq \|f(x) - b\| \cdot \frac{\|(f'(a))^{-1}\|}{1 - \|(f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a)\|}$$

sempre i quan $\|x-a\|$ sigui suficientment petit per tal que $\|(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x-a)\|<1$. Per tant,

$$\begin{aligned}\|x-a\|\,\big\|(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x-a)\big\| &\leq \|f(x)-b\|\cdot(f'(a))^{-1}\cdot\frac{\|(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x-a)\|}{1-\|(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x-a)\|}\\ &= o(\|x-a\|)\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.3. *Sigui $f:U\to W$ un homeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$. Per tal que f sigui un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ és necessari i suficient que, per a tot $x\in U$, $f'(x)$ sigui un element de $Isom(E;F)$.*

Demostració. La condició és clarament necessària. Recíprocament, si $f'(x)\in Isom(E;F)$ per a tot $x\in U$, pel lema anterior tenim que g és diferenciable en tot punt $y\in W$ i que $g'(y)=\big(f'(g(y))\big)^{-1}$. Resta veure que g és de classe $\mathcal{C}^1$, és a dir, que l'aplicació

$$g':W\to\mathscr{L}(F;E)$$

és contínua. Però notem que g' és l'aplicació composta de tres aplicacions contínues:

1. L'aplicació $y\to g(y)$ de W en U, que és contínua ja que f és un homeomorfisme.
2. L'aplicació $x\to f'(x)$ de U en $Isom(E;F)$, que es contínua ja que f és $\mathcal{C}^1$.
3. L'aplicació $u\to u^{-1}$ de $Isom(E;F)$ en $\mathcal{L}(F;E)$, que és contínua (proposició (2.0.9)).

□

Fins ara hem estat suposant que f és un homeomorfisme, però ara ens interessa poder prescindir d'aquesta hipòtesi. Per fer-ho, veiem el teorema següent:

Teorema 2.4.4. ***(Teorema de la funció inversa)*** *Siguin E,F espais de Banach, U un obert de E, i sigui $f:U\to F$ una aplicació de classe $\mathcal{C}^1$. Suposem que en un punt $a\in U$ es compleix que*

$$f'(a)\in Isom(E;F)$$

Aleshores, existeix un entorn obert V de a $V\subset U$ i un entorn obert de W de $b=f(a)$ tals que f és un $\mathcal{C}^1$-difeomorfisme de V en W.

Per demostrar-ho, vegem primerament uns resultats previs que permetran reduir la prova del teorema.

Teorema 2.4.5. *Sigui $B(a,r)$ la bola oberta $\|x-a\| < r$ d'un espai de Banach E i sigui $f : B(a,r) \to E$ una aplicació contínua tal que l'aplicació*

$$x \to x - f(x) =: \varphi(x)$$

sigui contractiva. Sigui b=f(a). Aleshores, existeix un entorn obert V, contingut a $B(a,r)$, tal que f es un homeomorfisme de V en la bola oberta $B(b,(1-k)r)$. A més a més, l'aplicació recíproca

$$g = f^{-1} : B(b,(1-k)r) \to B(a,r)$$

és $[1/(1-k)]$-lipschitciana.

Demostració. Siguin x i $x' \in B(a,r)$. Aleshores

$$f(x) - f'(x) = (x - x') - (\varphi(x) - \varphi(x'))$$

i, per tant,

$$\|f(x) - f'(x)\| \geq \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\| .$$

Ara, donat que φ és k-Lipschitciana, resulta:

$$\|f(x) - f'(x)\| \geq (1-k)\|x - x'\| . \tag{2.11}$$

Ara, notem que per a tot $y \in B(b,(1-k)r)$, existeix un únic $x \in B(a,r)$ tal que $f(x) = y$. En efecte, la unicitat és clara, ja que per la desigualtat anterior, si $f(x) = f(x')$, aleshores $x = x'$. L'existència no és tant immediata, però podem demostrar-la mitjançant el mètode de les aproximacions successives. Per recurrència sobre n, definim la successió de punts següent:

$$\begin{cases} x_0 = a, x_1 = y + \varphi(x_0), \\ x_{n+1} = y + \varphi(x_n). \end{cases} \tag{2.12}$$

Hem de veure que està ben definida, és a dir, que en cada pas, x_n és un element de $B(a,r)$ (ja que φ està definida en aquest obert). Serà suficient veure, doncs, que

$$\|x_n - a\| \leq \frac{1-k^n}{1-k} \|y - f(a)\| , \tag{2.13}$$

ja que tenim que $\|y - f(a)\| < (1-k)r$ i, per tant, es complirà que $\|x_n - a\| < r$. Procedim per inducció: el cas inicial $n = 1$ és directe, ja que

$$x_1 - 1 = y + \varphi(a) - a = y - f(a).$$

Així doncs, demostrem que la propietat és vàlida fins a un cert $n \geq 1$ i vegem que també és compleix per a $n+1$. De la definició dels punts (2.12), notem que

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}),$$

i per tant,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|, \tag{2.14}$$

ja que φ és k-Lipschitz. Aleshores, per la hipòtesi d'inducció, tenim que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - a\| = k^n \|y - f(a)\|,$$

i així doncs,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - a\| \leq \|x_n - a\| + \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left(\frac{1-k^n}{1-k} + k^n\right) \|y - f(a)\| \\ &= \frac{1-k^{n+1}}{1-k} \|y - f(a)\|,\end{aligned}$$

i per tant, és compleix la desigualtat desitjada. Ara, (2.14) demostra que la successió $\{x_{n+1} - x_n\}$ és normalment convergent i, per tant, la successió $\{x_n\}$ és una successió de Cauchy. Si denotem per x el límit, la desigualtat (2.13) implica, prenent límits, que

$$\|x - a\| \leq \frac{1}{1-k} \|y - b\| < r,$$

i per (2.12), tenim que

$$x = y + \varphi(x),$$

és a dir, que $f(x) = y$.

Així doncs, per a $y \in B(b, (1-k)r)$, denotem per $g(y)$ l'únic $x \in B(a, r)$ tal que $f(x) = y$, de manera que g és una aplicació de la bola $B\big(f(a), (1-k)r\big)$ en $B(a, r)$. D'aquesta manera, per la desigualtat (2.11), tenim que si y i y' són dos punts de $B(b, (1-k)r)$, aleshores

$$\|g(y) - g(y')\| \leq \frac{1}{1-k} \|y - y'\|.$$

Per tant, g és $[1/(1-k)]$-Lipschitciana (en particular, g és contínua). Sigui $V \subset B(a, r)$ la imatge de l'aplicació g, aleshores tenim que

$$V = f^{-1}(B(b, (1-k)r)),$$

que és la preimatge d'un obert per una aplicació contínua f. Per tant, V és un obert en $B(a, r)$ (i per tant, un obert en E). Així doncs, hem vist que les aplicacions f i g són contínues, bijectives i inverses l'una de l'altra.

□

Corol·lari 2.4.6. *Siguin E i F espais de Banach, U un obert de E, i sigui $f : U \to F$ una aplicació contínua. Si f és estrictament diferenciable en el punt $a \in U$ i si $f'(a) \in Isom(E; F)$, aleshores existeix un entorn obert V' de a ($V' \subset U$) i un entorn obert W' de $f(a)$ tals que f és un homeomorfisme de V' en W'.*

Demostració. És suficient veure que, com $(f'(a))^{-1}$ és una aplicació de F en E, si considerem l'aplicació composta

$$f_1 = (f'(a))^{-1} \circ f : U \to E.$$

Clarament, f_1 és estrictament diferenciable i, per tant, donat k $(0 < k < 1)$, queda determinat un $r > 0$ tal que l'aplicació $\varphi(x) = x - f_1(x)$ és contractiva en la bola $B(a, r)$. Per tant, és suficient aplicar el teorema (2.4.5) per tal de demostrar la proposició.

□

Demostració. (Teorema 2.4.4). Com f és de classe $\mathcal{C}^1$, en virtut del teorema (2.3.14), f és estrictament diferenciable en en punt a. Ara, pel corol·lari (2.4.6), existeix un obert V' de a $(V' \subset U)$ i un entorn obert W' de $f(a)$ tals que f és un homeomorfisme de V' en W'. Dins d'aquest obert V', existeix un obert $V \subset V'$ tal que $f'(x) \in Isom(E; F)$ per a tot $x \in V$, ja que en ser $Isom(E; F)$ un obert en $\mathscr{L}(E; F)$, la seva preimatge per l'aplicació contínua f' és també un obert en V' que conté a.

Així doncs, si posem $W = f(V)$, tenim que W és un obert en W', ja que f és un homeomorfisme de V' en W', i per tant, f és homeomorfisme de V en W. Finalment, en virtut del teorema (2.4.3), tenim que f és un $\mathcal{C}^1$-difeomorfisme de V en W.

□

2.5 Teorema de la funció implícita

El nostre objectiu de tot el capítol és estudiar les solucions (x, y) de l'equació $f(x, y) = 0$ "suficientment properes"a (a, b). Per fer-ho, ja estem en condicions d'enunciar i demostrar el següent teorema:

Teorema 2.5.1. ***(Teorema de la funció implícita en espais de Banach)*** *Siguin E, F i G espais de Banach, U un obert de $E \times F$ i $f : U \to G$ una aplicació de classe $\mathcal{C}^1$. Sigui (a, b) un punt de U $(a \in E, b \in F)$. Suposem que*

$$f(a, b) = 0.$$

Suposem també que la derivada parcial $f'_y(a, b) \in \mathcal{L}(F; G)$ és un isomorfisme de F en G. Sota aquestes hipòtesis, existeix un entorn obert $V \subset E \times F$ del punt $(a, b) \in U$, existeix un entorn obert W de a i existeix una aplicació de classe $\mathcal{C}^1$, $g : W \to F$, tals que es compleix la igualtat següent:

$$\{(x, y) \in V : \; f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V : \; x \in W, \; y = g(x)\}.$$

És a dir, les solucions de l'equació $f(x, y) = 0$ en V venen donades per $y = g(x)$.

Demostració. Per demostrar aquest teorema, utilitzarem el teorema d'inversió local (2.4.4). Considerem, doncs, l'aplicació

$$
\begin{aligned}
f_1 : \ U &\longrightarrow E \times G \\
(x, y) &\longmapsto f_1(x, y) = (x, f(x, y)).
\end{aligned}
$$

Clarament, f_1 és de classe $\mathcal{C}^1$ a U ja que les seves dues components ho són. La seva derivada $f_1'(a, b)$ és l'aplicació lineal següent:

$$
\begin{aligned}
f_1'(a, b) : \ E \times F &\longrightarrow E \times G \\
(h, k) &\mapsto (h, f_x'(a, b) \cdot h + f_y'(a, b) \cdot k)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Com $f_y'(a, b) \in Isom(E; F)$ per hipòtesi, és clar que (2.15) és un isomorfisme i el seu recíproc és

$$
(h', k') \mapsto \big(h', (f_y')^{-1} \cdot k' - (f_y')^{-1} \circ f_x' \cdot h'\big).
$$

Podem, per tant, aplicar el teorema d'inversió local (2.4.4) a l'aplicació f_1 en un entorn de $(a, b) \in U$. En virtut d'aquest teorema, existeix un entorn obert $V \subset U$ en (a, b) i existeix en $E \times G$ un entorn W_1 de $f_1(a, b) = (a, 0)$ tals que f_1 és un $\mathcal{C}^1$-difeomorfisme de V en W_1. Sigui g_1 el difeomorfisme recíproc. Tenim que

$$
\begin{aligned}
g_1 : \ W_1 \subset E \times G &\longrightarrow E \times F \\
(x, z) &\longmapsto g_1(x, y) = (x, g(x, y)).
\end{aligned}
$$

on es defineix una funció $g : W_1 \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Com f_1 i g_1 són dos homeomorfismes recíprocs, les dues condicions següents són equivalents:

(i) $(x, y) \in V \ \ i \ f(x, y) = z$;

(ii) $(x, z) \in W_1 \ \ i \ g(x, z) = y$.

Ara, prenent $z = 0$, tenim que la condició (i) és el conjunt $\{(x, y) \in V : \ f(x, y) = 0\}$. Resta de veure que (ii) és l'altre conjunt del teorema i haurem acabat la demostració. Considerem la inclusió de E en $E \times F$, identificant $x \in E$ amb $(x, 0) \in E \times F$. Aleshores, $(x, 0) \in W_1$ expressa que x pertany a la intersecció de W_1 amb E, que és un obert W de E que conté el punt a (ja que W_1 conté el punt $(a, 0)$). Ara, si prenem la funció

$$
\begin{aligned}
\hat{g} : \ E &\longrightarrow F \\
x &\longmapsto \hat{g}(x) = g(x, 0).
\end{aligned}
$$

$\hat{g}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ en l'obert W. Aleshores, la condició (ii), per a $z = 0$ s'expressa com

$$
x \in W, \quad y = g(x),
$$

que és exactament el conjunt $\{(x, y) \in V : \ x \in W, \ y = g(x)\}$, quedant així demostrant el teorema.

$\square$

NOTA: l'obert W no és necessàriament connex, però conté un obert W' que és connex i conté el punt a.

3 Equacions Diferencials Quasi-periòdiques

En aquesta secció el nostre objectiu és estudiar què passa amb un punt fix d'un sistema determinat quan el pertorbem amb una funció quasi-periòdica suficientment petita. Per veure-ho, veiem primer el concepte de quasi-periodicitat:

Definició 3.0.1. *Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és quasi-periòdica amb freqüències bàsiques $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ si existeix una funció $F : \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = F(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, on F és 2π periòdica en tots els seus arguments i $\theta_j = \omega_j t$ per $j = 1, \ldots, r$.*

Observació 3.0.2. Els nombres $\omega_1, \ldots, \omega_r$ són independents sobre els racionals, és a dir, per a tot vector no nul d'enters $k = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$, $\langle k, \omega \rangle \neq 0$. D'altra manera podríem reduir el nombre de freqüències.

Notació. *Indiquem per $\langle k, \omega \rangle$ el producte escalar de dos vectors. És a dir,*

$$\langle k, \omega \rangle = k_1\omega_1 + \cdots + k_r\omega_r.$$

Definició 3.0.3. *Denotem per $\mathcal{Q}(\omega)$ la classe de funcions analítiques quasi-periòdiques amb freqüències $\omega = (\omega_1, ..., \omega_r)$.*

Observació 3.0.4. Clarament, la classe $\mathcal{Q}(\omega)$ dependrà del vector de freqüències ω. Ara bé, si $\tilde{\omega} = A\omega$, on A és una matriu a coeficients enters i de determinant ± 1, aleshores $\mathcal{Q}(\tilde{\omega})$ defineix la mateixa classe que $\mathcal{Q}(\omega)$.

Definició 3.0.5. *La serie de Fourier d'una funció quasi-periòdica $f \in \mathcal{Q}(\omega)$ és:*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} \widehat{f}(k) e^{i\langle k, \omega \rangle t},$$

on $k = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ és un vector d'indexs i

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^r} \overbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}^{r)} F(\theta) e^{i\langle k, \theta \rangle} d\theta_1 \ldots d\theta_r, \tag{3.1}$$

és el respectiu coeficient de Fourier, on $F(\theta)$ és la funció associada a f.

3.1 Pertorbacions de punts d'equilibri

Donada una equació diferencial autònoma amb un punt d'equilibri a l'origen:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

el nostre objectiu d'aquesta secció és estudiar la dinàmica a prop d'aquest punt d'equilibri quan pertorbem el sistema amb una funció quasi-periòdica $g(x, \hat{\theta})$, és a dir, volem estudiar l'equació següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \theta_0, \dots, \theta_r), \\ \dot{\theta}_0 = \omega_0, \\ \quad \vdots \\ \dot{\theta}_r = \omega_r. \end{cases}$$

on $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ és un vector de freqüències incommensurables, per a ε suficientment petit. Escrivim $\hat{\theta} = (\theta_0, \theta)$, on $\theta_0 \in \mathbb{T}$ és la primera component de $\hat{\theta}$ i $\theta \in \mathbb{T}^r$ és el vector format les altres r components. Aleshores, donat un punt inicial $(x^{(0)}, \theta^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^r$ i considerant la secció de Poincaré per a $\theta_0 = 0 \pmod{2\pi}$, tenim que

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \theta^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \theta_1^{(0)} \\ \vdots \\ \theta_r^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \theta_0^{(0)} = 0 \\ \theta_1^{(0)} \\ \vdots \\ \theta_r^{(0)} \end{pmatrix} \xmapsto{\Phi_{t=2\pi/\omega_0}} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \theta_0^{(1)} = 2\pi \\ \theta_1^{(1)} = \theta_1^{(0)} + \tilde{\omega}_1 \\ \vdots \\ \theta_r^{(1)} = \theta_r^{(0)} + \tilde{\omega}_r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \theta^{(0)} + \tilde{\omega} \end{pmatrix},$$

on $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r)$ i $\tilde{\omega}_k = 2\pi \frac{\omega_k}{\omega_0}$ $(1 \leq k \leq r)$. Diem $P = P(x, \theta, \varepsilon)$ a aquesta aplicació. Aleshores, obtenim el sistema discret següent:

$$\begin{cases} \bar{x} = P(x, \theta, \varepsilon), \\ \bar{\theta} = \theta + \tilde{\omega}. \end{cases}$$

Per a $\varepsilon = 0$, hi ha un punt fix:

$$P(0, \theta, 0) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^r.$$

Volem veure que passa quan $\varepsilon > 0$ prou petit. Així doncs, per tal de resoldre el nostre problema, hem de resoldre l'equació funcional següent:

$$P(\varphi(\theta), \theta, \varepsilon) - \varphi(\theta + \tilde{\omega}) = 0.$$

Per fer-ho, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} F\colon\ E \times U \subseteq E \times \mathbb{R} &\longmapsto E \\ (\varphi(\theta), \varepsilon) &\longmapsto P(\varphi(\theta), \theta, \varepsilon) - \varphi(\theta + \tilde{\omega}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

on E és un espai de funcions on està definit φ. Considerarem, per exemple, els espais

$$E_s = \{\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathscr{C}^s, s \geq 1\}.$$

Els zeros d'aquesta aplicació donaran lloc a solucions quasi-periòdiques. Per tal de poder aplicar el teorema de la funció implícita, hem d'estudiar primerament el diferencial $D_xP(0,\theta,\varepsilon=0)$, que és el diferencial del flux a temps $t=\frac{2\pi}{\omega_0}$. Per fer-ho, hem de considerar les equacions variacionals:

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x),\\ \dot{\theta}=\omega,\\ \dot{V}=\big(D_xf(x)+\varepsilon D_xg(x,\theta)\big)V.\end{cases}$$

Per a $\varepsilon=0$ el terme de la g s'anul·la i, per tant, és independent de θ $\big($*i. e.* posem $D_xP(0,0):=D_xP(0,\theta,0)\big)$, i per a $x_0=0$ tenim que $f(x_0)=0$ i, per tant, la seva òrbita és zero. Així doncs, obtenim un sistema lineal a coeficients constants:

$$\dot{V}=D_xf(0)V.$$

La solució és, per tant,

$$V(t)=\exp[D_xf(0)t],$$

i si prenem $t=\frac{2\pi}{\omega_0}$, deduïm finalment que

$$D_xP(0,\theta,0)=\exp\left[D_xf(0)\frac{2\pi}{\omega_0}\right].$$

Definició 3.1.1. *Denotarem per $T_h\colon E\to E$ l'operador translació, que actua de la següent manera: $T_h\varphi(\theta)=\varphi(\theta-h)$.*

Retornant a l'equació (3.2), per tal de poder resoldre-la, hem d'estudiar el diferencial de la funció F en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}D_\varphi F(0,0):\ & E\to E\\ & \varphi\mapsto\big(D_xP(0,0)-T_{-\tilde{\omega}}\big)\varphi.\end{aligned}$$

Per a poder aplicar el teorema de la funció implícita, és necessari que aquest diferencial sigui un isomorfisme. Denotem per $A:=D_xP(0,0)=\exp\big[D_xf(0)2\pi/\omega_0\big]$ i siguin λ_i, $1\le i\le n$, els valors propis de $D_xf(0)$. Vegem primerament la injectivitat:

Hem de veure que el nucli de l'aplicació $D_\varphi F(0,0)$ és buit. Suposem que no ho és, és a dir, volem veure sota quines condicions es compleix que

$$\varphi(\theta+\tilde{\omega})=A\varphi(\theta).$$

Si suposem que A diagonalitza, aleshores tenim que $C^{-1}AC=D$, per unes certes aplicacions C i D, on D és diagonal. Fent el canvi de variables $\varphi(\theta)=C\psi(\theta)$, resulta que

$$C\psi(\theta+\tilde{\omega})=AC\psi(\theta)$$

d'on deduïm que

$$\psi(\theta+\tilde{\omega})=D\psi(\theta)\tag{3.3}$$

I, per tant, tenim n equacions de la forma

$$\psi_j(\theta + \tilde{\omega}) = e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}\psi_j(\theta),$$

on $e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}$ són els valors propis de A. Si considerem ara les seves sèries de Fourier:

$$\begin{cases} \psi_j(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^r} \hat{\psi}_j(k) \cdot e^{i\langle k,\theta\rangle}, \\ \psi_j(\theta + \tilde{\omega}) = \sum_{\in\mathbb{Z}^r} \hat{\psi}_j(k) \cdot e^{i\langle k,\theta\rangle} \cdot e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}, \end{cases}$$

Així doncs, si es compleix la igualtat (3.3), tindrem igualtat en els coeficients de Fourier i, per tant,

$$\hat{\psi}_j(k) = e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}\hat{\psi}_j(k) \cdot e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^r, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Si suposem que el coeficient no és nul, aleshores si per a tot $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_j \neq e^{ik\tilde{\omega}}$, tenim que l'aplicació és injectiva.

Per tal de veure l'exhaustivitat, hem de veure si donat un $\tilde{\chi} \in E$ qualsevol, existeix un element $\varphi \in E$ tal que

$$A\varphi(\theta) - T_{-\tilde{\omega}}\varphi(\theta) = \tilde{\chi}(\theta).$$

Com en el cas de l'injectivitat, fem el canvi de variables $C^{-1}AC = D$, per unes certes aplicacions C i D, on D és diagonal, i posem $\varphi(\theta) = C\psi(\theta)$, i aleshores tenim que

$$AC\psi(\theta) - C\psi(\theta + \tilde{\omega}) = \tilde{\chi}(\theta),$$

i si hi posem $\chi = C^{-1}\tilde{\chi}$ per simplificar la notació, deduïm que

$$D\psi(\theta) - \psi(\theta + \tilde{\omega}) = \chi(\theta).$$

Si considerem l'equació j-èsima, tenim que

$$e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}\psi_j(\theta) - \psi_j(\theta + \tilde{\omega}) = \chi_j(\theta).$$

I considerant ara les respectives sèries de Fourier i igualant els coeficients, tenim que es complirà la igualtat següent:

$$e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}\widehat{\psi}_j(k) - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}\widehat{\psi}_j(k) = \widehat{\chi}_j(k).$$

Si suposem que $\lambda_j \neq e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}$ per a tot $k \in \mathbb{Z}^r$ (fet que no és cap restricció, ja que és necessari per tal de tenir injectivitat) i aïllem, notem que serà necessari que els coeficients de ψ siguin de la forma

$$\widehat{\psi}_j(k) = \frac{\widehat{\chi}_j(k)}{e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0} - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}}.$$

Per tant, hem d'estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^r} \frac{\widehat{\chi}_j(k)}{e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0} - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}} e^{i\langle k,\theta\rangle}.$$

Clarament, si $|e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}| \neq 1$, aleshores no tenim cap problema de convergència, ja que tindriem que $|e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0} - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}| > C$, per a tot $k \in \mathbb{Z}^r$ i per a una certa constant $C > 0$.

Així doncs, si cap dels valors propis de $D_x f(0)$ és imaginari pur, és a dir, si per a tot $\lambda \in spec\, D_x f(0)$, $\lambda \notin i\mathbb{R}$, en virtut del teorema de la funció implícita, l'equació funcional (3.2) defineix una solució quasi-periòdica per a ε prou petit, que convergeix al punt fix quan ε tendeix cap a zero.

Què passa, però, si $|e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0}| = 1$? Poden els coeficients de ψ decaure prou ràpidament per a assegurar la convergència? Els termes $e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}$ omplen densament el cercle unitat, de manera que el denominador estarà arbitràriament proper a zero. Malgrat això, sota certes condicions, la resposta és afirmativa i podem encara tenir esperança!

Aquest problema es coneix com el problema dels petits divisors, i si ω compleix certes condicions (vegeu capítol 4), aleshores pot aconseguir-se que els denominadors no tendeixin a zero tan ràpidament.

Tot i això, la convergència no ens assegura que ens hi quedem al mateix espai. En dividir pel terme $e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0} - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}$ podríem perdre velocitat de convergència dels coeficients, de manera que si $\hat{\psi}$ és una funció de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, per a ψ tan sols podríem assegurar que és de classe $\mathcal{C}^{r-2}$.

Si $\hat{\psi}$ és una funció analítica, els seus coeficients decauen exponencialment i, si hem imposat condicions prou bones sobre $e^{\lambda_j 2\pi/\omega_0} - e^{i\langle k,\tilde{\omega}\rangle}$, aleshores la sèrie que defineix ψ també serà analítica.

4 Els petits divisors

En el capítol anterior hem afirmat que, malgrat que la successió $\{e^{ik\omega}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ omple densament el cercle unitat i, per tant, el terme $\mu - e^{ik\omega}$ pot ser arbitràriament petit per a tota $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$, una sèrie amb aquest terme com a denominador pot convergir si μ compleix certes condicions. En aquest capítol, el nostre objectiu és donar alguna condició suficient per tal de garantir aquest fet.

Teorema 4.0.1. *Sigui $I = [0,1]$ l'interval unitari i sigui $\varepsilon > 0$. Aleshores existeix un obert $U \subset I$ que conté tots els racionals i tal que la seva mesura de Lebesgue és $\mu(U) < \varepsilon$.*

Demostració. Siguin C i τ constants positives. Si considerem la reunió

$$U := \bigcup_{\substack{q\geq 1\\ 1\leq p\leq q}} \left(\frac{p}{q} - \frac{C}{q^\tau}, \frac{p}{q} + \frac{C}{q^\tau}\right)$$

on $p, q \in \mathbb{N}$, notem que U és un obert, ja que és una reunió numerable d'oberts, i que conté tots els racionals en I. La seva mesura és:

$$\mu(U) \leq \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{q} \frac{2C}{q^\tau} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2C}{q^{\tau-1}}.$$

Ara, si prenem $\tau > 2$ i $C < \big(\varepsilon/2\zeta(\tau-1)\big)$, on $\zeta(x)$ és la funció zeta de Riemann, aleshores tenim que

$$\mu(U) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2C}{q^{\tau-1}} = 2C\zeta(\tau-1) < \varepsilon.$$

$\square$

Definició 4.0.2. *Sigui $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ i $\beta \geq 1$. Definim el conjunt (γ,β)-diofantí com*

$$\Gamma_{\gamma,\beta} := \left\{\lambda \in (0,1) : \big|\lambda q - p\big| \geq \frac{\gamma}{q^\beta}, \forall q = 1,2,3\ldots, \forall p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

El resultat anterior implica que la *majoria* de $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ estan *prou lluny dels racionals*, en el sentit que per a $\beta > 1$ i una certa constant positiva $\gamma < 1/2$, el conjunt $\Gamma_{\gamma,\beta}$ té mesura positiva i, per tant, no és numerable. Per a $\beta = 1$ i $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{1}{2}$, però, se sap que $\Gamma_{\gamma,\beta}$ és numerable (vegeu [1]).

Per la forma i la construcció del conjunt, una pregunta natural a fer-se és si els conjunts $\Gamma_{\gamma,\alpha}$ formen un cantorià.

Definició 4.0.3. *Un conjunt $K \subset X$ és diu que és un conjunt de Cantor (o que és un cantorià) si és compleix que*

i) És compacte.

ii) *És perfecte, és a dir, no té punts aïllats.*

iii) *És totalment disconnex, és a dir, no conté cap obert i, per tant, els conjunts connexos són punts.*

Clarament, els conjunts $\Gamma_{\gamma,\alpha}$ són compactes i totalment disconnexos, ja que certament $\Gamma_{\gamma,\alpha} \cap \mathbb{Q} = \phi$. Ara bé, en general, $\Gamma_{\gamma,\alpha}$ pot tenir punts aïllats, com demostra, per exemple, el següent resultat (vegeu [2]):

Proposició 4.0.4. *Sigui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Definim*

$$\bar{\omega} := \frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}, \quad \gamma := \bar{\omega}, \quad \beta := \frac{\log(\bar{\omega}+n)}{\log(n)}.$$

Aleshores, $\bar{\omega}$ és un punt aïllat de $\Gamma_{\gamma,\beta}$.

No obstant això, per a β suficientment gran, molts d'aquests conjunts no tenen punts aïllats i, per tant, es compleix la següent proposició (vegeu [1]):

Proposició 4.0.5. *Sigui $\beta > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Aleshores, gairebé per a tot $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, $\Gamma_{\gamma,\beta}$ és un conjunt de Cantor.*

Definició 4.0.6. *Siguin $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ i $\beta > 1$ constant positives. Si $\omega \in (0, 2\pi)$ compleix les infinites desigualtats*

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} q - p \right| \geq \frac{\gamma}{q^\beta}, \quad \forall q = 1, 2, 3 \ldots, \forall p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{4.1}$$

aleshores diem que ω compleix la condició diofàntica de paràmetres γ i β, o simplement que ω és un nombre diofàntic.

Definició 4.0.7. *Definim el conjunt de nombres diofàntics Γ com*

$$\Gamma := \bigcup_{\beta \geq 1} \bigcup_{\gamma > 0} \Gamma_{\gamma,\beta}.$$

Ara doncs, un cop feta aquesta discussió, vegem un resultat que generalitza en part l'equació del capítol anterior i que ens serà útil en els propers capítols.

Teorema 4.0.8. *Sigui ω un número real que compleixi la condició diofàntica (4.1) per a algunes constants γ i β, sigui $h = h(x)$ una funció de valors complexos, 2π-periòdica, de mitjana 0 i analítica a la banda $|\mathrm{Im}\, x| < r$, on satisfà que $|h(x)| \leq M$, per a alguna constant positiva M. Aleshores, existeix una única solució u de l'equació diferència*

$$pu(x+\omega) - qu(x) = h(x), \tag{4.2}$$

on $p, q \in \mathbb{R}$ i satisfan que $p + q > 0$. A més a més, u és analítica en la banda $|\mathrm{Im}\, x| < r$, és 2π-periòdica, té mitjana zero i satisfà la cota

$$|u(x)| \leq \frac{\pi M}{\gamma(p+q)(2\varrho)^\beta} \sqrt{\frac{\Gamma(2\beta+1)}{3}}, \quad |\mathrm{Im}\, x| < r - \varrho, 0 < \varrho < r.$$

Demostració. De manera totalment anàloga al que hem fet en el capítol anterior, si expressem les funcions en terme de les seves sèries de Fourier, aleshores tenim que la solució u serà

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{h}(k)}{pe^{ik\omega} - q} e^{ikx}, \tag{4.3}$$

on hem denotat per $\widehat{h}(k)$ els coeficients de Fourier de la funció h, que prenen la forma següent:

$$\widehat{h}(k) = \int_0^{2\pi} h(x)e^{-ikx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La sèrie estarà únicament determinada si demanem que $u_0 = 0$, ja que la mitjana de h és nul·la, és a dir, $h_0 = 0$.

Per a tot $a \in \mathbb{R}$, $|a| < r$, la funció $F_a(x) := h(x + ia)$ és analítica en la banda $|\operatorname{Im} x| < r - |a|$. Els seus coeficients de Fourier són:

$$\widehat{F_a}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x + ia)e^{-ikx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aleshores, per la desigualtat de Bessel i utilitzant que $|h(x)| \leq M$, tenim que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{F_a}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(x + ia)|^2 dx \leq M^2.$$

Ara, notem que $\widehat{F_a}(k)e^{ak}$ és independent de a, si $|a| < r$. En efecte, en virtut del teorema de derivació sota signe integral, tenim que

$$\frac{d\big(\widehat{F_a}(k)e^{ak}\big)}{da} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\frac{d}{dx}\Big(h(x + ia)e^{-ikx+a}\Big)dx = 0,$$

que s'anul·la per ser l'integral de la derivada d'una funció 2π periòdica. Així doncs, veiem que

$$\widehat{(F_a)}(k)e^{ak} = \widehat{(F_0)}(k) = \widehat{h}(k),$$

i conseqüentment,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2ak} \leq M^2.$$

Prenent $a = s$ i $a = -s$, per a $0 < s < r$, tenim que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2s|k|} = \sum_{k\geq 0} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2sk} + \sum_{k\leq 0} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2sk} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2sk}$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{-2sk} \leq 2M^2.$$

Finalment, prenent el límit $s \to r$, obtenim la desigualtat següent:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{2r|k|} \leq 2M^2. \tag{4.4}$$

Aplicant aquesta desigualtat i la desigualtat de Cauchy-Schwarz a la sèrie (4.3), per a $\varrho \in \mathbb{R}$ i per a tot x tal que $|\mathrm{Im}\, x| < r - \varrho$ tenim que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} \left| \frac{\widehat{h}(k)e^{ikx}}{pe^{ik\omega} - q} \right| \leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} |\widehat{h}(k)|e^{r|k|} \frac{e^{-\varrho|k|}}{|pe^{ik\omega} - q|} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(k)|^2 e^{2r|k|}} \sqrt{\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} \frac{e^{-2\varrho|k|}}{|pe^{ik\omega} - q|^2}} \leq M\sqrt{\phi(\varrho)}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

on

$$\phi(\varrho) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\varrho|k|}}{|pe^{ik\omega} - q|^2}. \tag{4.6}$$

Si $\phi(\varrho) < \infty$ per a $0 < \varrho < r$, aleshores la sèrie de (4.3) convergeix absoluta i uniformement en tot subdomini compacte de la banda $|\mathrm{Im}\, x| < r$, i per tant representa una funció analítica en aquesta banda que satisfà l'equació diferència (4.2). La unicitat de u la obtenim directament de la pròpia sèrie de Fourier de u i, per tant, només resta acotar correctament el terme $\phi(\varrho)$.

Per la cota dels petits divisors $pe^{ik\omega} - q$, definim

$$D_k = \min_{l\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\omega}{2\pi}k - l \right|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

de manera que $0 < \pi D_k < \pi/2$. D'aquí, obtenim que

$$\begin{aligned} |pe^{ik\omega} - q|^2 &= (p-q)^2 \cos^2 \frac{\omega}{2}k + (p+q)^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}k \\ &\geq (p+q)^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}k \geq 4(p+q)^2 \left(\frac{\omega}{2\pi}k\right)^2 \geq 4(p+q)^2 D_k^2, \quad k = 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

on hem utilitzat la desigualtat $\frac{sinx}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ per a $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Així doncs, podem acotar $\phi(\varrho)$ com

$$\phi(\varrho) \leq \frac{1}{(p+q)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\varrho k}}{D_k^2} = \frac{1}{(p+q)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{D_k^2} \right) (e^{-2\varrho} - e^{-2\varrho(n+1)}). \tag{4.7}$$

Definim ara

$$D_k^* = \min_{1\leq j\leq k} D_j, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

i considerem $d_k = \frac{\omega}{2\pi}k - l_k$, on $l_k \in \mathbb{Z}$ és triat de manera que $|d_k| = D_k$. Com $\omega/2\pi$ és irracional, podem ordenar els números positius del conjunt $\{d_1, \ldots, d_n\}$:

$$0 < d_{k_1} < d_{k_2} < \cdots < d_{k_m} < \frac{1}{2}.$$

Clarament es compleix que

$$0 < d_{k_j+1} - d_{k_j} = D_{|k_{j+1}-k_j|} \geq D_n^*, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

i com $1 \leq k_j \leq n$, tenim que $1 \leq |k_{j+1} - k_j| < n$. Per tant,

$$d_{k_j} \geq j D_n^*, \quad j = 1, \ldots, m$$

de manera que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{D_{k_j}^2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d_{k_j}^2} \leq \frac{1}{D_n^{*2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6 D_n^{*2}}. \tag{4.8}$$

Si ara repetim els arguments de manera anàloga pels números negatius del conjunt $\{d_1, \ldots, d_n\}$ i sumem les dues desigualtats, deduïm que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{D_k^2} \leq \frac{\pi^2}{3 D_n^{*2}}. \tag{4.9}$$

Com ω satisfà la condició diofàntica (4.1) per a constants γ i β, tenim que $D_k^* \geq \gamma k^{-\beta}$ per a tot $k \geq 1$. Per tant, substituint aquests dos resultats a (4.7), obtenim que

$$\phi(\varrho) \leq \frac{\pi^2}{3\gamma^2 (p+q)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta} (e^{-2\varrho n} - e^{-2\varrho(n+1)}). \tag{4.10}$$

I per tal de concloure la prova només resta acotar aquest sumatori. Tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta} (e^{-2\varrho n} - e^{-2\varrho(n+1)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta} \int_n^{n+1} 2\varrho e^{-2\varrho x} dx \\ \leq \int_0^{\infty} x^{2\beta} 2\varrho e^{-2\varrho x} dx &= (2\varrho)^{-2\beta} \int_0^{\infty} x^{2\beta} e^{-x} dx = (2\varrho)^{-2\beta} \Gamma(2\beta+1).\end{aligned}$$

I, per tant, per (4.5), obtenim finalment que

$$|u(x)| \leq M\sqrt{\phi(\varrho)} \leq M \sqrt{\frac{\pi^2 \Gamma(2\beta+1)}{3\gamma^2 (p+q)^2 (2\varrho)^{2\beta}}} = \frac{\pi M}{\gamma (p+q)(2\varrho)^{\beta}} \sqrt{\frac{\Gamma(2\beta+1)}{3}} \tag{4.11}$$

$\square$

5 El Teorema Twist de Moser

En el capítol 3 hem vist condicions per tal que una solució quasi-periòdica persisteixi. En particular, hem vist que si els valors propis del diferencial de l'aplicació no són cap d'ells imaginaris purs, aleshores persisteixen. En aquest capítol ens preguntem si podem considerar altres condicions. En concret, volem estudiar la persistència de les solucions quasi-periòdiques al voltant d'un punt fix el·líptic. Per fer-ho, però, ens reduïm al cas de difeomorfismes del pla.

Sigui $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació analítica definida a l'entorn d'un punt fix, que suposarem a l'origen. Suposem que T és conservativa, és a dir, que preserva la mesura de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ (i, per tant, que el determinant del seu Jacobià és 1). Suposem també que els valors propis d'aquest Jacobià a l'origen es poden expressar com $\lambda_\pm = e^{\pm i\alpha_0}$, per a un cert valor α_0. La dinàmica induïda per la part lineal serà simplement una rotació d'angle α_0, i per tant, cada trajectòria tindrà lloc sobre un cert cercle centrat a l'origen. Si $\alpha_0/(2\pi)$ és irracional, les seves òrbites seran denses sobre cada cercle invariant, mentre que si α_0 és racional les trajectòries seran periòdiques.

Ens preguntem, doncs, com actúen els termes no lineals de T. Per estudiar-ho, podem considerar una sèrie de transformacions de forma normal. La idea general és la següent (vegeu [6]):

Introduïm la notació complexa $z = x+iy$, $\lambda = e^{i\alpha_0}$ i expandim en sèrie l'aplicació T:

$$T(z) = \lambda z + \sum_{k\geq 2} \sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j} z^{k-j} \bar{z}^j, \tag{5.1}$$

i volem buscar un canvi de variable de la forma

$$C_2(z) = \eta + b_{2,0}\eta^2 + b_{1,1}\eta\bar{\eta} + b_{0,2}\bar{\eta}^2,$$

tal que l'aplicació $\hat{T}$ definida com

$$\hat{T}(\eta) = (C_2 \circ T \circ C_2^{-1})(\eta),$$

no tingui termes de segon ordre. Operant, s'obté que s'ha de complir que

$$b_{2,0} = \frac{a_{2,0}}{\lambda(\lambda-1)}, \quad b_{1,1} = \frac{a_{1,1}}{\lambda(\lambda^{-1}-1)}, \quad b_{0,2} = \frac{a_{0,2}}{\lambda(\lambda^{-3}-1)}.$$

Clarament, hem d'imposar alguna condició per tal de garantir que aquests denominadors no s'anul·len. Per tal de simplificar, suposarem que λ no és una arrel de la unitat, és a dir, suposarem que $\alpha_0/(2\pi)$ és irracional). Aquesta condició ens assegura que els denominadors anteriors i els que ens apareixeran a continuació no s'anul·len. Per tal de simplificar la notació, reanomenem l'aplicació transformada $\hat{T}$ com T.

El procés no té perquè aturar-se a segon ordre, sinó que pot continuar-se fins un ordre tan gran com es vulgui. Així doncs, per tal d'eliminar els termes d'ordre k, el canvi de variable ve donat per

$$b_{k-j,j} = \frac{a_{k-j,j}}{\lambda(\lambda^{k-1-2j} - 1)}, \quad 0 \leq j \leq k, \tag{5.2}$$

on els valors $a_{k-j,j}$ no són els que apareixen a l'expansió inicial (5.1), sinó que són els que hi apareixen a l'expansió de T un cop eliminat els termes de grau $k - 1$.

Notem que si k és senar i $j = (k-1)/2$, aleshores el denominador de $b_{k-j,j} = b_{j+1,j}$ és sempre zero. Per tant, excloem aquests monomis del canvi definit per (5.2).

Així doncs, en fer un número finit de canvis de variable, T pren la forma

$$T(z) = \lambda z + a_{2,1} z^2 \bar{z} + a_{3,2} z^3 \bar{z}^2 + \cdots + a_{s+1,s} z^{s+1} \bar{z}^s + O_{2s+2}.$$

I si fem servir que $z\bar{z} = r^2$, aleshores podem reescriure l'aplicació anterior com

$$T(z) = e^{i(\alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^4 + \cdots + \alpha_s r^{2s})} z + O_{2s+2},$$

on pot provar-se que els valors $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ són reals.

Com la successió $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ omple plenament la circumferència unitat, els valors λ^{k-1-2j} poden estar arbitràriament propers a 1, fet que impedeix la convergència de la forma normal. No obstant, en el nostre cas ens interessa considerar la transformació fins a ordre s. Si menyspreem el reste O_{2s+2}, obtenim una aplicació amb dinàmica integrable, que sota coordenades polars pren la forma

$$\begin{cases} \bar{\theta} = & \theta + \alpha(r), \\ \bar{r} = & r, \end{cases} \tag{5.3}$$

on $\alpha(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \cdots + \alpha_s r^{2s}$. Les òrbites es troben sobre els cercles invariants, on l'angle de rotació que defineix la dinàmica sobre cada cercle depèn del seu radi.

Definició 5.0.1. *Diem que una aplicació de la forma* (5.3) *és una aplicació del tipus twist.*

Les aplicacions d'aquest tipus són, dins dels sistemes discrets, l'equivalent als hamiltonians integrables en els sistemes continus.

Ens interessa estudiar precisament com canvia la dinàmica a prop de l'origen si pertorbem l'aplicació. Per fer-ho, considerarem l'aplicació twist pertorbada:

$$\begin{cases} \bar{\theta} = & \theta + \alpha(r) + f(\theta, r), \\ \bar{r} = & r + g(\theta, r), \end{cases}$$

definida en la corona

$$\mathcal{C} := \{r : r \in [a_0, b_0], 0 < a_0 < b_0\},$$

i on f, g són funcions reals, analítiques, 2π-periòdiques en θ i suficientment petites. Suposarem que $\frac{d\alpha}{dr}(r) > 0$ per a tot $r \in \mathcal{C}$ (aquesta hipòtesi s'acostuma a anomenar *condició de no degeneració*).

Aleshores, fent un canvi de variables, tenim que l'aplicació pren la forma

$$\begin{cases} \bar{x} = & x + y + \omega_y + f(x,r), \\ \bar{y} = & y + g(x,r). \end{cases}$$

on x és la nova variable angular, ω_y representa el nou angle de rotació del cercle de radi y. Les funcions f i g seran, en general, diferents, però seguiran sent funcions reals, analítiques i 2π-periòdiques en x si les originals ho eren.

Abans d'enunciar el teorema twist de Moser, vegem la següent proposició, que ens permetrà afeblir lleugerament les hipòtesis.

Definició 5.0.2. *Diem que una aplicació A, definida en un domini $\mathcal{D}$, compleix la propietat de l'intersecció si tota corba tancada, acotada, analítica i que envolta l'origen sempre interseca la seva imatge per l'aplicació A. És a dir, si tota corba de la forma*

$$y = \varphi(x) = \varphi(x + 2\pi), \quad |\varphi(x)| < r_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

tancada i analítica en $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2$ interseca la seva imatge sota A, i.e., existeixen dos punts x_0, x_1 tals que

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ \varphi(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{pmatrix}.$$

Proposició 5.0.3. *Si A és una aplicació conservativa amb un punt fix a l'origen, aleshores A compleix la propietat de l'intersecció.*

Demostració. Considerem una corba qualsevol tancada, analítica i que envolta l'origen, digem-ne γ. En virtut del teorema de Jordan, γ divideix el pla en dues regions: l'interior, que estarà acotat i contindrà el punt fix; i l'exterior, que no estarà acotat. La imatge de γ per l'aplicació A, diguem-ne $A\gamma$, també dividirà el pla en dues regions, on el nou interior seguirà contenint el punt fix. Ara, com A és conservativa, l'interior de γ i el de $A\gamma$ han de tenir la mateixa mesura. Aquest fet implica que no pot ser que una corba estigui inclosa dins de l'altre i, per tant, o bé coincideixen (i certament s'intersequen) o bé es tallen, com a mínim, en dos punts.

$\square$

Teorema 5.0.4. ***(Teorema Twist de Moser)*** *Sigui A la següent aplicació:*

$$\bar{z} = Az, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + y + \omega + f(x,y), \\ \bar{y} = y + g(x,y), \end{cases}$$

on f i g són funcions reals i analítiques 2π-periòdiques en x, que podem estendre al domini complex

$$\mathcal{D} = \left\{ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad |\mathrm{Im}\, x| < r_0, |y| < r_0 \right\} \tag{5.5}$$

Suposem que $\omega \in \mathbb{R}$ satisfà la condició diofàntica

$$\left|\frac{\omega}{2\pi}q - p\right| \geq \gamma q^{-\beta}, \quad p = 1, 2, \ldots, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.6}$$

per a algunes constants $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $\beta \geq 1$. Suposem també que l'aplicació A té la propietat de l'intersecció. Si per a una constant $M_0 > 0$ suficientment petita, depenent només de γ, β i r_0, es compleix que

$$|f(x, y)| + |g(x, y)| \leq M_0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}, \tag{5.7}$$

aleshores l'aplicació A té una corba invariant de la forma

$$\begin{cases} x = \xi + u(\xi), \\ y = v(\xi), \end{cases} \tag{5.8}$$

on u i v són funcions reals, analítiques i 2π-periòdiques en el domini complex $|\mathrm{Im}\,\xi| < r_0/2$, de manera que l'aplicació induïda sobre la corba és la translació

$$\xi_1 = \omega + \xi. \tag{5.9}$$

Demostració. Seguirem la demostració proposada per Rüssman (vegeu [9]). Denotem per K la corba desitjada i per Ω la translació $\xi \mapsto \omega + \xi$. Notem que K haurà de satisfer l'equació d'invariància

$$\mathscr{F}(K) := A \circ K - K \circ \Omega = 0. \tag{5.10}$$

Recíprocament, si K és una solució d'aquesta equació funcional (5.10), aleshores tindríem una corba invariant de l'aplicació A de manera que l'aplicació induïda és la translació Ω. Per provar el teorema, aplicarem el mètode de Newton a una solució aproximada i tractarem de construir-ne una millor aproximació. Així doncs, sigui K una solució aproximada de (5.10) (i, per tant, assumim que $\mathscr{F}(K)$ és petit). Desenvolupem la funció $\mathscr{F}$ en la seva sèrie de Taylor fins a primer ordre:

$$\mathscr{F}(K + \Delta K) = \mathscr{F}(K) + \mathscr{F}'(K)\Delta K + R, \tag{5.11}$$

on

$$\mathscr{F}'(K)\Delta K = (A' \circ K)\Delta K - \Delta K \circ \Omega. \tag{5.12}$$

El residu

$$R = A \circ (K + \Delta K) - A \circ K - (A' \circ K)\Delta K \tag{5.13}$$

és de segon ordre respecte de ΔK i, per tant, si podem resoldre l'equació linealitzada

$$\mathscr{F}(K) + \mathscr{F}'(K)\Delta K = 0 \tag{5.14}$$

obtindrem una millor aproximació. Ara bé, el terme $(A' \circ K)\Delta K$ de (5.12) ens dificulta la resolució. Per tal d'eliminar aquest terme i poder continuar, considerarem la família paramètrica de corbes

$$K(\xi, \eta) : \begin{cases} x = \xi + u(\xi, \eta), \\ y = \eta + v(\xi, \eta), \end{cases} \tag{5.15}$$

on η és el nostre paràmetre, u i v són 2π-periòdiques i redefinim Ω com

$$\Omega(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \omega + \xi + \eta \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Notem que si prenem $\eta = 0$ ens reduïm al cas anterior. Així doncs, tractem de resoldre (5.10). Sigui $\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ i considerem la derivada respecte del primer terme de la funció $\mathscr{F}(K)(\zeta)$:

$$\frac{\partial \mathscr{F}(K)}{\partial \xi} = \mathscr{F}(K)' = (A' \circ K)K' - (K' \circ \Omega)\Omega'. \tag{5.17}$$

Multipliquem aquest jacobià per un vector $\Delta^* K$ desconegut, i posem

$$\Delta K = K' \Delta^* K, \tag{5.18}$$

i aleshores, podem eliminar el terme que volíem de (5.12), i resulta que

$$\mathscr{F}(K + \Delta K) = \mathscr{F}(K) + (K' \circ \Omega)(\Omega' \Delta^* K - \Delta^* K \circ \Omega) + R + \mathscr{F}(K)' \Delta^* K. \tag{5.19}$$

Considerem ara l'equació

$$\Delta^* K \circ \Omega^* - \Omega' \Delta^* K = F - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [F] \tag{5.20}$$

on $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ és una funció real i analítica en ξ, η i 2π-periòdica en ξ, $[F]$ indica el valor mitjà respecte ξ, és a dir,

$$[F](\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi, \eta) d\xi$$

i definim $\Omega^*(\xi, \eta)$ com

$$\Omega^*(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \omega + \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Ara, si hi posem $\Delta^* K = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ i notant que $\Omega' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenim que l'equació (5.20) és equivalent a l'equació escalar

$$\begin{cases} U(\omega + \xi, \eta) - U(\xi, \eta) = V(\xi, \eta) + F_1(\xi, \eta), \\ V(\omega + \xi, \eta) - V(\xi, \eta) = F_2(\xi, \eta) - [F_2](\eta). \end{cases}$$

Notem que l'estudi d'aquesta equació es redueix al cas de l'equació diferència

$$u(x+\omega) - u(x) = h(x),$$

que ja hem demostrat que existeix una única solució al problema (teorema (4.0.8) prenent $p = q = 1$). Així doncs, si en (5.20) prenem

$$F = (K' \circ \Omega)^{-1} \mathscr{F}(K), \tag{5.21}$$

obtenim que

$$\Omega' \Delta^* K = \Delta^* K \circ \Omega^* - (K \circ \Omega)^{-1} \mathscr{F}(K) + \begin{pmatrix} 0 \\ [F_2] \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

i, per tant, l'equació (5.19) la reescrivim com:

$$\mathscr{F}(K + \Delta K) = (K' \circ \Omega)(\Delta^* \circ \Omega^* - \Delta^* K \circ \Omega + (0, [F_2])^T) + \mathscr{F}(K)' \Delta^* K + R. \tag{5.23}$$

Intuïtivament, per (5.20) i la tria de F, podem pensar que $\Delta^* K$, i per tant ΔK, es de l'ordre de $\mathscr{F}(K)$, de manera que R i $\mathscr{F}(K)'\Delta^* K$ són d'ordre superior. El terme $\Delta^* \circ \Omega^* - \Delta^* K \circ \Omega$ serà d'ordre superior si Ω^* i Ω són prou propers (i, per tant, si η és prou petit). L'últim terme que ens queda podria de ser d'ordre 1 en $\mathscr{F}(K)$ si no en tinguéssim cap més hipòtesi, però com hem suposat que A satisfà la propietat de l'intersecció, aleshores aquest terme serà d'ordre major. Així doncs, fent ús d'aquest mètode, donada una solució aproximada K de (5.10), podem obtenir una millor aproximació $K + \Delta K$. Repetint aquest procés infinitament, arribem a la solució desitjada.

Vegem-ho tot plegat, fent una descripció exhaustiva del mètode per trobar la corba desitjada i provant la convergència.

Definim el mètode per trobar la corba de manera inductiva sobre el grau n de la corba aproximada, on denotem per K_n la solució a l'n-èsim pas. Durant aquest procès, convé tenir present una sèrie de definicions i propietats:

1. Utilitzarem les normes següents:

$$|x| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \quad \textit{per a } x = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m,$$

$$|A| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|, \quad \textit{per a } A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

2. Denotarem per I la matriu unitat. Aleshores, cal recordar la desigualtat

$$|B^{-1}| \le \sum_{i=0}^{\infty} |B - I|^i \le \frac{1}{1-q}, \quad \textit{per a } B \in \mathbb{C}^{m \times m}, |B - I| \le q < 1.$$

3. Totes les funcions que apareixeran en les següents cotes estaran definides en dominis de la forma

$$\mathcal{D}(\delta, s) = \left\{ \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : |\operatorname{Im} \xi| < \frac{r_0}{2} + \delta, |\eta| < s \right\}$$

per a constants positives δ i s, i seran 2π-periòdiques en ξ.

4. Si $F : \mathcal{D}(\delta, s) \to \mathbb{C}^2$ és una funció real, analítica i 2π-periòdica en $\mathcal{D}(\delta, s)$ tal que satisfà que

$$|F(\zeta)| \leq N, \qquad \zeta \in \mathcal{D}(\delta, s),$$

aleshores existeix una solució $\Delta^* K$ de l'equació (5.20) que satisfà

$$|\Delta^* K(\zeta)| \leq cN\varrho^{-\tau}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(\delta - 2\varrho, s),\ 0 < 2\varrho < \delta,$$

on c és una constant depenent de γ i β, les constants de la condició diofàntica (5.6) i, per simplicitat, considerarem que $\tau = 2\beta + 2 \geq 4$ (tot i que al teorema (4.0.8) hem vist una cota més òptima per a τ). El paper de τ no és important i influeix únicament en la mida de M_0.

5. Si G és una funció analítica definida en $\mathcal{D}(\delta, s)$ tal que

$$|G(\zeta)| \leq N, \quad \zeta \in \mathcal{D}(\delta, s),$$

aleshores, per a $0 < \varrho < \delta$, per la cota de Cauchy de les derivades, es compleix que

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \xi}(\zeta)\right| \leq \frac{N}{\varrho}, \quad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(\zeta)\right| \leq \frac{2N}{\varrho^2}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(\delta - \varrho, s).$$

I tenim desigualtats anàlogues per a $\frac{\partial G}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}$ i $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \eta}$.

6. Definim les constants positives següents com

$$\kappa = 1 + \frac{|}{2\tau + 4}, \quad \sigma = \frac{2(\tau + 1)(\tau + 3)}{2\tau + 3}. \quad \mu = \frac{4\tau^2 + 11\tau + 6}{2\tau + 3}.$$

A partir d'aquestes, definim les successions següents:

$$\delta_n = \delta_0^{\kappa^n}, \quad s_n = \delta_n^{\sigma}, \quad M_n = \delta_n^{\mu}, \qquad n \geq 0.$$

on δ_0 ha de complir les desigualtats

$$\delta_0 \leq \frac{r_0}{20}, \quad \delta_0 \leq (4c + 4)^{-4\tau - 6}.$$

7. Definim $\mathcal{D}_n$ com

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(10\delta_n, s_n) \tag{5.24}$$

Durant la prova veurem el motiu per fer aquestes tries.

Així doncs, en l'n-èsim pas del nostre procés de Newton, necessitem que es compleixin les cotes

$$|K_n(\zeta)-\zeta| \le \delta_0-\delta_n, \qquad \zeta\in\mathcal{D}_n \tag{5.25$_n$}$$

$$|K'_n(\zeta)-I| \le \delta_0^{1/2}-\delta_n^{1/2}, \quad \zeta\in\mathcal{D}_n, \tag{5.26$_n$}$$

$$|\mathscr{F}(K)(\zeta)| \le M_n, \qquad \zeta\in\mathcal{D}_n. \tag{5.27$_n$}$$

Aleshores, si calculem una nova aproximació $K_{n+1}=K_n+\Delta K_n$ com hem indicat anteriorment, es compliran les desigualtats

$$|\Delta K_n(\zeta)| \le \delta_n-\delta_{n+1}, \qquad \zeta\in\mathcal{D}_{n+1}, \tag{5.28$_n$}$$

$$|\Delta K'_n(\zeta)| \le \delta_n^{1/2}-\delta_{n+1}^{1/2}, \quad \zeta\in\mathcal{D}_{n+1}, \tag{5.29$_n$}$$

i $(5.27)_{n+1}$ serà vàlid. Clarament, si es compleix $(5.25)_n$, $(5.26)_n$, $(5.28)_n$ i $(5.29)_n$, aleshores es complirà $(5.25)_{n+1}$ i $(5.26)_{n+1}$. En efecte, com les successions $\{\delta_n\}_n$ i $\{s_n\}_n$ són decreixents, tenim que

$$\mathcal{D}_{n+1}\subseteq\mathcal{D}_n.$$

I, aleshores,

$$\begin{aligned}|K_{n+1}(\zeta)-\zeta| &= |K_n(\zeta)+\Delta K_n(\zeta)-\zeta| \le |K_n(\zeta)-\zeta|+|\Delta K_n(\zeta)|\\ &\overset{Hip.}{\le} (\delta_0-\delta_n)-(\delta_n-\delta_{n+1}) = \delta_0-\delta_{n+1},\end{aligned}$$

per a tot $\zeta\in\mathcal{D}_{n+1}$. Anàlogament, tenim que

$$\begin{aligned}|K'_{n+1}(\zeta)-I| &= |K'_n(\zeta)+\Delta K'_n(\zeta)-I| \le |K'_n(\zeta)-I|+|\Delta K'_n(\zeta)|\\ &\overset{Hip.}{\le} (\delta_0^{1/2}-\delta_n^{1/2})-(\delta_n^{1/2}-\delta_{n+1}^{1/2}) = \delta_0^{1/2}-\delta_{n+1}^{1/2},\end{aligned}$$

per a tot $\zeta\in\mathcal{D}_{n+1}$.

Situem-nos, doncs, en el cas inicial $n=0$. Començarem amb $K_0(\zeta)=\zeta$, de manera que les condicions $(5.25)_0$ i $(5.26)_0$ (arreglar ref) són trivials, i la condició $(5.27)_0$ no és res més que (5.7), ja que per la tria de les constants, és compleix que

$$s_0\le\delta_0\le\frac{r_0}{20},$$

i, per tant,

$$\mathcal{D}_0=\mathcal{D}(10\delta_0,s_0)\subseteq\mathcal{D}(10\delta_0,10\delta_0)\subseteq\mathcal{D}\left(\frac{r_0}{2},r_0\right). \tag{5.30}$$

Així doncs, suposem per un moment que, per a tot $n\ge0$, les condicions es compleixen. Aleshores, la successió $\{K_n\}_n\ge0$ convergirà uniformement en

$$\mathcal{D}(0,0)=\left\{\zeta=\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}:|\mathrm{Im}\,\xi|<\frac{r_0}{2}\right\},$$

i aleshores,

$$K_\infty(\xi) := \lim_{n\to\infty} K_n(\xi,0), \quad |\mathrm{Im}\,\xi| < \frac{r_0}{2},$$

definirà una funció real, analítica i 2π-periòdica. A més a més, com $M_n \to 0$ quan $n\to\infty$, de $(5.27)_n$ obtenim que

$$\mathscr{F}(K_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}(K_n) = 0, \qquad |\mathrm{Im}\,\xi| < \frac{r_0}{2},\ \eta = 0,$$

de manera que $K = K_\infty$ és la solució desitjada de (5.10). Notem també que, de $(5.25)_n$ i $(5.26)_n$, quan $n\to\infty$, obtenim les cotes

$$\left.\begin{array}{l} |u(\xi)| + |v(\xi)| \le \delta_0 \\ |u'(\xi)| + |v'(\xi)| \le \delta_0^1/2 \end{array}\right\}, \quad |\mathrm{Im}\,\xi| < \frac{r_0}{2},$$

per la corba invariant K en la notació (5.8). Així doncs, per tal de completar la prova, només resta comprovar que es compleix el pas inductiu.

Suposem que fins a un cert $n \ge 0$ es compleix que

(i) $|K_n(\zeta) - \zeta| \le \delta_0 - \delta_n$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_n$;

(ii) $|K_n'(\zeta) - I| \le \delta_0^{1/2} - \delta_n^{1/2}$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_n$, i

(iii) $|\mathscr{F}(K_n)(\zeta)| \le M_n$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_n$.

i volem provar que es compleix

(I) $|\Delta K_n(\zeta)| \le \delta_n - \delta_{n+1}$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_{n+1}$;

(II) $|\Delta K_n'(\zeta)| \le \delta_n^{1/2} - \delta_{n+1}^{1/2}$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_{n+1}$, i

(III) $|\mathscr{F}(K_{n+1})(\zeta)| \le M_{n+1}$, $\forall\zeta\in\mathcal{D}_{n+1}$.

Les dues primeres desigualtats són relativament senzilles. Per la tria de les constants, tenim que es compleix que

$$\begin{array}{ll} 10\delta_{n+1} \le \delta_n \le \delta_0 \le \dfrac{r_0}{20}, & \delta_0 \le (4c+4)^{-\tau-6}, \\ 10s_{n+1} \le s_n \le \delta_n^\tau \le \dfrac{1}{10}\delta_n, & i \\ M_n \le s_n\delta_n^{\tau+5/6}, & M_0 \le \delta_0^3. \end{array} \tag{5.31}$$

Per tant, clarament es compleix que

$$\mathcal{D}_{n+1} \subseteq \mathcal{D}\Big(\delta_n, \frac{s_n}{10}\Big) \subseteq \mathcal{D}(\delta_n + s_n, s_n) \subseteq \mathcal{D}(2\delta_n, s_n). \tag{5.32}$$

Aleshores, com $\delta_0 \le \frac{1}{81}$, per (ii) tenim que

$$|K_n'(\zeta)| \le \frac{10}{9}, \quad |K_n'^{-1}(\zeta)| \le \frac{9}{8}, \qquad \zeta\in\mathcal{D}_n, \tag{5.33}$$

i per (5.16) i (5.31), deduïm que

$$|K_n' \circ \Omega| \leq \frac{10}{9}, \quad |(K_n' \circ \Omega)^{-1}| \leq \frac{9}{8}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(9\delta_n, s_n). \tag{5.34}$$

Per (i), (5.30) i (5.31), deduïm que $\mathscr{F}(K_n)$ està ben definit en $\mathcal{D}_n$, ja que

$$K_n(\zeta) \in \mathcal{D}(9\delta_n + \delta_0, s_n - \delta_n + \delta_n) \subseteq \mathcal{D}(10\delta_0, \delta_0) \subseteq \mathcal{D}\big(\frac{r_0}{2}, r_0\big), \quad \zeta \in \mathcal{D}_n.$$

Així doncs, per (iii) i (5.34), per la funció F de (5.21), tenim que

$$|F| = |(K_n' \circ \Omega)^{-1}\mathscr{F}(K_n))| \leq |(K_n' \circ \Omega)^{-1}|\, |\mathscr{F}(K_n)| \leq \frac{9}{8}M_n, \quad \zeta \in \mathcal{D}(9\delta_n, s_n), \tag{5.35}$$

que per la condició (4), obtenim que existeix una solució $\Delta^* K_n$ de (5.20) tal que compleix

$$|\Delta^* K_n(\zeta)| \leq \frac{9}{8} c M_n \delta_n^{-\tau}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(7\delta_n, s_n). \tag{5.36}$$

Ara, com $\Delta K_n = K_n' \Delta^* K_n$, per la desigualtat anterior i per (5.33), tenim que

$$|\Delta K_n(\zeta)| \leq \frac{5}{4} c M_n \delta_n^{-\tau}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(7\delta_n, s_n). \tag{5.37}$$

i, notant que $\frac{9}{10} s_n \leq s_n \leq \delta_n$, obtenim que

$$|\Delta K_n'(\zeta)| \leq \frac{25}{18} c M_n \delta_n^{-\tau} s^{-1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}\left(6\delta_n, \frac{s_n}{10}\right). \tag{5.38}$$

Ara, per (5.31) i (5.32), les cotes (5.37) i (5.38) impliquen que

$$\begin{aligned} |\Delta K_n(\zeta)| s^{-1} + |\Delta K_n'(\zeta)| &\leq 3cM_n \delta^{-\tau} s^{-1} \leq 3c\delta^{5/6} \leq 3c\delta_0^{1/3}\delta_n^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\delta_n^{1/2}, \qquad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}. \end{aligned}$$

Per tant, és compleix (II), ja que per (5.31) tenim que $10\delta_{n+1} \leq \delta_1$ i, aleshores, es compleix que

$$\frac{1}{2}\delta_n^{1/2} - \delta_{n+1}^{1/2} > 0.$$

i, per tant,

$$|\Delta K_n'(\zeta)| \leq \frac{1}{2}\delta^{1/2} \leq \frac{1}{2}\delta^{1/2} + \frac{1}{2}\delta_n^{1/2} - \delta_{n+1}^{1/2} = \delta_n^{1/2} - \delta_{n+1}^{1/2}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

Similarment, (I) es compleix, ja que tenim que $\delta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\delta_n$ i $s_n \leq \delta_n \leq \delta_n^{1/2}$, i per tant,

$$|\Delta K_n(\zeta)| \leq \frac{1}{2} s_n \delta_n^{1/2} \leq \frac{1}{2}\delta_n \leq \delta_n - \delta_{n+1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

Per tal de completar la prova, simplement queda demostrar (III). Per fer-ho, hem de considerar els quatre termes a la dreta de (5.23):

a) De (iii), obtenim que

$$|\mathscr{F}(K_n)'| \le \frac{10}{9}\frac{M_n}{s_n}, \quad \zeta \in \mathcal{D}\Big(9\delta_n, \frac{s_n}{10}\Big), \tag{5.39}$$

ja que $s_n \le \delta_n$ per (5.31). Per tant, per (5.32) i (5.36), deduïm que

$$|\mathscr{F}(K_n)'\Delta^* K_n| \le \frac{5}{4} c M_n^2 s_n^{-1}\delta_n^{-\tau}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

b) De (5.36), per la cota de les derivades de Cauchy, deduïm que

$$\left|\frac{\partial \Delta^* K_n}{\partial \xi}\right| \le \frac{9}{40} c M_n \delta_n^{-\tau-1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}(2\delta_n, s_n).$$

i per tant,

$$\begin{aligned}
|(\Delta^* K_n \circ \Omega^* - \Delta^* K_n \circ \Omega)(\zeta)| &\le \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\Delta^* K_n(\omega + \xi + t\eta, \eta) dt\right| \\
&\le \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\partial \Delta^* K_n}{\partial \xi}(\omega + \xi + t\eta, \eta)\right| |\eta| \\
&\le \frac{9}{40} c M \delta_n^{-\tau-1}|\eta|, \qquad \zeta \in \mathcal{D}(\delta_n, s_n).
\end{aligned}$$

Ara, per (5.32), tenim que

$$\begin{pmatrix} \omega + \xi + t\eta \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(2\delta, s), \qquad \zeta \in \mathcal{D}(\delta_n, s_n).$$

I per (5.34), obtenim que

$$|(K_n' \circ \Omega)(\Delta^* K_n \circ \Omega^* - \Delta^* K_n \circ \Omega)| \le \frac{c}{4} M_n s_{n+1}\delta_n^{-\tau-1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

c) Per la cota del terme residual R, observem que

$$(A - \Omega)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$|A - \Omega| \le M_0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}\Big(\frac{r_0}{2}, r_0\Big).$$

Aleshores, per les cotes de Cauchy per a les derivades, tenim que

$$\left|\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right|, 2\left|\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right| \le \frac{2M_0}{(8\delta_0)^2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(2\delta_0, 2\delta_0).$$

Podem escriure R en forma integral:

$$R(\zeta) = \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2} A(K_n(\zeta) + t\Delta K_n(\zeta)) dt.$$

I, per $0 \le t \le 1$, tenim que

$$K_n(\zeta) + t\Delta K_n(\zeta) \in \mathcal{D}(2\delta_0, 2\delta_0), \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

Així doncs, per (i), (I) i (5.31), podem aplicar les desigualtats anteriors per tal de deduir que

$$|R(\zeta)| \le \frac{3}{64}\frac{M_0}{\delta_0^2}|\Delta K(\zeta)|^2, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1},$$

i per (5.37), obtenim finalment que

$$|R(\zeta)| \le \frac{c^2}{8} M_0 M_n \delta_n^{-2\tau-2} \le \frac{c^2}{8}\delta_0 M_n^2 \delta_n^{-2\tau} \le \frac{1}{8} M_n^2 \delta_n^{-2\tau}.$$

d) Resta veure la cota pel terme $(K' \circ \Omega)\begin{pmatrix} 0 \\ [F_2] \end{pmatrix}$. En aquest cas, no és d'ordre superior i, per tant, hem de separar la part lineal. Posem

$$h(\eta) = a + b\eta, \qquad a = [F_2](0), \quad b = \frac{\partial [F_2]}{\partial \eta}(0). \tag{5.40}$$

Per (5.35). tenim que

$$|[F_2](\eta)| \le |[F](\eta)| \le \frac{9}{8} M_n, \quad |\eta| < s_n,$$

i, per tant,

$$\left| \frac{\partial^2 [F_2]}{\partial \eta^2}(\eta) \right| \le 2\frac{9}{8}\left(\frac{10}{9}\right)^2 \frac{M_n}{s_n}, \quad |\eta| < \frac{s_n}{10},$$

de manera que obtenim que

$$\begin{aligned} \big|\big([F_2] - h\big)(\eta)\big| = \left| \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2}[F_2](t\eta)dt \right| &\le \frac{25}{18}\frac{M_n}{s_n^2}|\eta|^2 \\ &\le \frac{25}{11} M \left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)^2, \qquad |\eta| < s_{n+1} \le \frac{s_n}{10}. \end{aligned}$$

I, per (5.34), obtenim que

$$\left| (K_n' \circ \Omega) \begin{pmatrix} 0 \\ [F_2] - h \end{pmatrix} \right| \le \big|K_n' \circ \Omega\big| \big|[F_2] - h\big| \le \frac{25}{16} M_n \left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)^2, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}.$$

Aquesta cota, juntament amb les donades per les cotes obtingudes a (a), (b) i (c) i per l'equació (5.23), impliquen que

$$\begin{aligned} \left| \mathscr{F}(K_{n+1}) - K_n' \circ \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \right| \le & \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{4}c\right)\frac{M_n^2}{s_n \delta_n^\tau} + \frac{c}{4}\frac{M_n s_{n+1}}{\delta^{\tau+1}} \\ & + \frac{25}{16} M_n \left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)^2, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Aquestes tres expressions en M_n, δ_n, s_n i s_{n+1} han de ser d'ordre superior, i imposem que han de ser iguals:

$$\frac{M_n^2}{s_n \delta_n^t} = \frac{M_n s_{n+1}}{\delta^{\tau+1}} = M_n \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right)^2.$$

Per la definició de les constants en (6), tenim que

$$s_n = \delta_n^\sigma, \quad M_n = \delta_n^\mu, \quad s_{n+1} = s_n^\kappa, \quad M_{n+1} = M_n^\kappa.$$

Si resolem les equacions anteriors, resulta que s'ha de complir que

$$\sigma = \frac{\tau+1}{2-\kappa}, \quad \mu = \frac{(\tau+2)\kappa + \tau - 1}{2-\kappa},$$

on assumim que $\kappa \in (1,2)$, de manera que σ, μ són positives i les successions definides a (6) convergiran cap a zero. Ara, volem que es compleixi que

$$M_n \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right)^2 < M_{n+1},$$

que implica, en exponents, que s'ha de complir que

$$2\sigma - \mu > 0,$$

i aquesta condició és dona si

$$\kappa < 1 + \frac{1}{\tau+2}.$$

Si triem κ com hem definit en (6) ho compleix.

Així doncs, la part dreta de (5.41) pren la forma següent:

$$\left(\frac{3}{2}c + \frac{27}{16} \right) \delta_n^{1/(4\tau+6)} M_{n+1} \le \frac{7}{4}(c+1)\delta_0^{1/(4\tau+6)} M_{n+1} \overset{(6)}{\le} \frac{4}{9} M_{n+1},$$

de manera que

$$\left| \mathscr{F}(K_n) - K_n' \circ \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \right| \le \frac{4}{9} M_{n+1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1}. \tag{5.42}$$

En aquest moment de la prova és quan és crucial la propietat de la intersecció. Per a un η fixat, $-s_{n+1} < \eta < s_{n+1}$, la corba $z = K_{n+1}(\xi, \eta)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ és admissible, ja que per les condicions (i) i (ii) és pot posar en la forma (5.4).

Sigui, doncs, $\xi_0 = \xi_0(\eta)$ un valor real del paràmetre ξ tal que $z_0 = K_{n+1}(\xi_0, \eta)$ és un punt d'intersecció. Aleshores, existeix un valor $\xi_1 = \xi_1(\eta)$ que compleix que

$$(A \circ K_{n+1})(\xi_0, \eta) = K_{n+1}(\xi_1, \eta).$$

Aleshores, utilitzant l'equació d'invariància (5.10) i posant $\xi_2 = \omega + \xi_0 + \eta$, obtenim que

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{F}(K_{n+1}) - (K' \circ \Omega)\begin{pmatrix}0\\ h(\eta)\end{pmatrix}\right)(\xi_0,\eta) &= K_{n+1}(\xi_1,\eta) - K_{n+1}(\xi_2,\eta)\\ &\quad - \frac{\partial K_n}{\partial \eta}(\xi_2,\eta)h(\eta) = \mathcal{Q}(\eta)\begin{pmatrix}\xi_1-\xi_2\\ -h(\eta)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5.43}$$

on

$$\mathcal{Q}(\eta) = \left(\int_0^1 \frac{\partial K_{n+1}}{\partial \xi}(\xi_2 + t(\xi_1-\xi_2),\eta)dt, \frac{\partial K_n}{\partial \eta}(\xi_2,\eta)\right).$$

Ara, com els arguments són reals i $|\eta| < s_{n+1}$, podem aplicar $(5.26)_n$ i $(5.26)_{n+1}$ per tal d'obtenir que

$$|\mathcal{Q}(\eta) - I| \leq \delta_0^{1/2} \leq \frac{1}{9}, \quad -s_{n+1} < \eta < s_{n+1},$$

de manera que

$$|\mathcal{Q}(\eta)^{-1}| \leq \frac{9}{8}, \quad -s_{n+1} < \eta < s_{n+1}.$$

Aleshores, ajuntant (5.42) i (5.43) i resulta qeu

$$\begin{aligned}|h(\eta)| &\leq \left|\begin{pmatrix}\xi_1-\xi_2\\ -h(\eta)\end{pmatrix}\right| = \left|\mathcal{Q}(\eta)^{-1}\mathcal{Q}(\eta)\begin{pmatrix}\xi_1-\xi_2\\ -h(\eta)\end{pmatrix}\right| \leq \frac{9}{8}\cdot\frac{4}{9}M_{n+1}\\ &= \frac{1}{2}M_{n+1}, \qquad |\eta| < s_{n+1}.\end{aligned}$$

Ara, per la definició de h a (5.40), teniem que $h(\eta) = a + b\eta$, per a $a, b \in \mathbb{R}$. Per tant, tenim que

$$|a| + |b||\eta| = \big|a \pm b|\eta|\big| \leq \frac{1}{2}M_{n+1}, \quad |\eta| < s_{n+1}.$$

Així doncs, per (5.34) i (5.42), obtenim finalment que

$$|\mathscr{F}(K_{n+1})| \leq |K_n' \circ \Omega||h| + \frac{4}{9}M_{n+1} \leq \frac{5}{9}M_{n+1} + \frac{4}{9}M_{n+1} = M_{n+1}, \quad \zeta \in \mathcal{D}_{n+1},$$

i per tant, es compleix (III), tal i com restava per veure.

□

Corol·lari 5.0.5. *Sigui A l'aplicació twist pertorbada següent*

$$\begin{cases}\bar{\theta} = & \theta + \alpha(r) + f(\theta,r),\\ \bar{r} = & r + g(\theta,r),\end{cases}$$

definida en la corona

$$\mathcal{C} := \{r : r \in [a_0, b_0], 0 < a_0 < b_0\},$$

on f, g *són funcions reals, analítiques,* 2π*-periòdiques en* θ *i tals que* $|f(\theta, r)| + |g(\theta, r)| \leq M_0$ *per a una constant* M_0 *suficientment petita. Suposem que* A *és conservativa i no degenerada. Aleshores, existeix una successió no numerable de corbes invariants convergents al punt fix situat a l'origen.*

Demostració. Per la condició de no degeneració, tenim que α és monòtona creixent. Aleshores, podem suposar que la llargada de l'interval $[\alpha(a_0), \alpha(b_0)]$ és 1, ja que altrament podem restringir l'aplicació a un subinterval o bé fer un canvi de variables. En el capítol 4 hem vist que el conjunt d'ω en l'interval unitari que compleixen la condició diofàntica forma un conjunt de mesura positiva i, per tant, en augmentar r, $\alpha(r)$ travessa tots aquests valors ω. Per tant, aplicant el teorema (5.0.4) per a cada un d'aquests valor, obtenim una successió no numerable de corbes invariants al voltant de l'origen.

$\square$

6 Conclusions

Aquest treball és una introducció a la teoria de persistència de solucions quasi-periòdiques en sistemes dinàmics, una àrea molt oberta i activa avui en dia de les matemàtiques.

Hem donat diferents perspectives per tal d'estudiar el nostre problema. D'una banda, el teorema de la funció implícita (i tota l'anàlisi funcional en espais de Banach) ens ha permès estudiar inicialment el problema i donar certes condicions per tal de garantir la persistència de solucions quasi-periòdiques. D'altra banda, el teorema twist de Moser ens ha ajudat a estudiar-ho sota unes altres hipòtesis.

El teorema KAM, en aquest cas la versió de Moser per a aplicacions twist, és una eina molt potent per tal d'estudiar la persistència i estabilitat de les corbes invariants en un sistema dinàmic. I la teoria va molt més enllà de l'esmenat en aquesta memòria. En l'àmbit personal, m'ha motivat a voler aprendre més sobre el tema i, de cara a un possible treball final de màster, voldré apuntar en aquesta direcció.

En concret, considero interessant la qüestió d'estudiar què passa quan la pertorbació *creix* i m'agradaria comprendre millor el mecanisme pel qual aquests tors es *trenquen*.

L'elaboració del treball ha estat tot un repte, però considero que la constància ha estat clau per tal d'obtenir el resultat final. En aquesta memòria s'utilitzen resultats de moltes assignatures del grau, fonamentalment de caràcter analític però també resultats topològics i de teoria de nombres, permetent assolir una certa cohesió entre totes aquestes branques.

Referències i bibliografia

[1] Argentieri, F.: *Diophantine sets in general are Cantor sets*, `arXiv:2012.13998 [math.DS]`, desembre de 2020.

[2] Argentieri, F.: *Isolated points of Diophantine sets*, `arXiv:2011.10267 [math.NT]`, novembre de 2020.

[3] Cartan, H.: *Cálculo diferencial*. Omega, 1972. Print.

[4] De la Llave, R.: *A tutorial on KAM theory.* Smooth ergodic theory and its applications. Seattle, WA, 1999.

[5] Dieudonné, J.: *Fundamentos de análisis moderno*. Barcelona: Reverté, 1966. Print.

[6] Jorba, À.: *Mecánica Hamiltoniana y Teoría de Perturbaciones*. Universitat de Barcelona, juliol de 1997.

[7] Rüssmann, H.: *On optimal estimates for the solutions of linear difference equations on the circle*. Celestial Mechanics 14, 33–37 (1976). `https://doi.org/10.1007/BF01247129`

[8] Rüssmann, H.: *On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus.* Dynamical Systems, Theory and Applications: Battelle Seattle 1974 Rencontres. Editor: J. Moser, Lecture Notes in Physics, vol. 38, p.598-624 (1975). `https://doi.org/10.1007/BF01247129`

[9] Rüssmann, H.: *On a new proof of Moser's twist mapping theorem.* Celestial Mechanics 14, 19–31 (1976). `https://doi.org/10.1007/BF01247128`

[10] Siegel, C. L.; Moser, J.: *Lectures on Celestial Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1971. Print. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-87284-6`