



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Processos de Renovació

Autor: Marc Cano i Cànovas

Director: Dr. Carles Rovira Escofet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2022

Abstract

Renewal processes model occurrences of events happening at random times where the times between the events can be approximated by independent, identically distributed random variables.

This report consists on the study of renewal processes, some properties and a few derived processes such as risk processes or renewal reward processes. In addition, a comparison between renewal processes and Poisson process is made and culminated on the analysis of an article which shows the improvement that represent renewal processes against Poisson processes in hydrology, when both are used to measure the flow of a river.

Resum

Els processos de renovació modelitzen l'ocurrència d'esdeveniments que succeeixen a temps aleatoris i on els temps entre aquests esdeveniments poden ser aproximats per variables aleatòries independents idènticament distribuïdes.

Aquesta memòria consisteix en un estudi dels processos de renovació, d'algunes de les seves propietats i de certs processos derivats, com els processos de risc o els processos de renovació amb guany. A més, es fa una comparació amb el procés de Poisson que culmina amb l'anàlisi d'un article on es veu la millora que representen els processos de renovació respecte el procés de Poisson quan els apliquem en hidrologia per mesurar el cabal d'un riu.

Agraïments

Vull agrair al Carles, el meu tutor, tota la feina feta durant aquests mesos guiant-me per dur a terme aquest projecte.

També agrair a la Noelia tota l'ajuda i suport.

Per últim, agrair a la meva família el recolzament que sempre m'han brindat.

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	3
2.1	Integral de Lebesgue-Stieltjes	3
2.2	Convolució	4
2.3	Transformada de Laplace	8
2.4	Processos Estocàstics	12
2.4.1	Procés de Poisson	12
2.4.1.1	Procés de Poisson Filtrat	17
3	Processos de Renovació	19
3.1	Recompte de renovacions	19
3.2	Processos de Renovació amb guany	25
3.3	L'equació de Renovació	26
3.4	Processos de Risc	31
3.5	El Procés de Poisson com un Procés de Renovació	36
4	Una aplicació dels Processos de Renovació	38
4.1	Introducció	38
4.2	Cabals de rius modelitzats amb processos de renovació filtrats	40
4.2.1	Predicció del cabal d'un riu a temps $t+1$	41
4.2.2	Predicció del cabal d'un riu a temps $t+2$	42
4.3	Resultats	43
5	Conclusions	49

1 Introducció

Després de fer l'optativa de Processos Estocàstics vaig tenir la sensació que volia profunditzar una mica més en aquesta branca ja que en l'assignatura es feia un tast de diferents tipus de processos estocàstics però sense entrar en molts detalls en una gran part d'ells.

Aleshores, vaig decidir fer el treball de final de grau sobre algun tema relacionat amb els processos estocàstics. En particular, amb el procés de Poisson (procés del qual parlarem al treball).

Al parlar amb el Carles, el meu tutor, vam veure que estudiar els processos estocàstics de renovació satisfia les meves inquietuds de profunditzar en un procés estocàstic i alhora de fer un tema relacionat amb el procés de Poisson.

Així doncs, vaig decidir escollir aquest tema per fer el treball que segueix a continuació.

El projecte

El terme *procés estocàstic* definit matemàticament apareix per primer cop a la dècada de 1930. Després que a la dècada de 1920 matemàtics soviètics com Sergei Bernstein, Aleksandr Khintxin o Andrei Kolmogórov fessin aportacions importants a la teoria de la probabilitat, l'Aleksandr Khintxin donà la primera definició d'un procés estocàstic com un conjunt de variables aleatòries indexades per la recta real. Tot i que Khintxin donà definicions d'alguns processos estocàstics, alguns processos específics ja havien estat descoberts abans. Aquest és el cas del procés de Poisson, que va sorgir de manera independent en diverses situacions a principis del segle XX, i que té moltes aplicacions en biologia, física o modelització financera. En canvi, altres processos van tenir més difícil sorgir. Per exemple, els processos de renovació sorgiren de la discussió de qüestions del creixement de la població.

Aquests últims són els que ens ocuparan en aquesta memòria.

En aquest treball estudiarem principalment els processos de renovació. Per fer-ho, ens basarem, majoritàriament, en el Capítol 3 del llibre *Adventures in Stochastic Processes* de Sidney I. Resnick [7].

Per tal de poder seguir aquest capítol necessitarem d'uns coneixements previs. Part d'aquests coneixements provenen de les assignatures de Processos Estocàstics i Probabilitats Avançades (aquesta última sobretot per qüestions tècniques). Tots aquests coneixements previs estaran compresos en una secció de preliminars on parlarem de la Integral de Lebesgue-Stieltjes, introduïrem l'operació de convolució i estudiarem la transformada de Laplace. De la convolució i de la transformada de Laplace en veurem diverses propietats que ens seran útils posteriorment per estudiar els processos de renovació.

A part d'aquestes eines merament tècniques, també farem una breu introducció als processos estocàstics i, concretament, parlarem del procés de Poisson ja que, al final del treball, voldrem comparar-lo amb els processos de renovació. Per poder dur a terme aquesta comparació també haurem de parlar del procés de Poisson filtrat.

Un cop assolida aquesta base prèvia, entrarem en matèria i farem un estudi general dels processos de renovació. Definirem què són, veurem la funció de renovació, l'equació de renovació i alguns resultats relacionats amb cadascuna. A més, il·lustrarem alguns exemples i parlarem de dos processos de renovació concrets: els processos de renovació amb guany i els processos de risc.

Un cop fet tot aquest estudi dels processos de renovació veurem el procés de Poisson com un procés de renovació. Aquest fet serà important ja que ens permetrà comparar tots dos processos, que és el nostre objectiu principal al treball.

Per tal d'assolir la teoria vista, tancarem el treball veient una aplicació dels processos de renovació. Per aconseguir-ho, analitzarem l'article *An Application of Filtered Renewal Processes in Hydrology* de Marc Lefebvre i Fàtima Bensalma [4]. A partir d'aquest article, definirem què és un procés de renovació filtrat i veurem com s'aplica en hidrologia per tal de mesurar el cabal d'un riu. L'objectiu és analitzar el canvi que suposa el fet d'utilitzar aquests processos per modelitzar el cabal d'un riu a curt termini respecte el fet d'utilitzar el procés de Poisson filtrat.

Per tal d'aconseguir-ho, veurem quines equacions calculen a l'article per calcular el cabal del riu Delaware a un i dos dies vista i analitzarem les dades estimades que ofereixen el procés de Poisson filtrat i els processos de renovació utilitzant diverses distribucions de probabilitat.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria consta de 3 seccions sense comptar Introducció i Conclusió.

- **Preliminars:** en aquesta secció veurem les diverses eines necessàries per seguir el treball: Integració Lebesgue-Stieltjes, Convolució i Transformada de Laplace. A més, també farem una introducció al tema processos estocàstics i, en concret, estudiarem de manera breu el Procés de Poisson.
- **Processos de Renovació:** en aquesta secció estudiarem els processos de renovació. Veurem com es defineixen, algunes propietats i algunes extensions com els processos de renovació amb guany o els processos de risc. Per tancar la secció, i lligant amb els preliminars, veurem el procés de Poisson com un procés de renovació.
- **Una aplicació dels Processos de Renovació:** per últim, en aquesta secció analitzarem l'article de Mario Lefebvre i Fatima Bensalma [4] i veurem a quins resultats arriba. Amb això tancarem aquesta relació entre processos de renovació i procés de Poisson ja que ens servirà per comparar com el procés de Poisson filtrat i els processos de renovació filtrats són capaços de predir el cabal d'un riu a curt termini.

2 Preliminars

En aquesta secció veurem dues eines necessàries a l'hora d'estudiar els Processos de Renovació: l'operació de convolució i la transformada de Laplace. També farem una introducció sobre els processos estocàstics i, concretament, veurem el procés de Poisson.

2.1 Integral de Lebesgue-Stieltjes

Comencem, doncs, veient les eines tècniques que necessitem per poder treballar amb aquests processos estocàstics. Abans de veure l'operació de convolució i la transformada de Laplace, definim la integració de Lebesgue-Stieltjes, que és la que utilitzarem al llarg del treball i, en particular, per treballar amb la convolució i la transformada de Laplace.

A partir d'aquest moment, veurem les integrals respecte una funció monòtona creixent $\mu(x)$ en $[0, \infty)$ amb la forma:

$$\int_0^\infty g(x)d\mu(x) \quad \text{o equivalentment,} \quad \int_{[0, \infty)} g(x)\mu(dx).$$

Vegem ara els tres casos d'integració Lebesgue-Stieltjes que seran suficients per seguir el treball:

1. **μ absolutament contínua:** existeix una densitat u , satisfent $u(x) \geq 0$, tal que $\int_0^t u(x)dx < \infty, \forall t > 0$, i per $b > a \geq 0$,

$$\mu(b) - \mu(a) = \int_a^b u(s)ds.$$

Aleshores podem interpretar

$$\int_0^\infty g(x)\mu(dx) = \int_0^\infty g(x)d\mu(x) = \int_0^\infty g(x)u(x)dx.$$

2. **μ discreta:** en aquest cas, tenim un conjunt de valors $\{a_i\}$ i un conjunt de pesos $\{p_i\}$ on, per tot i , $p_i < \infty$. La mesura μ associa cada p_i al valor a_i de la manera següent:

$$p_i = \mu(\{a_i\}) := \lim_{h \downarrow 0} \mu(a_i + h) - \mu(a_i + h).$$

Així doncs, la funció de distribució $\mu(x)$ satisfà

$$\mu(x) = \sum_{i: 0 \leq a_i \leq x} p_i.$$

Aleshores, en aquest cas, les integrals les interpretarem com

$$\int g(x)\mu(dx) = \int g(x)d\mu(x) := \sum_i g(a_i)p_i.$$

3. **μ una combinació lineal com la següent:**

$$\mu(x) = \alpha\mu_{AC}(x) + \beta\mu_d(x),$$

on $\mu_{AC}(x)$ és absolutament contínua amb densitat $u_{AC}(x)$, $\mu_d(x)$ és discreta amb àtoms $\{a_i\}$ i els seus corresponents pesos $\{p_i\}$ i $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Aleshores, en aquest cas, veurem la integració com a continuació:

$$\begin{aligned} \int g(x)\mu(dx) &= \int g(x)d\mu(x) \\ &= \alpha \int g(x)\mu_{AC}(dx) + \beta \int g(x)\mu_d(dx) \\ &= \alpha \int g(x)u_{AC}(x)dx + \beta \sum_i g(a_i)p_i. \end{aligned}$$

2.2 Convulució

En aquesta secció descriurem l'operació de convulució, que ens servirà per treballar els processos de renovació, i en veurem algunes propietats útils.

Suposem, en tot l'apartat, que totes les funcions estan definides a $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Suposem també que totes les funcions de distribució estan concentrades a \mathbb{R}_+ . Aleshores definim els següents conceptes.

Definició 2.1. *Sigui g una funció. Direm que g és **localment acotada** si per tot $x \in \mathbb{R}_+$, existeix un U obert tal que $x \in U$ i g és acotada en U ($g(U)$ és acotat).*

Definició 2.2. *Siguin g una funció localment acotada i F una funció distribució. Definim l'operació **convulució** de F i g com la funció següent:*

$$F * g(t) := \int_0^t g(t-x)F(dx) \tag{2.1}$$

per $t \geq 0$, on fem la integral com hem vist anteriorment i incloem els punts 0 i t en la integració.

Vegem diverses propietats de la convulució.

Propietats 2.3.

1. Si g és una funció no negativa aleshores $F * g \geq 0$.
2. $F * g$ és localment acotada. De fet,

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |F * g(s)| \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \right) F(t).$$

3. Si g és una funció contínua i acotada, aleshores $F * g$ és contínua.
4. Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries independents i F_1, F_2 les seves corresponents funcions de distribució. Aleshores, $X_1 + X_2$ té per funció de distribució $F_1 * F_2$.
5. **Propietat Commutativa:** $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$.

Demostració.

1. Usem la propietat de l'esperança que ens diu que si $X \geq 0$ aleshores $E(X) \geq 0$. Com que estem suposant g una funció no-negativa, $F * g(t) = E(g(t - Y)) \geq 0$ on Y és una variable aleatòria amb funció de distribució F i $g(t - Y) \geq 0$.
2. Definim $\|g\| := \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)|$. Notem $\|g\|$ que és finit per cada t ja que estem assumint que g és localment acotada. Siguin $s \leq t$, volem veure que $|F * g(s)| < \infty$:

$$\begin{aligned}
 |F * g(s)| &= \left| \int_0^s g(s-x) F(dx) \right| \\
 &\leq \int_0^s |g(s-x)| F(dx) \\
 &\leq \|g\| \int_0^s F(dx) \\
 &= \|g\| \int_0^s F(dx) \\
 &= \|g\| F(s) \\
 &\leq \|g\| F(t) < \infty.
 \end{aligned}$$

3. Siguin g una funció contínua i acotada i F una funció de distribució. Observem que podem definir la convolució de la manera següent:

$$F * g(t) = \int_0^t g(t-x) F(dx) = E(g(t - Y)),$$

on Y és una variable aleatòria amb funció de distribució F .

Sigui ara $\{t_n\}_{n \geq 0}$ una successió que convergeix cap a t . Volem veure que $F * g(t_n)$ convergeix a $F * g(t)$. Això es tradueix a veure que

$$E(g(t_n - Y)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(g(t - Y)).$$

Observem que, com g és una funció contínua, tenim, per tot ω ,

$$g(t_n - Y(\omega)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.s.}} g(t - Y(\omega)).$$

També, com g és acotada, existeix un $M \geq 0$ tal que $|g(t_n - Y)| \leq M$, $\forall n \geq 0$. Llavors, $E(|g(t_n - Y)|) \leq E(|M|) \leq M$.

Així doncs, tenim convergència dominada:

$$E(g(t_n - Y)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(g(t - Y)).$$

Per tant,

$$F * g(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F * g(t).$$

4. Prenem dues variables aleatòries independents X_1, X_2 amb funcions de distribució F_1, F_2 respectivament. Volem veure que la distribució de $X_1 + X_2$ és $F_1 * F_2$.

$$\begin{aligned}
P[X_1 + X_2 \leq t] &= P[(X_1, X_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq t\}] \\
&= \int \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq t\}} F_1(dx) F_2(dy) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-x} F_2(dy) \right) F_1(dx) \\
&= \int_0^t F_2(t-x) F_1(dx) \\
&= F_1 * F_2(t).
\end{aligned}$$

Per tant, la distribució de $X_1 + X_2$ és $F_1 * F_2$, com volíem veure.

5. Usem la propietat 4 per demostrar-ho:

$$F_1 * F_2(t) = P[X_1 + X_2 \leq t] = P[X_2 + X_1 \leq t] = F_2 * F_1(t).$$

□

Una propietat molt útil de la convolució és que pot repetir-se. És a dir, podem calcular $F * (F * g)$. Definim què és aquest $F * (F * g)$.

Definició 2.4. Definim $F * (F * g)$ per recursió:

- $F^{0*}(x) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$.
- $F^{1*}(x) = F(x)$.
- $F^{(n+1)*}(x) = F^{n*}(x) * F(x)$, per $n \geq 1$.

Observació 2.5. La funció F^{0*} actúa com a identitat: $F^{0*} * g = g$.

Proposició 2.6 (Propietat Associativa). Es compleix $F * (F * F) = (F * F) * F$.

Demostració. La demostració és conseqüència de 2.3 i 2.4. □

Vegem ara una propietat que generalitza la propietat anterior, la qual ens donava la distribució de $X_1 + X_2$ utilitzant la definició 2.4.

Proposició 2.7. Siguin X_1, \dots, X_n variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució F . Aleshores, $X_1 + \dots + X_n$ té distribució F^{n*} .

Demostració. Siguin X_1, \dots, X_n variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució F . Volem veure, per inducció sobre n , que la distribució de $X_1 + \dots + X_n$ és F^{n*} :

- $n = 1$. La distribució de X_1 és $F = F^{1*}$.
- Suposem cert per n , és a dir, que la distribució de $X_1 + \dots + X_n$ és F^{n*} . Vegem per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
P[X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} \leq t] &= P[(X_1 + \dots + X_n) + (X_{n+1}) \leq t] \\
&= F^{n*} * F(t) \\
&= F^{(n+1)*}(t),
\end{aligned}$$

on hem utilitzat, en la penúltima igualtat, la hipòtesi d'inducció i la propietat 4 vista anteriorment que ens diu que $X_1 + X_2$ té distribució $F_1 * F_2$.

□

Fins ara hem vist com es comporta la convolució amb funcions de probabilitat. Ens podem preguntar què passarà quan aquestes siguin absolutament contínues i tinguin unes funcions de densitat associades. Vegem-ho.

Proposició 2.8. *Si F_i és una funció de distribució absolutament contínua amb densitat f_i , per $i = 1, 2$, aleshores $F_1 * F_2$ és absolutament contínua amb densitat*

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(t-y)f_2(y)dy = \int_0^t f_2(t-y)f_1(y)dy,$$

per $t \geq 0$.

*De fet, si F és absolutament contínua, per qualsevol distribució G tenim $F * G$ absolutament contínua.*

Demostració. Suposem F_1, F_2 absolutament contínues amb densitats f_1 i f_2 , respectivament. Aleshores

$$(F_1 * F_2)(t) = \int \int_{\{(x,y):x+y \leq t\}} f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_0^t \left(\int_0^{t-y} f_1(x) dx \right) f_2(y) dy.$$

Fem el canvi de variable $x = u - y$, aleshores obtenim:

$$\int_0^t \left(\int_0^{t-y} f_1(x) dx \right) f_2(y) dy = \int_0^t \left(\int_y^t f_1(u-y) du \right) f_2(y) dy.$$

Canviem ara l'ordre d'integració:

$$\int_0^t \left(\int_y^t f_1(u-y) du \right) f_2(y) dy = \int_0^t \left(\int_0^u f_2(y) f_1(u-y) dy \right) du = \int_0^t (f_1 * f_2)(y) dy.$$

Tan sols ens falta veure la segona part. Per veure-ho, substituïm f_1 per f i $f_2(dy)dy$ per $G(dy)$. Aleshores,

$$(F * G)(t) = \int_0^t \left(\int_0^u f(u-y)G(dy) \right) du = \int_0^t (G * f)(u) du.$$

Per tant, $F * G$ és absolutament contínua amb densitat $G * f$.

□

2.3 Transformada de Laplace

Per acabar de veure les eines tècniques que necessitem vegem la transformada de Laplace, que ens serà necessària per estudiar els processos de renovació.

Suposem que X és una variable aleatòria no-negativa amb funció de distribució F . Definim la transformada de Laplace de la manera següent.

Definició 2.9. *La transformada de Laplace de X (o de F) és la funció definida a \mathbb{R}_+ pel següent:*

$$\hat{F}(\lambda) := E\left(e^{-\lambda X}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx), \text{ per } \lambda \geq 0. \quad (2.2)$$

Notem que, com $e^{-\lambda X} \leq 1$, tenim que $\hat{F}(\lambda) < \infty$ per a tot $\lambda > 0$.

Vegem-ne unes propietats útils.

Propietats 2.10.

1. *Distribucions diferents tenen transformades de Laplace diferents, és a dir, cada funció distribució és identificable a partir de la seva transformada de Laplace.*
2. *Siguin X_1, X_2 dues variables aleatòries independents amb funcions de distribució F_1, F_2 respectivament. Aleshores,*

$$\left(\widehat{F_1 * F_2}\right)(\lambda) = \hat{F}_1(\lambda)\hat{F}_2(\lambda).$$

3. *Per $\lambda > 0$, $\hat{F}(\lambda)$ té derivades de tots els ordres i qualsevol derivada s'obté derivant apropiadament sota el signe de la integral.*

4. *Relacions:*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx = \lambda^{-1} \hat{F}(\lambda) \quad (2.3)$$

i

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} (1 - F(x)) dx = \frac{1 - \hat{F}(\lambda)}{\lambda}. \quad (2.4)$$

Demostració.

1. Sigui F una funció de distribució. La transformada de Laplace associada a F és

$$\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx).$$

Fem el canvi de variables $y = e^{-x}$. Notem que, quan $x = 0$, llavors $y = 1$ i, quan $x = \infty$, $y = 0$.

Definim ara una funció de distribució G , en $[0, 1]$, tal que $G(y) = 1 - F(x)$. Aleshores,

$$\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx) = \int_0^1 y^\lambda G(dy),$$

ja que la suma de Riemann $\sum e^{-\lambda x_k} [F(x_{k+1}) - F(x_k)]$ és igual a la suma de Riemann $\sum y_k^\lambda [G(y_k) - G(y_{k+1})]$ quan $y_k = e^{-x_k}$.

Així doncs, G està determinada de manera única pels seus moments, ja que dues distribucions són iguals si tenen tots els moments iguals, i aquests ens dona la transformada de Laplace.

2.

$$\begin{aligned} \widehat{(F_1 * F_2)}(\lambda) &= E(e^{-\lambda(X_1+X_2)}) \\ &= E(e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2}) \\ &= E(e^{-\lambda X_1}) E(e^{-\lambda X_2}) \\ &= \hat{F}_1(\lambda) \hat{F}_2(\lambda). \end{aligned}$$

Hem utilitzat que X_1 i X_2 són independents.

3. Per tot $n \geq 1$,

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^n F(dx), \quad \lambda > 0.$$

Per convergència monòtona,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty x^n F(dx) \leq \infty.$$

En particular, si la variable aleatòria X té F com a distribució, llavors tenim que $E(X) = -\hat{F}'(0)$ i $E(X^2) = \hat{F}''(0)$ i així successivament.

4. La primera relació s'obté de la següent manera:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^x F(du) \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-\lambda x} dx \right) F(du) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} \lambda^{-1} F(du) \\ &= \lambda^{-1} \hat{F}(\lambda). \end{aligned}$$

I la segona relació s'obté de la següent manera:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} (1 - F(x)) dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx - \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\hat{F}(\lambda)}{\lambda} \\ &= \frac{1 - \hat{F}(\lambda)}{\lambda}, \end{aligned}$$

on hem usat la primera relació per resoldre $\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx$.

□

Observem que la transformada de Laplace ens simplifica la convolució.

Observació 2.11. Per tot $n > 0$, si F és una distribució, $(\widehat{F^{n*}})(\lambda) = (\hat{F}(\lambda))^n$.

Demostració. Fem inducció sobre n .

• $n = 1$:

$$(\widehat{F^{1*}})(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F^{1*}(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx) = \hat{F}(\lambda) = (\hat{F}(\lambda))^1.$$

• Suposem-ho cert per n . Veiem que és cert per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\widehat{F^{(n+1)*}})(\lambda) &= E(e^{-\lambda(X_1 + \dots + X_n + X_{n+1})}) \\ &= E(e^{-\lambda(X_1 + \dots + X_n)}) E(e^{-\lambda X_{n+1}}) \\ &= (\hat{F}(\lambda))^n (\hat{F}(\lambda)) \\ &= (\hat{F}(\lambda))^{n+1}. \end{aligned}$$

Per veure-ho hem utilitzat que $F^{(n+1)}$ és la funció de distribució de $X_1 + \dots + X_{n+1}$, on X_1, \dots, X_{n+1} són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb funció de distribució F .

□

Abans de continuar, vegem alguns exemples de càlculs de la transformada de Laplace.

Exemple 2.12. Sigui X una variable aleatòria amb distribució uniforme en $(0, 1)$, aleshores

$$E(e^{-\lambda X}) = \int_0^1 e^{-\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exemple 2.13. Sigui X una variable aleatòria amb distribució exponencial de paràmetre γ tal que $F(dx) = \gamma e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \hat{F}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \gamma e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx \\ &= \frac{\gamma}{-(\lambda + \gamma)} \int_0^\infty -(\lambda + \gamma) e^{-(\lambda + \gamma)x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{-(\lambda + \gamma)} \left[e^{-(\lambda + \gamma)x} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{\gamma}{-(\lambda + \gamma)} \left[e^{-\infty} - 1 \right] \\
&= \frac{\gamma}{\gamma + \lambda}
\end{aligned}$$

Exemple 2.14. Comencem fent el següent càlcul.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\gamma (\gamma x)^n e^{-\gamma x}}{n!} dx &= \gamma^{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda + \gamma)x} x^n}{n!} dx \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \right)^{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^n}{n!} dy \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \right)^{n+1},
\end{aligned}$$

on hem fet el canvi de variables $y = -(\gamma + \lambda)x$. Aleshores, siguin X_1, \dots, X_{n+1} variables aleatòries independents idènticament distribuïdes on les X_i tenen la densitat exponencial $\gamma e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$. Aleshores, $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ té la següent transformada de Laplace:

$$E \left(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \left(\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \right)^{n+1} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\gamma (\gamma x)^n e^{-\gamma x}}{n!} dx.$$

Per tant, hem trobat que $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ té una densitat $\frac{\gamma (\gamma x)^n e^{-\gamma x}}{n!}$, que és una distribució Gamma.

Ara, volem estendre aquestes nocions a distribucions i mesures arbitràries U a \mathbb{R}_+ . Suposem que $U(x)$ és no-decreixent en $[0, \infty)$, però que potser $U(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) > 1$.

Si existeix un $a \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) < \infty,$$

per $\lambda > a$, aleshores

$$\hat{U}(\lambda) := \int_0^\infty U(dx), \quad \lambda > a$$

s'anomena la **transformada de Laplace de U**. Si aquest a no existeix, aleshores direm que la transformada de Laplace no està definida.

Notem que les propietats anteriors tenen extensions òbvies. Per exemple, la transformada de Laplace de U , si existeix, determina únicament U .

La raó per la qual treballem amb les transformades de funcions com U és que, com veurem en seccions posteriors, habitualment es treballa amb la funció de renovació $U(t) = E(N_t)$ i ens convé poder extreure la transformada d'aquesta funció (més endavant veurem que és una funció de renovació i què és N_t).

2.4 Processos Estocàstics

Ja hem vist les eines necessàries per estudiar els processos de renovació, però, abans d'endinsar-nos a estudiar-los, comencem veient què és un procés estocàstic.

A grans trets, un procés estocàstic és una família de variables aleatòries definides en un mateix espai de probabilitats, indexat pels elements d'un conjunt ordenat T que anomenarem *conjunt de paràmetres*. Habitualment es pren T com un interval de temps i es diu que la variable aleatòria indexada per un element $t \in T$ descriu l'estat del procés estocàstic a temps t . Més concretament:

Definició 2.15. *Un **procés estocàstic** és una família de variable aleatòries $\{X_t, t \in T\}$, definides en un espai de probabilitats comú (Ω, \mathcal{B}, P) , on el conjunt de paràmetres T és un subconjunt de \mathbb{R} .*

Definició 2.16. *Segons el tipus de conjunt de paràmetres distingirem dos tipus de processos:*

- Si $T = \mathbb{N}_+ = \{0, 1, \dots\}$ direm que el procés és un **procés estocàstic de paràmetre discret**.
- Si T és un interval de \mathbb{R} llavors direm que el procés té **paràmetre continu**.

Una manera de determinar un procés estocàstic és a partir de les seves funcions de distribució marginals. Recordem què són aquestes funcions:

Definició 2.17. *Sigui $\{X_t, t \in T\}$ un procés estocàstic i $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, tals que es compleix $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Aleshores,*

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n] \quad (2.5)$$

és una funció de distribució marginal del procés $\{X_t, t \in T\}$.

Així doncs, direm que un procés estocàstic està determinat si totes les seves funcions de distribució marginals $\{F_{t_1, \dots, t_n}(\cdot, \dots, \cdot)\}$, obtingudes per tots els subconjunts $\{t_1, \dots, t_n\}$ de T , estan determinades.

2.4.1 Procés de Poisson

Vist ja què és un procés estocàstic, vegem-ne un en particular: el procés de Poisson.

El procés de Poisson el podem situar dins d'una classe de processos més general. Aquesta és la dels processos puntuals. Més concretament, dins dels processos puntuals, el procés de Poisson és un procés de comptatge.

Els processos puntuals serveixen per modelitzar processos que depenguin de punts en un subespai $E \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

La idea és que tindrem una sèrie de punts distribuïts de manera aleatòria en el subespai E i a nosaltres ens interessarà la funció que compta el nombre aleatori de punts que hi ha en cada subconjunt afitat $A \subset E$.

Sigui, doncs, $\{X_n, n \in T\}$ amb $X_n : \Omega \rightarrow E$ una família de punts aleatoris sobre l'espai E . Llavors, fixat $A \subset E$, considerem

$$\mathbb{1}_{X_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n \in A \\ 0, & \text{si } X_n \notin A. \end{cases}$$

A partir d'aquesta, definim la mesura de comptatge $N := \sum_n \mathbb{1}_{X_n}(\cdot)$ on $N_A = \sum_n \mathbb{1}_{X_n}(A)$. N_A serà el nombre de punts aleatoris que hi ha al conjunt A .

Llavors, direm que N és un procés puntual i que les variables $\{X_n, n \in T\}$ són punts.

Vist què són els processos puntuals, vegem el cas particular dels processos de comptatge:

Definició 2.18. *Un **procés de comptatge** és un procés aleatori $\{N_t, t \geq 0\}$ no-negatiu, creixent a valors enters. És a dir,*

- $N_0 = 0$ i $N_t \geq 0$ per a tot t .
- N_t és un enter.
- Si $s < t$ llavors $N_s < N_t$.

En general, si $s < t$ llavors $N_t - N_s$ s'interpreta com el nombre d'esdeveniments que han succeït en l'interval $(s, t]$.

Ara, com que estem en un espai de probabilitats (Ω, \mathcal{B}, P) , fixem un $\omega \in \Omega$ i dibuixem la trajectòria de $N(\omega)$:

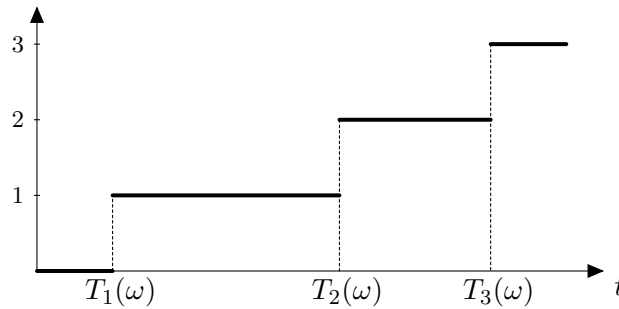


Figura 1: Trajectòria d'un procés de comptatge.

Els $\{T_n\}_{n \geq 1}$ que tenim a la figura els anomenarem **temps d'arribada**. Aleshores podem definir

$$N_t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}.$$

Aquest N_t mostra el procés de comptatge com un procés puntual.

Abans de parlar del procés de Poisson, definim dos conceptes que utilitzarem per poder-lo definir.

Definició 2.19. *Direm que:*

- El procés té **increments estacionaris** si la distribució del nombre d'esdeveniments que succeeixen en un interval de temps només depèn de la longitud d'aquest interval.
- El procés té **increments independents** si les distribucions dels nombres d'esdeveniments que succeeixen en dos intervals de temps disjunts són independents.

Ara sí, parlem del procés de Poisson (vist com un procés de comptatge). Vegem com el definirem:

Definició 2.20. Direm que un procés de comptatge $\{N_t, t \geq 0\}$ és un **procés de Poisson (homogeni) de paràmetre λ** , $\lambda > 0$, si compleix:

1. $N_0 = 0$.
2. El procés té increments independents.
3. Per a tot $t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t \sim \text{Poiss}(\lambda s)$, és a dir,

$$P[N_{t+s} - N_t = n] = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}.$$

Observació 2.21. Si el paràmetre λ no és constant i depèn del temps ($\lambda(t)$) aleshores parlarem d'un **procés de Poisson no homogeni**.

Observem que, de **3**, podem deduir que el procés té *increments estacionaris*. També, de **1** i **3**, obtenim que $N_t \sim \text{Poiss}(\lambda t)$.

Definició 2.22. Sigui $\{N_t, t \geq 0\}$ un procés de Poisson amb paràmetre $\lambda > 0$. Definim els següents conceptes:

- Per a tot $n \geq 1$, direm que T_n és el **temps d'arribada** de l' n -èsim salt.
- Per a tot $n \geq 1$, X_n és el temps que transcorre entre l' $(n-1)$ -èsim i l' n -èsim salt. A aquests X_n els anomenarem **temps entre arribades**.

Aleshores, fixem-nos que tindrem dues successions associades al nostre procés de Poisson: $\{T_n\}_{n \geq 1}$ i $\{X_n\}_{n \geq 1}$. A més, podem definir la successió de temps d'arribada de manera recursiva a partir de la successió de temps entre arribades:

- $T_0 = 0$,
- $T_1 = X_1$,
- $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, per $n \geq 1$.

Llavors, també podem definir els X_n a partir dels T_n : $X_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 2$.

En la següent figura observem un exemple de com serà la trajectòria d'un procés de Poisson.

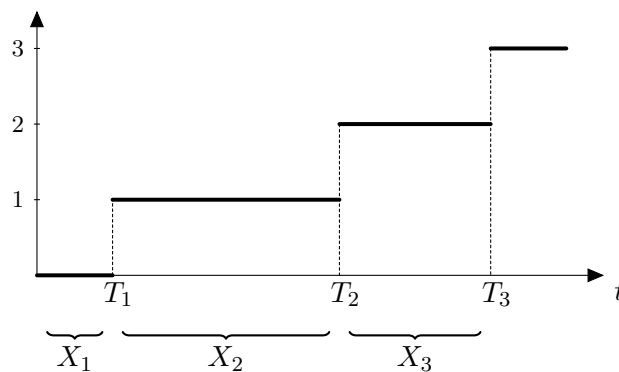


Figura 2: Trajectòria d'un procés de Poisson.

Un tret característic del procés de Poisson és la relació que té amb la distribució exponencial. Com veurem ara, els *temps entre arribades*, X_n , seran variables aleatòries amb distribució exponencial (totes amb el mateix paràmetre).

Proposició 2.23. $\{X_n\}_{n \geq 1}$ és una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució exponencial de paràmetre λ , $\lambda > 0$.

Demostració. Fem inducció sobre n . Vegem-ho primer per X_1 :

$$P[X_1 > t] = P[N_t = 0] = e^{-\lambda t}.$$

Per tant, $X_1 \sim \text{exp}(\lambda)$. Per veure què passa en $n + 1$ és suficient veure que

$$P[X_{n+1} > t | X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n] = e^{-\lambda t},$$

ja que això implicarà que $X_{n+1} \sim \text{exp}(\lambda)$ i que X_{n+1} és independent de $\sigma\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Demostrem-ho doncs.

Primer de tot, $\sigma\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \sigma\langle T_1, \dots, T_n \rangle = \sigma\langle N_u, u \leq T_n \rangle$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} > t | X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n] &= P[X_{n+1} > t | T_1 = s_1, \dots, T_n = s_1 + \dots + s_n] \\ &= P[N_{s_1 + \dots + s_n + t} - N_{s_1 + \dots + s_n} = 0 | T_1 = s_1, \dots, T_n = s_1 + \dots + s_n] \\ &= P[N_{s_1 + \dots + s_n + t} - N_{s_1 + \dots + s_n} = 0 | N_u, u \leq s_1 + \dots + s_n] \\ &= P[N_{s_1 + \dots + s_n + t} - N_{s_1 + \dots + s_n} = 0] \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

□

D'aquí podem deduir que, com $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, T_n segueix una distribució Gamma de paràmetres n i λ i, per tant, té densitat

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t).$$

També obtenim que, aleshores, T_n és independent de X_{n+1} .

Del fet que tots els X_n siguin variables exponencials amb el mateix paràmetre podem extreure una definició alternativa del procés de Poisson.

Definició 2.24. Sigui $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució exponencial de paràmetre λ , $\lambda > 0$. Direm que un procés de comptatge $\{N_t, t \geq 0\}$ és un **procés de Poisson** de paràmetre λ si, per cada $n \geq 1$, l' n -èsima arribada succeeix al temps $T_n = X_1 + \dots + X_n$.

Com que estem veient que el procés de Poisson està estretament relacionat a la distribució exponencial, és convenient recordar la propietat de la pèrdua de la memòria de la llei exponencial.

Propietat 2.25. (Pèrdua de la memòria). Sigui X una variable aleatòria tal que $X \sim \exp(\lambda)$. Aleshores, per tot $x, y > 0$,

$$P[X > x + y | X > y] = P[X > x].$$

També, recordem que, si tenim X i Y dues variables aleatòries independents tals que $X \sim \exp(\lambda_1)$ i $Y \sim \exp(\lambda_2)$, aleshores $\min\{X, Y\} \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

A partir d'aquestes propietats de la llei exponencial tindrem que, en el procés de Poisson, si estem a temps t , el temps d'espera fins la següent arribada és una exponencial.

Proposició 2.26. Fixem $t \geq 0$. Sigui W_t el temps d'espera des de t fins la següent arribada. Aleshores $W_t \sim \exp(\lambda)$.

Demostració. Com que no sabem quantes arribades hi ha hagut abans del temps t hem de considerar la següent successió:

$$\{W_t \leq z\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T_n \leq t < T_{n+1} \leq t + z\}.$$

Aleshores hem de calcular cada una de les probabilitats de la unió. Com que $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$ i $T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $X_{n+1} \sim \exp(\lambda)$ són independents, podem escriure

$$\begin{aligned} P[T_n \leq t < T_{n+1} \leq t + z] &= \int \int_{\{(x,y), x \leq t \leq x+y \leq t+z\}} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} \left(\int_{t-x}^{t+z-x} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} \left(e^{-\lambda(t-x)} - e^{-\lambda(t+z-x)} \right) dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} \left(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+z)} \right) dx \\ &= \frac{1}{n!} (\lambda t)^n \left(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+z)} \right). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} P[W_t \leq z] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[T_n \leq t < T_{n+1} \leq t + z] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda z} \right) \\ &= 1 - e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

□

També podem dir que el procés de Poisson és absolutament aleatori ja que, si sabem que a l'instant t hi ha hagut n esdeveniments, aquests es distribueixen de manera aleatòria.

2.4.1.1 Procés de Poisson Filtrat

Ja hem vist en què consisteix el procés de Poisson. Ara, però, ens convé estudiar breument el procés de Poisson filtrat, ja que en la secció **Una aplicació dels Processos de Renovació** ens serà útil saber-ne algunes propietats. Vegem doncs quina és la particularitat dels processos de Poisson filtrats.

Definició 2.27. *Sigui $\{N_t, t \geq 0\}$ un procés de Poisson de paràmetre λ , $\lambda > 0$. Siguin $0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n \dots$ els temps d'arribada d'aquest procés i sigui $\{Y_n\}$ una successió de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes i independents de N_t . Sigui, per últim, $\omega(t, T, Y)$ una funció real. Aleshores,*

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} \omega(t, T_n, Y_n)$$

*és un **procés de Poisson filtrat**.*

A la funció $\omega(\cdot, \cdot, \cdot)$ l'anomenarem **funció de resposta**.

Fixem-nos que, per la definició, tenim que X_t és la suma dels valors de ω que succeeixen als temps T tals que $0 \leq T < t$. També, notem que cada valor de la funció de resposta $\omega(t, T_n, Y_n)$ té un punt d'inici aleatori T_n i la variable aleatòria Y_n en determina la seva mida i forma en tot el temps que recorre fins t .

Com que totes les arribades T_n succeeixen a l'interval $[0, t]$, podem assumir

$$\omega(t, T, Y) = 0, \quad \text{per } T > t.$$

Fixem-nos també que les successions $\{T_n\}_{n \geq 1}$ i $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ constitueixen la part aleatòria de X_t i estan caracteritzades pel paràmetre λ i per la funció de distribució F_Y (amb densitat f_Y en cas que existeixi) de les variables Y_n .

Aquest processos, habitualment anomenats *shot-noise processes* (processos del so d'un tret), es poden interpretar com la superposició d'impulsos aleatoris independents i idènticament distribuïts. Per veure una altra manera de definir aquests processos, vegem-ne un exemple on s'utilitzen per estudiar el corrent elèctric.

Exemple 2.28. Suposem que els electrons d'un corrent elèctric arriben seguint un procés de Poisson homogeni amb paràmetre $\alpha \in [0, \infty)$. Suposem que un electró produeix un corrent elèctric $\omega(t)$ quan han passat t unitats de temps respecte de la seva arribada. Usualment es pren ω com una funció exponencial:

$$\omega(t) := e^{-\theta t}, \quad \theta > 0.$$

Sigui $\{T_n\}_{n \geq 1}$ els temps d'arribada dels electrons. Aleshores, el corrent total a temps t és

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \omega(t - T_i).$$

Cal comentar que pot ser que necessitem usar la propietat dels estadístics d'ordre per poder determinar la distribució de $X(t)$ per cada temps t .

Recordem què són els estadístics d'ordre: Sigui Y_1, \dots, Y_n , n variables aleatòries independents. Definim els seus estadístics d'ordre com $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ si es compleix

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}.$$

Si les Y_1, \dots, Y_n són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb llei $U(0, t)$, aleshores tenen densitat conjunta

$$f_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{t^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{(0,t)}(y_i).$$

Per altra banda, l'estadístic d'ordre $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ té densitat conjunta

$$f(y_1, \dots, y_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_D(y_1, \dots, y_n),$$

amb $D = \{x \in (0, t)^n; x_1 < x_2 < \dots < x_n\} \subset (0, t)^n$.

També ens cal recordar que, si $N_t = n$, aleshores els temps d'arribada (T_1, \dots, T_n) segueixen la mateixa distribució que els estadístics d'ordre corresponents a n variables aleatòries independents amb distribució $U(0, t)$.

Tornem ara al procés de Poisson filtrat. Calculem la seva transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} E(\exp\{-\lambda X(t)\}) &= E\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{N_t} \omega(t - T_i)\right\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n \omega(t - U_{(i)})\right\}\right) P[N_t = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n \omega(t - U_i)\right\}\right) P[N_t = n], \end{aligned}$$

on els U_i , $i = 1, \dots, n$, són variables uniformes independents idènticament distribuïdes, els $U_{(i)}$ són els seus estadístics d'ordre i hem aplicat la propietat dels estadístics d'ordre que hem comentat anteriorment.

Sigui ara $U \sim U(0, 1)$ una variable aleatòria de distribució uniforme. Llavors usant que $U \stackrel{d}{=} 1 - U$ i $tU \stackrel{d}{=} U_1$, aleshores

$$\begin{aligned} E(\exp\{-\lambda X(t)\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (E(\exp\{-\lambda \omega(t - tU)\}))^n P[N_t = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (E(\exp\{-\lambda \omega(tU)\}))^n P[N_t = n]. \end{aligned}$$

Recordant la funció generatriu d'una variable aleatòria amb distribució Poisson de paràmetre α , obtenim

$$\begin{aligned} E(\exp\{-\lambda X(t)\}) &= \exp\left\{\alpha t (E(e^{-\lambda \omega(tU)} - 1))\right\} \\ &= \exp\left\{\alpha t \int_0^1 (e^{-\lambda \omega(tu)} - 1) du\right\}. \end{aligned}$$

Per tant, la transformada de Laplace d'un procés de Poisson filtrat és

$$E(\exp\{-\lambda X(t)\}) = \exp\left\{\alpha t \int_0^1 (e^{-\lambda \omega(tu)} - 1) du\right\}. \quad (2.6)$$

3 Processos de Renovació

Ara que ja hem vist les eines necessàries i ens hem situat en el context de processos estocàstics, comencem a estudiar els processos de renovació.

Suposem $\{Y_n, n \geq 0\}$ una successió de variables aleatòries independents a valors no-negatius.

Més encara, suposem que la successió $\{Y_n, n \geq 1\}$ és de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb funció de distribució $F(x)$. Notem que, en aquest cas, a diferència de l'anterior, la variable Y_0 és diferent de les altres.

Sempre assumirem, per cada $n \geq 1$,

$$P[Y_n < 0] = 0, \quad P[Y_n = 0] < 1.$$

Fixem-nos que això vol dir que $F(0^-) = 0$ i $F(0) < 1$.

A partir d'aquesta successió de v.a.i.i.d. podem definir el que anomenarem **successió de renovació** o **procés de renovació**.

Definició 3.1. *Sigui $\{Y_n, n \geq 0\}$ una successió de variables aleatòries independents. Per $n \geq 0$ definim un **procés de renovació** com $S_n = Y_0 + \dots + Y_n$.*

Les quantitats de S_n les pensarem com els temps d'esdeveniment d'algun fenòmen i les anomenarem **temps de renovació** o **èpoques de renovació**.

Observem que, en el fons, un *procés de renovació* serà una successió $\{S_n, n \geq 0\}$ on cada S_n és com les hem definit anteriorment.

Definició 3.2. *Direm que el procés està **retardat** si $P[Y_0 > 0] > 0$. En cas contrari, direm que és **pur**.*

Si el procés és *pur*, aleshores es complirà $S_0 = 0 = Y_0$, és a dir, el temps $t = 0$ el considerarem una època de renovació.

3.1 Recompte de renovacions

Definim la **funció de recompte** del nombre de renovacions com la variable aleatòria següent:

$$N_t := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n). \quad (3.1)$$

Notem que aquesta funció dona el nombre de renovacions en $[0, t]$ i és un procés puntual. Més generalment, si fixem dos temps t_1 i t_2 tals que $t_1 < t_2$, aleshores definim

$$N_{t_1, t_2} := N_{t_2} - N_{t_1}. \quad (3.2)$$

Aquesta generalització ens determina el nombre de renovacions en l'interval $(t_1, t_2]$.

Definició 3.3. *A la funció $U(t) := E(N_t)$ l'anomenarem **funció de renovació**.*

Observem que, quan el procés sigui *pur* ($S_0 = 0$) aleshores la funció de renovació serà la següent:

$$U(t) := E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t). \quad (3.3)$$

Per contra, si el procés està *retardat*, tenim que $S_0 = Y_0$ amb distribució G i la funció de renovació serà:

$$V(t) := \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)*}(t) = G * U(t). \quad (3.4)$$

Observació 3.4. Si ens hi fixem, de fet, aquests processos de renovació no són més que una extensió del procés de Poisson amb la diferència que, en aquest cas, els temps entre renovacions no són variables aleatòries amb distribucions exponencials (com sí ho són en el procés de Poisson). És a dir, podem estudiar el procés de Poisson com un cas concret de procés de renovació on els temps entre renovacions tenen distribució exponencial.

Vegem ara la relació existent entre la successió de recompte dels temps de renovació, $\{N_t\}$, i la successió de renovació en sí, $\{S_n\}$.

Observació 3.5.

1. $\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\}$, per $n \geq 0$.
2. $S_{N_t-1} \leq t < S_{N_t}$ quan $\{N_t \geq 1\}$.
3. $\{N_t = n\} = \{S_{n-1} \leq t < S_n\}$, per $n \geq 1$.

Sobretot, notem que l'esdeveniment $\{N_t \leq n\}$ només depèn de S_n .

Comentem ara algunes propietats de N_t .

Teorema 3.6. Per qualsevol $t \geq 0$,

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) < \infty$ per $\gamma < \frac{1}{F(0)}$.
2. Existeix la funció generatriu dels moments de N_t , per tant, tots els moments de N_t són finits. En particular, $U(t) < \infty$, quasi segurament.²

Per tal de demostrar aquest teorema vegem primer aquest resultat tècnic.

Lema Tècnic 3.7. Una variable aleatòria Z té funció generatriu dels seus moments si, i només si, la funció de distribució de Z està acotada exponencialment, és a dir, per algun $K > 0$, $c > 0$ i per tot $x > 0$,

$$P[Z > x] \leq Ke^{-cx}. \quad (3.5)$$

Demostració. (Lema Tècnic)

\Rightarrow Suposem que existeix la funció generatriu dels moments de Z en l'interval $(0, \theta_0)$. Llavors, per $\theta < \theta_0$ tenim:

$$P[Z > x] = P[e^{\theta Z} > e^{\theta x}] \leq E(e^{\theta Z}) e^{-\theta x},$$

per la desigualtat de Txebixev.

\Leftarrow Suposem que la funció de distribució de Z està acotada exponencialment com en (3.5). Com que per $\theta < c$ tenim que

$$E(e^{\theta Z}) < \infty \iff E(e^{\theta Z} - 1) < \infty,$$

²La funció generatriu dels moments de la variable aleatòria X és $\Psi(t) = E(e^{tX})$.

podem calcular

$$\begin{aligned}
 E(e^{\theta Z} - 1) &= E\left(\int_0^\infty \theta e^{\theta u} \mathbb{1}_{\{u < Z\}} du\right) \\
 &= \int_0^\infty \theta e^{\theta u} P[Z > u] du \\
 &\leq \int_0^\infty \theta e^{\theta u} K e^{-cu} du \\
 &= K\theta \int_0^\infty e^{(\theta-c)u} du < \infty
 \end{aligned}$$

□

Demostració. (Teorema)

1. Fixem $\gamma < \frac{1}{F(0)}$. Observem que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{F}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(F(0) + \int_{(0, \infty)} e^{-\lambda x} F(dx) \right) = F(0).$$

Aleshores, podem prendre un λ prou gran perquè es compleixi $\hat{F}(\lambda)\gamma < 1$. Llavors tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n F^{n*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P[S_n \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P[e^{-\lambda S_n} \geq e^{-\lambda t}],$$

on $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ i $Y_0 = 0$. Usem ara la desigualtat de Txeixev³ per obtenir la cota superior següent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n P[e^{-\lambda S_n} \geq e^{-\lambda t}] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \frac{E(e^{-\lambda S_n})}{e^{-\lambda t}}.$$

Llavors,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \frac{E(e^{-\lambda S_n})}{e^{-\lambda t}} &= e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n E\left(e^{-\lambda(Y_0 + \dots + Y_n)}\right) \\
 &= e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \left(\widehat{F^{n*}}(\lambda)\right) \\
 &= e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma \hat{F}(\lambda)\right)^n < \infty
 \end{aligned}$$

ja que $\gamma \hat{F}(\lambda) < 1$.

2. Usant el Lema Tècnic només cal que demostrem que $P[N_t > n]$ està acotada exponencialment.

³La desigualtat de Txeixev és $P[|X| \geq a] \leq \frac{E(|X|^p)}{a^p}$ on la variable aleatòria X té moments d'ordre p .

Triem $1 < \gamma < \frac{1}{F(0)}$. Per **1.** tenim

$$\gamma^n F^{n*}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Per tant, existeix un n_0 tal que per tot $n \geq n_0$ es compleix

$$F^{n*}(t) \leq \gamma^{-n} = e^{-(\ln(\gamma))^n}.$$

Usant l'observació **3.5** amb $Y_0 = 0$ podem obtenir, per $n \geq n_0$,

$$P[N_t > n] = P[S_n \leq t] = F^{n*}(t) \leq e^{-(\ln(\gamma))^n}.$$

Per tant, escollint una K adequada, podem estendre-ho a tot n i obtenir

$$P[N_t > n] \leq K e^{-cn}.$$

D'aquest resultat se'n dedueix que $U(t) < \infty$.

□

Observació 3.8. Notem que el que ens diu aquest teorema és que $U(t)$ serà finit però pot ser difícil de calcular.

Per continuar aprofundint en l'estudi de N_t vegem el següent teorema que ens dona informació sobre el seu comportament quan $t \rightarrow \infty$.

Teorema 3.9. *Suposem que $\mu = E(Y_1) = \int_0^\infty xF(dx) < \infty$ és l'esperança del temps entre renovacions.*

1. Si $P[Y_0 < \infty] = 1$ llavors $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu^{-1}$ quasi segurament.
2. Si $\sigma^2 = Var(Y_1) < \infty$ aleshores

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left[\frac{(N_t - t\mu^{-1})}{(t\sigma^2\mu^{-3})^{\frac{1}{2}}} \leq x \right] = F_N(x),$$

on $F_N(x)$ és la funció de distribució d'una distribució $N(0, 1)$.

Això vol dir que N_t és asimptòticament normal ja que, a mesura que augmenta la mostra ($t \rightarrow \infty$), la distribució de probabilitat s'aproxima a una distribució normal.

Demostració.

1. Per la llei forta dels grans nombres tenim que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(Y_1) = \mu$ quasi segurament, ja que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_0}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = 0 + \mu = \mu.$$

Observem que $N_t \uparrow \infty$ quasi segurament. De fet, com que $\{N_t\}$ és una successió monòtona creixent, només cal veure que $N_t \uparrow \infty$ en probabilitat i, això, és immediat:

$$P[N_t > n] = P[S_n \leq t] = G * F^{n*}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1,$$

on hem utilitzat l'observació **3.5**.

Per tant, podem concloure amb probabilitat 1 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu.$$

Ara, pel segon punt de l'observació **3.5**, tenim $S_{N_t-1} \leq t < S_{N_t}$. D'aquí obtenim

$$\left(\frac{S_{N_t-1}}{N_t-1} \right) \left(\frac{N_t-1}{N_t} \right) \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t}}{N_t}.$$

Com tots dos extrems convergeixen a μ quasi segurament, tenim $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu^{-1}$.

- 2.** Sigui $[x]$ la part entera de $x \in \mathbb{R}$. Per demostrar aquest apartat utilitzarem el teorema del límit central:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Això ho podem traduir a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right] = F_N(x)$$

uniformement en $x \in \mathbb{R}$, on F_N és la funció de distribució d'una $N(0, 1)$.

$$\text{Tenim } P \left[\frac{N_t - t\mu^{-1}}{(\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2}} \leq x \right] = P \left[N_t \leq x (\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2} + t\mu^{-1} \right].$$

Definim ara $h(t) := \left[x (\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2} + t\mu^{-1} \right]$. Usant l'observació **3.5** obtenim

$$P[N_t \leq h(t)] = P[S_{h(t)} > t] = P \left[\frac{S_{h(t)} - \mu h(t)}{\sigma h^{1/2}(t)} > \frac{t - \mu h(t)}{\sigma h^{1/2}(t)} \right].$$

És suficient veure que $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ i $z(t) := \frac{t - \mu h(t)}{\sigma h^{1/2}(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -x$ ja que, en aquest cas, la convergència uniforme del teorema del límit central implicarà:

$$P \left[\frac{S_{h(t)} - \mu h(t)}{\sigma h^{1/2}(t)} > z(t) \right] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 - F_N(-x) = F_N(x),$$

on F_N és la funció de distribució d'una $N(0, 1)$.

Observem primer que $h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ ja que $h(t) \sim t\mu^{-1}$. Per veure $z(t) \rightarrow -x$, tenim que $h(t) = x (\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2} + t\mu^{-1} + \epsilon(t)$, on $|\epsilon(t)| \leq 1$. Aleshores,

$$z(t) = \frac{t - \mu x (\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2} - t - \mu \epsilon(t)}{\sigma h^{1/2}(t)} \sim \frac{-\mu x (\sigma^2 t \mu^{-3})^{1/2}}{\sigma (t\mu^{-1})^{1/2}} = -x.$$

□

Teorema 3.10. (Teorema Elemental de Renovació).

Sigui $\mu = E(Y_1) \leq \infty$. Aleshores,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}U(t) = \mu^{-1},$$

sempre i quan $Y_0 < \infty$ quasi segurament.

Demostració. Pel Teorema **3.9** i, després, pel Lema de Fatou⁴,

$$\mu^{-1} = E \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \right) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N_t)}{t} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t}.$$

Per obtenir la desigualtat contrària construïm la successió $Y_0^* = 0$, $Y_i^* = Y_i \wedge b$. Llavors $S_0^* = 0$, $S_n^* = Y_1^* + \dots + Y_n^*$, $N_t^* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n^*)$ i $V^*(t) = E(N_t^*)$. Per tant, tenim $S_n \geq S_n^*$ i $N_t^* \geq N_t$.

Observem doncs que $E(S_{N_t^*}^*) = E(Y_1^*) E(N_t^*) = E(Y_1^*) V^*(t)$ ja que és un cas particular de la Identitat de Wald⁵. Aleshores,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{V^*(t)}{t} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(S_{N_t^*}^*)}{tE(Y_1^*)} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(S_{N_t^*-1}^* + Y_{N_t^*}^*)}{tE(Y_1^*)} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(S_{N_t^*-1}^*) + E(Y_{N_t^*}^*)}{tE(Y_1^*)} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t + b}{tE(Y_1^*)} \\ &= \frac{1}{E(Y_1^*)} = \frac{1}{E(Y_1 \wedge b)}. \end{aligned}$$

Fem $b \uparrow \infty$. Llavors, $E(Y_1 \wedge b) \uparrow E(Y_1) = \mu$. Per tant, tenim $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \leq \mu^{-1}$.

Així doncs,

$$\mu^{-1} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} \leq \mu^{-1}.$$

Hem demostrat el resultat per $V(t)$, on el procés de renovació $\{S_n, n \geq 0\}$ està retardat. Ara, per $U(t)$, el procés $\{S_n, n \geq 0\}$ és pur ($S_0 = 0$).

En aquest cas,

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq t] = P[S_0 \leq t] + \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq t] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq t].$$

⁴**Lema de Fatou:** $\int_{\Omega} \liminf X_n \leq \liminf \int_{\Omega} X_n d\mu$, on $X_n \geq X$ per $n \geq 1$, X variable aleatòria.

⁵**Identitat de Wald:** siguin X_1, \dots, X_N v.a.i.i.d. amb esperança finita i N temps d'atur que pren valors naturals amb $E(N) < \infty$. Aleshores $E(X_1 + \dots + X_N) = E(X_1) E(N)$.

Notem que el terme $\sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq t]$ el podem interpretar com la funció de renovació d'un procés de renovació amb retard S_n , $n \geq 1$. Per tant, usant l'argument que hem utilitzat per $V(t)$, tenim que

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq t]}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu^{-1}.$$

Així doncs, tenim que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \mu^{-1}$. □

3.2 Processos de Renovació amb guany

El que volem veure ara és un cas concret de processos de renovació que són els que tenen un cert guany en cada temps de renovació. És a dir, suposem que tenim un procés de renovació $\{S_n, n \geq 0\}$ i suposem que per cada temps de renovació, S_n , se'ns otorga un valor aleatori de guany R_n . Aquesta idea de *guany* la hem de veure com un valor que pot ser positiu o negatiu. En el cas que sigui negatiu es pot interpretar com un cost o una pèrdua.

Assumim que la successió $\{R_n, n \geq 0\}$ és de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes però no necessàriament independents de $\{S_n, n \geq 0\}$. De fet, un exemple on els guanys R_n depenen de les S_n podria ser el següent: siguin $\{Y_n, n \geq 0\}$ els temps entre èpoques de renovació, podem definir $R_n = cY_n$ de manera que els guanys siguin proporcionals a la longitud dels intervals entre temps de renovació.

En qualsevol cas, definim el procés de renovació amb guany com

$$R(t) := \sum_{i=0}^{N_t-1} R_i = \sum_{i=0}^{\infty} R_i \mathbb{1}_{[S_i \leq t]}, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

Així doncs, $R(t)$ és el valor acumulat de guanys (o pèrdues, si és negatiu) en el temps t . Si $S_0 > 0$ llavors, per $t \in [0, S_0)$, interpretarem $R(t) = 0$.

A partir d'aquest valor acumulat de guanys, podem obtenir la quantitat de guanys que tenim per cada unitat de temps de la manera següent: $\frac{R(t)}{t}$.

Arribats a aquest punt, ens pot interessar saber la quantitat de guanys per unitat de temps que tindrem a llarg termini. En aquest cas, necessitem fer el límit

$$r := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t}. \quad (3.7)$$

Si aquest límit existeix, r serà aquest valor de guanys a llarg termini. Així doncs, necessitem veure sota quines condicions existeix aquest límit per tal de poder fer càlculs a llarg termini. La proposició següent ens proporciona unes condicions sota les quals el límit existirà.

Proposició 3.11. *Si $E(|R_i|) < \infty$ i $E(Y_j) = \mu \in (0, \infty)$, $\forall j \geq 1$, aleshores el límit (3.7) existeix quasi segurament i, a més,*

$$r := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R_1)}{\mu}.$$

Demostració.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{N_t-1} R_i}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{N_t-1} R_i}{N_t-1} \frac{N_t-1}{t}.$$

Observem que, com $N_t - 1 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, per la llei forta dels grans nombres,

$$\frac{\sum_{i=0}^{N_t-1} R_i}{N_t-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} E(R_1), \text{ quasi segurament.}$$

Per altra banda, pel Teorema 3.9,

$$\frac{N_t-1}{t} = \frac{N_t}{t} - \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu^{-1} - 0 = \mu^{-1}, \text{ quasi segurament.}$$

Per tant, $\frac{R(t)}{t} \rightarrow \frac{E(R_1)}{\mu}$, quan $t \rightarrow \infty$. □

3.3 L'equació de Renovació

L'equació de Renovació és

$$Z(t) := z(t) + F * Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)F(dy), \quad (3.8)$$

on $F * Z$ indica l'operació de convolució.

Observem que totes les funcions estan definides a $[0, \infty)$ i definirem, convenientment, $z(t) = Z(t) = F(t) = 0$ quan $t < 0$.

També, notem que Z és una funció desconeguda, z és una funció coneguda i F és una funció de distribució a $[0, \infty)$ tal que $\lim_{x \uparrow \infty} F(x) < \infty$.

Vegem alguns exemples de com trobar l'equació de renovació i d'alguns usos.

Exemple 3.12. És possible escriure els processos de ramificació com $Z = z + mF * Z$, amb una F adequada.

Exemple 3.13. Considerem la funció de renovació $U(t)$.

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) = F^{0*}(t) + F * U(t),$$

i, per tant, tenim l'equació de renovació amb $Z(t) = U(t)$ i $z(t) = F^{0*}(t)$.

Exemple 3.14 (Temps de recurrència endarrere i endavant). Considerem la successió de renovació $\{S_n, n \geq 0\}$ amb $S_n - S_{n-1} = Y_n$. Definim $B(t) := S_{N_t} - t$ i, per $t \geq S_0$, $A(t) := t - S_{N_t-1}$.

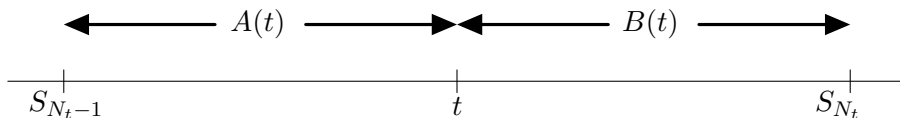


Figura 3: Temps de recurrència endarrere i endavant.

Vegem quines són les gràfiques de $A(t)$ i $B(t)$:

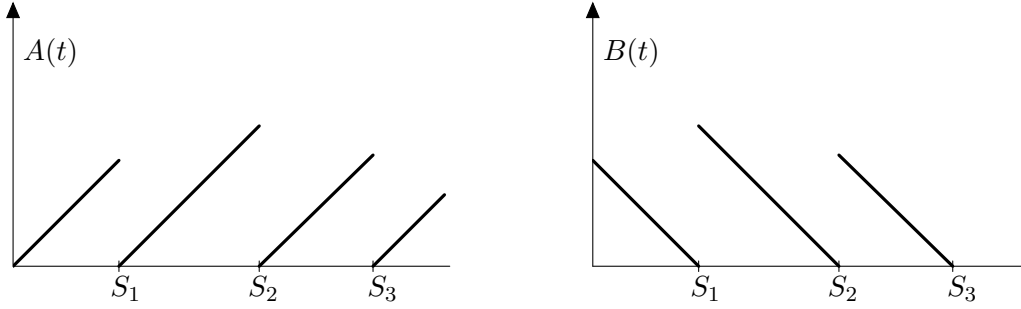


Figura 4: Gràfiques de $A(t)$ i $B(t)$.

Notem que $B(t)$ és el *temps de recurrència endarrere*, és a dir, el temps que falta fins la següent renovació. Per contra, $A(t)$ és el *temps de recurrència endavant*, és a dir, el temps que ha passat des de l'última renovació.

Calculem ara les distribucions de $A(t)$ i $B(t)$. Per fer-ho escriurem una equació de renovació per cadascuna.

Per trobar la de $A(t)$, suposem que el procés és pur i fixem $x > 0$. Aleshores,

$$P[A(t) \leq x] = P[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] + P[A(t) \leq x, Y_1 > t].$$

Ara, com que $A(t) = t$ en $\{Y_1 > t\}$, tenim

$$P[A(t) \leq x, Y_1 > t] = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t).$$

Vegem què passa en $\{Y_1 \leq t\}$:

$$\begin{aligned} P[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] &= P[t - S_{N_t-1} \leq x, N_t \geq 2] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} P[t - S_{n-1} \leq x, S_{n-1} \leq t < S_n] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\left[t - \left(y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i\right) \leq x, y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i \leq t \leq y + \sum_{i=2}^n Y_i\right] F(dy) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P[t - y - S_{n-2} \leq x, S_{n-2} \leq t - y \leq S_{n-1}] F(dy) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P[t - y - S_{N_{t-y}-1} \leq x, N_{t-y} = n - 1] F(dy) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P[A(t - y) \leq x, N_{t-y} = n] F(dy), \end{aligned}$$

i, llavors, obtenim

$$P[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] = \int_0^t P[A(t - y) \leq x] F(dy).$$

Per tant,

$$P[A(t) \leq x] = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) + \int_0^t P[A(t-y) \leq x] F(dy).$$

Notem que aquesta expressió és l'equació de renovació que ens determina $A(t)$ si prenem $z(t) = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ i $Z(t) = P[A(t) \leq x]$.

Ara, per $B(t)$, fixat $x > 0$ (i seguint suposant $Y_0 = 0$), tenim:

$$P[B(t) > x] = P[B(t) > x, Y_1 \leq t] + P[B(t) > x, Y_1 > t].$$

Per $B(t)$, en $\{Y_1 > t\}$, hem de tenir $Y_1 > t + x$. Per altra banda, en $\{Y_1 \leq t\}$, $B(t)$ comença a Y_1 , per tant, l'equació de renovació és

$$P[B(t) > x] = 1 - F(t+x) + \int_0^t P[B(t-y) > x] F(dy).$$

on fem un argument com el que hem fet per $A(t)$.

El que volem ara és veure algun resultat respecte la solució de l'equació de renovació. Per això, considerem la solució de l'equació de renovació

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)F(dy).$$

Siguin $m = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) < \infty$ i $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Assumim $F(0) < 1$. Aleshores $U(t) < \infty$ per tot t , ja que podem escriure

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n (m^{-1}F)^{n*}(t).$$

Com que $m(m^{-1}F)(0) = F(0) < 1$, la finitud de U ve donada pel Teorema **3.6**.

Vegem el següent teorema. Aquest ens proporciona informació sobre les solucions de l'equació de renovació.

Teorema 3.15. *Suposem $z(t) = 0$ per $t < 0$ i z localment acotada. Suposem també $F(0) < 1$.*

1. *Una solució localment acotada de l'equació de renovació és*

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-u)U(du).$$

2. *No hi ha una altra solució localment acotada que sigui constantment igual a 0 en $(-\infty, 0)$.*

Demostració.

1. Vegem primer que $U * z$ és localment acotada: per tot $T > 0$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} U * z(t) = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t z(t-u)U(du) \leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} z(t) \right) U(T) < \infty.$$

Ara, comprovem que $U * z$ és solució.

Primer, per associativitat, tenim que $F*(U * z) = (F * U) * z$. Ara, per l'equació de renovació de l'exemple **3.13** per U , tenim que $(F * U) * z = (U - F^{0*}) * z = U * z - z$. Per tant, $U * z = z + F * (U * z)$ i, aleshores, $U * z$ és solució.

2. Siguin Z_1 i Z_2 dues solucions localment acotades de **(3.8)**. Suposem que ambdues són igual a 0 en $(-\infty, 0)$ i que compleixen $Z_i = z + F * Z_i$, $i = 1, 2$.

Definim ara $H = Z_1 - Z_2$. Notem que, aleshores, H també és localment acotada. Més encara,

$$H = Z_1 - Z_2 = z + F * Z_1 - z - F * Z_2 = F * (Z_1 - Z_2) = F * H.$$

Si ara iterem aquesta igualtat obtenim que, per tot $n \geq 1$, $H = F^{n*} * H$.

Aleshores, per tot $T > 0$, usant la segona propietat de les propietats **2.3**, obtenim

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |H| = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (Z_1(t-y) - Z_2(t-y)) F^{n*}(dy) \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} H(t) F^{n*}(T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ja que H és localment acotada i $U(T) < \infty$ implica $F^{n*}(T) \rightarrow 0$.

Així doncs, $H \equiv 0$ i, per tant, $Z_1 = Z_2$.

□

Exemple (3.14 continuació). Reprenent l'exemple, resollem les equacions de renovació per $A(t)$ i $B(t)$.

Per $A(t)$ tenim $P[A(t) \leq x] = U * ((1 - F) \cdot \mathbb{1}_{[0,x]})(t)$.

Per altra banda, per la cua de la distribució de $B(t)$, obtenim

$$P[B(t) > x] = \int_0^t (1 - F(x+t-y)) U(dy).$$

Un cas especial d'aquest exemple és $F(dx) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \int_0^t (1 - F(x+t-y)) U(dy) &= 1 - F(x+t) + \alpha \int_0^t (1 - F(x+t-y)) dy \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(x+t-y)} dy \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + e^{-\alpha x} \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= e^{-\alpha(x+t)} + e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha t}) = e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Així doncs, $P[B(t) > x] = e^{-\alpha x}$ i $B(t)$ té una densitat exponencial per cada t .

Ara que ja hem vist varis exemples, vegem una interpretació que podem donar a $U(dx)$ o $V(dx)$.

Les equacions de renovació les obtenim posant condicions sobre una renovació *inicial* o un salt en el procés. Usualment podem estalviar-nos derivar l'equació de renovació i anar

directament a deduir la solució condicionant l'últim salt abans del temps t . El següent procediment ens ajuda a fer això últim.

Fixem $x > 0$. Aleshores,

$$P\left[\text{Hi ha alguna renovació en } (x, x + dx)\right] = P\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_n \in (x, x + dx)\}\right].$$

Com que $(x, x + dx]$ és un interval molt petit, com a molt tindrem una renovació dins seu. D'aquí deduïm que els esdeveniments $\{S_n \in (x, x + dx)\}$ són disjunts i, per tant,

$$P\left[\text{Hi ha alguna renovació en } (x, x + dx)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P\left[S_n \in (x, x + dx)\right] = V(dx).$$

Ara, podem interpretar la $P[B(t) > x]$ de l'exemple **3.14** de la manera següent:

$$\begin{aligned} P[B(t) > x] &= \int_{\{u \leq t\}} P\left[\text{Última renovació abans de } t \text{ en } (u, u + du); \text{ cap renovació en } (t, t + x)\right] \\ &= \int_{\{u \leq t\}} P\left[\text{Alguna renovació a } (u, u + du); \text{ cap renovació en } (u, t + x)\right] \\ &= \int_{\{u \leq t\}} U(du) (1 - F(t + x - u)). \end{aligned}$$

Una manera més rigorosa de veure aquest resultat és la següent (assumint $Y_0 = 0$):

$$\begin{aligned} P[B(t) > x] &= P[S_{N_t} - t > x] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n - t > x; N_t = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n - t > x; S_{n-1} \leq t < S_n]. \end{aligned}$$

Aleshores, condicionant en S_{n-1} , obtenim:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n - t > x; S_{n-1} \leq t < S_n] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t P[y - t + Y_n > x, t < y + Y_n] F^{(n-1)*}(dy) \right) \\ &= \int_0^t P[Y_n > t + x - y] \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(dy) \\ &= \int_0^t (1 - F(t + x - y)) U(dy). \end{aligned}$$

3.4 Processos de Risc

En aquesta secció, amb la intenció d'il·lustrar els processos de risc, veurem un dels exemples més habituals dins de la teoria de renovació. És un exemple interessant ja que la seva solució s'obté escrivint i resolent una equació de renovació.

Suposem que una companyia d'assegurances rep reclamacions d'indemnitzacions segons un *Procés de Poisson amb paràmetre* α (és a dir, un procés de renovació amb densitat dels temps entre renovacions $\alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$).

La quantitat de les reclamacions les representen les variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes X_1, X_2, \dots , i la successió $\{X_n\}_{n \geq 0}$ és independent del Procés de Poisson.

Sigui ara $f(t)$ la funció que determina la quantitat de diners que té la companyia asseguradora a temps t , és a dir, les reserves de risc (reserves de diners per si han de pagar indemnitzacions) a temps t .

Assumim que, si $f(t) \geq 0$, la reserva de risc augmenta c a temps t degut a l'entrada de primes i als beneficis provinents d'inversions.

A nosaltres ens interessa veure la probabilitat que l'asseguradora s'arruïni. Considerem:

$$R(x) = P[f(t) > 0 \text{ per tot } t > 0 | f(0) = x] = P[\text{no ruïna} | f(0) = x].$$

Observeu el següent cas:

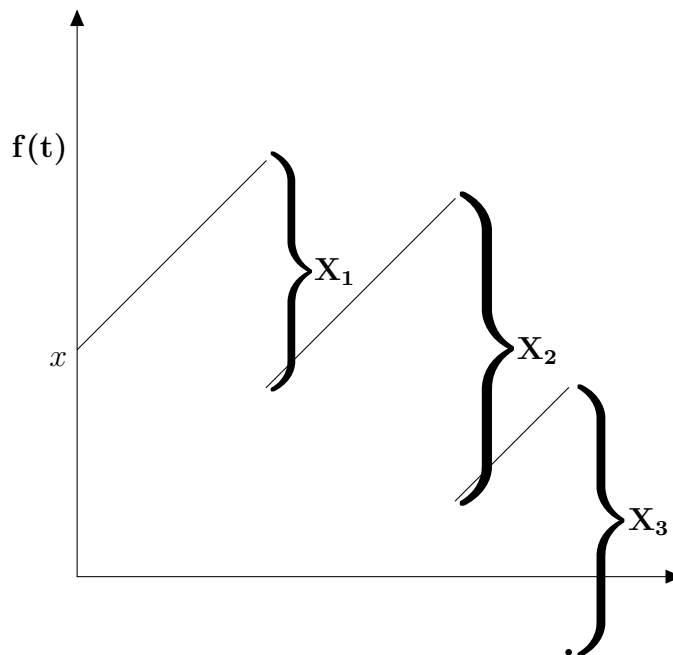


Figura 5: Procés de Risc

En aquest exemple, la ruïna de l'asseguradora es produeix després de la reclamació d'indemnització X_3 , ja que la reserva de risc arribat aquest moment es queda en negatiu i, per tant, no tenen diners per pagar futures indemnitzacions.

Siguin S_1, S_2, S_3, \dots els temps de les reclamacions. Aleshores,

$$f(t) = \begin{cases} x + ct, & 0 < t < S_1 \\ x + cS_1 - X_1, & t = S_1. \end{cases}$$

És a dir, si $x + cS_1 - X_1 < 0$ aleshores l'asseguradora s'arruïna després de pagar la indemnització X_1 . D'altra banda,

$$f(t) = x + cS_1 - X_1 + c(t - S_1).$$

Per tant,

$$f(t) = \begin{cases} x + ct - X_1, & S_1 \leq t < S_2 \\ x + cS_2 - X_1 - X_2 & t = S_2 \end{cases},$$

és a dir, després del primer salt, el procés $f(t)$ continua com si comencés des de temps 0 amb un nou estat inicial $x + cS_1 - X_1$.

Així doncs, condicionant el temps i el lloc del primer salt, obtenim:

$$\begin{aligned} R(x) &= P[f(t) \geq 0 \text{ per tot } t > 0, x + cS_1 - X_1 \geq 0 | f(0) = x] \\ &= \int_{\{(s,y): x+cs-y \geq 0\}} P[f(t) > 0, \forall t | f(0) = x + cs - y] P[(S_1, X_1) \in (ds, dy)]. \end{aligned}$$

Llavors, per la independència de X_1 i S_1 , tenim

$$R(x) = \int_0^\infty \left(\int_0^{x+cs} R(x + cs - y) \alpha e^{-\alpha s} P[X_1 \in dy] \right) ds.$$

Ara busquem manipular aquesta expressió per obtenir una equació de renovació. Fem el canvi de variables $s' = x + cs$ i $ds' = cds$. Llavors,

$$R(x) = \int_x^\infty \left(\int_0^{s'} R(s' - y) \alpha e^{-\alpha(s'-x)c^{-1}} c^{-1} P[X_1 \in dy] \right) ds'.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} R(x) &= \alpha c^{-1} \int_x^\infty \left(\int_0^{s'} R(s' - y) e^{-\alpha s' c^{-1}} e^{\alpha x c^{-1}} P[X_1 \in dy] \right) ds' \\ &= \alpha c^{-1} e^{\alpha x c^{-1}} \int_x^\infty e^{-\alpha s' c^{-1}} \left(\int_0^{s'} R(s' - y) P[X_1 \in dy] \right) ds'. \end{aligned}$$

I, per tant,

$$e^{-\alpha x c^{-1}} R(x) = \alpha c^{-1} \int_x^\infty e^{-\alpha s' c^{-1}} \left(\int_0^{s'} R(s' - y) P[X_1 \in dy] \right) ds'.$$

Observem que la dreta de la igualtat és la integral d'una funció acotada i, per tant, és absolutament contínua en $(0, \infty)$. Això vol dir que l'esquerra de la igualtat també és una funció absolutament contínua i, per tant, R és contínua.

Ara, si R és contínua, aleshores tenim que $\int_0^{s'} R(s' - y)P[X_1 \in dy]$ és contínua. I, per tant, $\int_x^\infty e^{-\alpha s' c^{-1}} \left(\int_0^{s'} R(s' - y)P[X_1 \in dy] \right) ds'$ és l'integral d'una funció contínua i, en conseqüència, diferenciable. Ara, derivant l'expressió obtenim:

$$e^{-\alpha x c^{-1}} R'(x) - R(x)e^{-\alpha x c^{-1}} \alpha c^{-1} = -\alpha c^{-1} e^{-\alpha c^{-1} x} \int_0^x R(x - y)P[X_1 \in dy],$$

és a dir,

$$R'(x) = R(x)\alpha c^{-1} - \alpha c^{-1} \int_0^x R(x - y)P[X_1 \in dy]. \quad (3.9)$$

No oblidem que el nostre objectiu és trobar l'equació que ens doni informació sobre la probabilitat que l'asseguradora s'arruïni. Aleshores, arribats a aquest punt, podem buscar l'equació per R o per R' . Provem per R' . Per fer-ho, notem el següent:

$$R(x) = R(0) + \int_0^x R'(u)du.$$

Aleshores,

$$\int_0^x R(x - y)P[X_1 \in dy] = R(0)P[X_1 \leq x] + \int_0^x \left(\int_0^{x-y} R'(u)du \right) P[X_1 \in dy]$$

Fem el canvi $w = x - u$ i, per tant, $dw = -du$:

$$\begin{aligned} \int_0^x R(x - y)P[X_1 \in dy] &= R(0)P[X_1 \leq x] + \int_0^x \left(\int_y^x R'(x - w)dw \right) P[X_1 \in dy] \\ &= R(0)P[X_1 \leq x] + \int_0^x \left(\int_0^w P[X_1 \in dy] \right) R'(x - w)dw \\ &= R(0)P[X_1 \leq x] + \int_0^x R'(x - w)P[X_1 \leq w] dw. \end{aligned}$$

Per tant, usant això en **(3.9)**, obtenim:

$$\begin{aligned} R'(x) &= R(x)\alpha c^{-1} - \alpha c^{-1} R(0)P[X_1 \leq x] - \alpha c^{-1} \int_0^x R'(x - w)P[X_1 \leq w] dw \\ &= \alpha c^{-1} \left(R(x) - R(0)P[X_1 \leq x] - \int_0^x R'(x - w)P[X_1 \leq w] dw \right) \end{aligned}$$

o també,

$$R'(x) = \alpha c^{-1} R(0)P[X_1 > x] + \int_0^x R'(x - w)\alpha c^{-1} P[X_1 > w] dw. \quad (3.10)$$

Sigui ara $F(dw) = \alpha c^{-1} P[X_1 > w]$ tal que $F([0, \infty)) = \alpha c^{-1} E(X_1)$, i tenim $Z = R'$, $z(x) = \alpha c^{-1} R(0)P[X_1 > x]$ (on encara no sabem què és $R(0)$). Tot això ens dona una equació de renovació.

Recordem que les equacions de renovació es poden resoldre utilitzant transformades de Laplace. Definim

$$\phi(\lambda) := E\left(e^{-\lambda X_1}\right), \quad \theta(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} R'(x) dx.$$

Usant les fórmules (2.3) i (2.4) de la propietat 2.10, podem transformar θ de la següent manera:

$$\theta(\lambda) = \alpha c^{-1} R(0) (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1} + \alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1} \theta(\lambda).$$

Resolent per $\theta(\lambda)$ obtenim:

$$\theta(\lambda) = \frac{\alpha c^{-1} R(0) (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1}}{1 - \alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1}}. \quad (3.11)$$

Sigui $\mu = E(X_1) = \int_0^\infty P[X_1 > x] dx = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (1 - \phi(\lambda))$.

Busquem solució per (3.10) que sigui no-negativa, integrable i no sigui idènticament zero. De (3.11) obtenim

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \theta(\lambda) = \int_0^\infty R'(x) dx = \frac{\alpha \mu c^{-1} R(0)}{1 - \alpha \mu c^{-1}}.$$

Observem que necessitem que $\alpha \mu < c$ per tal que aquesta solució existeixi. En cas que $\alpha \mu c^{-1} > 1$, perquè sigui no-negativa necessitarem $R(0) = 0$ i, per tant, $\theta(\lambda) = 0$, cosa que implica $R' \equiv 0$.

Quan $\alpha \mu < c$ trobem una solució. Primer de tot comprovem que $R(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 1$.

Sigui N_t la funció de comptatge del procés de Poisson de les reclamacions. Aleshores,

$$\begin{aligned} R(x) &= P\left[x + ct > \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \forall t\right] \\ &= P\left[x + cS_n > \sum_{i=1}^n X_i, \forall n\right] \\ &= P\left[x > \sum_{i=1}^n X_i - cS_n, \forall n\right] \\ &= P\left[x > \max_n \left\{ \sum_{i=1}^n X_i - cS_n \right\}\right]. \end{aligned}$$

Si veiem $\max_n \left\{ \sum_{i=1}^n X_i - cS_n \right\} < \infty$ aleshores tindrem $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 1$. Notem que

$$E(X_i - c(S_i - S_{i-1})) = \mu - c\alpha^{-1} < 0,$$

i per $\alpha \mu < c$ i la llei forta dels grans nombres,

$$\sum_{i=1}^n (X_i - c(S_i - S_{i-1})) = \sum_{i=1}^n X_i - cS_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \text{ quasi segurament.}$$

Aleshores, $\max_n \left\{ \sum_{i=1}^n X_i - cS_n \right\} < \infty$.

Ara que ja sabem que $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 1$, determinem $R(0)$.

Sigui $\lambda \downarrow 0$ en **(3.11)**, llavors obtenim

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta(\lambda) = \int_0^{\infty} R'(x) dx = R(\infty) - R(0) = 1 - R(0).$$

A més, com $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta(\lambda) = \frac{\alpha\mu c^{-1}R(0)}{1 - \alpha\mu c^{-1}}$, obtenim:

$$R(0) = 1 - \alpha\mu c^{-1}.$$

Conseqüentment, R és de la forma

$$R(x) = R(0) + \int_0^x R'(u) du, \quad x \geq 0,$$

i

$$\theta(\lambda) = R(0) \frac{\alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1}}{1 - \alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1}} = R(0) \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1})^n.$$

Denotem la densitat $g(x) := \alpha c^{-1} P[X_1 > x]$, tal que

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} g(x) dx = \alpha c^{-1} (1 - \phi(\lambda)) \lambda^{-1}$$

i

$$R'(x) = R(0) \sum_{n=1}^{\infty} g^{n*}(x).$$

Observem que, per exemple, $g^{2*}(x) = \int_0^x g(x-y)g(y)dy$.

Per tant, ja tenim tots els ingredients per calcular l'equació de renovació per saber si l'asseguradora s'arruïna o no.

Calculem un cas en concret. Per exemple, si la quantitat de la reclamació de la indemnització X_1 és una variable aleatòria amb distribució exponencial amb paràmetre μ , aleshores

$$\phi(\lambda) = \frac{\mu^{-1}}{\lambda + \mu^{-1}}; \quad \frac{1 - \phi(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda + \mu^{-1}},$$

i

$$\begin{aligned}
\theta(\lambda) &= R(0) \frac{\alpha c^{-1} \left(\frac{1-\phi(\lambda)}{\lambda} \right)}{1 - \alpha c^{-1} \left(\frac{1-\phi(\lambda)}{\lambda} \right)} \\
&= R(0) \frac{\alpha c^{-1} \left(\frac{1}{\lambda + \mu^{-1}} \right)}{1 - \alpha c^{-1} \left(\frac{1}{\lambda + \mu^{-1}} \right)} \\
&= R(0) \frac{\alpha c^{-1}}{\lambda + \mu^{-1} - \alpha c^{-1}} \\
&= \frac{R(0) \alpha c^{-1}}{\mu^{-1} - \alpha c^{-1}} \left(\frac{\mu^{-1} - \alpha c^{-1}}{\lambda + \mu^{-1} - \alpha c^{-1}} \right) \\
&= \left(\frac{R(0) \alpha c^{-1}}{\mu^{-1} - \alpha c^{-1}} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda x} (\mu^{-1} - \alpha c^{-1}) e^{-(\mu^{-1} - \alpha c^{-1})x} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda x} R'(x) dx.
\end{aligned}$$

En aquest cas, concloem

$$\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{R(0) \alpha c^{-1}}{\mu^{-1} - \alpha c^{-1}} (\mu^{-1} - \alpha c^{-1}) e^{-(\mu^{-1} - \alpha c^{-1})x} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) \frac{\alpha}{c} e^{-\mu^{-1} \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) x} \\
&= \left(\frac{\alpha \mu}{c} \right) \left(\mu^{-1} \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) \right) e^{-\mu^{-1} \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) x}
\end{aligned}$$

d'on obtenim,

$$\begin{aligned}
R(x) &= R(0) + \int_0^x R'(u) du \\
&= \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) + \frac{\alpha \mu}{c} \left(1 - e^{-\mu^{-1} \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) x} \right).
\end{aligned}$$

Per tant, en aquest cas, la probabilitat que la companyia asseguradora no s'arruïni quan tingui la quantitat de diners x per pagar indemnitzacions és $\left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) + \frac{\alpha \mu}{c} \left(1 - e^{-\mu^{-1} \left(1 - \frac{\alpha \mu}{c} \right) x} \right)$ on μ ve donada per la distribució de X_1 , α ve donada per la distribució dels temps entre renovacions i c és la quantitat que augmenta la reserva de diners de l'asseguradora a temps t .

3.5 El Procés de Poisson com un Procés de Renovació

Ara que ja hem vist què són els processos de renovació, i n'hem vist alguns exemples i alguns processos concrets, volem veure la relació que hi ha entre els processos de renovació i el procés de Poisson. De fet, veurem que el procés de Poisson es pot estudiar com un procés de renovació.

Notem, doncs, que una manera de definir un procés de Poisson homogeni en $[0, \infty)$ amb paràmetre γ és definir-lo com un procés de renovació pur amb distribució pels temps entre

renovacions

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma x}, \quad x > 0,$$

on no comptem $t = 0$ com a renovació. Aleshores, el procés de Poisson és la funció de comptatge $\{N(0, t], t > 0\}$ on $N(0, t] := N_t - 1 = N_t - N_0$ i $\{N_t, t \geq 0\}$ és el procés de renovació pur amb distribució exponencial als temps entre renovacions.

Per l'exemple **2.13** tenim que

$$F^{n*}(dx) = \gamma (\gamma x)^{n-1} \frac{e^{-\gamma x}}{(n-1)!} dx, \quad n \geq 1, x > 0, \quad (3.12)$$

i, per tant,

$$F^{n*}(x) = 1 - e^{-\gamma x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma x)^k}{k!}, \quad (3.13)$$

ja que si derivem (3.13) respecte de x obtenim el (3.12).

Com estem treballant amb un procés de renovació pur, tenim el següent:

$$\begin{aligned} P[N_t = n+1] &= P[S_n \leq t < S_{n+1}] \\ &= F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t) \\ &= 1 - e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma t)^k}{k!} - \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma t)^k}{k!}\right) \\ &= e^{-\gamma t} \frac{(\gamma t)^n}{n!} = P[N(0, t] = n]. \end{aligned}$$

Fixem-nos que es manté la propietat de *no envelliment* o *pèrdua de memòria*⁶ de les distribucions exponencials.

Per il·lustrar-ho, recuperem l'exemple **3.14**. Concretament, les funcions $A(t) = t - S_{N_t-1}$ i $B(t) = S_{N_t} - t$. Aleshores $P[B(t) \leq x] = 1 - e^{-\gamma x}$ i, llavors,

$$P[A(t) \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma x}, & t \geq x \\ 1, & t < x. \end{cases}$$

Per últim, escrivim la seva equació de renovació:

$$U(t) = E(N_t) = 1 + E(N(0, t]) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\gamma t} \frac{(\gamma t)^n}{n!} = 1 + \gamma t.$$

⁶**Pèrdua de memòria:** sigui X una variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\gamma > 0$. Llavors, per tot $t, s \geq 0$ es compleix $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$.

4 Una aplicació dels Processos de Renovació

L'objectiu que tenim en aquesta secció és veure una aplicació que tenen els processos de renovació. Per fer-ho, analitzarem l'article *An Application of Filtered Renewal Processes in Hydrology* de Mario Lefebvre i Fatima Bensalma [4] i veurem a quins resultats arriben.

4.1 Introducció

Aquest article té l'objectiu de modelitzar de manera acurada com varia el cabal d'un riu usant processos de renovació, concretament, el procés de renovació filtrat.

De fet, ens diuen que és molt habitual modelitzar aquests tipus de fenòmens en hidrologia utilitzant processos de Poisson filtrats però que, com volen provar, els processos de renovació filtrats retornen unes dades més exactes.

Recordem que, com s'ha vist als preliminars, donat un procés de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ amb paràmetre $\lambda > 0$ podem definir el procés de Poisson filtrat associat a aquest procés de Poisson com $\{X(t), t \geq 0\}$ amb

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N_t} \omega(t, T_n, Y_n), \quad (4.1)$$

on $\{T_n\}_{n \geq 1}$ són els temps d'arribada dels successos del procés de Poisson i Y_1, \dots, Y_n són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes i que són independents de $\{N_t, t \geq 0\}$.

Recordem també que a la funció ω li diem **funció de resposta**. En moltes aplicacions és habitual prendre

$$\omega(t, T_n, Y_n) = Y_n e^{\frac{-(t-T_n)}{c}}, \quad (4.2)$$

on c és un paràmetre que s'ha d'estimar. Llavors, ω retorna el valor a temps t d'un esdeveniment del procés de Poisson de magnitud Y_n que ha succeït a temps T_n . Més encara, s'acostuma a assumir les variables aleatòries Y_n amb distribució exponencial de paràmetre μ .

Aleshores, amb aquesta funció de resposta, el procés de Poisson filtrat es comporta com en la següent figura:

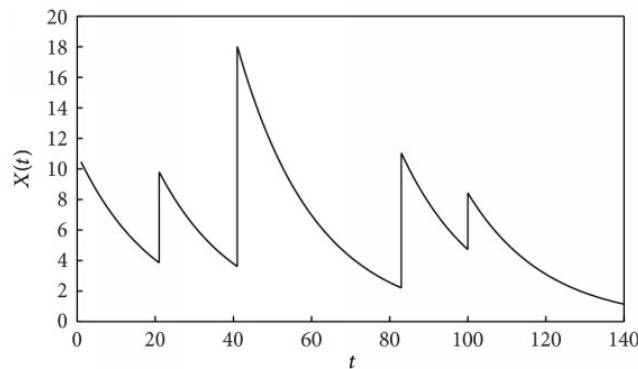


Figura 6: Procés de Poisson Filtrat donat per (4.1) i (4.2)

Fixem-nos que el comportament de $X(t)$ depèn de com sigui la funció de resposta però no depèn de la distribució dels temps entre esdeveniments. Per tant, tindrem un comportament similar quan $\{N_t, t \geq 0\}$, enlloc de ser un procés de Poisson, sigui un procés de renovació ja que, com ja hem vist, el procés de Poisson no deixa de ser un procés de renovació.

La motivació de l'article per modelitzar el cabal d'un riu usant processos de renovació ve instigada pel fet que en la majoria d'aplicacions del procés de Poisson filtrat en hidrologia prenen el valor de la funció de resposta (4.2) sense justificar el perquè utilitzen aquesta expressió.

També diuen que no s'investiga quina és la distribució de les Y_n , tot i que això no afecta en cas que només es vulgui estimar el valor de $X(t + \delta)$, $\delta > 0$, a partir de les dades que es tenen fins a temps t ja que l'estimació s'acostuma a fer usant la mitjana dels Y_n i no cal saber-ne la distribució.

Tot i així, la motivació principal és que generalment s'assumeix l'ús del procés de Poisson filtrat sense provar el perquè s'utilitza. Aquesta assumpció es fa per poder treballar amb les facilitats que proporciona el procés de Poisson, com per exemple, que els seus increments són independents i estacionaris.

Però clar, el fet d'assumir que N_t sigui un procés de Poisson també provoca una pèrdua d'exactitud. Per exemple, fixant-nos en la funció de resposta ω definida a (4.2), l'efecte sobre el valor del procés d'un esdeveniment que succeeix a temps T_n és màxim en aquest instant de temps i $\{X(t), t \geq 0\}$ té discontinuïtats als temps d'arribada del procés de Poisson. Però, en canvi, en el cas de modelitzar el cabal d'un riu, si ens fixem en hidrogrames reals, es pot observar que hi ha un període de temps més o menys extens en el qual el cabal creix des d'un mínim fins a un màxim (cosa que no correspon al comportament que observem a la **Figura 6**). Fins i tot, si es disposa de dades diàries sobre el cabal d'un riu, no s'observa un creixement gran i sobtat del cabal que vagi succeït d'un decreixement exponencial. És a dir, que aquesta modelització amb el procés de Poisson filtrat no acaba de ser realista.

Per tal d'obtenir un model més realista, en l'article [5], Mario Lefebvre i Jean-Luc Guibault utilitzen la funció de resposta

$$\omega(t, T_n, Y_n) = Y_n (t - T_n)^d e^{-\frac{(t-T_n)}{c}}, \quad (4.3)$$

on d és un paràmetre positiu. Aquesta nova funció de resposta provoca que, en el model, el cabal comenci a créixer tot just després de T_n i assoleixi el màxim després de dc unitats de temps i, llavors, comenci a decreïxer.

Tot i així, segueix sense ser prou acurat ja que, si veiem el procés de Poisson com una cadena de Markov a temps continu, el temps que transcorre mentre el procés està en un determinat estat té una distribució exponencial (que té densitat estrictament decreixent). Per altra banda, siguin T_1, T_2, \dots els temps entre dos esdeveniments successius (temps entre arribades). En el cas del cabal d'un riu, els temps entre arribades generalment són variables aleatòries amb una distribució que té una funció de densitat que creix lleugerament tot just després dels T_i . Per tant, el fet d'usar un procés de Poisson filtrat per aquests casos no s'acaba d'ajustar a la realitat.

Recordem, abans de continuar, que un procés estocàstic $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ que pren valors en un espai d'estats E numerable és un **procés de Markov** (o una cadena de Markov a

temps continu) si per a tot $s, t \geq 0$ i $j \in E$ es compleix

$$P[Y_{t+s} = j | Y_u, u \leq t] = P[Y_{t+s} = j | Y_t].$$

Fet ja aquest recordatori, continuem amb el problema que ens ocupa.

El mateix Mario Lefebvre, en l'article [3], comprova que els T_n són exponencialment distribuïts però que analitzant les dades del riu Delaware el model no s'ajusta. En canvi, mostra que usant una distribució Gamma o una distribució de Rayleigh⁷ enlloc de l'exponencial, aleshores sí que s'ajusta a les dades.

L'objectiu en aquest darrer article era predir els pics màxims de cabal al riu Delaware. Per tal d'aconseguir-ho, i vists els problemes que es tenen usant un procés de Poisson filtrat, Mario Lefebvre decideix utilitzar un procés de renovació filtrat per modelitzar el cabal d'un riu.

Un avantatge que proporciona el fet d'usar la distribució de Rayleigh pels temps entre arribades és que el corresponent procés de renovació filtrat es pot transformar a un procés de Poisson filtrat treballant en una escala temporal diferent.

Per acabar amb aquesta introducció de l'article, vegem quines coses fa per tal d'arribar a l'objectiu d'obtenir una predicció més acurada a curt termini del cabal d'un riu usant processos de renovació filtrats enlloc de processos de Poisson filtrats.

El primer que farà és desenvolupar una fórmula que permeti predir el valor $X(t + \delta)$, $\delta > 0$, donada una història del procés fins a temps t . L'únic problema que trobarem és que, al no utilitzar un procés de Poisson filtrat, no podem fer al·lusió a la propietat de pèrdua de memòria i, per tant, la tasca de trobar un estimador de $X(t + \delta)$ és una mica més complicada.

Un cop obtinguda aquesta fórmula, es compararan els resultats amb els resultats obtinguts quan s'usa Poisson filtrat (usant la funció de resposta (4.2)) per tal de veure quant millora el model utilitzant processos de renovació filtrats.

4.2 Cabals de rius modelitzats amb processos de renovació filtrats

En aquest apartat comentarem com troben la fórmula per estimar $X(t + \delta)$.

Primer de tot, prenen $X(t)$ tal que denoti el cabal d'un riu a temps t . Aleshores, pel vist anteriorment, tenim

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n e^{-\frac{(t-T_n)}{c}} \quad (X(t) = 0 \text{ si } N_t = 0), \quad (4.4)$$

on $\{N_t, t \geq 0\}$ és un procés de renovació.

Notem que estan prenent la funció de renovació (4.2), que habitualment s'usa en hidrologia per predir el cabal dels rius amb el procés de Poisson filtrat. Això ho fan per facilitar més endavant la comparació entre les dues modelitzacions.

⁷**Distribució de Rayleigh:** $X \sim \text{Rayleigh}(\sigma), \sigma > 0$, si té per funció de densitat $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, per $x > 0$.

Com succeeix en el procés de Poisson filtrat, els $\{T_n\}_{n \geq 1}$ són els temps d'arribada dels esdeveniments del procés $\{N_t, t \geq 0\}$ i els temps entre successives renovacions, $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes i independents de $\{N_t, t \geq 0\}$.

Així doncs, el procés està caracteritzat pels creixements sobtats del cabal del riu que són causats pels esdeveniments del procés de renovació que succeeixen als temps $\{T_n\}_{n \geq 1}$.

Ara, el següent pas per poder predir el valor del cabal a temps $t + \delta$ és estimar el paràmetre c que apareix a la funció de resposta.

Si entre els temps t i $t + 1$ no hi ha arribades del procés, aleshores

$$X(t + 1) = e^{-\frac{1}{c}} X(t). \quad (4.5)$$

Aleshores, per estimar c , només cal considerar les dades de tots els dies en què el cabal disminueix i calcular el quocient $R = \frac{X(t+1)}{X(t)}$. Amb totes aquestes dades, es calcula la mitjana aritmètica de R (li direm \bar{R}). Així doncs, el valor estimat de c serà:

$$\hat{c} = -\frac{1}{\ln(\bar{R})}.$$

Fixem-nos que les Y_n són una mostra aleatòria d'una variable aleatòria principal Y . Per tant, no ens cal saber la distribució exacta de les Y_n per estimar c . Només cal saber el valor esperat de Y per predir $X(t + \delta)$.

Arribats a aquest punt, el que fan a l'article és derivar les fórmules per estimar els valors del cabal del riu a $t + 1$ i $t + 2$ (consideren que t compta dies, per tant, és estimar els valors a un i dos dies vista).

Nosaltres no entrarem en els detalls dels càlculs. A grans trets, el que fa és prendre (4.5), amb el valor estimat \hat{c} , i sumar-li el terme que correspon al fet que sí hi hagi una arribada entre t i $t + 1$ (i la mateixa idea per $t + 2$).

4.2.1 Predicció del cabal d'un riu a temps $t+1$

L'objectiu és predir el valor $X(t + 1)$ sabent tota la informació del cabal fins a temps t . Per aconseguir-ho, en l'article assumeixen que hi haurà, com a molt, una arribada en l'interval $(t, t + 1]$.

És necessari calcular la probabilitat del fet que hi hagi una arribada a l'interval $(t, t + 1]$. Per aconseguir-ho, i sense comptar el cas en què el temps entre arribades τ té una distribució exponencial, defineixen

$$U_i := T_{N_t+i} - T_{N_t+i-1} \text{ per } i = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

per tal de tenir en compte la història del procés. És a dir, U_i és el temps transcorregut entre l' $(i - 1)$ -èsim i l' i -èsim esdeveniment després del succeït més recentment abans de t o a temps t . Les variables aleatòries τ i U_1 són idènticament distribuïdes.

És necessari calcular la següent probabilitat:

$$p_k := P[U_1 \leq k + 1 | U_1 > k], \quad (4.7)$$

on k és el nombre de dies que han passat des de l'arribada més recent enregistrada.

Llavors, podem escriure p_k de la manera següent:

$$p_k = \frac{\int_k^{k+1} f_{U_1}(u) du}{\int_k^{\infty} f_{U_1}(u) du}$$

on f_{U_1} és una densitat qualsevol.

Ara, si τ té distribució exponencial, sabem que, si hi ha una arribada entre t i $t + 1$, la densitat condicional de τ és uniforme en $(t, t + 1]$ i compleix que l'arribada en qüestió es produeix a temps $t + \frac{1}{2}$. En el cas general, el que hem de fer és calcular la densitat condicional de U_1 a l'interval $(k, k + 1]$, suposant que $U_1 > k$.

Llavors, si hi ha una arribada entre t i $t + 1$, el cabal a temps $t + 1$ serà

$$Z_k := X(t)e^{-\frac{1}{\hat{c}}} + E(Y) \frac{1}{P[U_1 > k]} e^{-\frac{(k+1)}{\hat{c}}} \int_k^{k+1} e^{\frac{u}{\hat{c}}} f_{U_1}(u) du. \quad (4.8)$$

Per tant, tenint en compte tota la història del procés fins a temps t , el valor estimat del cabal a temps $t + 1$ és

$$\hat{X}(t + 1) = X(t)e^{-\frac{1}{\hat{c}}} (1 - p_k) + Z_k p_k, \quad (4.9)$$

és a dir,

$$\hat{X}(t + 1) = X(t)e^{-\frac{1}{\hat{c}}} + p_k X(t)e^{-\frac{1}{\hat{c}}} + E(Y) \frac{1}{P[U_1 > k]} e^{-\frac{(k+1)}{\hat{c}}} \int_k^{k+1} e^{\frac{u}{\hat{c}}} f_{U_1}(u) du. \quad (4.10)$$

4.2.2 Predicció del cabal d'un riu a temps $t+2$

Ara, l'objectiu és fer el mateix que en el cas anterior però, en aquest cas, a temps $t + 2$.

Per començar, ens defineixen $U_{1,k} := U_1 |_{\{U_1 > k\}}$.

Per tal de predir el valor de $X(t + 2)$ a partir de la informació del procés fins a temps t necessitem saber la distribució de les variables aleatòries $S_k := U_{1,k} + U_2$, on U_2 la tenim definida a (4.6).

Per resoldre el problema assumirem que la probabilitat de tenir més de dues arribades a l'interval $(t, t + 2]$ és negligible. Aleshores, la densitat de S_k és la convolució de les funcions de densitat de $U_{1,k}$ i de U_2 :

$$f_{S_k} = \int_k^{\infty} f_{U_{1,k}}(u) f_{U_2}(s + k - u) du. \quad (4.11)$$

De fet, com que U_2 és una variable aleatòria no-negativa, podem escriure

$$f_{S_k} = \int_k^{s+k} f_{U_{1,k}}(u) f_{U_2}(s + k - u) du \text{ per } s > 0. \quad (4.12)$$

En el cas en què τ té una distribució exponencial de paràmetre λ sabem que $(S_k - k)$ té una distribució Gamma amb paràmetres $\alpha = 2$ i λ . En canvi, quan τ tingui una altra distribució sí que s'haurà de calcular la integral de (4.12).

Notem ara que el valor de $X(t+2)$ és el següent:

$$X(t+2) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{c}} X(t), & \text{si } U_{1,k} > k+2, \\ e^{-\frac{2}{c}} X(t) + Y_1^* e^{-\frac{(k+2-U_{1,k})}{c}}, & \text{si } U_{1,k} \leq k+2 \\ e^{-\frac{2}{c}} X(t) + Y_1^* e^{-\frac{(k+2-U_{1,k})}{c}} + Y_2^* e^{-\frac{(2-U_2)}{c}}, & \text{i } U_2 > 2 - (U_{1,k} - k), \\ & \text{si } U_{1,k} + U_2 \leq 2 \\ & \text{(i } U_3 > 2 - (U_{1,k} - k) - U_2), \end{cases}$$

on Y_i^* denota la mida de l' i -èsima arribada a l'interval $(t, t+2]$.

Recordem que s'està assumint $P[U_3 > 2 - (U_{1,k} - k) - U_2] \simeq 1$.

Ara, és necessari calcular

$$p_{1,k} := P[U_{1,k} \in (k, k+2]]. \quad (4.13)$$

Quan U_1 té distribució exponencial amb paràmetre λ tenim

$$p_{1,k} = P[U_1 \in (0, 2]] = 1 - e^{-2\lambda}. \quad (4.14)$$

En general,

$$p_{1,k} = \frac{\int_k^{k+2} f_{U_1}(u) du}{\int_k^\infty f_{U_1}(u) du}. \quad (4.15)$$

De la mateixa manera, també s'ha de trobar

$$p_{2,k} := P[U_{1,k} + U_2 \in (k, k+2]]. \quad (4.16)$$

Usant que $U_{1,k}$ i U_2 són variables aleatòries independents s'arriba a què

$$p_{2,k} := P[U_{1,k} + U_2 \in (k, k+2]] = \int_k^{k+2} \left[\int_0^{k+2-u} f_{U_2}(v) dv \right] f_{U_{1,k}}(u) du.$$

Per últim, usant la independència, es pot trobar que

$$P[\{U_{1,k} \leq k+2\} \cap \{U_2 > 2 - (U_{1,k} - k)\}] = p_{1,k} - p_{2,k}.$$

Aleshores, usant tots aquests càlculs, es pot veure que el valor del cabal a temps $t+2$ que estímem és:

$$\begin{aligned} \hat{X}(t+2) = & X(t) e^{-\frac{2}{c}} + \left(E(Y) e^{-\frac{(k+2)}{c}} \int_k^{k+2} e^{\frac{u}{c}} f_{U_{1,k}}(u) du \right) p_{1,k} \\ & + \left(E(Y) \int_k^{k+2} \left[e^{-\frac{2}{c}} \int_0^{k+2-u} e^{\frac{v}{c}} f_{U_2}(v) dv \right] f_{U_{1,k}}(u) du \right) p_{2,k}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.3 Resultats

Ja hem vist quines equacions usen per predir el cabal d'un riu. El que ens queda és comentar una mica algun dels resultats als que arriben en l'article.

En aquest analitzen dades dels rius Delaware i Hudson. Nosaltres només ens centrarem en les dades del riu Delaware per veure la precisió del procés de renovació filtrat envers el procés de Poisson filtrat a l'hora de predir el cabal d'un riu.

Les dades que usen les extreuen de la pàgina web <http://nwis.waterdata.usgs.gov> i usen les dades entre Octubre de 2008 fins a Setembre de 2009 per calibrar el model.

Abans de començar a treballar amb les dades hem de tenir en compte que a l'hora de tractar dades reals, les coses no són tan ideals com el model matemàtic indica.

Per exemple, observant les dades del riu Delaware, a l'article comenten que s'observen certs mínims locals quan el cabal disminueix i pels quals el període de creixement posterior dura tan sols un dia fins que el cabal torna a disminuir. De la mateixa manera, també observen que hi ha petits creixements, just després que s'hagi assolit el mínim, que es prolonguen tan sols un dia.

Això tan sols vol dir que, a l'hora de treballar amb dades reals, hem de prendre una decisió subjectiva per tal de considerar negligibles tots aquests mínims locals i aquests petits creixements posteriors al mínim absolut per tal de simplificar el comportament del valor del cabal.

També hem de tenir en compte que, com que les dades es prenen dia a dia, hem de discretitzar el conjunt de valors possibles que pot prendre el temps entre arribades τ (en el model, idealment, el conjunt de dades seria un interval, no pas un conjunt discret).

Així doncs, diem k al nombre de dies transcorreguts entre dos pics consecutius. En el cas del primer pic observat, k serà el nombre de dies que han passat des del principi del període que considerem per calibrar el model.

Per tant, el k s'obté restant els temps d'arribada dels dos pics consecutius. A més, com que les dades estan preses en dies, tindrem que $k \geq 1$.

Un cop fetes aquestes consideracions prèvies, vegem els resultats.

A partir de les dades del riu Delaware obtenim que el valor promig $\bar{\tau}$ dels temps entre arribades és 6.8889 dies. Més encara, la desviació típica és $s_{\tau} = 3.8977$ dies. Mirant aquests valors podem pensar que τ rarament estarà exponencialment distribuïda ja que, en una distribució exponencial de paràmetre λ , la desviació típica i l'esperança són totes dues $\frac{1}{\lambda}$.

Ara, prenem diverses distribucions per per la variable aleatòria τ . Concretament, les distribucions Lognormal, Gamma, Weibull i Rayleigh (a part de la distribució exponencial, que és pròpia del Poisson filtrat). Abans de continuar, recordem les seves respectives funcions de densitat:

- **Distribució Lognormal:** $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ si $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$. La densitat de X és:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- **Distribució Gamma:** si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ llavors la funció de densitat és:

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\text{per } x > 0 \text{ i } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

- **Distribució Weibull:** si $X \sim Weibull(\alpha, \lambda)$, amb $\alpha, \lambda > 0$, la funció de densitat és:

$$f_X(x) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-(\lambda x)^\alpha},$$

per $x > 0$.

- **Distribució Rayleigh:** si $X \sim Rayleigh(\sigma)$, $\sigma > 0$, la funció de densitat és:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

per $x > 0$.

- **Distribució Exponencial:** si $X \sim exp(\lambda)$, amb $\lambda > 0$, llavors la funció de densitat és:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

per $\lambda \geq 0$.

El fet d'usar diferents distribucions pels temps entre arribades ens permetrà veure quins models són més bons.

En la **Taula 1** tenim els resultats de la prova de bondat d'ajust de χ^2 per cada distribució que utilitzarem i, a més, ens proporciona la respectiva estimació del seu paràmetre.

Distribució	Exponencial	Lognormal	Gamma	Weibull	Rayleigh
Paràmetres	1/6.8889	1.7574 i 0.6187	3.0544 i 2.2554	7.7974 i 1.8975	5.5817
P-valor	0.0344	0.7887	0.7723	0.6927	0.7008

Taula 1: Prova de bondat d'ajust de χ^2 per les distribucions de la variable aleatòria τ (pel riu Delaware).

Fixem-nos que, basant-nos en els p -valors, la distribució exponencial quedaria rebutjada mentre que la resta serien acceptades.

En la següent gràfica veiem les diferents distribucions que usem per τ , inclosa la funció de distribució empírica.

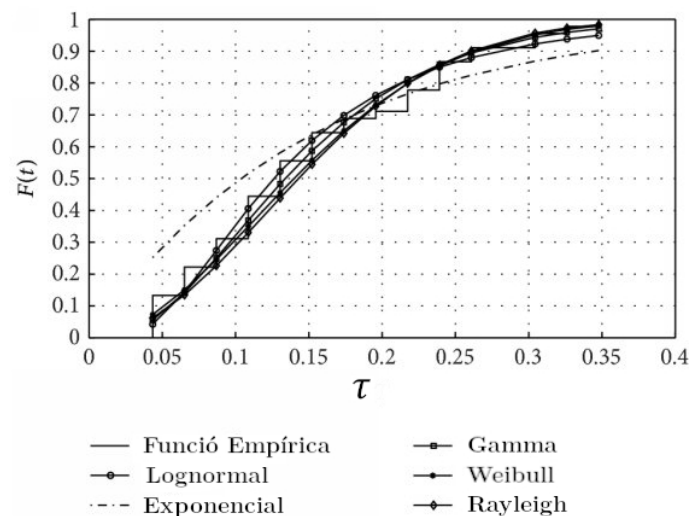


Figura 7: Funcions de Distribució i Funció Empírica per τ .

En aquesta gràfica observem que, com ja sospitàvem per la **Taula 1**, la distribució exponencial no s'adequa a les dades tan bé com la resta de distribucions i, per tant, podem sospitar que els models que no tinguin la distribució exponencial s'adequaran millor a les dades que el model que sí la tingui (el del procés de Poisson filtrat).

Abans de fer cap comparació, fem uns càlculs que podem trobar a l'article [5] respecte al procés de Poisson filtrat. Prenem el procés definit a **(4.1)** amb la funció de resposta **(4.2)**. Volem trobar el valor esperat de $X(t+1)$ a partir de les dades fins a temps t . Com els temps entre arribades tenen una distribució exponencial, podem usar la propietat de pèrdua de memòria i obtenir que aquesta esperança condicional només depèn de $X(t)$:

$$E(X(t+1)|X(t)) = e^{-\frac{1}{c}}X(t) + E(X(1)), \quad (4.18)$$

on

$$E(X(1)) = \frac{\lambda c}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{1}{c}}\right). \quad (4.19)$$

De manera similar, es calcula

$$E(X(t+2)|X(t)) = e^{-\frac{2}{c}}X(t) + E(X(2)), \quad (4.20)$$

on

$$E(X(2)) = \frac{\lambda c}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{2}{c}}\right). \quad (4.21)$$

Més encara,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t)) = \frac{\lambda c}{\mu}, \quad (4.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(X(t)) = \frac{\lambda c}{\mu^2}, \quad (4.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Corr(X(t), X(t+\delta)) = e^{-\frac{\delta}{c}}. \quad (4.24)$$

Usant aquestes equacions podem estimar el valor del paràmetre λ del procés de Poisson, del paràmetre μ de la distribució exponencial que assumim per les Y_n i del paràmetre c de la funció de resposta.

De fet, estimant $\frac{\lambda c}{\mu}$ i c ja en tenim prou, no ens cal estimar ni λ ni μ ja que en **(4.19)** i **(4.21)** apareix el quocient.

Per últim, per estimar c , primer calculem la correlació empírica entre el valor del cabal a temps t i el valor del cabal a temps $t+1$ (diguem-li r_1) i, aleshores, a partir de **(4.24)**, trobem el valor estimat $\hat{c} = -\frac{1}{\ln(r_1)}$. Remarquem que, si r_1 és proper a 1, \hat{c} està ben definit.

Ara ja estem llestos per poder comparar els diferents models que deriven del procés de Poisson filtrat i del procés de renovació filtrat considerant diverses distribucions pel temps entre arribades τ . L'objectiu és, amb les dades que hem dit anteriorment que prenem, predir el cabal del riu Delaware pel període de 89 dies d'entre febrer i abril de 2010.

La següent taula ens proporciona una comparació de certes dades usant les diferents distribucions. A continuació de la taula aclarim què signifiquen els diversos criteris per comparar els models que apareixen en aquesta (MAPE, Nash, Pc, Corr).

		Procés de Renovació Filtrat				Procés de Poisson Filtrat
		Lognormal	Gamma	Weibull	Rayleigh	Exponencial
$X(t+1)$	MAPE	12.58%	12.49%	12.55%	12.56%	12.76%
	Nash	0.8288	0.8290	0.8287	0.8287	0.8356
	Pc	0.1674	0.1664	0.1663	0.1669	0.2522
	Corr	0.9188	0.9186	0.9180	0.9188	0.9187
$X(t+2)$	MAPE	20.36%	20.33%	20.34%	20.34%	21.83%
	Nash	0.5447	0.5445	0.5445	0.5445	0.5573
	Pc	0.2930	0.2893	0.2869	0.2863	0.3344
	Corr	0.7735	0.7732	0.7731	0.7730	0.7734

Taula 2: Criteri per comparar els models de predicció al riu Delaware.

- MAPE: és l'error percentual absolut mitjà.
- Nash: el criteri de Nash. Es basa en l'error quadràtic mitjà i avalua el poder predictiu dels models hidrològics.
- Pc: el criteri del pic. Mesura la qualitat de les prediccions als períodes de pic.
- Corr: correlació.

Si ens fixem en les dades, observem que, tant el criteri MAPE, com el de Nash i com el de la correlació, retornen valors molt semblats o pràcticament igual pels dos tipus de procés, el de renovació filtrat i el de Poisson filtrat. En canvi, en el criteri del pic, clarament els valors que retorna el procés de renovació filtrat són molt millors que els que proporciona el de Poisson filtrat. Aquest fet és important ja que és necessari que durant els períodes de pic (períodes pròxims a un pic) les prediccions siguin el més acurades possible.

Per últim, vegem com modelitzen tots dos processos el cabal del riu Delaware i comparem amb els valors observats. Així, tenim les dues gràfiques següents.

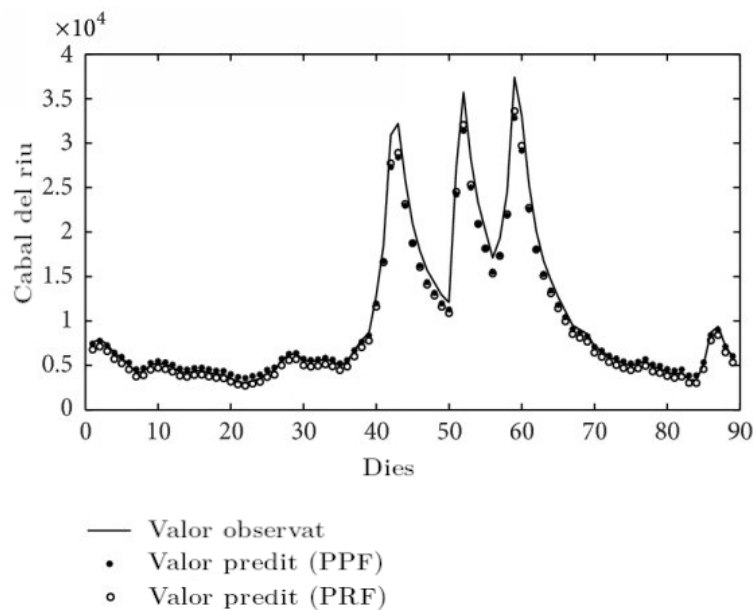


Figura 8: Valors del cabal observats i predits del riu Delaware a temps $t+1$.

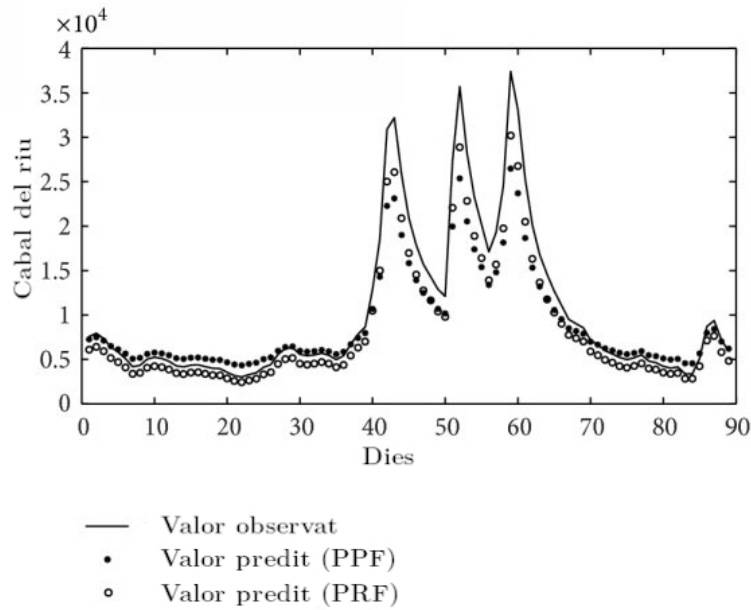


Figura 9: Valors del cabal observats i predits del riu Delaware a temps $t+2$.

Notem que (PPF) és Procés de Poisson Filtrat i (PRF) és Procés de Renovació Filtrat.

Observant aquestes dues gràfiques notem que, a temps $t + 1$, tots dos processos són prou precisos predint el cabal del riu. En canvi, si ens fixem a temps $t + 2$, ja es comença a veure una certa diferència. Mentre el procés de renovació filtrat s'ajusta més a les dades reals, el procés de Poisson filtrat té alguns trams que s'allunya una mica més dels valors observats.

Així doncs, a partir d'aquests resultats, podem concloure varies coses.

Per començar, podem concloure que el fet d'usar un procés de renovació filtrat enlloc d'un procés de Poisson filtrat significa una millora en les prediccions del cabal del riu ja que usem distribucions més realistes per distribuir els temps d'arribada.

També, el fet de modelitzar el cabal d'un riu a partir d'un procés de Poisson filtrat, tot i que hem vist que no és del tot realista, sí que s'ajusta prou bé a les dades reals, sobretot a curt termini. A més, a diferència dels processos de renovació filtrats, aquest no requereix de decisions subjectives per estimar els paràmetres que entren en joc en les prediccions. Tot i així, sí que tenim problemes en els períodes de pic, on el cabal augmenta considerablement, ja que els valors que retorna el model no són prou precisos.

En l'article acaben comentant que els models que hem vist també ens serviren per computar la probabilitat que el cabal excedís un cert límit en els pròxims dies.

Per últim, recordem que en la introducció de l'article hem parlat d'una funció de resposta que proposava Marc Lefebvre en l'article [5] que, a priori, ens podia ajudar a millorar les prediccions. Com que preteníem comparar els resultats amb els del procés de Poisson filtrat, hem acabat prenent la funció de resposta que habitualment es pren per treballar amb el procés de Poisson filtrat. Aleshores, una millora encara més notable que podríem implementar és usar la funció de resposta (4.3). Per poder-ho fer només s'ha d'estimar el paràmetre d , igual que nosaltres hem fet amb el paràmetre c .

5 Conclusions

En aquest treball hem estudiat els processos de renovació i n'hem vist una aplicació que ens ha servit per comparar-los amb el procés de Poisson.

Per poder dur a terme el projecte, hem partit dels coneixements assolits a les assignatures de Processos Estocàstics i de Probabilitats Avançades i hem seguit, principalment, el Capítol 3 del llibre *Adventures in Stochastic Processes* de Sidney I. Resnick [7] per tal de conèixer els processos de renovació.

L'inici de la memòria conté una secció de preliminars que ens han permès seguir amb facilitat el cos principal del treball. Entre aquests preliminars, hem definit la integral de Lebesgue-Stieltjes, la convolució i la transformada de Laplace. Aquestes són eines que hem utilitzat posteriorment. A més, i a mode introductori, hem repassat, de l'assignatura Processos Estocàstics, què és un procés estocàstic i, concretament, en què consisteixen el procés de Poisson i el procés de Poisson filtrat.

Un cop vists els preliminars, hem passat a endinsar-nos al món de la teoria de renovació. Per començar, hem vist quina és la funció de renovació. N'hem vist alguns resultats i exemples relacionats i, llavors, hem proseguit a parlar d'un cas concret de processos de renovació: els processos de renovació amb guany.

A continuació, hem vist l'equació de renovació i diversos exemples on la hem calculat per diferents processos.

Seguidament, hem estudiat un altre tipus de processos derivats de la família de processos de renovació: els processos de risc.

Per tancar aquest marc teòric hem vist el procés de Poisson com un procés de renovació.

Com que teníem la intenció inicial de treballar un tema relacionat amb el procés de Poisson, i per tal de complementar tot l'estudi teòric realitzat, hem analitzat una aplicació a la vida real dels processos de renovació i els hem comparat, en aquesta mateixa aplicació, amb el procés de Poisson.

Aquesta aplicació era la de modelitzar el cabal d'un riu a curt termini utilitzant processos de renovació filtrats i processos de Poisson filtrats.

Per fer-ho, hem analitzat l'article *An Application of Filtered Renewal Processes in Hydrology* de Mario Lefebvre i Fatima Bensalma [4]. A partir d'aquest article hem definit què és un procés de renovació filtrat i hem vist, sense entrar en detalls, quins càlculs feien per aconseguir les equacions per modelitzar el cabal d'un riu.

Un cop vist tot això, hem analitzat els valors estimats que retornaven ambdós processos (aplicant en el de renovació filtrat diferents distribucions com la Lognormal, la Gamma) a l'hora de modelitzar el cabal del riu Delaware a un i dos dies vista a partir d'unes dades donades. Clarament, hem vist que els processos de renovació comporten una millora respecte els de Poisson, com a mínim en aquesta aplicació, pel fet d'ajustar-se més a la realitat. També hem vist que és més feixuc arribar a les equacions necessàries amb els processos de renovació i que, en canvi, el procés de Poisson tampoc retorna unes dades massa dolentes tot i simplificar molt els càlculs degut a les seves propietats.

A títol personal, el fet de fer aquest treball, no només m'ha permès profunditzar en aquesta branca que m'interessava sinó que m'ha despertat inquietud per continuar indagant en aquest camí de cara al futur.

Referències

- [1] D. R. (David Roxbee) Cox. *Renewal theory*. eng. Methuen's monographs on applied probability and statistics. London: Methuen, 1962.
- [2] William Feller. "An introduction to probability theory and its applications". A: 1957 ().
- [3] Mario Lefebvre. "A filtered renewal process as a model for a river flow". eng. A: *Mathematical problems in engineering* 2005.1 (2005), pàg. 49-59. ISSN: 1024-123X.
- [4] Mario Lefebvre i Fatima Bensalma. "An Application of Filtered Renewal Processes in Hydrology". eng. A: *International Journal of Engineering Mathematics* 2014 (2014), pàg. 1-9. ISSN: 2356-7007.
- [5] Mario Lefebvre i Jean-Luc Guilbault. "Using filtered Poisson processes to model a river flow". eng. A: *Applied mathematical modelling* 32.12 (2008), pàg. 2792-2805. ISSN: 0307-904X.
- [6] David Nualart. *Curs de probabilitats*. cat. Estadística y análisis de datos ; 5. Barcelona: PPU, 1990. ISBN: 8476657188.
- [7] Sidney I. Resnick. *Adventures in stochastic processes*. eng. Boston [etc: Birkhäuser, 1992. ISBN: 0817635912.
- [8] Carles Rovira Escofet. *Processos estocàstics: un curs bàsic*. cat. 2021-06-09T11:17:54Z.
- [9] Petar Todorovic. *Introduction to Stochastic Processes and Their Applications*. eng. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York, 1992. ISBN: 9781461397441.
- [10] Gideon Weiss. "Filtered Poisson processes as models for daily streamflow data". Tesi doct. Imperial College London (University of London), 1973.