



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

**EL CONJUNT D'ESCAPAMENT
EN DINÀMICA HOLOMORFA**

Autora: Judit Fíguls Sangrà

Director: Dr. Xavier Jarque Ribera

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In this report we will study discrete dynamical systems that come of the iteration of holomorphic functions in the complex plane. In fact, we will focus on polynomial and transcendental entire functions. We will study the points that under iteration have orbits tending to infinity. This set is called the escaping set and it's been studied at length in this paper.

Resum

En aquesta memòria estudiarem sistemes dinàmics discrets que resulten d'iterar funcions holomorfes del pla complex. De fet, ens centrarem en el cas que la funció sigui polinomial o transcendent entera. Estudiarem els punts que sota iteració tenen òrbita tendint a infinit. Aquest conjunt s'anomena conjunt d'escapament i ha estat extensament estudiat a la literatura.

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al tutor del treball, Dr. Xavier Jarque, per la seva ajuda sempre que ho he necessitat, per la seva paciència a l'hora d'explicar-me els conceptes necessaris i per transmetre'ls amb tanta dedicació.

Vull agrair a la meva família per fer-me costat en tot moment al llarg d'aquests anys i animar-me en els moments més difícils. Tampoc em puc oblidar del Ki, que ho ha fet tot més fàcil.

També, gràcies Pere i Alba per ser-hi cada dia; Guillem A. i Guillem C. per acompanyar-me en aquesta experiència i Abril, Marc, Joan i Blanca. La meva segona família.

Per últim, vull agrair a la resta de persones que han format part d'aquest camí en algun moment o altre. Gràcies.

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	5
2.1	Resultats bàsics d'anàlisi	5
2.1.1	Teorema Fonamental de l'Àlgebra	6
2.1.2	Zeros de funcions holomorfes	7
2.1.3	Singularitats aïllades de les funcions holomorfes	7
2.1.4	Principi del Mòdul Màxim	8
2.1.5	Teorema de Rouché	9
2.1.6	Teorema Gran de Picard	9
2.2	Iteració holomorfa	11
2.2.1	Punts fixos i punts periòdics	11
2.2.2	Conques d'atracció de punts periòdics atractors	14
2.2.3	El mètode de Newton	15
2.2.4	Famílies normals	17
2.2.5	Els conjunts de Fatou i Julia	18
2.2.6	La família quadràtica	22
2.2.7	El conjunt de Mandelbrot	23
2.2.8	Conjugacions	24
3	Iteració polinomial. El conjunt d'escapament	26
4	Iteració transcendent. El conjunt d'escapament	31
4.1	La família exponencial complexa	32
4.2	El conjunt d'escapament per a funcions transcendents enteres en general	39
4.3	Els punts d'òrbita oscil·lant	40
5	Conclusions	41

1 Introducció

Els sistemes dinàmics es poden considerar una eina formal per descriure problemes que evolucionen respecte el temps. Aquests, si són continus, s'estudien a partir d'equacions diferencials, si són discrets, en canvi, es fa a partir de la iteració de funcions. Nosaltres ens centrarem en el segon cas. Els sistemes dinàmics interactuen amb altres branques de les matemàtiques i la seva aplicació s'utilitza en diverses àrees de recerca científica i tecnològica.

En aquest treball, estudiarem sistemes dinàmics discrets, en els quals donada una funció $f : X \rightarrow X$ (on més endavant considerem $X = \mathbb{C}$) s'estudia el comportament asimptòtic de la successió $\{x_n = f^n(x_0), x_0 \in X\}$. Per a diferents condicions inicials $x_0 \in X$ la successió pot presentar un comportament diferent. Per tal de comprendre'l, estudiarem les òrbites dels punts de l'espai en el que treballem, les quals es defineixen com

$$\text{Orb}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0) = (f \circ f)(x_0), \dots\}.$$

Els punts que estudiarem amb més atenció seran els punts fixos i els punts periòdics (aquests últims formen òrbites periòdiques) que ens permetran estudiar la successió de forma més senzilla, ja que, com veurem, els podrem classificar en punts fixos (o periòdics) atractors o repulsors segons el comportament de la òrbita dels seus veïns. Això ens permetrà veure el comportament de la funció en l'espai en el que treballem.

En aquest treball, utilitzarem funcions d'una variable complexa, concretament funcions polinomials i funcions transcendents enteres. La branca de les matemàtiques que té com a objecte d'estudi la iteració de funcions holomorfes d'una variable complexa s'anomena *dinàmica holomorfa*. Els primers resultats en aquest camp es remunten al segle XIX, quan E. Schröder va estudiar el mètode de Newton i D. König les equacions funcionals.

No va ser fins a principis del segle XX, però, quan P. Montel va introduir el concepte de família normal i, a partir d'aquí, els matemàtics P. Fatou i G. Julia van crear els fonaments de la dinàmica holomorfa basant-se en la teoria desenvolupada per Montel en el cas de famílies de funcions racionals. Posteriorment, l'any 1926, Fatou va estendre alguns resultats per a funcions transcendents enteres. Fatou va ser el primer en introduir i estudiar el que ara anomenem conjunt de Julia i el seu complementari, el conjunt de Fatou. El primer, està compost pels punts de \mathbb{C} que, sota iteració per f , tenen un comportament caòtic. El segon, per altra banda, consisteix en els punts que tenen un comportament estable al ser iterats, això vol dir, que es comporten de la mateixa manera que els punts del seu entorn.

Posteriorment, als anys 70, Benoit B. Mandelbrot va estudiar el conjunt de bifurcació de la família quadràtica complexa i va poder dibuixar-lo gràcies a un ordinador. En aquest context, va introduir el conjunt de Mandelbrot l'any 1979 tot estudiant l'espai de paràmetres de la família quadràtica $Q_c(z) = z^2 + c$. Per tal de crear el conjunt, es va basar en la dicotomia fonamental, un resultat donat per Julia i Fatou

al 1919 on s'explica que el conjunt ple de Julia per la família quadràtica només admet dues caracteritzacions topològiques: com a conjunt connex (una sola peça) o com a conjunt de Cantor (totalment disconnex). El conjunt de Mandelbrot està format per tots els valors de $c \in \mathbb{C}$ tals que el conjunt ple de Julia de $Q_c(z)$ és connex, és a dir, una de les dues condicions de la dicotomia. Dinàmicament, aquesta condició topològica equival a que $z = 0$ tingui òrbita acotada per Q_c .

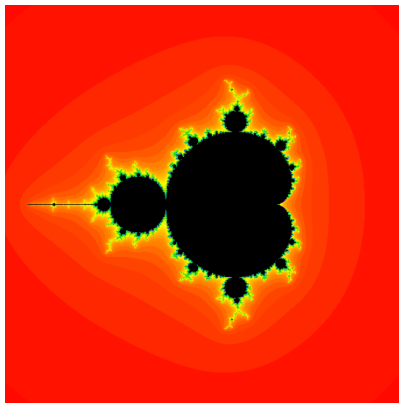


Figura 1: Conjunt de Mandelbrot.

En aquesta memòria veurem que, al considerar funcions polinòmiques, el punt de l'infinit a l'esfera de Riemann és un punt fix atractor, de manera que, si p és un polinomi de grau $d \geq 2$, podem definir la seva conca immediata d'atracció com

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : p^n(z) \mapsto \infty\}.$$

Això ens portarà a veure que, per a tot polinomi p de grau $d \geq 2$, podem definir el conjunt ple de Julia, el conjunt de Julia i el conjunt de Fatou en termes de la conca d'infinit, ja que, en aquest cas, el pla es divideix en els punts que escapen a infinit (de fet, $A(\infty)$) i els punts que tenen òrbita acotada.

D'altra banda, també parlarem de funcions transcendents enteres que són les funcions que tenen una singularitat essencial en $z = \infty$. Aquesta singularitat afegeix caocitat al sistema dinàmic. Això es deu al Teorema Gran de Picard, el qual diu que en un entorn punxat de ∞ , aquestes funcions prenen tots els valors de \mathbb{C} amb, com a molt, una excepció.

Dins d'aquest cas, als anys 80, Robert L. Devaney va començar a estudiar la iteració de la família exponencial complexa $E_\lambda(z) = \lambda e^z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i al seu torn, A. E. Eremenko i M. Lyubich estudiaven la iteració de funcions transcendents enteres i n'exploraven el conjunt d'escapament, el qual es defineix com, donada una funció f transcendent entera,

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \mapsto \infty\}.$$

A. E. Eremenko va conjecturar que les components connexes del conjunt d'escapament són no acotades. Aquesta conjectura ha estat resolta recentment.



Figura 2: Conjunt de Julia de $E_{\frac{1}{10}}(z) = \frac{1}{10}e^z$.

En definitiva, aquesta memòria ha estat motivada pels resultats de A. E. Eremenko de l'any 1989 on va demostrar que, per a tota funció transcendent entera el conjunt d'escapament és no buit. Això implica que el conjunt de Julia és no buit per tota funció transcendent entera (aquest fet també és cert per funcions polinòmials o racionals però la seva demostració és molt més senzilla fent servir la teoria de Montel). En aquest context, l'objectiu principal d'aquest projecte és estudiar el conjunt d'escapament per a funcions de variable complexa, en concret per a funcions polinòmiques i transcendents enteres.

Com hem dit, veurem que hi ha diferències notables o, més aviat, més possibilitats a l'hora de treballar amb funcions polinòmiques respecte de fer-ho amb funcions transcendents enteres. Ens centrarem en aquests dos casos; començant pel cas polinomial, el qual podrem tractar de forma més extensa o general. Posteriorment, tractarem el cas enter, pel qual ens haurem de reduir a estudiar-ne un cas concret, la funció exponencial. Veurem que el seu conjunt d'escapament és no buit. Això ens permetrà fer-nos una idea del cas general (per a tota funció transcendent entera) demostrat per A. E. Eremenko.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està formada principalment per tres capítols (exceptuant els capítols d'introducció i de conclusions). D'entre aquests, el primer és el capítol *Preliminars*, on farem un recull de resultats que necessitarem al llarg de les seccions posteriors. Hi podrem trobar, per una banda, resultats d'anàlisi complexa: algunes definicions, propietats, el Teorema Fonamental de l'Àlgebra, el Principi del

Mòdul Màxim, el Teorema de Rouché i el Teorema Gran de Picard entre d'altres. En general, hi trobarem informació rellevant sobre funcions holomorfes. Per altra banda, trobarem una secció sobre iteració al pla complex. Aquesta serà la base per comprendre els conceptes principals que s'utilitzen en aquesta memòria.

En els següents dos capítols treballarem amb el conjunt d'escapament, el qual serà el nostre principal objecte d'estudi. Diferenciarem el cas d'iteració polinomial del cas d'iteració transcendent entera; cadascun d'aquests casos està recollit en els capítols 3 i 4 respectivament.

En el capítol 3, com hem dit, iterarem funcions polinomials, veurem com definir el conjunt d'escapament en termes de la conca d'infinit i veurem més resultats propis d'aquest cas on podrem treure conclusions de forma més “senzilla” que en el cas transcendent enter.

Per últim, en el capítol 4, iterarem funcions transcendents enteres. Estudiarem, també, el conjunt d'escapament per a aquest tipus de funcions i veurem el cas concret de la família exponencial complexa on farem un argument de tipus constructiu per tal de trobar punts que pertanyin al conjunt d'escapament. Tot seguit, donarem una idea del cas general (per a tota funció transcendent entera) i parlarem breument dels punts que tenen òrbita oscil·lant.

2 Preliminars

Per tal de poder estudiar el conjunt d'escapament per a funcions polinòmiques i transcendentals enteres, necessitarem alguns conceptes previs i resultats que veurem en aquest capítol. Hi trobarem alguns resultats bàsics d'anàlisi i alguns conceptes d'iteració holomorfa.

2.1 Resultats bàsics d'anàlisi

En aquest apartat, apareixen alguns resultats d'anàlisi que afegirem per completitud del treball.

Comencem recordant un parell de conceptes: $\Omega \subset \mathbb{C}$ és obert si $\forall a \in \Omega$ hi ha $r > 0$ amb $D(a, r) \subset \Omega$, on $D(a, r)$ denota el disc obert $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. F és tancat $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus F$ és obert.

Les funcions a \mathbb{C} es poden veure com a funcions en \mathbb{R}^2 . No obstant, podem definir els conceptes de funció contínua i diferenciable a \mathbb{C} de la següent manera: diem que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = l$ si i només si $\forall \varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ (que pot dependre de a) de manera que $|f(z) - l| < \varepsilon$ si $0 < |z - a| < \delta$.

Definició 2.1. *Sigui f una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, és contínua en Ω si és contínua en tot punt $a \in \Omega$.*

Això passa si i només si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és contínua a (x_0, y_0) si i només si $\operatorname{Re} F = u(x, y)$ i $\operatorname{Im} F = v(x, y)$ són contínues a (x_0, y_0) com a funcions de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} .

Definició 2.2. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, i $z_0 \in \Omega$. Diem que f és holomorfa (o \mathbb{C} -derivada) en z_0 si existeix el límit*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En aquest cas posem:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Diem que f és holomorfa en Ω si ho és en tot punt $z_0 \in \Omega$. Una funció holomorfa a tot \mathbb{C} es diu que és una funció entera.

En aquest cas, tenim que f és \mathbb{C} -diferenciable a $z_0 = x_0 + iy_0$ si f és \mathbb{R}^2 -diferenciable a (x_0, y_0) i es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann. Si f és \mathbb{C} -diferenciable, llavors f és oberta.

Per exemple, la funció $f(z) = z^2$ és una funció holomorfa a tot \mathbb{C} (entera) amb $f'(z) = 2z$. En efecte, tenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z + h = 2z.$$

Per altra banda, la funció $f(z) = \bar{z}$ no és holomorfa en cap punt, ja que tenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Si $h = x \in \mathbb{R}$, llavors $\frac{\bar{h}}{h} = 1$, en canvi, si $h = iy$, tenim $\frac{\bar{h}}{h} = -1$.

Les funcions holomorfes en \mathbb{C} tenen algunes propietats en comú amb el cas real. Algunes d'elles són:

- (a) Si f és holomorfa en z_0 , llavors f és contínua en z_0 .
- (b) Si f, g són holomorfes en z_0 , llavors $f + g$ i $f \cdot g$ també ho són, amb les regles habituals de derivació.
- (c) Si f és holomorfa en z_0 amb $f'(z_0) \neq 0$, llavors $1/f$ és holomorfa en z_0 amb

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

- (d) Regla de la cadena: Sigui $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ oberts; $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ i $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ amb $f(G) \subset \Omega$. Si f és holomorfa en z_0 i g és holomorfa en $f(z_0)$, aleshores la composició $g \circ f$ és holomorfa en z_0 amb

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

- (e) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex. Si f és holomorfa en Ω amb $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors f és constant.

2.1.1 Teorema Fonamental de l'Àlgebra

En aquesta secció, veurem que tot polinomi de grau d té exactament d arrels complexes. Aquest és un resultat que es conclou del Teorema Fonamental de l'Àlgebra.

Teorema 2.3. (Teorema de Liouville) *Tota funció entera i acotada és constant.*

Teorema 2.4. (Teorema Fonamental de l'Àlgebra) *Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi no constant. Llavors, hi ha $z_0 \in \mathbb{C}$ amb $p(z_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $p(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores la funció $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ és entera. Si veiem que és acotada, aplicant el teorema de Liouville arribarem a contradicció. Si $p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$, llavors

$$|p(z)| = |z|^d |a_d + \frac{a_{d-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^d}| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$$

amb el que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, que implica que f és acotada. Com f és entera i acotada, pel teorema de Liouville, f ha de ser constant i, per tant p és constant. \square

Corol·lari 2.5. *Tot polinomi $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grau d té exactament d arrels complexes comptant multiplicitats.*

Demostració. Sabem que p té un zero, diguem-li α_1 . Llavors $p(z) = (z - \alpha_1)p_1(z)$, on p_1 és un polinomi de grau $d - 1$ que també té un zero si $d \geq 2$. Iterant aquest procés obtenim el resultat.

2.1.2 Zeros de funcions holomorfes

L'objectiu d'aquesta secció és veure que els zeros d'una funció $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa a Ω no es poden acumular, és a dir, són aïllats. Utilitzarem:

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Teorema 2.6. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i f holomorfa a Ω amb $f \neq 0$. Per a tot $z_0 \in Z(f)$ hi ha un únic $m \in \mathbb{N}$ (anomenat multiplicitat de z_0) de manera que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \Omega,$$

on g és holomorfa a Ω amb $g(z_0) \neq 0$.

Corol·lari 2.7. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i f holomorfa a Ω amb $f \neq 0$. Llavors els zeros de f són aïllats.*

Demostració. Sigui $z_0 \in Z(f)$. Pel teorema anterior, $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb g holomorfa a Ω i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, hi ha $\varepsilon > 0$ de manera que $g(z) \neq 0$ per $z \in D(z_0, \varepsilon)$, amb el que $f(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \varepsilon)$ amb $z \neq z_0$.

2.1.3 Singularitats aïllades de les funcions holomorfes

Sigui f una funció holomorfa, les singularitats de f són els punts on f no és holomorfa. Anomenem E el conjunt de punts on la funció no és holomorfa, és a dir, el conjunt de les singularitats de f , llavors $f \in H(\Omega \setminus E)$.

Diem que una singularitat z_0 de f és *aïllada* si hi ha $r > 0$ tal que $f \in H(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$. Podem distingir tres tipus de singularitats aïllades: z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D(z_0, \varepsilon))$ amb $f(z) = g(z)$, $\forall z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$; z_0 és un *pol* de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$; finalment, si z_0 no és evitable ni és un pol, es diu que és una *singularitat essencial*. Hi ha un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 2.8. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Amb els següents resultats veurem que tota funció holomorfa en un anell és una sèrie anomenada sèrie de Laurent, considerant també exponents negatius. Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leq r < R \leq \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

Observem que a Ω , les funcions $1, (z - a), \dots, (z - a)^n$ són holomorfes així com les funcions $(z - a)^{-1}, (z - a)^{-2}, \dots, (z - a)^{-n}$.

Definició 2.9. Anomenem sèrie de Laurent al voltant de $a \in \mathbb{C}$ a una sèrie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Sigui $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ amb $0 \leq r < R \leq \infty$, i sigui f holomorfa a Ω . Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Omega.$$

Teorema 2.10. (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent) Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

- (a) z_0 és evitable si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geq 1$.
- (b) z_0 és un pol d'ordre m si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$.
- (c) z_0 és una singularitat essencial si hi ha infinits c_n amb $c_n \neq 0$ per $n > 0$.

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Sigui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en Ω diem que f és meromorfa en Ω si f és una funció amb pols a Ω . A diferència d'aquest cas, f és entera si no té pols. A més, f és una funció *transcendent* (entera o meromorfa) si té una singularitat essencial a $z = \infty$, el que és el mateix, $g(w) = f(1/w)$ té una singularitat essencial en $w = 0$.

2.1.4 Principi del Mòdul Màxim

Sigui $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en U . Sigui $V \subset U$ el seu domini de definició, aleshores V no pot contenir mòduls màxims de f . Fixem-nos, que, en canvi, sigui $g : W \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en W . En aquest cas, sí que podem trobar màxims absoluts a l'interior del domini de definició. La funció $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1 - x^2$, per exemple, té un màxim absolut en $x = 0$.

Teorema 2.11. (Principi del Mòdul Màxim) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim absolut en Ω , llavors f és constant.

Corol·lari 2.12. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert acotat, i $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Llavors el màxim de $|f|$ s'assoleix a la frontera $\partial\Omega$.*

Demostració. Com Ω és acotat, llavors $\bar{\Omega}$ és un tancat i acotat de \mathbb{C} i, per tant, compacte. Ara, com que $|f|$ és contínua en el compacte $\bar{\Omega}$, llavors $|f|$ té un màxim absolut en un punt $a \in \bar{\Omega}$.

Si $a \in \Omega$, pel Principi del Mòdul Màxim, $|f|$ és constant en la component con-nexa G que conté a . En particular, si $w \in \partial G$, llavors $|f(w)| = |f(a)|$, amb el que el màxim també s'assoleix en un punt de ∂G . Clarament $\partial G \subset \partial\Omega$, per tant, obtenim el resultat. \square

2.1.5 Teorema de Rouché

El Teorema de Rouché s'utilitza per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció holomorfa dins d'una corba tancada.

Teorema 2.13. *(Teorema de Rouché) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f, g \in M(\Omega)$. Sigui γ camí tancat simple homòleg a 0 en Ω . Suposem que f i g no tenen zeros ni pols en γ . Si*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g denoten el nombre de zeros de f i g en l'interior de γ , i P_f, P_g el nombre de pols de f i g en l'interior de γ .

Demostració. Tenim $F = \frac{f}{g}$ meromorfa a Ω amb

$$\{\text{zeros de } F\} = \{\text{zeros de } f\} \cap \{\text{pols de } g\}$$

$$\{\text{pols de } F\} = \{\text{zeros de } g\} \cap \{\text{pols de } f\}$$

Per la hipòtesis, tenim que $|\frac{f(z)}{g(z)} - 1| < 1$ per $z \in \gamma$, i, per tant, la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D(1,1)$, amb el que Γ no dona cap volta al voltant del 0 i, per tant, $Ind(\Gamma, 0) = 0$. Pel Principi de l'argument

$$0 = Ind(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. \square

2.1.6 Teorema Gran de Picard

Per al capítol d'iteració de funcions transcendents enteres, requerirem del Teorema Gran de Picard. Primer, enunciarem el Teorema de Casorati-Weierstrass, que és una versió més fluixa que el Teorema Gran de Picard. Aquests teoremes ens donen una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa. Això ens servirà per al cas de funcions transcendents enteres.

Teorema 2.14. (Teorema de Casorati-Weierstrass) Sigui f una funció holomorfa en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f , llavors $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ és dens en \mathbb{C} per a tot $0 < \varepsilon \leq r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leq r$. Suposem que $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ no és dens en \mathbb{C} . Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geq t \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

En particular, $f(z) \neq w_0$ i per tant la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. La condició que hem donat, ens diu també que g és acotada, amb el que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g . Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, amb el que z_0 seria un pol de f , en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

amb el que z_0 seria una singularitat evitable de f , en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f .

Teorema 2.15. (Teorema Gran de Picard) Sigui f una funció holomorfa en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f , llavors $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ pren tots els valors de \mathbb{C} excepte, com a molt, un.

Corol·lari 2.16. Sigui $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funció transcendent entera. Sigui U un entorn foradat de $z = \infty$. Llavors, $f|_U$ cobreix \mathbb{C} amb, com a molt, una excepció anomenada valor omès.

Com a exemple, sigui la funció $f(z) = e^z$ transcendent entera i $U = \mathbb{C} \setminus D(0, R)$ on $R > 1$. Sigui $z \in \mathbb{C}$ i w tal que $e^w = z$. Llavors $w_k = w + 2k\pi i = \operatorname{Re}(w) + (\operatorname{Im}(w) + 2k\pi)i$ tal que compleix $e^{w_k} = z$. Aleshores, $\exists k$ de manera que

$$|w_k| = \sqrt{\operatorname{Re}(w)^2 + (\operatorname{Im}(w) + 2k\pi)^2} > R.$$

Per tant, tenim que $f(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$.

2.2 Iteració holomorfa

En els capítols 3 i 4 d'aquesta memòria estudiarem sistemes dinàmics discrets, els quals venen donats per la iteració de funcions de variable complexa, de fet, en el nostre cas, seran funcions polinòmiques i transcendents enteres. Això és, sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció transcendent entera o polinomial i considerem la successió

$$\{z_n = f^n(z_0), z_0 \in \mathbb{C}\}_{n \geq 1}.$$

El nostre objectiu serà comprendre el comportament asimptòtic d'aquesta successió per a cada condició inicial $z_0 \in \mathbb{C}$ possible. En aquest context, escriurem f^n quan ens referim a

$$f^n(z) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(z).$$

L'òrbita d'un punt z_0 es defineix com

$$Orb(z_0) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0) = (f \circ f)(z_0), \dots\}.$$

2.2.1 Punts fixos i punts periòdics

Com ja hem mencionat, el que volem és entendre el comportament asimptòtic de la successió $\{z_n = f^n(z_0), z_0 \in \mathbb{C}\}_{n \geq 1}$, és a dir, el comportament de l'òrbita de tots els punts del pla complex. En aquest apartat, veurem algunes òrbites per les quals aquest estudi resulta especialment senzill, aquestes són les òrbites dels punts fixos i dels punts periòdics.

Definició 2.17. *Sigui $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en U i sigui $z_0 \in U$. Llavors z_0 és un punt fix de la funció f si $f(z_0) = z_0$.*

Definició 2.18. *Sigui $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en U i sigui $z_0 \in U$. Llavors z_0 és un punt periòdic de període p de f si $f^p(z_0) = z_0$ i $f^n(z_0) \neq z_0, \forall n < p, n, p \in \mathbb{N}$ i $p \geq 2$. La successió $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$ forma el que s'anomena una òrbita periòdica.*

Les funcions poden tenir diversos punts fixos, de fet, una funció polinòmica $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grau d té d punts fixos ja que $p(z) = z$ i tenim $g(z) = f(z) - z$. Llavors, que el punt sigui fix implica que $g(z) = 0$. D'altra banda, les funcions enteres tenen un nombre arbitrari de punts fixos. Per exemple, la funció identitat $f(z) = z$ fixa tots els punts a \mathbb{C} , mentre que la funció $f(z) = -z$ fixa l'origen i tota la resta de punts tenen període 2. En la majoria de casos, però, ens trobem amb punts periòdics aïllats, com ara en la funció $f(z) = z^3$, que té 0, 1 i -1 com a punts fixos i no té cap altre punt periòdic.

A continuació, veurem com es poden classificar aquests punts:

Definició 2.19. *Sigui $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa en U , $z_0 \in U$ de manera que $f(z_0) = z_0$. Llavors:*

(a) z_0 és un punt fix atractor si existeix $\varepsilon > 0$ tal que si $|w - z_0| < \varepsilon$ llavors $f^n(w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, és a dir, la òrbita de w tendeix a z_0 sota iteració.

(b) z_0 és un punt fix repulsor si és un punt fix atractor per f^{-1} (prenent la branca $g(z) = f^{-1}(z)$ tal que $g(z_0) = z_0$).

Els punts que no són atractors ni repulsors s'anomenen punts neutres.

Teorema 2.20. Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa i $z_0 \in \mathbb{C}$, si $|f'(z_0)| < 1$, llavors z_0 és un punt fix atractor de f .

Demostració. Sigui λ tal que $|f'(z_0)| < |\lambda| < 1$. Sabem que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Llavors, $\exists \varepsilon > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq |\lambda|$$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |\lambda| |z - z_0| \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Això vol dir que $f(z) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i podem iterar el procediment

$$|f^2(z) - z_0| \leq |\lambda| |f(z) - z_0| \leq |\lambda|^2 |z - z_0|$$

$$|f^n(z) - z_0| \leq |\lambda|^n |z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Teorema 2.21. Donat un punt fix, $z_0 \in \mathbb{C}$ d'una funció holomorfa f , anomenem $\lambda = f'(z_0)$ el seu multiplicador. Llavors podem classificar els punts fixos de la següent manera segons λ :

(a) Si $|\lambda| < 1$, el punt fix és atractor (si $\lambda = 0$, se'n diu super-atractor).

(b) Si $|\lambda| > 1$, el punt fix és repulsor.

Diem que una òrbita periòdica és atractor si cada punt de la òrbita és un punt fix atractor. Per altra banda, una òrbita periòdica és repulsora si cada punt de l'òrbita és repulsor.

Existeix un mètode per descriure les òrbites d'un sistema dinàmic, el *retrat de fases*. Ara, considerarem funcions en els reals. El retrat de fases és una imatge a la recta real per a representar les òrbites d'un sistema. Podem representar, per exemple, els retrats de fase d'algunes funcions com les següents.

En el retrat a. de la Figura 3 podem observar que totes les òrbites periòdiques diferents de la del zero tenen període 2. En el b., observem que 0 és un punt fix

repulsor mentre que en el retrat c., és un punt fix atractor. Finalment, en l'últim retrat, podem veure que 0 és un punt fix atractor i els altres dos, són repulsors.

També podem representar els retrats de fase a partir de la gràfica en el pla i la bisectriu, vegem-ne alguns exemples. Si observem la Figura 4 veiem, en els tres casos, retrats de fase al voltant d'un punt fix atractor. En el primer retrat, observem que, si diem p al punt fix atractor, $0 < f'(p) < 1$. En el segon cas $f'(p) = 0$ i, en el tercer, $-1 < f'(p) < 0$. El comportament del retrat de fases és diferent en les tres situacions. Per altra banda, un retrat de fases al voltant d'un punt fix repulsor seria del tipus dels retrats que s'il·lustren a la Figura 5.

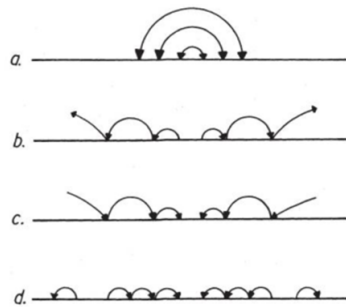


Figura 3: Retrats de fase de les funcions: a. $f(x) = -x$, b. $f(x) = 2x$, c. $f(x) = \frac{1}{2}x$, d. $f(x) = x^3$

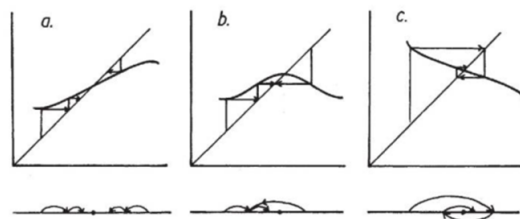


Figura 4: Retrats de fase prop d'un punt fix atractor.

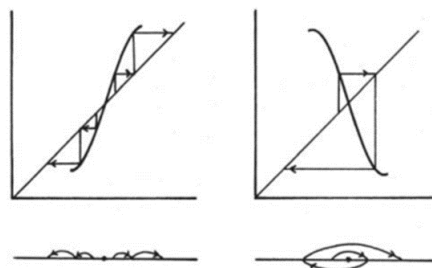


Figura 5: Retrats de fase prop d'un punt fix repulsor.

2.2.2 Conques d'atracció de punts periòdics atractors

En aquesta secció, parlarem del conjunt de punts tals que les seves òrbites convergeixen cap a un punt fix o un punt periòdic atractor. Aquest conjunt s'anomena conca d'atracció. Els punts periòdics de període p d'una funció $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es poden entendre com punts fixos de f^p de manera que, en aquesta secció ens reduïrem a estudiar la conca d'atracció de punts fixos de f .

Definició 2.22. *Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció polinomial o una funció transcendent entera. Suposem que $z_0 \in \mathbb{C}$ és un punt fix atractor de f . Llavors definim la seva conca d'atracció com:*

$$A = A(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z_0\}$$

Exemple 2.23. Considerarem la funció $Q_0(z) = z^2$. Observem que si prenem $z_0 = r e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ llavors $z_n = f^n(z_0) = r^{2^n} e^{i(2^n \theta_0)}$. Per tant, tenim que:

$$r < 1 \Rightarrow z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$r > 1 \Rightarrow z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

$$r = 1 \Rightarrow |z_n| = 1$$

Per una banda, tenim que $z = \infty$ és un punt fix atractor (ho demostrarem més endavant en el treball) i, per altra banda, $Q'_0(0) = 0 < 1$ i, per tant, també és un punt fix atractor. En aquest cas, el conjunt de nombres complexos tals que les seves òrbites estan acotades en $Q_0(z)$ són precisament els nombres tals que el seu mòdul és menor que 1. Això és l'interior del cercle unitat del pla complex.



Figura 6: Representació de $Q_0(z) = z^2$ segons el comportament de les seves òrbites.

Exemple 2.24. Ara, prenem la funció $Q_{-1}(z) = z^2 - 1$. En aquest cas, és fàcil observar que $Q_{-1}(0) = -1$ i $Q_{-1}(-1) = 0$ i que, per tant, $\{0, -1\}$ és una òrbita periòdica de període 2. Com

$$(Q_{-1}^2)'(0) = (Q_{-1}^2)'(-1) = 0$$

sabem que l'òrbita $\{0, -1\}$ és una òrbita periòdica atractora. Com hem dit anteriorment, si $S = \{z_0, \dots, z_{p-1}\}$ és una òrbita periòdica atractora de període p de f , podem definir la seva conca d'atracció com el conjunt de punts del pla complex que convergeixen a S sota iteració. És a dir:

$$A = A(\{z_0, \dots, z_{p-1}\}) = \{z \in \mathbb{C} : f^{pn}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z_i \text{ per alguna } i = 0, \dots, p-1\}$$

Tornant al cas concret de $Q_{-1}(z) = z^2 - 1$, l'òrbita en qüestió és $S = \{0, -1\}$. En la Figura 7 la conca d'atracció es dibuixa en negre. Els dos pseudo-discs que contenen $z = 0$ i $z = -1$ són el que s'anomena la conca immediata d'atracció, és a dir, la component connexa de la conca d'atracció $A(S)$ que conté el cicle atractor. En vermell, en canvi, es mostren els punts els quals les seves òrbites escapen a infinit.

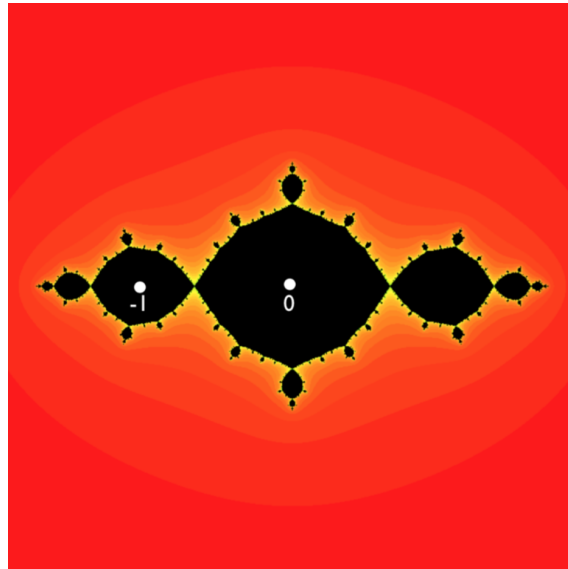


Figura 7: Representació de $Q_{-1}(z) = z^2 - 1$ segons el comportament de les seves òrbites.

En general, les conques d'atracció poden tenir infinites components connexes. Com hem dit abans, les conques d'atracció que contenen les òrbites periòdiques atractores s'anomenen *conca immediata d'atracció*.

2.2.3 El mètode de Newton

Com a exemple històric d'un mètode d'iteració de funcions, podríem prendre el mètode de Newton. Aquest mètode és ben conegut per a calcular arrels d'un polinomi. Ens permet resoldre l'equació $p = 0$ on p és un polinomi de grau $d \geq 2$. Pel

Teorema Fonamental de l'Àlgebra, un polinomi de grau d té exactament d arrels complexes (comptant multiplicitat), per tant, el més natural és considerar el problema en variable complexa.

El mètode ve donat iterant la següent funció:

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

Lema 2.25. *Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$, llavors $p(\alpha) = 0$ si i només si $N_p(\alpha) = \alpha$. A més, si α és una arrel simple, llavors $N_p(\alpha) = 0$ i, per tant, α sempre és un punt fix atractor de N_p .*

Aquest mètode aplicat a polinomis de grau 2, ens porta a un resultat “senzill”. Per a polinomis de grau major que 2, la situació no és tan senzilla.

Lema 2.26. *Sigui*

$$p(z) = A(z - \alpha)(z - \beta), \quad A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad A \neq 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Llavors, la bisectriu $L := L(\alpha, \beta)$ divideix el pla complex en dues regions R_α i R_β tals que

- (a) $\alpha \in R_\alpha$ i $\beta \in R_\beta$.
- (b) $N_p^n(z) \mapsto \alpha$ quan $n \rightarrow \infty$ per tot $z \in R_\alpha$.
- (c) $N_p^n(z) \mapsto \beta$ quan $n \rightarrow \infty$ per tot $z \in R_\beta$.
- (d) L és totalment invariant.

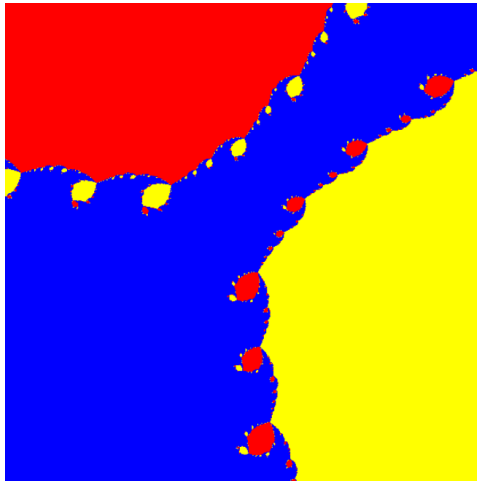


Figura 8: Mètode de Newton aplicat a $p(z) = z(z - 1)(z - i)$. Els punts del mateix color convergeixen a la mateixa arrel de p sota iteració.

2.2.4 Famílies normals

Sigui

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : U \subset \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}, \alpha \in \Gamma\}$$

una família de funcions holomorfes definides en $U \subset \mathbb{C}$. Un exemple podria ser, tenint en compte que $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ és un polinomi o una funció entera transcendent, la família d'iterats de f en un cert domini $U \subset \mathbb{C}$ que es defineix de la següent manera:

$$\mathcal{F} = \{f^n|_U, U \subset \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} = \{f|_U, f^2|_U, f^3|_U, f^4|_U, \dots\}.$$

Llavors, podem definir el concepte de família normal.

Definició 2.27. *Diem que \mathcal{F} és una família normal (en U) si per cada seqüència $\{f_n\}_{n \geq 0}$, $f_n \in \mathcal{F}$ podem trobar una subseqüència $\{f_{n_k}\}_{k \geq 0}$ tal que es compleix una de les dues condicions:*

- (a) $\{f_{n_k}\}_{k \geq 0}$ convergeix (en subconjunts compactes de U) a una funció holomorfa $g : U \subset \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ (i, per tant, $\{f_{n_k}^{(m)}\}_{k \geq 0}$ convergeix (en subconjunts compactes de U) a $g^{(m)} : U \subset \mapsto \hat{\mathbb{C}}$).
- (b) $\{f_{n_k}\}_{k \geq 0}$ convergeix (en subconjunts compactes de U) a ∞ (i.e., donat $R > 0$, per tot conjunt compacte $K \subset U$ existeix $n := n(K, R) \geq 0$ tal que $|f_{n_k}(z)| > R$ per tot $z \in K$ i per tot $n_k > n$).

De manera informal, podríem dir que si \mathcal{F} ve donada per una família d'iterats $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, aquesta és una família normal en un entorn de z si tots els punts de l'entorn, sota iteració, es comporten d'una manera similar cap a z .

En general, la definició anterior és difícil d'utilitzar per tal de saber si una família concreta és una família normal o no. El següent resultat, degut a Montel (pare de la teoria de les famílies normals i equi-contínues) ens dona una eina força precisa per poder saber si una família es normal o no de forma més senzilla.

Teorema 2.28. *(Teorema de Montel) Sigui*

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : U \subset \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}, \alpha \in \Gamma\}$$

una família de funcions holomorfes en U . Si existeixen tres punts $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ tals que $f_\alpha(z) \neq \{a, b, c\} \forall z \in U$ i $\forall \alpha \in \Gamma$ llavors \mathcal{F} és normal (en U).

És a dir, el Teorema de Montel ens diu que si mirem totes les imatges de U , aquestes cobreixen tot \mathbb{C} excepte, com a molt, 3 punts.

Observació 2.29. Si la família \mathcal{F} ve donada per funcions enteres (o polinòmiques), llavors, només es requereixen dos punts per tal de ser una família normal (ja que ∞ sempre és omès).

Exemple 2.30. Considerem la funció $Q_0(z) = z^2$ i prenem $\mathcal{F} = \{Q_0^n : U \mapsto \hat{\mathbb{C}}\}$ on $U \subset \mathbb{D}$ i $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. En aquest cas, $\forall K \subset U$ i $\forall \varepsilon > 0 \exists n = n(\varepsilon, K)$ tal que $Q_0^n|_K \subset D_\varepsilon(0)$, és a dir, tota successió tindrà una parcial que convergeix a 0 (de fet, tota successió tendirà cap a 0). Tenim que $g(z) \equiv 0$ en la Definició 2.27. Si fem el raonament usant el Teorema de Montel és trivial, ja que $\bigcup_{n \geq 0} Q_0^n|_U$ evita tots els punts que es troben fora de \mathbb{D} . Per tant, \mathcal{F} és normal en U .

Exemple 2.31. Seguint amb la funció anterior, $Q_0(z) = z^2$ i prenent $\mathcal{F} = \{Q_0^n : U \mapsto \hat{\mathbb{C}}\}$ on $U \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. En aquesta ocasió, $\forall K \setminus U$ i $\forall R \gg 1$ prou gran, $\exists n_0 = n_0(K, R)$ tal que $\forall n \geq n_0 Q_0^n|_K \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus D_R(0)$. Fent el raonament pel Teorema de Montel, és trivial ja que $\bigcup_{n \geq 0} Q_0^n|_U$ evita tots els punts de \mathbb{D} . Per tant, \mathcal{F} és normal en U .

Exemple 2.32. Finalment, seguint amb la funció $Q_0(z) = z^2$ i prenem $\mathcal{F} = \{Q_0^n : U \mapsto \hat{\mathbb{C}}\}$ amb U tal que $U \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$. Si prenem $z \in U \cap \mathbb{D}$, llavors $Q_0^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i, per tant, $g|_{U \cap \mathbb{D}} = 0$. En canvi, si $z \in U \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$, llavors $Q_0^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ i, per tant, $|g(z)| > R$. Aleshores, la funció g a la que convergeix \mathcal{F} no és contínua i, per tant, \mathcal{F} no és normal en U .

Definició 2.33. La noció de normalitat està lligada a un domini U . Observem que podem donar una noció de normalitat en un punt de forma trivial.

- * Diem que \mathcal{F} no és normal a $z_0 \in \mathbb{C}$ si no és normal a cap entorn V de z_0 .
- * Diem que \mathcal{F} és normal a $z_0 \in \mathbb{C}$ si existeix un entorn V de z_0 on \mathcal{F} és una família normal.

2.2.5 Els conjunts de Fatou i Julia

Es pot dir que la dinàmica holomorfa va sorgir als anys 1920's sota la guia dels matemàtics Fatou i Julia i va quedar oblidada fins a finals dels anys setanta, quan va resorgir gràcies a Mandelbrot i la feina d'altres matemàtics com Douady, Hubbard i Sullivan. El seu objectiu era estudiar el comportament dinàmic de les funcions al pla complex.

Aquí, veurem que una funció holomorfa sempre descomposa el pla en dos conjunts disjunts, el conjunt estable (conjunt de Fatou) i el conjunt de Julia. En aquest últim, el comportament és caòtic.

Podem trobar certes diferències a l'hora de treballar amb aquests conjunts segons el tipus de funcions amb les que estiguem treballant. Així, distingirem el cas polinomial del cas transcendent enter. En funcions polinòmiques podem definir els conjunts de Fatou i de Julia de forma més directa sense parlar en termes de normalitat.

Conjunts de Fatou i Julia per a polinomis

En funcions polinomials, $z = \infty$ és un punt fix atractor (com demostrarem més endavant en aquesta memòria) i podem definir els conjunts de Julia i Fatou a partir de la seva conca d'atracció.

Sigui $p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0$, $a_i, z \in \mathbb{C}$, $a_d \neq 0$, un polinomi de \mathbb{C} de grau $d \geq 2$. Sabem que $z = \infty$ un punt fix atractor de $p(z)$ (fet que es demostra en el Teorema 3.2 d'aquest document) i $A(\infty)$ la seva conca d'atracció.

Definició 2.34. *Sigui p un polinomi de grau $d \geq 2$, definim:*

- * *La conca d'infinit $A(\infty) = \{z; p^n(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$ (conjunt obert)*
- * *El conjunt ple de Julia $K(p) = \mathbb{C} \setminus A(\infty) = \{z; p^n \not\rightarrow \infty\}$ (conjunt tancat)*
- * *El conjunt de Julia $J(p) = \partial A(\infty) = \partial K(p)$ (conjunt tancat)*
- * *El conjunt de Fatou $F(p) = \mathbb{C} \setminus J(p)$ (conjunt obert)*

Proposició 2.35. *Sigui $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomi de grau ≥ 2 , llavors:*

- (a) *$K(p)$ i $A(\infty)$ són totalment invariants.*
- (b) *Sigui X un conjunt totalment invariant, llavors ∂X també ho és.*

Demostració. Per a demostrar (a), prenem $z_0 \in A(\infty)$, llavors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(z_0) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p^{n-1}(p(z_0)) = \infty \Rightarrow p(z_0) \in A(\infty)$$

Si $p(w) = z_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(p(w)) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p^{n+1}(w) = \infty \Rightarrow w \in A(\infty)$$

Per tant $A(\infty)$ és totalment invariant. Ara, si un conjunt és totalment invariant, el seu complementari també ho és ja que les seves òrbites no poden marxar. Com que $K(p) = \mathbb{C} \setminus A(\infty)$ llavors $K(p)$ és totalment invariant.

Ara, per a demostrar (b) si X és totalment invariant, llavors també $Y = \mathbb{C} \setminus X$ és totalment invariant com hem dit a la demostració de l'apartat (a). Sigui $z_0 \in \partial X$. Volem veure que $p(z_0) \in \partial X$. És a dir, donat U entorn de $p(z_0)$ hem de veure que $U \cap X \neq \emptyset$ i $U \cap Y \neq \emptyset$. Per continuïtat, $\exists V$ entorn de z_0 tal que $p(V) \subset U$, però com que $z_0 \in \partial X$ tenim $V \cap X \neq \emptyset$ i $V \cap Y \neq \emptyset$. X i Y totalment invariants, per tant, $p(V \cap X) \subset (U \cap X) \neq \emptyset$ i $p(V \cap Y) \subset (U \cap Y) \neq \emptyset$.

Sigui w_0 tal que $p(w_0) = z_0$, i sigui U un entorn de w_0 . Fem un argument semblant usant que p envia oberta a oberts i, per tant, $p(U)$ és un entorn de z_0 . \square

Com a conseqüència $J(p)$ és totalment invariant. També podem destacar que $K(p) \neq \emptyset$, ja que $K(p)$ conté almenys els punts periòdics de p , els punts $z \in \mathbb{C}$ tals que $p^k(z) = z$ on k és el període de la òrbita. Podem fer aquesta afirmació ja que els punts periòdics existiran pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra.

Proposició 2.36. *Sigui p un polinomi. Les components connexes de $K(p)$ són subconjunts compactes de \mathbb{C} tals que el seu interior és simplement connex.*

En quant a família quadràtica $Q_c(z) = z^2 + c$, en podem visualitzar els conjunts de Julia segons el paràmetre c a partir de l'eina de forma aproximada.

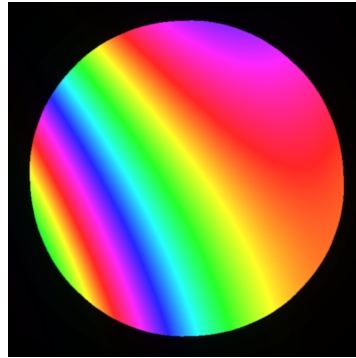


Figura 9: $c \approx 0$

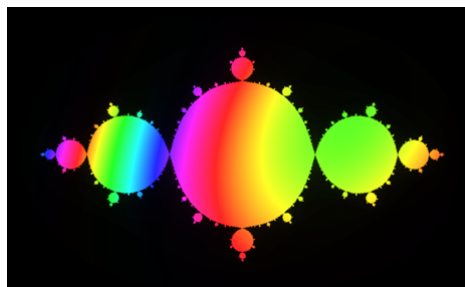


Figura 10: $c \approx -1$

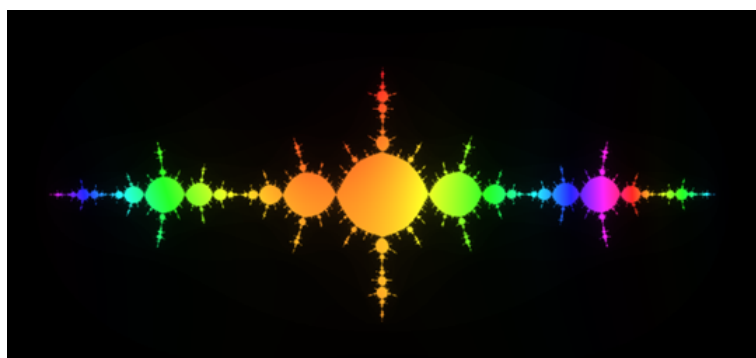


Figura 11: $c \approx -3/2$

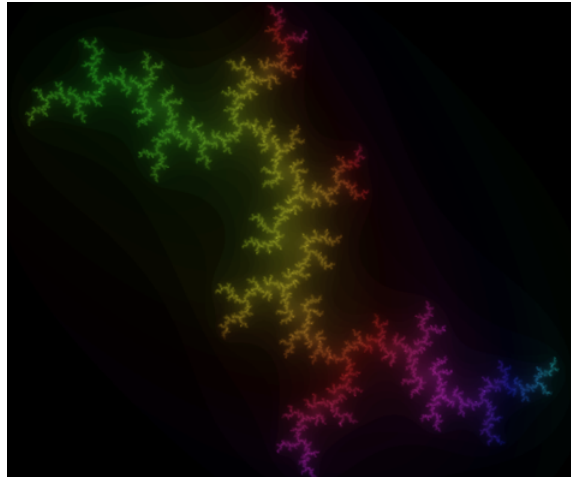


Figura 12: $c \approx i$

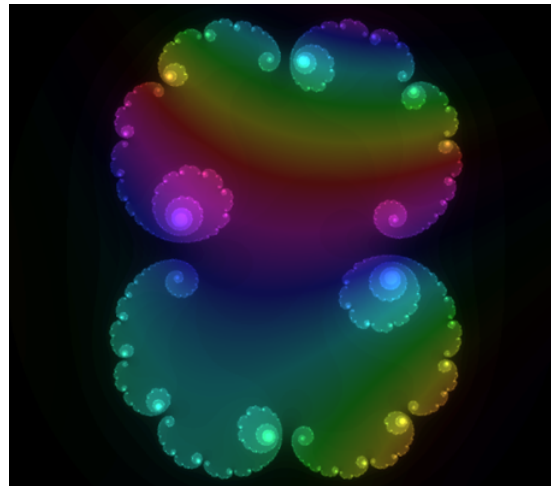


Figura 13: $c \approx 1/4$

Conjunts de Fatou i Julia per a funcions transcendents enteres

En funcions transcendents enteres $z = \infty$ ja no és un punt fix atractiu, ja que hi ha una singularitat essencial, de manera que no podem utilitzar les definicions dels conjunts de Julia i Fatou que hem enunciat per a polinomis. En aquest cas, utilitzarem el concepte de normalitat per a definir-los.

Definició 2.37. *Sigui $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funció entera transcendent. Definim el conjunt de Julia i el conjunt de Fatou de la següent manera:*

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n\}_{n \geq 1} \text{ no és normal a } z\}$$

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n\}_{n \geq 1} \text{ és normal a } z\}$$

Per definició, $J(f) = \mathbb{C} \setminus F(f)$.

Tot seguit, veurem algunes propietats d'aquests conjunts quan tenim $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ transcendent entera i en demostrarem les dues primeres.

Proposició 2.38. *Sigui $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funció transcendent entera, les següents propietats són certes:*

- (a) $F(f)$ és obert i $J(f)$ és tancat.
- (b) $F(f)$ i $J(f)$ són completament invariants, és a dir, si $z \in J(f)$ (resp. $z \in F(f)$), llavors la imatge i les antiimatges de z també pertanyen a $J(f)$ (resp. $z \in F(f)$).
- (c) $F(f^m) = F(f)$ i $J(f^m) = J(f)$
- (d) $J(f) \neq \emptyset$

Demostració. Per a demostrar (a), com que $J(f) = \mathbb{C} \setminus F(f)$, en tenim prou amb veure que $F(f)$ és obert. Això és obvi, ja que la condició de normalitat és oberta.

Seguim amb la demostració de (b). La intersecció dels dos conjunts és buida per ser complementaris, de manera que $F(f)$ serà invariant si i només si $J(f)$ també ho és. Només cal, doncs, que ho provem per $F(f)$. Considerem $z_0 \in F$. Per tant, $\exists U$ obert amb $z_0 \in U$ tal que $\{f^n|_U\}_{n \geq 1}$ és una família normal. Com f és una funció oberta, llavors $f(U)$ és un entorn de $f(z_0)$ i, per tant, $\{f^n|_{f(U)}\}_{n \geq 1}$ és una família normal.

Ara, prenem w tal que $w = f(z_0)$. Sigui $g = f^{-1}$ la branca de f^{-1} tal que $g(w) = z_0$. Certament $g(U)$ és un obert tal que $w \in g(U)$. Com $\{f^n|_U\}_{n \geq 1}$ és una família normal, llavors $\{f^n|_{g(U)}\}_{n \geq 1}$ també és una família normal. \square

També podem destacar, que si $z \in \mathcal{J}(f)$ i sigui U un entorn de z , llavors la unió de tots els iterats de U cobreix l'esfera de Riemann amb l'excepció de, com a molt, dos punts. Aquest fet és una conseqüència immediata del Teorema de Montel, que ens diu que si els iterats d'una família eviten tres o més punts, llavors z és un punt normal. Això es contradueix amb que $z \in \mathcal{J}(f)$.

2.2.6 La família quadràtica

En aquesta secció, farem referència a la família de funcions quadràtiques

$$Q_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

i usarem la notació $A_c(\infty) := A(\infty)$, $K_c := K(Q_c)$, $J_c := J(Q_c)$. Aquesta família de polinomis té un únic punt crític, el punt $z = 0$, el qual té un paper important en la connexió de K_c .

Teorema 2.39. *(Dicotomia fonamental) Sigui $Q_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Es compleix un dels següents:*

(a) $0 \notin K_c$ i, llavors, K_c és un conjunt de Cantor (totalment disconnex).

(b) $0 \in K_c$ i, llavors, K_c és un conjunt connex.

Aquest teorema relaciona la topologia del conjunt de Julia amb la dinàmica de l'únic punt crític de tots els polinomis de la família. Mostra com la connexió de K_c depèn de si la òrbita de $z = 0$ tendeix, o no, a infinit. Observem que K_c pot tenir o bé una peça o bé infinites.

2.2.7 El conjunt de Mandelbrot

Fins ara, hem estat treballant en el pla dinàmic. En aquesta secció, veurem un conjunt al pla de paràmetres. Definirem el conjunt de Mandelbrot, aquest és el conjunt de valors de c pels quals K_c (de la família de funcions quadràtiques) és connex, és a dir, una de les dues possibilitats de la dicotomia que acabem de veure en el Teorema 2.39.

Definició 2.40. Sigui $Q_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. El Conjunt de Mandelbrot \mathcal{M} ve donat pel conjunt de paràmetres pels quals el conjunt de Julia és connex.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ és connex}\} = \{c \in \mathbb{C} \mid Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$$

Teorema 2.41. (Criteri d'escapament) Sigui $c \in \mathbb{C}$. Si $|z| \geq |c|$ i $|z| > 2$ llavors $\exists \varepsilon > 0$ tal que $|Q_c^n(z)| \geq (1 + \varepsilon)^n |z|$ i, per tant, $Q_c^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. En altres paraules, si $R = \max\{|c|, 2\}$ llavors $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)} \subseteq A_c(\infty)$.

Del criteri d'escapament en podem concloure que si $|c| > 2$, llavors $c \in A_c(\infty)$ i tenim $M \subset \overline{D(0, 2)}$.

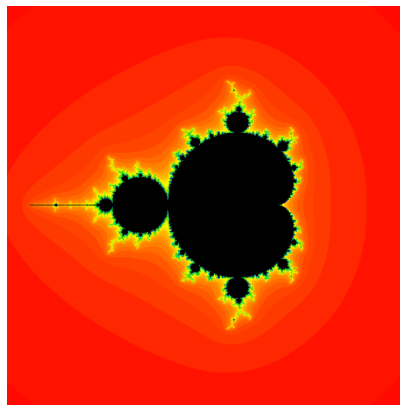


Figura 14: Conjunt de Mandelbrot.

En la Figura 14, observem en negre els valors de c del conjunt de Mandelbrot, és a dir, els valors c tals que $Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty$. En vermell, en canvi, els valors de c pels quals $Q_c^n(0) \rightarrow \infty$. Observem que s'utilitzen diferents colors segons el nombre d'iterats que es necessiten per escapar d'una bola de radi R . Fixem-nos en que

aquest conjunt està dibuixat al pla de paràmetres a diferència de les figures vistes prèviament on veiem els conjunts de Julia a partir d'un cert paràmetre. Aquestes últimes estan dibuixades al pla dinàmic.

2.2.8 Conjugacions

Siguin X, Y dos subconjunts de \mathbb{C} (o de \mathbb{R}^n) i sigui $F_1 : X \rightarrow X, F_2 : Y \rightarrow Y$ funcions (com a mínim contínues).

Definició 2.42. *Diem que F_1 i F_2 són topològicament conjugades si existeix un homeomorfisme $h : X \rightarrow Y$ tal que*

$$h \circ F_1 = F_2 \circ h, \quad \text{i.e.,}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_1} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{F_2} & Y \end{array}$$

Una conjugació $h : X \rightarrow Y$ envia òrbites de F_1 a òrbites de F_2 ,

punts fixos de $F_1 \mapsto$ punts fixos de F_2

òrbites periòdiques de període $p \mapsto$ òrbites periòdiques de període p

atractors \mapsto atractors

repulsors \mapsto repulsors

També tenim que $h(K_{F_1}) = K_{F_2}$ i $h(J_{F_1}) = J_{F_2}$.

Exemple 2.43. La funció $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$ a $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ és conjugada a $Q_0(z) = z^2$ a $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$, ja que, si prenem $h(z) = z + \frac{1}{z}$, el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} \setminus [-2, 2] & \xrightarrow{Q_{-2}} & \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \end{array}$$

Anem a provar que efectivament són conjugades. Considerem $h(z) = z + \frac{1}{z}$ que es troba a $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} = |z| > 1$. Llavors:

$$1. \text{ h 'conjugada'? } h(z^2) = h(z)^2 - 2 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = (z + \frac{1}{z})^2 - 2 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2z\frac{1}{z} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2} \quad \checkmark$$

$$2. \text{ h injectiva? } z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \Rightarrow z - w = \frac{z-w}{zw}$$

$$\begin{cases} z = w, \text{ o bé} \\ z \cdot w = 1 \Rightarrow \text{si } |z| > 1 \text{ llavors } |w| < 1 \end{cases}$$

3. h exhaustiva? $z + \frac{1}{z} = w \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \Rightarrow z^2 - wz + 1 = 0$
 $\Rightarrow z_{\pm} = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2 - 4}) \Rightarrow z_+ \cdot z_- = 1$
 Alguna de les dues solucions (o ambdues) està a S^1 .
4. h contínua? Sí, a $\mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow$ és contínua a $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$
5. Sí, arrel de la propietat que diu que si tenim una funció $h : X \rightarrow Y$ contínua, bijectiva i oberta, llavors h^{-1} és contínua.

Per definició, els iterats F_1^n i F_2^n també són conjugats, $F_2^n = h \circ F_1^n \circ h^{-1}$ i, de la mateixa manera, ho són F_1^{-1} i F_2^{-1} quan existeixen i tenim $F_2^{-1} = h \circ F_1^{-1} \circ h^{-1}$.

Podem anar d'una conca d'atracció per F_1 a una conca d'atracció per F_2 a partir d'una conjugació h .

3 Iteració polinomial. El conjunt d'escapament

En aquest capítol, introduïm el conjunt d'escapament. Recordem que el principal objectiu del treball és estudiar i entendre aquest conjunt. En aquesta branca de la dinàmica holomorfa, veurem que el comportament dels iterats s'entén com iterats de l'esfera de Riemann, ja que podrem estendre la funció a l'infinit de forma contínua i, de fet, holomorfa.

Aquí no ens farà falta utilitzar termes de famílies normals, ja que podrem fer l'estudi de manera més directa provant que tot polinomi té infinit com a punt fix atractor. Després veurem que, per tant, infinit té una conca immediata d'atracció. Ara, definirem el conjunt d'escapament i veurem el seu comportament quan tenim funcions polinòmiques.

Definició 3.1. *Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Definim el conjunt d'escapament de p com:*

$$\mathcal{I}(p) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : p^n(z) \mapsto \infty\}.$$

Teorema 3.2. *Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau més gran o igual que 2, $z = \infty$ és un punt fix atractor.*

Demostració. Prenem el polinomi $p(z)$ de grau $d \geq 2$:

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d, a_i \in \mathbb{C}, a_d \neq 0$$

Com que \mathbb{S}^2 és l'esfera de Riemann, podem prendre la carta $\varphi(z) = 1/z$ centrada en el zero, que ens permetrà estudiar el punt de l'infinit. Llavors, existirà una aplicació $g(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per:

$$g(z) = \varphi(z) \circ p(z) \circ \varphi^{-1}(z)$$

$$g(z) = \frac{1}{p(1/z)}$$

on $z = 0$ correspon a $z = \infty$ a \mathbb{S}^2 .

Si desenvolupem la fórmula, ens queda:

$$p(1/z) = \frac{1}{z^d}(a_0z^d + a_1z^{d-1} + \dots + a_d)$$

$$g(z) = \frac{1}{p(1/z)} = \frac{z^d}{a_0z^d + a_1z^{d-1} + \dots + a_d}$$

I si posem $a'_j = \frac{a_j}{a_d}$ per $j = 1, \dots, d$, $a_d \neq 0$ i considerant $\epsilon = a'_0z^d + \dots + a'_{d-1}z$ observem que $\epsilon \approx 0$ i tenim el següent:

$$g(z) = \frac{\frac{1}{a_d}z^d}{a'_0z^d + \dots + a'_{d-1}z + 1} = \frac{1}{a_d}z^d \frac{1}{1 + \epsilon} = \frac{1}{a_d}z^d(1 + o(z)).$$

De manera que tenim $g(0) = 0$ i, per tant, ∞ és un punt fix. Per veure que és un punt atractor, hem de veure que $|\lambda| < 1$, on λ és el multiplicador de ∞ . Si derivem veiem que $g(0) = g'(0) = 0$ i concloem que ∞ és un punt fix super-atractor. \square

Definició 3.3. Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$. La conca d'atracció de $z = \infty$ (punt fix super-atractor de p), que denotem per $A(\infty) := A_p(\infty)$ és el conjunt de punts que convergeixen a ∞ sota iteració. És a dir:

$$A(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : p^n(z) \mapsto \infty\}$$

Teorema 3.4. Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$. Llavors

$$\mathcal{I}(p) = A(\infty).$$

Demostració. Coincideixen per definició.

Volem veure que $A(\infty)$ és un conjunt obert. De fet podem demostrar un resultat més general que implica aquesta afirmació.

Teorema 3.5. Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$. Suposem que $p(z_0) = z_0$ és un punt fix atractor. Llavors:

(a) $\exists \varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(z_0) \subset A(z_0)$.

(b) $A(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \text{ tal que } p^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0\}$ és un conjunt obert.

Demostració. Comencem demostrant (a). Tenim que $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Llavors $\exists D_\varepsilon(z_0)$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < |\mu| < 1$$

per algun $\mu \in \mathbb{C}$. Per tant,

$$|f(z) - f(z_0)| < |\mu||z - z_0|$$

i, com $f(z_0) = z_0$, tenim:

$$|f(z) - z_0| < |\mu||z - z_0|.$$

Si apliquem f , obtenim:

$$|f^2(z) - z_0| < |\mu||f(z) - z_0| < |\mu|^2|z - z_0|$$

iterant, ens queda:

$$|f^n(z) - z_0| < |\mu|^n|z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

quan $|\mu| < 1$. Per tant, $f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$.

Per a demostrar (b), considerem $D_\varepsilon(z_0)$ on ε està definit a l'apartat anterior. Sigui $z \in A(z_0)$. Volem veure que existeix $\delta > 0$ tal que $\forall w \in D_\delta(z)$ tenim que $w \in A(z_0)$. Prenem $z \in A(z_0)$, aleshores, $f^n(z) \rightarrow z_0$ quan $n \rightarrow \infty$, és a dir, $\exists n_0$ tal que

$$|f^n(z) - z_0| < \bar{\varepsilon}/2 \quad \forall n \geq n_0.$$

Per altra banda, tenim que f^{n_0} és contínua, per tant, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|z - w| < \delta \Rightarrow |f^{n_0}(z) - f^{n_0}(w)| < \varepsilon$$

Si prenem $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/2$, obtenim:

$$\begin{aligned} |f^{n_0}(w) - z_0| &= |f^{n_0}(w) - f^{n_0}(z) + f^{n_0}(z) - z_0| \leq |f^{n_0}(z) - f^{n_0}(w)| + |f^{n_0}(z) - z_0| \\ &\leq \bar{\varepsilon}/2 + \bar{\varepsilon}/2 = \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Observació 3.6. Observem que els arguments usats en la demostració del teorema anterior s'extenen de manera trivial en el cas que f sigui una funció entera transcendent.

Corol·lari 3.7. Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$, llavors $A(\infty)$ és obert.

Tot conjunt obert, i en particular $A(\infty)$ pot tenir finites o infinites components connexes. Anomenarem $A^*(\infty)$ la component connexa de $A(\infty)$ que conté l'infinit (conca immediata d'atracció). Òbviament $A^*(\infty) \neq \emptyset$.

Teorema 3.8. Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$. Llavors

$$A(\infty) = A^*(\infty).$$

Demostració. Volem veure que $A(\infty)$ només té una component connexa i que aquesta és la conca immediata d'infinit.

Suposarem que $A(\infty)$ té més d'una component connexa. Sabem que la component $A^*(\infty)$ és no acotada. Llavors suposarem que n'hi ha una altra que sí que és acotada i l'anomenarem U . Considerarem $w \in U$ i $z \in \partial U$.

Prenent una funció $p : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa a U , llavors, pel Principi del Mòdul Màxim, el màxim de $|p|$ s'assoleix a la frontera ∂U .

Observem, doncs, que la òrbita de $z \in \partial U$ està acotada i, per tant, tenim que existeix un $R > 0$ tal que:

$$|p^n(z)| < R \quad \forall n \geq 1.$$

I, a la vegada, per ser U una component connexa de $A(\infty)$,

$$|p^m(w)| > R \quad \text{per algun } m \geq 1.$$

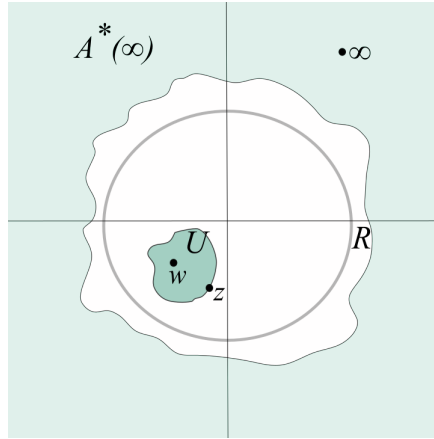


Figura 15: Esquema dels elements de la demostració.

De manera que hi ha una contradicció amb el Principi del Mòdul Màxim, ja que el màxim de $|p|$ s'ha d'assolir a la frontera. \square

Per tant, la conca en realitat només té una component connexa, que és la conca immediata d'infini.

Teorema 3.9. *Sigui $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau d , llavors $\exists R = R(p)$ tal que $\mathbb{C} \setminus B(0, R) \subset A(\infty)$.*

Demostració. Volem veure que $|p(z)| > |\lambda||z|$ amb $|\lambda| > 1 \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$. Prenem

$$p(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0$$

Llavors, tenim

$$|p(z)| = |a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0| = |z| \left| a_d z^{d-1} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{z} \right|$$

I hem de provar que $|a_d z^{d-1} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{z}| > 1$ quan $|z| > R$.

$$\left| a_d z^{d-1} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{z} \right| \geq |z^{d-1}| \left| a_d + a_{d-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^d} \right| \geq |z^{d-1}| \left| |a_d| - \left| a_{d-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^d} \right| \right|$$

Si considerem $f(z) = a_{d-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^d}$, tenim

$$|f(z)| = \left| a_{d-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^d} \right| \leq \frac{|a_{d-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^d} \leq \varepsilon \ll |a_d|$$

Si anomenem $\max\{a_d, \dots, a_0\} = M$ i prenem $|z| > 100M$, ens queda

$$\left| a_d z^{d-1} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{z} \right| \geq |z^{d-1}| \cdot (|a_d| - \max |f(z)|) \geq |z^{d-1}| \cdot \frac{|a_d|}{2}$$

que tendeix a ∞ quan $z \rightarrow \infty$. Aleshores, tenim

$$\left| a_d z^{d-1} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{z} \right| > 2$$

I, per tant, $|p(z)| > 2|z|$. \square

Així doncs, sigui p un polinomi, tenim que el pla es pot dividir en:

- * $A(\infty)$ que són els punts que escapen a infinit (de fet, acabem de provar que $A(\infty) = A^*(\infty)$). Aquest, és un conjunt obert.
- * $K(p)$ que són els punt que tenen òrbita acotada i, aquest, és un conjunt tancat.

Llavors, podem observar que el conjunt de Julia del polinomi p és $J(p) = \partial A(\infty)$ i, per altra banda, el seu conjunt de Fatou és $F(p) = \hat{\mathbb{C}} \setminus J(p)$.

4 Iteració transcendent. El conjunt d'escapament

En aquesta darrera part del treball, seguim parlant del conjunt d'escapament, però, en aquesta ocasió, iterarem funcions transcendents enteres.

Ja hem vist, en l'apartat anterior del treball, que en el cas polinomial, el conjunt d'escapament coincideix amb la conca d'atracció immediata de l'infinit. En el cas transcendent enter això no es compleix i, per tant, només podem utilitzar termes de normalitat a l'hora de treballar amb els conjunts de Julia i Fatou.

Ara, en el cas transcendent enter, $\infty \in J(f)$ perquè no podem iterar a $z = \infty$ ja que f hi té una singularitat essencial. Com que sabem que $J(f)$ no té cap punt aïllat, llavors tenim que $J(f)$ no és acotat, just al contrari que en el cas polinomial.

Primer, definim el conjunt d'escapament per a funcions transcendents enteres de la mateixa manera que ho hem fet per a polinomis.

Definició 4.1. *Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció transcendent entera. Definim el conjunt d'escapament de la funció f :*

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \mapsto \infty\}.$$

Com ja hem mencionat, el següent teorema és clar per a polinomis, ja que hem vist que el conjunt d'escapament coincidia amb la conca immediata d'infinit la seva frontera la qual era el conjunt de Julia.

Teorema 4.2. *Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció transcendent entera. Llavors es compleix la següent igualtat:*

$$J(f) = \partial\mathcal{I}(f)$$

Demostració. Per a provar la inclusió $J(f) \subset \partial\mathcal{I}(f)$, prenem $z \in J(f)$ i V un entorn de z . Considerem un $z_1 \in \mathcal{I}(f)$ arbitrari tal que $z_2 = f(z_1) \neq z_1$. Com que $z \in J(f)$, tenim que la família $\{f^n\}$ no és normal en V i, pel Teorema de Montel, si $z \in J(f)$ i V és un entorn de z , llavors la unió de tots els iterats de V cobreix tota l'esfera de Riemann excepte com a molt dos punts (comptant l' ∞). Per tant, ha d'existir $z^* \in V$ tal que $f^m(z^*) = z_1$ per alguna m . Com $z_1 \in \mathcal{I}(f)$, llavors també $z^* \in \mathcal{I}(f)$.

Ens falta veure que $\text{Int}(\mathcal{I}(f)) \subset F(f)$. Prenem, doncs, $z \in \text{Int}(\mathcal{I}(f))$ i considerem un entorn U de z . Llavors, la família $\{f^n\}$ convergeix a ∞ en U i, per tant, $\{f^n\}$ és normal en U . Aleshores, $z \in F(f)$.

Per demostrar l'altra inclusió, $\partial\mathcal{I}(f) \subset J(f)$, prenem $z \in \partial\mathcal{I}(f)$. Si agafem un entorn U de z , $\{f^n\}$ no és normal a U perquè $U \not\subset \mathcal{I}(f)$ i no tots els punts de U convergeixen a ∞ , per tant, $z \notin F(f)$ i $z \in J(f)$. \square

4.1 La família exponencial complexa

El nostre següent objectiu és veure que el conjunt d'escapament és un conjunt no buit per a funcions transcendents enteres. Per tal de veure-ho clar, considerarem un cas concret. Es tracta de la funció

$$E_\lambda(z) = \lambda e^z$$

on $\lambda \in \mathbb{C}$.

Volem trobar algun punt que escapi a infinit per a diferents valors de $\lambda \in \mathbb{C}$. Fixem-nos que si prenem $\lambda = 1$, aleshores tenim la funció $E_\lambda(z) = e^z$. En aquest cas, si considerem la òrbita del 0, podem observar que se'n va a infinit:

$$Orb(0) = \{0, 1, e, e^e, e^{e^e}, \dots\}$$

Pel cas $\lambda \in \mathbb{C}$, en canvi, no està clar que aquesta mateixa òrbita se'n vagi a infinit:

$$Orb(0) = \{0, \lambda, \lambda e^\lambda, \lambda e^{\lambda e^\lambda}, \dots\}$$

En aquest cas, depenent de la λ , pot ser que efectivament se'n vagi a infinit, o bé, que estigui acotada. De fet, si considerem el mateix cas als reals, observem que, per a $\lambda = 1$, la òrbita no està acotada, però, per exemple, per a $\lambda = 1/4$ sí que ho està.

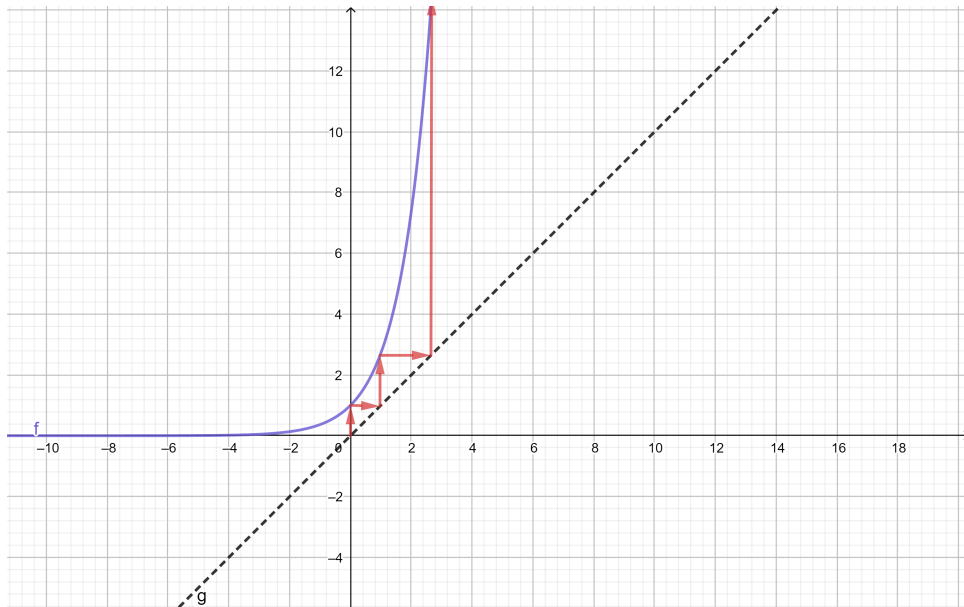


Figura 16: Retrat de fase de la funció E_1 en $x = 0$.

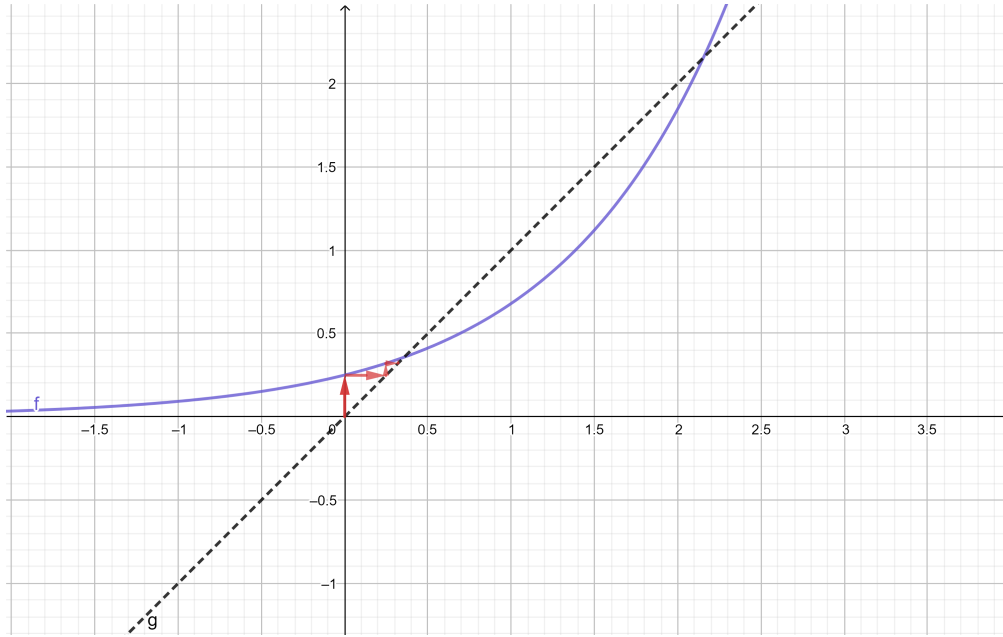


Figura 17: Retrat de fase de la funció $E_{1/4}$ en $x = 0$.

Lema 4.3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$E_{\lambda}^n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Demostració. Fixem $\lambda \in \mathbb{C}$. Prenem un $r > 0$ prou gran (a fixar més endavant) que faci que, encara que $|\lambda|$ sigui petit, el mòdul de la imatge $|E_{\lambda}(r)| = |\lambda|e^r$ sigui gran. Considerem el quadrat de costats 2π , és a dir, d'extremes inferiors $r, r + 2\pi$ i d'extremes superiors $r + 2\pi i, (r + 2\pi) + 2\pi i$.

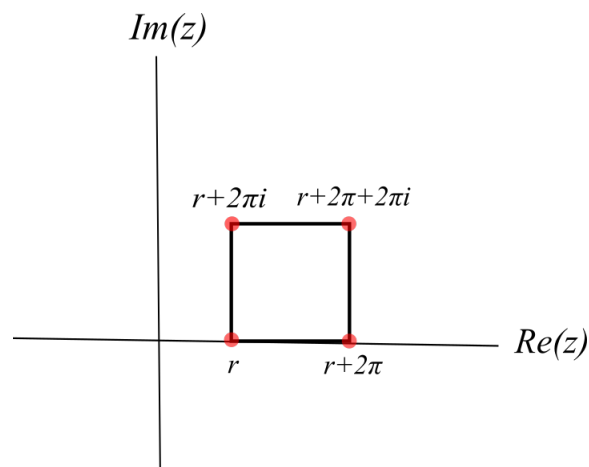


Figura 18: Quadrat de costat 2π al pla complex.

A continuació, mirem on va a parar el quadrat al fer la seva imatge per la funció E_λ .

- Extrems inferiors del quadrat:

$$E_\lambda(r) = \lambda e^r = |\lambda| e^r e^{i \operatorname{Arg}(\lambda e^r)} = |\lambda| e^r e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda(r + 2\pi) = \lambda e^{(r+2\pi)} = |\lambda| e^r e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

Podem observar que la distància entre la imatge de r i la de $r+2\pi$ és de $|\lambda| e^r (e^{2\pi} - 1)$.

- Extrems superiors del quadrat:

$$E_\lambda(r + 2\pi i) = \lambda e^{(r+2\pi i)} = \lambda e^r = |\lambda| e^r e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda((r + 2\pi) + 2\pi i) = \lambda e^{((r+2\pi)+2\pi i)} = \lambda e^{(r+2\pi)} = |\lambda| e^r e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

Les imatges són iguals que les dels extrems inferiors.

- Costats verticals del quadrat, $\{x = r\}$ o bé $\{x = r + 2\pi\}$ i $y \in [0, 2\pi]$:

$$E_\lambda(r + yi) = \lambda e^{(r+yi)} = \lambda e^r e^{yi} = |\lambda| e^r e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

$E_\lambda(r + yi)$ és igual en mòdul que $E_\lambda(r)$ però té argument diferent.

$$E_\lambda((r + 2\pi) + yi) = \lambda e^{((r+2\pi)+yi)} = \lambda e^r e^{2\pi} e^{yi} = |\lambda| e^r e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

$E_\lambda((r + 2\pi) + yi)$ és igual en mòdul que $E_\lambda(r + 2\pi)$ però té argument diferent. Per tant, tenim que aquestes imatges formen una corona circular.

- Costats horitzontals del quadrat, $\{y = 0\}$ o bé $\{y = 2\pi\}$ i $x \in [0, 2\pi]$:

$$E_\lambda(r + x) = \lambda e^{(r+x)} = |\lambda| e^r e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda((r + x) + 2\pi i) = \lambda e^{((r+x)+2\pi i)} = \lambda e^{(r+x)} = |\lambda| e^r e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

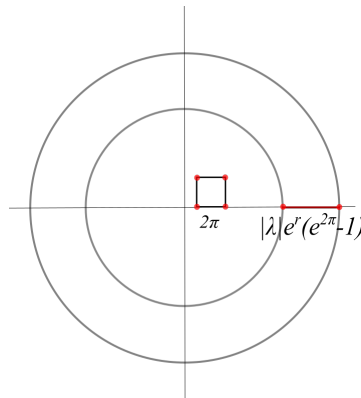


Figura 19: Corona circular formada per les imatges del quadrat de mida 2π .

- Franges verticals de l'interior del quadrat:

Fixem $y \in (0, 2\pi)$, llavors, per $x \in (0, 2\pi)$,

$$E_\lambda((r+x) + yi) = \lambda e^{((r+x)+yi)} = |\lambda| e^r e^x e^{i \text{Arg}(\lambda+y)}$$

Cada franja vertical forma un cercle dins la corona circular a distància $e^x \in (1, e^{2\pi})$ de $E_\lambda(r)$.

- Franges horitzontals de l'interior del quadrat:

Fixem $x \in (0, 2\pi)$, llavors, per $y \in (0, 2\pi)$,

$$E_\lambda((r+x) + yi) = \lambda e^{((r+x)+yi)} = |\lambda| e^r e^x e^{i \text{Arg}(\lambda+y)}$$

Cada franja horitzontal dibuixa una "tapa" dins la corona circular.

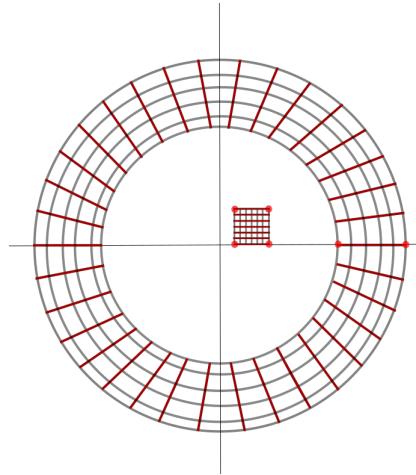


Figura 20: Corona circular formada per les imatges del quadrat de mida 2π .

Comparant la mida del quadrat de costat 2π amb el radi de la corona circular, de $|\lambda|e^r(e^{2\pi} - 1)$, veiem que la imatge ocupa molt més espai que el quadrat.

Ara, repetirem el procés prenent un quadrat de costats de mida 2π de l'interior de la corona circular obtinguda i en farem la imatge. Prenem un quadrat que estigui una mica per la dreta de l'extrem esquerre de la corona (serà molt petit en comparació a la mida total de la corona). Considerem, per exemple, el quadrat d'extremes inferiors $|\lambda|e^r + 1$, $|\lambda|e^r + 1 + 2\pi$ i d'extremes superiors $(|\lambda|e^r + 1) + 2\pi i$, $(|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) + 2\pi i$.

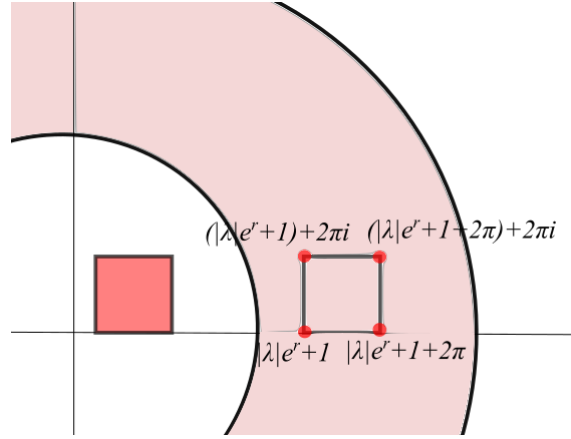


Figura 21: Quadrat de mida 2π dins la corona circular.

Ara, calculem la imatge d'aquest quadrat.

- Extrems inferiors del quadrat:

$$E_\lambda(|\lambda|e^r + 1) = \lambda e^{(|\lambda|e^r + 1)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda(|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) = \lambda e^{(|\lambda|e^r + 1 + 2\pi)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

Altra vegada, la mida de la corona circular és de 2π .

- Extrems superiors del quadrat:

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1) + 2\pi i) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1) + 2\pi i)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) + 2\pi i) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) + 2\pi i)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

- Costats verticals del quadrat, $\{x = |\lambda|e^r + 1\}$ o bé $\{x = |\lambda|e^r + 1 + 2\pi\}$ i $y \in [0, 2\pi]$:

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1) + yi) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1) + yi)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) + yi) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1 + 2\pi) + yi)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{2\pi} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

- Costats horitzontals del quadrat, $\{y = 0\}$ o bé $\{y = 2\pi\}$, $x \in [0, 2\pi]$:

$$E_\lambda(|\lambda|e^r + 1 + x) = \lambda e^{(|\lambda|e^r + 1 + x)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1 + x) + 2\pi i) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1 + x) + 2\pi i)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)}$$

- Franges verticals de l'interior del quadrat:

Fixem $y \in (0, 2\pi)$, llavors, per $x \in (0, 2\pi)$,

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1 + x) + yi) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1 + x) + yi)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

- Franges horitzontals de l'interior del quadrat:

Fixem $x \in (0, 2\pi)$, llavors, per $y \in (0, 2\pi)$,

$$E_\lambda((|\lambda|e^r + 1 + x) + yi) = \lambda e^{((|\lambda|e^r + 1 + x) + yi)} = |\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^x e^{i \operatorname{Arg}(\lambda + y)}$$

Obtenim, doncs, la següent corona circular:

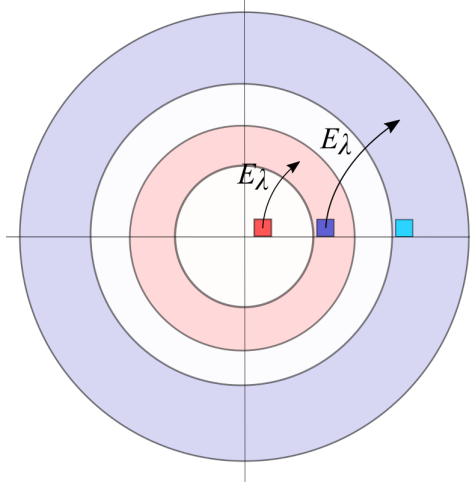


Figura 22: Els quadrats al pla complex i les seves respectives imatges (corones circulars).

En aquesta ocasió, el radi de la corona circular és $|\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} e^{i \operatorname{Arg}(\lambda)} (e^{2\pi} - 1)$, és a dir, molt més gran que l'anterior. Per veure com de lluny queda aquesta corona circular, compararem el mòdul de l'extrem dret de la primera corona amb l'extrem esquerre d'aquesta, és a dir, $E_\lambda(r + 2\pi)$ i $E_\lambda(|\lambda|e^r + 1)$.

Volem veure que el mòdul de $E_\lambda(|\lambda|e^r + 1)$ és més gran que el de $E_\lambda(r + 2\pi)$.

$$|\lambda|e e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda)} > |\lambda|e^r e^{2\pi}$$

$$e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda) + 1} > e^{r + 2\pi}$$

$$e^r \operatorname{Re}(\lambda) + 1 > r + 2\pi$$

$$e^r \operatorname{Re}(\lambda) > r + 2\pi - 1$$

Fixem-nos que ens queda una funció exponencial contra una de lineal i, a més,

$$e^{e^r \operatorname{Re}(\lambda) + 1} > e^{2r + 2\pi} > e^{r + 2\pi - 1}$$

La qual cosa és certa quan r és prou gran. D'aquí tenim que la corona corresponent a aquesta última iteració està significativament més lluny que l'anterior. Després de fer dues iteracions amb aquest mètode, ja ens adonem del patró que segueix. Veiem, doncs, que inductivament podríem veure que hi ha punts que se'n van a infinit.

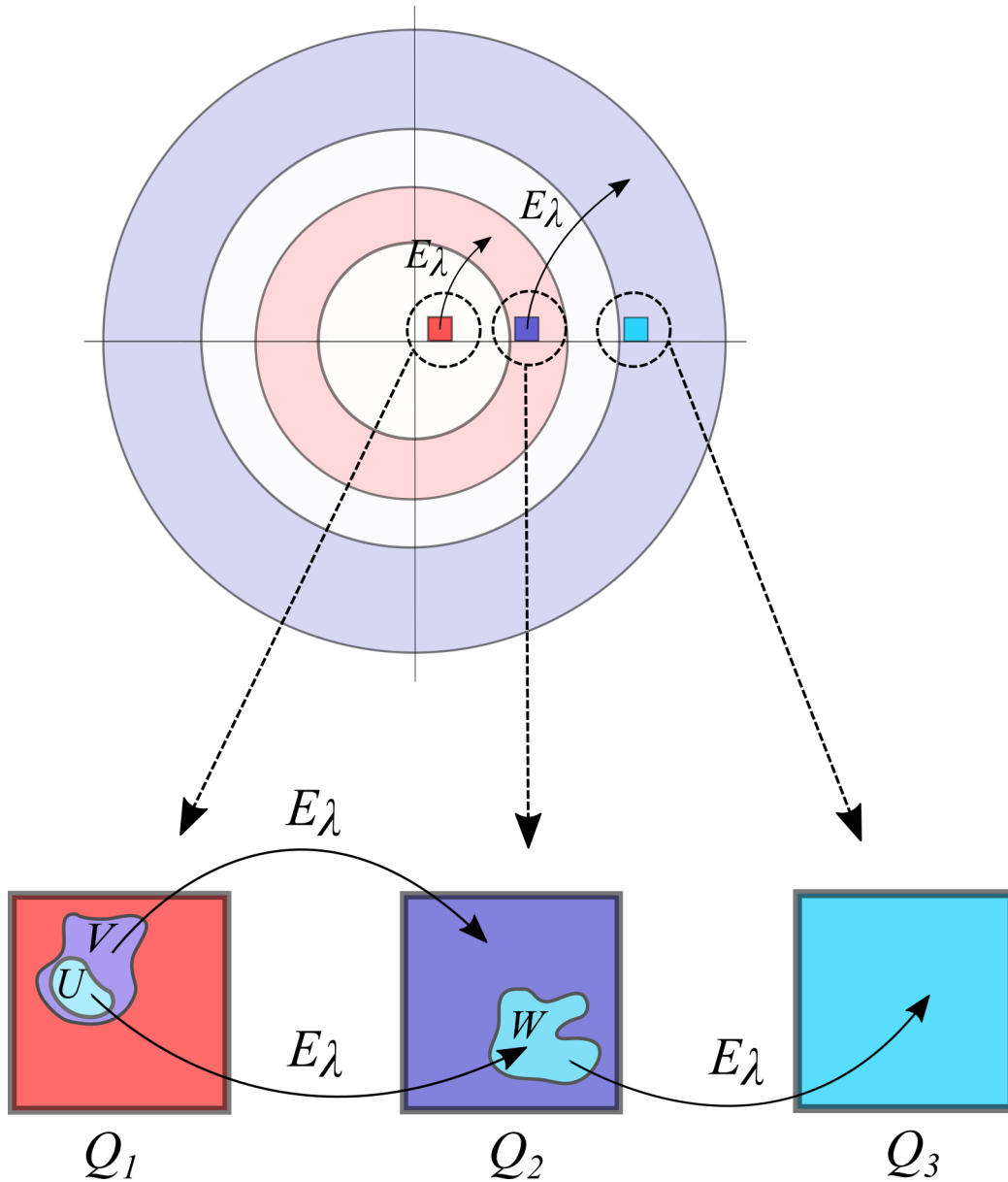


Figura 23: Esquema de l'argument final.

Ara, fixant-nos en la Figura 23, si la imatge de Q_1 és tota la corona circular, llavors hi haurà un tancat $V \subset Q_1$ tal que la seva imatge sigui Q_2 . De la mateixa manera, hi haurà un tancat $W \subset Q_2$ tal que la seva imatge sigui Q_3 i, alhora, hi haurà un tancat $U \subset V$ de manera que la imatge de U sigui W . Si repetim aquest argument iterativament i, tenint en compte que la intersecció de tancats és no buida, llavors el punt que resulta de la intersecció dels tancats de Q_1 és un punt que té òrbita d'escapament. De fet, amb aquest argument només podem concloure que hi ha punts a la intersecció infinita i és no buida, però hom pot fer servir la expansivitat de l'exponencial en el semiplà $\text{Re}(z) \gg 1$ per concloure que només hi ha un punt a Q_1 l'òrbita del qual viu a $\cup_{j \geq 1} Q_j$. \square

Acabem de veure, doncs, que la família de funcions E_λ , efectivament, conté punts que tendeixen a infinit sota iteració. Aquests punts són els que formen part del conjunt d'escapament. Amb això estem dient que

$$\mathcal{I}(\lambda e^z) \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

4.2 El conjunt d'escapament per a funcions transcendents enteres en general

Acabem de veure que per a la funció exponencial, el conjunt d'escapament és no buit. Per el cas general de funcions transcendents enteres A. E. Eremenko va provar el següent teorema.

Teorema 4.4. *Per a tota funció $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ transcendent entera tenim que*

$$\mathcal{I}(f) \neq \emptyset.$$

La demostració que dona per a aquest teorema és de tipus constructiu com el que hem realitzat prèviament per a la funció exponencial. En el procés, utilitza el Teorema de Rouché, resultats de la teoria de Nevanlinna i el Teorema de Wiman-Valiron. Aquest teorema ens permet estudiar el comportament de funcions transcendents enteres a partir d'una fórmula asimptòtica per a la funció i la seva derivada prop del punt on s'assoleix el mòdul màxim de la funció.

A grans trets, l'argument és el següent. Considerem $r_1 > 0$ molt gran i prenem $w_1 := w_1(r_1)$ el punt on s'assoleix el mòdul màxim, és a dir, $|w_1| = r_1$ i

$$|f(w_1)| = \max_{|z|=r_1} |f(z)|.$$

Ara, denotem per $M(r_1) = |f(w_1)|$. Construïm un entorn tancat "rectangular" Q_1 al voltant de w_1 de tal forma que la seva imatge conté un anell A_1 del tipus

$$\frac{1}{2}M(r_1) < |z| < 2M(r_1)$$

amb $M(r_1) \gg r_1$. Prenem ara un cercle de radi r_2 dins de A_1 i repetim l'argument. És a dir, escollim $w_2 := w_2(r_2)$ el punt on s'assoleix el mòdul màxim i construïm un entorn tancat rectangular Q_2 de w_2 (dins de A_1) que al seu torn cobrirà un anell A_2 del tipus

$$\frac{1}{2}M(r_2) < |z| < 2M(r_2)$$

amb $M(r_2) \gg M(r_1)$. I així successivament. L'argument finalitza prenent branques de la inversa de f del tipus $f^{-n}(Q_n)$. Els punts obtinguts en el procés tenen òrbita que recorre tots els Q_j , $j = 0, \dots, n$. Òbviament per construcció els punts escapen i, de fet, ho fan amb la màxima velocitat que permet la funció ja que hem usat punts de mòdul màxim en la seva trajectòria.

4.3 Els punts d'òrbita oscil·lant

A diferència del cas polinomial on les òrbites només podien ser acotades o bé d'escapament, en el cas de les funcions transcendents enteres també hi ha punts que tenen òrbita oscil·lant. S'anomena conjunt de *Bungee* al conjunt de punts tals que la seva òrbita no està ni acotada ni tendeix a infinit.

És sabut que el conjunt de Julia es pot definir també com la clausura dels punts periòdics repulsors; i.e.

$$J(f) = \overline{\{\text{punts periòdics repulsors}\}}.$$

No obstant això, també es pot demostrar que els punts d'òrbita oscil·lant són densos en el conjunt de Julia. Aquests dos comportaments dinàmics tan diferents però alhora dens dins el conjunt de Julia dona una idea de la dinàmica caòtica del conjunt. Els punts del conjunt de Julia que no són periòdics ni preperiòdics són punts oscil·lants.

5 Conclusions

En aquest treball de final de grau hem fet un estudi centrat en el conjunt d'escapament en dinàmica holomorfa. Per assolir els resultats, hem necessitat cert context d'anàlisi complexa i sistemes dinàmics. Hem posat en valor la teoria de Montel sobre famílies de funcions normals per tal d'estudiar la dinàmica global, amb l'objectiu de poder descriure els conjunts de Julia i Fatou per a funcions tant polinòmiques com transcendents enteres i, alhora, veure el comportament del conjunt d'escapament.

Per una banda, hem utilitzat resultats vistos en els preliminars per tal de provar que en les funcions polinòmials l'infinit és un punt fix atractor. Això ens ha permès definir el conjunt d'escapament a partir de la conca d'atracció de l'infinit. També hem pogut donar més resultats a partir dels quals hem conclòs que el pla complex, per un polinomi, es pot dividir en dos: els punts que escapen a infinit i els punts que tenen òrbita acotada.

Per altra banda, hem vist que en funcions transcendents enteres també podem definir el conjunt d'escapament. En aquesta ocasió, però, no el podem estudiar de la mateixa forma que per polinomis, ja que tenim una singularitat essencial en l'infinit. A partir de la teoria de Montel hem vist que el conjunt de Julia coincideix amb la frontera del conjunt d'escapament i que, per a la família exponencial complexa, el conjunt d'escapament és no buit.

Referències

- [1] Abate, Marco; Bedford, Eric; Brunella, Marco; Dinh, Tien-Cuong; Schleicher, Dierk; Sibony, Nessim: *Holomorphic dynamical systems*, apunts del C.I.M.E. Summer School a Cetraro, Itàlia, Berlin: Springer, 2008.
- [2] Alligood, Kathleen T.; Sauer, Tim D.: *Chaos: an introduction to dynamical systems*, New York: Springer, 1996.
- [3] Carleson, Lennart; Gamelin, Theodore W.: *Complex dynamics*, New York: Springer-Verlag, 1928.
- [4] Devaney, Robert L.: *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2a edició, Boulder, Colorado: Westview, 1948.
- [5] Eremenko, Alexander A.: *On the iteration of entire functions*, Banach Center Publications, volume 23, pàg. 339-345, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1989.
- [6] Fagella Rabionet, Núria: Apunts de l'assignatura "Models Matemàtics i Sistemes Dinàmics", Grau de Matemàtiques, Universitat de Barcelona.
- [7] Jarque Ribera, Xavier: Apunts de l'assignatura "Dynamical Systems", Màster en Matemàtica Avançada, Universitat de Barcelona.
- [8] Kaur, Ramanpreet; Kumar, Dinesh: Dynamics on Bungee Set, escaping set and filled Julia set of composite transcendental entire functions, [arXiv:2007.13174v3](https://arxiv.org/abs/2007.13174v3) [math.NT], maig de 2021.
- [9] Pau Plana, Jordi: Apunts de l'assignatura "Anàlisi Complexa", Grau de Matemàtiques, Universitat de Barcelona.
- [10] Steinmetz, Norbert: *Nevanlinna theory, normal families, and algebraic differential equations*, Cham: Springer, 2017.