Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Superfícies cúbiques i corbes quàrtiques

Autor: Jordi Garriga Puig

Director: Dr. Joan Carles Naranjo del Val
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In Algebraic Geometry numbers 27 and 28 are usually associated with two well-known classical results. All smooth cubic surfaces contain 27 distinct lines. And all smooth plane quartics have 28 bitangents. The aim of this work is to stablish a relation between these two statements.

First, we have introduced the theoretical basis needed to demonstrate the two classical results. In the final part, we have suggested a method with which the 27 lines contained in a cubic surface can be transformed into bitangents of a plane quartic and, also from the surface, an additional bitangent can be formed, so that we ultimately obtain the 28 bitangents.

Resum

En Geometria Algebraica, els nombres 27 i 28 s'associen de manera natural a dos resultats clàssics ben coneguts. Tota superfície cúbica regular conté 27 rectes i, tota corba plana quàrtica regular té 28 rectes bitangents. En aquest treball se'ns planteja el problema de trobar una relació entre aquests dos resultats clàssics.

En la primera part del treball, ens hem centrat en establir la base teòrica necessària per poder demostrar els dos resultats. En la part final, hem proposat un mètode per veure que les 27 rectes contingudes en una superfície cúbica es poden transformar en rectes bitangents a una corba plana quàrtica i, també a partir de la superfície, podem construir una darrera recta bitangent que ens permet recuperar les 28 bitangents de la corba.

2020 Mathematics Subject Classification. 14N05, 14H50, 14J70

Agraïments

Voldria començar agraint al meu tutor Joan Carles Naranjo per la seva inestimable ajuda i dedicació al llarg d'aquest treball. Moltes gràcies per acompanyar-me en aquesta darrera etapa i per orientar-me en les següents passes que emprendré en el meu futur acadèmic més immediat.

Tampoc puc deixar de donar les gràcies als meus pares per tot el suport que he rebut durant aquests anys i, més concretament, aquests últims mesos.

I també voldria donar les gràcies als companys i amics del grau amb qui he coincidit i que m'han ajudat quan ho he necessitat, amb una menció especial a l'Ariadna, amb qui sempre he pogut comptar. Per acabar, també voldria agrair als meus amics pel seu suport incondicional i a l'Alba per la seva infinita paciència.

Índex

Introducció **1**

1 Corbes algebraiques planes **3**

1.1 Corbes algebraiques projectives . . . 3

1.2 Tangents i singularitats . . . 8

1.3 Corba Polar . . . 13

1.4 Corba Hessiana . . . 16

1.5 Corba dual i fórmules de Plücker . . . 20

2 Superfícies algebraiques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ **32**

2.1 Hipersuperfícies algebraiques . . . 32

2.2 Tangents i singularitats de hipersuperfícies algebraiques . . . 32

2.3 Grassmaniana . . . 35

2.4 Varietats algebraiques. Teoria de la dimensió . . . 37

2.5 Rectes en una superfície algebraica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . . . 39

3 27 rectes i 28 bitangents **46**

3.1 *Blow-Up* o Esclatament . . . 46

3.2 De 27 rectes a 28 bitangents . . . 49

Conclusions **55**

Referències **56**

A La resultant

B Producte exterior d'espais vectorials

Introducció

En aquest treball ens hem plantejat un problema que podríem anomenar *27 versus 28*. Aquests dos nombres, el 27 i el 28, en el context de la Geometria Algebraica s'associen de manera natural als següents dos resultats clàssics:

Resultat 0.1. *Tota corba plana quàrtica regular té* 28 *rectes bitangents.*

Resultat 0.2. *Tota superfície cúbica regular conté* 27 *rectes.*

El problema que ens hem proposat resoldre és veure que aquests dos resultats clàssics estan connectats. En altres paraules, volem veure que podem associar les 27 rectes contingudes en una superfície cúbica a rectes bitangents d'una corba quàrtica i que podem construir, també a partir de la superfície cúbica, la darrera recta bitangent de la corba per tal d'obtenir totes les 28 bitangents.

La motivació d'aquest problema va venir donada per una solució que se'n proposa a [Bel+09]. Tot i així, la demostració que s'hi pot trobar utilitza resultats de Teoria de Feixos i de Geometria Algebraica que s'escapen de l'abast d'aquest treball. Per això hem construït un mètode per resoldre el problema plantejat de manera que no fos necessari utilitzar moltes eines de Geometria Algebraica. És per això que en algunes parts del treball hem fet servir càlculs explícits en les demostracions.

En aquest sentit, hem utilitzat fortament el fet que les hipersuperfícies són varietats algebraiques tals que, en estar descrites solament per un únic polinomi, les seves propietats se simplifiquen significativament. Això ens ha permès utilitzar alguns resultats sense haver hagut de desenvolupar tota la teoria prèvia de varietats algebraiques, que hauria fet aquest treball inabordable. No obstant, ens hem trobat que en alguns moments hem hagut de donar alguns resultats sense demostrar-los i s'han referenciat a la bibliografia. Així mateix, la solució del problema només l'hem donat suposant que la superfície cúbica i la corba quàrtica són suficientment general.

Per construir al solució al problema hem proposat el següent procediment: hem fixat un punt de la superfície cúbica no contingut en cap recta, hem pres un pla complementari al punt i hem vist que els punts del pla tals que la recta que els uneix amb el punt fixat és tangent a la superfície cúbica venen donats per un polinomi discriminant que defineix una corba quàrtica. Llavors, hem demostrat que la projecció de les rectes contingudes a la superfície al pla dona lloc a rectes bitangents a la corba i, a més, hem vist que la intersecció de pla amb el divisor excepcional del *blow-up* de la superfície al punt fixat dona lloc a una darrera recta bitangent de la corba quàrtica, aconseguint així resoldre el problema plantejat.

El treball està estructurat en tres seccions.

En la primer secció 1 desenvolupem la geometria de corbes planes necessària per poder demostrar el Resultat 0.1. En el primer apartat 1.1 definim les propietats generals de les corbes en el pla projectiu, introduïm la multiplicitat d'intersecció, que és una eina de treball essencial en aquesta secció, i demostrem, utilitzant la teoria de la resultant, el resultat més important de la teoria de corbes planes, el Teorema de Bézout, amb el qual obtenim el nombre de punts d'intersecció entre dues corbes. En el segon apartat 1.2 estudiem les propietats locals de les corbes, com són les nocions de singularitat, espai tangent i con tangent, situant-nos per això en un obert afí del pla projectiu. A continuació introduïm la corba polar i les seves propietats 1.3, i la corba Hessiana i seves propietats

1.4. Finalment, en el darrer apartat 1.5 introduïm la corba dual, pel que necessitem el Teorema de Normalització, i demostrem les fórmules de Plücker utilitzant el Teorema de Bezóut i les propietats que hem vist anteriorment de les corbes polar i Hessiana. Aplicant les fórmules de Plücker a una corba regular quàrtica obtenim el Resultat 0.1 que buscàvem.

En la segona secció 2 ens centrem en demostrar el Resultat 0.2. En el primer apartat 2.1 generalitzem les propietats bàsiques que havíem donat per una corba plana a una hipersuperfície algebraica d'un espai projectiu arbitrari i en el segon apartat 2.2 generalitzem les nocions locals de singularitat, multiplicitat, espai tangent i con tangent. En el següent apartat 2.3, utilitzant la teoria del producte exterior, introduïm la Grassmaniana, que ens permet estudiar el comportament de les varietats lineals de dimensió fixada en un espai projectiu arbitrari. Més concretament, ens centrem en el cas de les rectes de l'espai projectiu $\mathbb{P}_3$. En el quart apartat 2.4 donem algunes nocions bàsiques de varietats algebraiques per poder enunciar el Teorema de la Dimensió de les Fibres i el Teorema de l'Eliminació, els quals necessitarem més endavant. En el darrer apartat 2.5 afrontem la demostració del resultat que busquem. En primer lloc, utilitzant la Grassmaniana de les rectes de l'espai projectiu $\mathbb{P}_3$ i els teoremes de l'apartat anterior, demostrem que tota superfície cúbica conté una recta. Llavors, amb un argument que utilitza el feix de plans per la recta obtenim el Resultat 0.2 esperat.

En la darrera secció 3 construïm la solució al problema que ens hem plantejat en el treball. En primer lloc 3.1 introduïm la noció de *blow-up* d'una hipersuperfície en un punt, una construcció que ens substitueix el punt de la hipersuperfície pel con tangent en el punt, que en aquest context anomenem divisor excepcional. En l'apartat final 3.2 utilitzem aquests conceptes per establir l'equivalència entre les rectes contingudes a la superfície i les rectes bitangents de la corba.

Al final del treball hem afegit dos annexes en que es desenvolupen els resultats de la teoria de la resultant A i el producte exterior B que s'utilitzen en el treball.

Hem adjuntat algunes figures que, si no s'indica el contrari, hem obtingut de [Fis01].

Antecedents teòrics

En aquest treball suposem coneguts els conceptes i definicions corresponents a una assignatura de Geometria Projectiva del grau de Matemàtiques. En general, treballarem sobre un espai projectiu amb la següent notació.

Sigui K un cos. Un *n-espai projectiu*, o espai projectiu de dimensió n, sobre K, denotat per $\mathbb{P}_n(K)$, és una terna $(\mathbb{P}, E, \phi)$, on $\mathbb{P}$ és un conjunt de punts, E és un K-espai vectorial de dimensió $n+1$ i ϕ és una aplicació exhaustiva

$$\phi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$$

tal que si $u, v \in E \setminus \{0\}$,

$$\phi(u) = \phi(v) \iff \exists \lambda \in K^* : v = \lambda u.$$

També denotarem per $\mathbb{P}(E)$ a l'espai projectiu associat a l'espai vectorial E.

Anomenarem *punts* als elements de $\mathbb{P}$. Si un punt p ve determinat per $(x_0, \cdots, x_n) \in E$, és a dir, $p = \phi(x_0, \ldots, x_n)$, direm que $(x_0 : \ldots : x_n)$ són les *coordenades homogènies* del punt p.

En tot el treball ens situarem sobre el cos dels nombres complexes $\mathbb{C}$, tot i que alguns resultats algebraics es poden donar sobre un cos arbitrari algebraicament tancat.

1 Corbes algebraiques planes

En aquesta secció volem veure que tota corba plana quàrtica regular té 28 rectes bitangents (0.1). Per provar aquest resultat necessitarem desenvolupar la geometria de les corbes planes. La secció s'ha desenvolupat seguint les notes de [Fis01] i [Ful69].

1.1 Corbes algebraiques projectives

Ens situem en el pla projectiu complex $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Anem a definir-hi una corba algebraica.

Definició 1.1. *Una* ***corba algebraica*** *és un subconjunt* $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *tal que existeix un polinomi homogeni* $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ *amb* $\deg F \geq 1$ *que satisfà*

$$C = V(F) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Anem a veure un exemple de corba algebraica. La cúbica nodal és una corba definida pel polinomi $F = X_0X_2^2 - X_1^2(X_0 + X_1)$ i la podem veure representada a la Figura 1. Podem observar que el punt $p = (1 : 0 : 0)$ és un punt doble de la corba. Més endavant veurem que és un node simple. Al voltant del punt p veiem que la corba té dos branques.

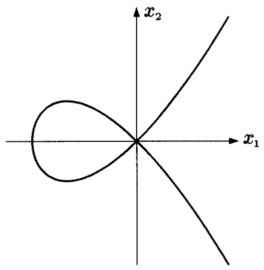

Figura 1: Cúbica nodal.

Notem que cada polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ té una corba algebraica associada $V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Si F és un divisor de G, és a dir, $G = F \cdot H$, llavors $V(F) \subset V(G)$. Donat que l'anell de polinomis $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ és un domini de factorització única, hi tenim ben definida la divisibilitat. Anem a relacionar aquestes propietats amb les possibles subcorbes d'una corba algebraica amb el Lema de Study.

Lema 1.2. *Sigui A un domini d'integritat infinit i sigui $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomi no nul. Llavors, existeixen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tals que*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Demostració. Ho provarem per inducció. Si $n = 1$, el resultat s'obté immediatament del fet que f té un nombre finit de zeros i A és infinit. Per $n > 1$, escrivim f com

$$f = b_r x_n^r + \cdots + b_1 x_n + b_0,$$

on $b_0, \ldots, b_r \in A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ i $b_r \neq 0$. Per hipòtesi d'inducció, existeixen $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ tals que $b_r(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$. Per tant, $g(x_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) \in A[x_n]$ és un polinomi no nul pel qual existeix $a_n \in A$ tal que $g(a_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \neq 0$, com volíem veure. ■

Lema 1.3 (Lema de Study). *Siguin $F, G \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. Si F és irreductible amb $\deg F \geq 1$ i $V(F) \subset V(G)$, llavors F és un divisor de G.*

Demostració. Podem assumir, si cal fent un canvi de variables, que F conté la variable X_0, és a dir, que $F \notin \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Escrivim

$$F = b_m X_0^m + \cdots + b_1 X_0 + b_0,$$

on $b_m \neq 0$ i $b_\mu \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Suposem que G no conté X_0, és a dir, que $G \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Pel Lema 1.2, existeixen $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tals que

$$b_m(a_1, a_2) G(a_1, a_2) \neq 0.$$

Notem que $F(X_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}[X_0]$ és un polinomi no nul no constant pel qual, en ser $\mathbb{C}$ un cos algebraicament tancat, existeix $a_0 \in \mathbb{C}$ tal que $F(a_0, a_1, a_2) = 0$. Per tant, $G(a_0, a_1, a_2) = G(a_1, a_2) = 0$, donat que per hipòtesi $V(F) \subset V(G)$, el qual és una contradicció. Així doncs, G és un polinomi de X_0. Escrivim

$$G = c_n X_0^n + \cdots + c_1 X_0 + c_0,$$

on $c_n \neq 0$ i $c_\mu \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Suposem que $F \nmid G$ per arribar a una contradicció. Considerem el domini d'integritat $A = \mathbb{C}[X_1, X_2]$ i la resultant entre els polinomis F i G, $R_{F,G} \in A$. Com que F és irreductible a $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, no té cap factor a part d'ell mateix i elements de $\mathbb{C}$, per tant com a element de $A[X_0]$ tampoc té cap factor a part d'ell mateix, que té grau més gran que zero. Així doncs, si $F \nmid G$, pel Teorema A.2 obtenim que $R_{F,G} \neq 0$. Ara considerem els elements $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, donats pel Lema 1.2, tal que

$$b_m(\alpha_1, \alpha_2) c_n(\alpha_1, \alpha_2) R_{F,G}(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0.$$

Notem que $F(X_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}[X_0]$ és un polinomi no nul no constant pel qual, en ser $\mathbb{C}$ un cos algebraicament tancat, existeix $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ tal que $F(a_0, a_1, a_2) = 0$. Per tant, $G(a_0, a_1, a_2) = 0$, donat que per hipòtesi $V(F) \subset V(G)$. Per tant, a_0 és un zero comú de F i G, i $X_0 - a_0$ és un factor comú dels dos polinomis

$$F(X_0, \alpha_1, \alpha_2), G(X_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}[X_0].$$

Conseqüentment, la resultant d'aquests dos polinomis es nul·la. Però aquesta resultant no és res més que el resultat de considerar $X_1 = a_1$ i $X_2 = a_2$ en $R_{F,G}$, per tant $R_{F,G}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, el qual suposa una contradicció. Per tant, $F \mid G$. ∎

Corol·lari 1.4. *Si $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ no és una unitat, llavors $V(F) \neq \emptyset$.*

Demostració. Suposem que $V(F) = \emptyset$. Si H és un factor irreductible de F, llavors $V(H) = \emptyset$. Pel Lema 1.3, H divideix qualsevol $G \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, que és impossible. ∎

Una de les conseqüències del Lema d'Study (1.3) és la descomposició d'una corba algebraica en components. Anem a donar-ne una descripció precisa.

Definició 1.5. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. Diem que C és **reductible** si existeixen corbes C_1 i C_2 tals que $C_1 \neq C_2$ i $C = C_1 \cup C_2$. Si una corba no és reductible diem que és **irreductible** i per cada descomposició $C = C_1 \cup C_2$ es dedueix que $C_1 = C_2$.*

Lema 1.6. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. C és irreductible si, i només si, existeix $k \in \mathbb{N}^*$ i existeix $G \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ irreductible tal que $F = G^k$.*

Demostració. Sigui C irreductible i prenem $F = F_1F_2$, on F_1, F_2 són coprimers i no unitats. Si H és un factor irreductible de F_1, llavors H també divideix F_2, donat que $V(H) \subset V(F_1) = V(F_2)$, i amb pel Lema 1.3 arribem a una contradicció.

D'altra banda, considerem $C = V(F)$ reductible, és a dir, $V(F) = V(F_1) \cup V(F_2)$ i $V(F_1) \neq V(F_2)$. Per tant, existeixen factors irreductibles H_i de F_i no associats entre sí. Per tant, com $V(H_i) \subset V(F_i) \subset V(F)$, pel Lema 1.3 obtenim que F té com a mínim dos factors irreductibles diferents. ∎

Teorema 1.7. *Qualsevol corba algebraica $C \subset \mathbb{C}^2$ admet una representació*

$$C = C_1 \cup \cdots \cup C_r,$$

*on $C_1, \dots, C_r$ són corbes algebraiques irreductibles. Aquesta representació és única llevat de l'ordre. Les corbes C_i s'anomenen **components irreductibles**.*

Demostració. L'existència la deduïm a partir de la factorització en factors irreductibles del polinomi F que defineix la corba i del Lema 1.6. Per provar la unicitat hem de veure que qualsevol corba irreductible $C' \subset C$ està present entre les corbes $C_1, \dots, C_r$. Ara bé, si $C' = V(F')$, on F' és irreductible, llavors pel Lema 1.3 F' ha de ser un factor irreductible de F i C' està en la representació. ∎

Veiem doncs que les components irreductibles d'una corba algebraica estan unívocament determinades. Pel Lema 1.3, això també ens determina els factors irreductibles del polinomi de la corba.

Corol·lari 1.8. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica i sigui*

$$F = F_1^{k_1} \cdots F_r^{k_r}$$

una factorització en factors primers. Si $C = V(G)$ per un altre polinomi G, llavors

$$G = \lambda F_1^{l_1} \cdots F_r^{l_r},$$

on $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i $l_\mu \in \mathbb{N}^*$.

Amb això obtenim la descripció completa de les possibles equacions d'una corba C.

Definició 1.9. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica i sigui*

$$F = F_1^{k_1} \cdots F_r^{k_r}$$

una factorització en factors primers. Anomenem a

$$\tilde{F} = F_1 \cdots F_r$$

*el **polinomi reduït** de la corba C. Anomenem a l'ideal generat pel polinomi reduït **ideal** de la corba C.*

Notem que el polinomi reduït d'una corba és únic, llevat d'una unitat, com a conseqüència del Corol·lari 1.8. Finalment utilitzarem el polinomi reduït per definir la propietat invariant més rellevant d'una corba algebraica, el grau.

Definició 1.10. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica i sigui F un polinomi reduït de la corba C, llavors*

$$\deg C := \deg F$$

és el ***grau*** *de la corba C.*

El resultat més important de la teoria elemental de corbes planes és el Teorema de Bézout, que ens dona el nombre de punts d'intersecció entre dues corbes algebraiques.

En primer lloc, considerem el següent lema que necessitarem més endavant.

Lema 1.11 (Teorema Fonamental de l'Àlgebra en forma homogènia)**.** *Sigui K un cos algebraicament tancat. Tot polinomi homogeni no nul $F \in K[X,Y]$ té una descomposició en factor lineals. Cada factor és únic, llevat del producte per un escalar no nul.*

Demostració. Sigui F un polinomi homogeni tal que $\deg F = n$, que podem escriure com

$$F = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i Y^{n-i},$$

on $c_i \in K$. Sigui e la potència més gran de X que divideix F, de manera que podem escriure $F = X^e G$ i $G = \sum_{i=e}^{n} c_i X^{i-e} Y^{n-i}$. Deshomogeneïtzant el polinomi G respecte X obtenim

$$g = \sum_{i=0}^{n-e} a_{i+e} Y^{n-e-i}.$$

Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, existeixen $b_{e+1}, \dots, b_n \in K$ zeros de g i $c \in K^*$ tals que podem escriure

$$g = c \prod_{i=e+1}^{n} (Y - b_i).$$

Homogeneïtzant de nou el polinomi g, obtenim el resultat que buscàvem

$$G = c \prod_{i=e+1}^{n} (Y - b_i X) \implies F = X^e G = X^e c \prod_{i=e+1}^{n} (Y - b_i X) = \prod_{i=1}^{n} (a_i Y - b_i X)$$

on $a_i, b_i \in K$ i $a_1 = \dots = a_e = 0$. ■

Abans d'enunciar el Teorema de Bézout, anem a estudiar la intersecció entre una corba i una recta.

Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba de grau $n \geq 1$ i sigui L una recta. Podem escollir les coordenades de manera que $L = V(X_2)$. Llavors, els punts d'intersecció entre la corba i la recta corresponen als zeros del polinomi $G(T_0, T_1) = F(T_0, T_1, 0)$.

Si expandim F en termes de X_2 obtenim

$$F(X_0, X_1, X_2) = F_0 X_2^n + F_1 X_2^{n-1} + \dots + F_n,$$

on $F_\mu \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ són polinomis homogenis i $\deg F = \mu$ si $F_\mu \neq 0$. Notem que $G = F_n$.

Si $F_n = 0$, llavors F és divisible per X_2, per tant $L \subset C$. En cas contrari, tenim que $\deg G = n$, per tant, pel Lema 1.11, existeix una factorització

$$G = (b_1T_0 - a_0T_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (b_mT_0 - a_mT_1)^{k_m},$$

on $(a_\mu : b_\mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, amb $\mu \in 1, \dots, m$, són punts diferents unívocament determinats i $k_\mu \in \mathbb{N}^*$. Notem que els valors k_μ no depenen de l'elecció de coordenades, doncs una transformació lineal només canviaria l'expressió dels factors lineals deixant-los inalterats.

Llavors, podem definir la multiplicitat d'intersecció de C i L com

$$\operatorname{mult}_p(C \cap L) := k,$$

on $k = k_\mu$ per $p = (a_\mu : b_\mu : 0)$ i $k = 0$ per tots els altres punts $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Com que $k_1 + \dots + k_m = n$, obtenim el següent resultat.

Proposició 1.12. *Si $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ és una corba algebraica amb $\deg C \geq 1$ i L una recta no continguda a C, llavors el nombre total de punts d'intersecció entre C i L, comptats amb multiplicitat, és n. Per a casi totes les línies L, els punts d'intersecció $C \cap L$ són simples, és a dir, hi ha exactament n punts d'intersecció.*

La darrera part de la proposició és una conseqüència del Corol·lari 1.32, que veurem més endavant.

Ara anem a determinar el nombre de punts d'intersecció entre dues corbes algebraiques $C_1 = V(F_1)$ i $C_2 = V(F_2)$ a $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Per fer això, escollim les coordenades per tal que les corbes no passin pel punt $q = (0 : 0 : 1)$. Per cada punt $x = (x_0 : x_1 : 0)$, considerem $L_x = x \vee q$ la recta que conté x i q.

Expandim F_1 i F_2 en termes de X_2

$$F_1 = a_0X_2^m + a_1X_2^{m-1} + \dots + a_m,$$
$$F_2 = b_0X_2^n + b_1X_2^{n-1} + \dots + b_n,$$

on $a_\mu, b_\nu \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ són polinomis homogenis i $\deg a_\mu = \mu, \deg b_\nu = \nu$ si $a_\mu, b_\nu \neq 0$, respectivament. Com $q \notin C_1$ i $q \notin C_2$, llavors tenim que $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$.

Considerem la resultant entre entre els polinomis F_1 i F_2

$$G = R_{F_1,F_2} \in \mathbb{C}[X_0, X_1].$$

Pel Teorema A.5, $G \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ és un polinomi homogeni de grau mn.

Si C_1 i C_2 no tenen cap component comuna, llavors $G \neq 0$ pel Teorema A.2. A més, $G(x_0, x_1) = 0$ si, i només si, C_1 i C_2 tenen un punt d'intersecció a L_x. Per a cada x només hi ha un nombre finit de punts d'intersecció, perquè en cas contrari L_x seria una component comuna de C_1 i C_2. Per tant, $C_1 \cap C_2$ és finit.

Anem a comptar el nombre de punts d'intersecció. Com que hi ha un nombre finit de punts d'intersecció, hi ha un nombre finit de rectes que els connecta. Escollint les coordenades de manera que el punt q no estigui contingut en cap d'aquestes rectes podem obtenir que hi ha com a molt un punt d'intersecció per a cada recta L_x. En altres paraules, en total hi ha com a molt tants punts d'intersecció com zeros té la resultant G. Per tant, obtenim el següent teorema.

Teorema 1.13 (Teorema dèbil de Bézout)**.** *Si $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ són dues corbes algebraiques sense cap component comuna, llavors el nombre total de punts d'intersecció entre C_1 i C_2 satisfà la desigualtat*

$$\#(C_1 \cap C_2) \leq \deg C_1 \cdot \deg C_2$$

Per assolir la igualtat, necessitem comptar els punts d'intersecció amb la seva multiplicitat, que la podem definir de la següent manera.

Definició 1.14. *Siguin $C_1 = V(F_1), C_2 = V(F_2) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ corbes algebraiques sense cap component comuna i tal que satisfan la següent propietat: no passen pel punt $q = (0 : 0 : 1)$ i tota recta que passa per q conté com a molt un punt d'intersecció entre C_1 i C_2. Sigui $G \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ la resultant de F_1 i F_2. Si*

$$p = (p_0 : p_1 : p_2) \in C_1 \cap C_2 \qquad i \qquad p' = (p_0 : p_1),$$

llavors, definim la ***multiplicitat d'intersecció*** *de C_1 i C_2 en el punt p com*

$$\text{mult}_p(C_1 \cap C_2) := \text{ord}_{p'}(G),$$

és a dir, l'ordre del zero de G al punt p'.

Aquesta definició no serà útil per calcular la multiplicitat d'intersecció de dues corbes a la pràctica, doncs donades unes coordenades no podem saber si hi ha dos punts d'intersecció alineats en una recta que passi pel punt $q = (0 : 0 : 1)$. Per això necessitem enunciar algunes propietats de la multiplicitat d'intersecció, que podem trobar en [Ful69]. Ho enunciarem més endavant en la proposició 1.27, doncs necessitem algunes definicions més.

Finalment, combinant la definició de la multiplicitat d'intersecció que hem donat i el teorema 1.13 obtenim el Teorema de Bézout.

Teorema 1.15 (Teorema de Bézout)**.** *Per corbes algebraiques $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ que no tenen cap component comuna,*

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} \text{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \deg C_1 \cdot \deg C_2$$

1.2 Tangents i singularitats

Hem vist com el Teorema de Bézout té implicacions locals i globals, doncs la multiplicitat d'intersecció està determinada pel comportament local de la corba, però s'ha de tenir en compte tots els punts d'intersecció de la corba. En aquest apartat ens centrarem més en detall en les propietats locals d'una corba algebraica.

Per això, ens hem de situar en un obert $U \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ del pla projectiu, que podem dotar d'una estructura de pla afí i denotarem per $\mathbb{C}^2$. Anem-hi a definir una corba afí.

Definició 1.16. *Una* ***corba afí*** *és un subconjunt $C \subset \mathbb{C}^2$ tal que existeix un polinomi $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ amb $\deg f \geq 1$ que satisfà*

$$C = V(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}.$$

Notem que tota corba algebraica $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ està associada a única corba afí donada pel polinomi $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$. D'aquesta manera, podem dotar una corba afí de les propietats que hem definit per a una corba algebraica.

Definició 1.17. *Sigui $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí definida per un polinomi reduït $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Diem que C és* ***regular*** *al punt $p \in C$ si*

$$\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(p), \frac{\partial f}{\partial X_2}(p) \right) \neq (0, 0).$$

Si un punt no és regular direm que és ***singular****. Denotem per* Sing$C$ *el conjunt de punts singulars d'una corba. Diem que la corba C és regular si* Sing$S = \emptyset$*. Si C és regular al punt p, definim la* ***tangent*** *de C al punt p com*

$$T_pC = \left\{ (X_1, X_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \cdot X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}(p) \cdot X_2 = c \right\},$$

on $c \in \mathbb{C}$ és tal que $p \in T_pC$.

Veiem, en primer lloc, una propietat sobre el nombre de punts singulars d'una corba.

Proposició 1.18. *Sigui $C \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí. Llavors* Sing$C$ *és un conjunt finit.*

Demostració. Sigui $C = V(f)$, on $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és un polinomi reduït, i sigui $C_i = V(\partial f / \partial X_i)$. Llavors tenim que

$$\text{Sing}C = C \cap C_1 \cap C_2.$$

Assumim que $\deg C \geq 2$, doncs una recta no té punts singulars. Per tant, per algun i tindrem que $\deg \partial f / \partial X_i \geq 1$; podem suposar que $i = 1$ sense perdre generalitat. Llavors, C_1 és una corba algebraica i Sing$C \subset C \cap C_1$. Així doncs, és suficient provar que $C \cap C_1$ és finit i això ho podem veure amb el Teorema de Bézout (1.15).

Només queda provar que C i C_1 no tenen cap component comuna. Suposem que f i $\partial f / \partial X_1$ tenen un factor irreductible comú g. Llavors tindrem

$$f = g \cdot h \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial X_1} = g \cdot h' = h \cdot \frac{\partial g}{\partial X_1} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial X_1}.$$

Per tant, g també és un divisor de $H \cdot \partial g / \partial X_1$. Si $\partial g / \partial X_1 \neq 0$, llavors g també divideix h, ja que no pot dividir $\partial g / \partial X_1$ perquè $\deg \partial g / \partial X_1 < \deg g$. Llavors g^2 és un divisor de f, el qual contradiu el fet que f sigui un polinomi reduït. Per tant, $\partial g / \partial X_1 = 0$, és a dir, $g = X_2 - a$, amb $a \in \mathbb{C}$. Però podem escollir les coordenades de manera que la corba C no conté cap recta paral·lela als eixos de coordenades. ∎

Anem ara a caracteritzar les singularitats d'una corba.

Definició 1.19. *Sigui $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí i sigui $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ el polinomi de la corba. Sigui $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ un punt. Considerem el desenvolupament de Taylor del polinomi f entorn el punt p*

$$f = \sum_k F_k, \quad \text{on } F_k = \sum_{\mu+\nu=k} a_{\mu\nu}(X_1 - p_1)^\mu (X_2 - p_2)^\nu \ \text{ i } \ a_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial X_1^\mu X_2^\nu}(p).$$

Si prenem $p = (0,0)$, llavors el desenvolupament de Taylor del polinomi f entorn el punt p coincideix amb la seva ***descomposició en formes***

$$f = \sum_{k=1}^{n} F_k,$$

*on $F_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és polinomi homogeni de grau k que correspon als monomis de grau k del polinomi f. Definim l'****ordre del polinomi*** *f al punt p com*

$$\mathrm{ord}_p(f) := \min\{k \mid F_k \neq 0\}.$$

Si f és un polinomi reduït de la corba $C \subset \mathbb{C}^2$, llavors la ***ordre de la corba*** *C al punt p és*

$$\mathrm{ord}_p(C) := \mathrm{ord}_p(f).$$

Observació 1.20. Podem veure fàcilment les següents propietats:

a) $0 \leq \mathrm{ord}_p(C) \leq \deg C$;

b) $p \in C \iff \mathrm{ord}_p(C) > 0$;

c) C és regular en $p \iff \mathrm{ord}_p(C) = 1$;

d) C és singular en $p \iff \mathrm{ord}_p(C) > 1$.

El cas extrem $\mathrm{ord}_p(C) = \deg C = n$ equival a tenir $f = F_n$, en tal cas la corba C consisteix en n rectes que passen pel punt p.

Podem esperar que la multiplicitat d'intersecció entre dues corbes en un punt dependrà de l'ordre de les corbes al punt d'intersecció. Anem a estudiar, en primer lloc, la intersecció d'una corba i una recta.

Sigui $C = V(f)$ una corba afí, sigui $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ un polinomi reduït de la corba i considerem la seva descomposició en formes

$$f = \sum_{k=m}^{n} F_k,$$

on $m = \mathrm{ord}_p(C)$ i $n = \deg f$. Si considerem una recta qualsevol $L = V(aX_1 - bX_2)$, que podem parametritzar segons $\varphi(T) = (bT, aT)$, llavors els punts d'intersecció entre la corba C i la recta L corresponen als zeros de la funció

$$g(T) = f(\varphi(T)) = \sum_{k=m}^{n} F_k(b,a)T^k.$$

D'altra banda, com hem vist, la multiplicitat d'intersecció es defineix com

$$\mathrm{mult}_p(C \cap L) = \mathrm{ord}_p(g).$$

Notem doncs que la multiplicitat d'intersecció entre la recta i la corba és més gran que m si, i només si, $F_m(b,a) = 0$. A partir de Lema 1.11 podem escriure la forma F_m, que és un polinomi homogeni de grau m, segons

$$F_m = \prod_{i=1}^{m} (a_i X_1 - b_i X_2).$$

Amb aquest resultat podem definir el con tangent d'una corba en un punt.

Definició 1.21. *Sigui $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí tal que f és un polinomi reduït, sigui $p \in C$ un punt i considerem la descomposició en formes*

$$f = F_m + \cdots + F_n,$$

de manera que $m = \mathrm{ord}_p C$. Definim el ***con tangent*** *de la corba C al punt p com la corba*

$$TC_pC := V(F_m).$$

Notem que, en la notació anterior, el con tangent TC_pC està format per la unió de les m rectes $L_i = V(a_iX_1 - b_iX_2)$. A la Figura 2 podem veure un exemple del con tangent d'una corba en un punt singular.

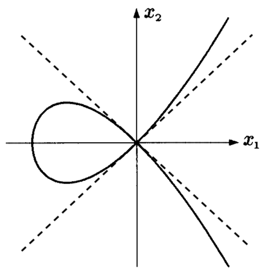

Figura 2: Con tangent TC_pC de la cúbica nodal al punt doble $p = (1 : 0 : 0)$.

Amb tot això, tenim el següent resultat sobre el con tangent.

Proposició 1.22. *Sigui $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí, sigui $L \subset \mathbb{C}^2$ una recta, sigui $p \in C \cap L$ un punt. Llavors*

$$\mathrm{mult}_p(C \cap L) \geq \mathrm{ord}_p(C),$$

i TC_pC és la unió de les rectes L tals que $\mathrm{mult}_p(C \cap L) > \mathrm{ord}_p(C)$.

Anem a generalitzar la definició de recta tangent a una corba en un punt singular.

Definició 1.23. *Sigui $C \subset \mathbb{C}^2$ una corba afí, sigui $L \subset \mathbb{C}^2$ una recta i sigui $p \in C \cap L$ un punt. La recta L s'anomena* ***tangent*** *de C al punt p si*

$$\mathrm{mult}_p(C \cap L) \geq 2.$$

*El conjunt de rectes tangents de C al punt p s'anomena l'**espai tangent** $\hat{T}_pC$ de C en p.*

Notem que si C és regular en el punt p, només hi ha una recta tangent. Llavors el con tangent TC_pC de la corba i l'espai tangent $\hat{T}_pC$ coincideixen i consisteixen en la recta tangent T_pC, de manera que aquesta definició és compatible amb la Definició 1.17.

Per acabar, caracteritzem les rectes tangents en un punt regular de la corba.

Definició 1.24. *Si T és la recta tangent de la corba afí C en un punt regular p de la corba, llavors T s'anomena*

una ***tangent simple****, si $\mathrm{mult}_p(C \cap L) = 2$;*

una ***tangent d'inflexió****, si $\mathrm{mult}_p(C \cap L) \geq 3$.*

En el cas d'una tangent d'inflexió, el punt p s'anomena ***punt d'inflexió****. Un punt d'inflexió s'anomena* ***simple*** *si* $\text{mult}_p(C \cap L) = 3$*. Així mateix, una recta s'anomena* ***bitangent*** *si és tangent a una corba en dos o més punts regulars.*

Situem-nos de nou al pla projectiu $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Podem observar-hi totes les propietats locals que hem enunciat gràcies a la fórmula d'Euler.

Lema 1.25 (Fórmula d'Euler)**.** *Sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ un polinomi homogeni tal que $\deg F = d$, llavors*

$$\sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial X_n} = d \cdot F.$$

Demostració. Com que el polinomi F és homogeni, se satisfà que $F(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \ldots, X_n)$. Si derivem la igualtat respecte λ, obtenim

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial X_n}(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) \;=\; d \cdot \lambda^{d-1} \cdot F(X_0, \ldots, X_n),$$

i considerant $\lambda = 1$, obtenim el resultat que buscàvem. ∎

Proposició 1.26. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica tal que $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ n'és un polinomi reduït i sigui $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ un punt. Llavors*

a) *C és regular al punt p si, i només si,*

$$\nabla F(p) := \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}(p), \frac{\partial F}{\partial X_1}(p), \frac{\partial F}{\partial X_2(p)} \right) \neq (0, 0, 0);$$

b) *si C és regular al punt p, llavors la tangent projectiva T_pC al punt p ve donada per l'equació lineal*

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(p) + X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1}(p) + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}(p) = 0.$$

Demostració. Per provar (a), prenem $p = (p_0 : p_1 : p_2)$, podem assumir sense pèrdua de generalitat que $p_0 \neq 0$. La part afí de la corba C ve descrita pel polinomi $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$ i tenim, per $i = 1, 2$, que

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(1, X_1, X_2).$$

Per tant, $\nabla f(p) \neq 0$ implica $\nabla F(p) \neq 0$. Per contra, si $\nabla f(p) = 0$, per la fórmula d'Euler obtenim que

$$p_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(p) = nF(p) = 0,$$

per tant, $\nabla F(p) = 0$.

Per provar (b), notem que la tangent projectiva té el mateix pendent que la tangent afí i passa pel punt p, doncs utilitzant la fórmula d'Euler veiem que

$$p_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(p) + p_1 \frac{\partial F}{\partial X_1}(p) + p_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}(p) = n \cdot F(p) = 0.$$

∎

Finalment, podem enunciar les propietats de la multiplicitat d'intersecció entre dues corbes algebraiques. Se'n pot trobar la demostració a [Ful69].

Proposició 1.27. *Siguin $C_1 = V(F_1)$ i $C_2 = V(F_2)$ dues corbes algebraiques i sigui $p \in C_1 \cap C_2$ un punt d'intersecció entre les dues corbes. Llavors, se satisfan les següents propietats:*

*Direm que les corbes C_1 i C_2 es tallen en **sentit estricte** al punt p si C_1 i C_2 no tenen cap component comuna que passi per p.*

A) $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2)$ *és un enter no negatiu si C_1 i C_2 es tallen en sentit estricte en p i* $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \infty$ *si C_1 i C_2 no es tallen en sentit estricte en p.*

B) $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = 0$ *si, i només si, $p \notin C_1 \cap C_2$, i* $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2)$ *només depèn de les components de C_1 i C_2 que passen per p.*

C) *Si T és una transformació lineal de coordenades i denotem $V(T(F_i)) = C_i^T$, llavors*

$$\mathrm{mult}_p(C_1^T \cap C_2^T) = \mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2).$$

D) $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \mathrm{mult}_p(C_2 \cap C_1)$.

*Direm que les corbes C_1 i C_2 es tallen **transversalment** si p és un punt regular de C_1 i C_2 i la recta tangent de C_1 en p és diferent a la recta tangent de C_2 en p. Tindrem que $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = 1$ quan C_1 i C_2 es tallin transversalment en p. De forma més general, també tenim la següent propietat:*

E) $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) \geq \mathrm{ord}_p(C_1)\, \mathrm{ord}_p(C_2)$ *i la igualtat s'assoleix si C_1 i C_2 no tenen rectes tangents comunes en p.*

F) *Si $C_1 = \cup_i C_{1,i}^{r_i}$ i $C_2 = \cup_j C_{2,j}^{s_j}$, llavors* $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \sum_{i,j} r_i s_j \mathrm{mult}_p(C_{1,i} \cap C_{2,j})$.

G) $\mathrm{mult}_p(V(F_1) \cap V(F_2)) = \mathrm{mult}_p(V(F_1) \cap V(F_2 + AF_1))$, *per qualsevol polinomi homogeni $A \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, és a dir,* $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2)$ *només depèn de l'ideal (F_1, F_2).*

Així mateix, de les anteriors propietats es dedueix el següent:

Situem-nos en un obert afí $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ del pla projectiu. Les corbes afí C_1, C_2 venen definides pels polinomis $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, respectivament. Sigui p un punt regular de C_1. Pel Teorema de la Funció Implícita existeixen dos oberts $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ i una funció $g : V_1 \to V_2$ tals que $C_1 \cap (V_1 \times V_2) = \{(X_1, g(X_1))\}$. Amb tot això:

H) *Si p és un punt regular de C_1, llavors* $\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ord}_p f_2(X_1, g(X_1))$.

1.3 Corba Polar

En aquest apartat estudiarem el nombre de tangents d'una corba que passen per un punt fixat fora de la corba. Per això, utilitzarem la corba polar.

Definició 1.28. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica i sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomi reduït de la corba tal que $\deg F \geq 2$. Considerem un punt arbitrari $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ i considerem el polinomi*

$$D_q F := \sum_{j=0}^{2} q_j \frac{\partial F}{\partial X_j} = q_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + q_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}.$$

*Si $\deg D_q F \geq 1$, llavors $P_q C := V(D_q F)$ és la **corba polar** de C respecte el punt q.*

Notem que si $p \in C$ és un punt regular de la corba tal que $p \in P_qC$, llavors $q \in T_pC$. Podem veure un exemple de la corba polar d'una cònica en la Figura 3, que en aquest cas és una recta.

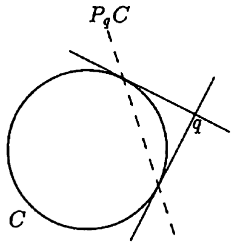

Figura 3: Corba polar P_qC d'una circumferència.

Proposició 1.29. *Sota les condicions de la Definició 1.28, amb* $n = \deg F$, *tenim les següents propietats*

a) *La corba polar* P_qC *és independent de la tria de coordenades;*

b) $D_qF = 0$ *si, i només si,* C *consisteix en* n *rectes que passen pel punt* q*;*

c) $\deg D_qF = n - 1$ *sempre que* $D_qF \neq 0$*;*

d) C *i* P_qC *tenen una component comuna si, i només si,* C *conté una recta que passa pel punt* q*;*

e) *si* $p \in C$ *és singular i* $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *és un punt arbitrari, llavors* $p \in P_qC$.

Demostració. Per provar (a), considerem una transformació lineal de coordenades qualsevol $Y_i = \sum_{j=0}^{2} a_i^j X_j$, on $a_i^j \in \mathbb{C}$. En aquest nou sistema de referència tindrem que

$$q = (q_0' : q_1' : q_2') = \left(\sum_{j=0}^{2} a_0^j q_j : \sum_{j=0}^{2} a_1^j q_j : \sum_{j=0}^{2} a_2^j q_j \right).$$

Per veure que la corba polar és independent de l'elecció del sistema de coordenades hem de veure que

$$\sum_{j=0}^{2} q_j \frac{\partial F}{\partial X_j} = \sum_{j=0}^{2} q_j' \frac{\partial F}{\partial Y_j}.$$

Anem a veure-ho

$$\sum_{j=0}^{2} q_j \frac{\partial F}{\partial X_j} = \sum_{j=0}^{2} q_j \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial Y_i} a_i^j \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial Y_i} \left(\sum_{j=0}^{2} a_i^j q_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial Y_i} q_i' = \sum_{j=0}^{2} q_j' \frac{\partial F}{\partial Y_j}.$$

Per provar (b) prenem $q = (1 : 0 : 0)$. Llavors $D_qF = 0$ és equivalent a que F sigui independent de X_0, és a dir, el polinomi $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$ és homogeni de grau n. Això és equivalent a que $f = F_n$, que ja hem vist que correspon a que C consisteixi en n rectes que passen pel punt p.

Per provar (d) prenem també $q = (1 : 0 : 0)$. Llavors tindrem que $D_q F = \partial F / \partial X_0$. Suposem que C i $P_q C$ tenen una component comuna, és a dir, que F i $\partial F / \partial X_0$ tenen un factor comú irreductible G. Llavors

$$F = G \cdot H \quad i \quad \frac{\partial F}{\partial X_0} = G \cdot H' = H \cdot \frac{\partial G}{\partial X_0} + G \cdot \frac{\partial H}{\partial X_0}.$$

Per tant, G també és un divisor de $H \cdot \partial G / \partial X_0$. Si $\partial G / \partial X_0 \neq 0$, llavors G també divideix H, ja que no pot dividir $\partial G / \partial X_0$ perquè $\deg \partial G / \partial X_0 < \deg G$. Llavors G^2 és un divisor de F, el qual contradiu el fet que F sigui un polinomi reduït. Per tant, $\partial G / \partial X_0 = 0$, és a dir, $G \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Pel Lema 1.11 G té una descomposició en factors lineals, però com G és irreductible tenim que $G = aX_1 + bX_2$, amb $a, b \in \mathbb{C}$, que és una recta a $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Per tant, C conté una recta que, efectivament, passa pel punt q.

Per altra banda, si C conté una recta $L = V(G)$ que passi pel punt $q = (1 : 0 : 0)$, llavors

$$F = G \cdot H \quad i \quad G = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

on $a_i \in \mathbb{C}$. Com que $q \in L$, llavors $G(q) = a_0 = 0$, per tant $G = a_1 X_1 + a_2 X_2$. Llavors, la corba polar $P_q C$ vindrà donada pel polinomi

$$D_q F = \sum_{j=0}^{2} q_j \frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{\partial F}{\partial X_0} = G \frac{\partial H}{\partial X_0} + H \frac{\partial G}{\partial X_0} = G \frac{\partial H}{\partial X_0}.$$

On hem usat, en la darrera igualtat, que el polinomi G no depèn de X_0. Per tant, observem que G és un divisor de $D_q F$, és a dir, L és una component comuna de C i $P_q C$.

Les propietats (c) i (e) es dedueixen directament de les definicions. ■

Podem resumir totes les propietats que hem vist de la corba polar en el següent teorema.

Teorema 1.30. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica de grau $n \geq 2$ que no conté cap recta i sigui $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ un punt arbitrari. Llavors la corba polar $P_q C$ és una corba algebraica de grau $\leq n - 1$ que no té cap component comuna amb C. La intersecció $C \cap P_q C$ consisteix en els punts de C amb tangents passant pel punt q i els punts singulars de C.*

Pel Teorema de Bézout (1.15), hi ha com a molt $n(n-1)$ tangents de C que passen pel punt q, però aquest nombre es redueix si existeixen bitangents, punts d'inflexió i singularitats. Per aconseguir un recompte més precís dels punts d'intersecció, veiem la següent proposició.

Proposició 1.31. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica que conté una tangent simple T al punt p, és a dir, $\operatorname{mult}_p(T \cap C) = 2$. Si $q \in T$ és un punt diferent de p, llavors la polar $P_q C$ interseca C transversalment, és a dir,*

$$\operatorname{mult}_p(C \cap P_q C) = 1.$$

En particular, la corba polar és regular en el punt p.

Demostració. Prenem $p = (1 : 0 : 0)$ i $T = V(X_2)$. Prenem també un punt qualsevol $q = (q_0 : q_1 : 0) \in T$, amb $q_1 \neq 0$. Hem de veure que la recta tangent de C en p és diferent de la recta tangent de $P_q C$ en p i que p és un punt regular de la corba $P_q C$.

Com que $p \in C$ i $T = V(X_2)$ és una tangent de C al punt p, tenim que la restricció afí de les corbes C i P_qC ve donada pels polinomis

$$\begin{aligned} f &= X_2 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n, \\ d_qf &= \left((n-1)q_0X_2 + q_1\frac{\partial F_2}{\partial X_1}\right) + \cdots + \left(q_0F_{n-1} + q_1\frac{\partial F_n}{\partial X_1}\right). \end{aligned}$$

on $F_i \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg F_i = i$. Llavors, podem escriure el terme F_2 com

$$F_2 = a_0X_1^2 + a_1X_1X_2 + a_2X_2^2,$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$. Com que $T = V(X_2)$ és una tangent simple de la corba C, tenim que $X_2 \nmid F_2$, el qual implica que $a_0 \neq 0$. Per veure que p és un punt regular de P_qC notem que

$$\frac{\partial(d_qf)}{\partial X_1}(p) = q_1\frac{\partial^2 F_2}{\partial X_1^2} = 2q_1a_0 \neq 0.$$

Finament, veiem que la tangent $T = V(X_2)$ de C en p és diferent que la tangent $T' = V(G)$ de P_qC, amb $G = 2q_1a_0X_1 + (n-1)q_0X_2$, doncs $X_2 \nmid G$. ∎

Amb aquests resultats obtenim la següent propietat.

Corol·lari 1.32. *Sigui C una corba algebraica amb $\deg C = n$ i $q \notin C$, llavors casi totes les línies que passen per q tenen exactament n punts d'intersecció simples amb C.*

Demostració. La corba polar P_qC només té un nombre finit de punts d'intersecció amb la corba C. Cada recta que passa per q i no passa per cap punt de $C \cap P_qC$ compleix la propietat de l'enunciat. ∎

1.4 Corba Hessiana

En aquest apartat volem estudiar el nombre de punts d'inflexió d'una corba algebraica. Per això, necessitarem la corba Hessiana.

Definició 1.33. *Sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomi homogeni tal que $\deg F \geq 2$. Definim la **matriu Hessiana** de F com la matriu simètrica*

$$H_F := \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial Xj}\right)_{0 \leq i,j, \leq 2} \in M_{3x3}(\mathbb{C})$$

*Si F és un polinomi reduït de la corba $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ i $\deg(\det H_F) \geq 1$, llavors definim la **corba Hessiana** de C com la corba $H(C) := V(\det H_F)$.*

En la figura 4 podem veure una representació de la corba Hessiana del folium de Descartes, una corba cúbica que ve definida pel polinomi $F = X_1^3 + X_2^3 - 3X_0X_1X_2$.

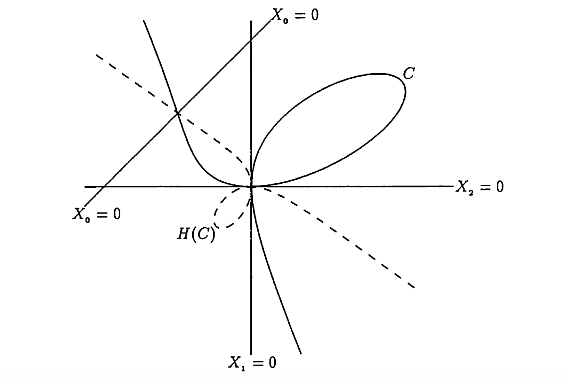

Figura 4: Corba Hessiana $H(C)$ del folium de Descartes.

Per calcular el polinomi de la corba Hessiana serà útil el següent lema.

Lema 1.34. *Sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomi homogeni tal que $\deg F = n$ i sigui $F_i = \partial F/\partial X_i$ i $F_{i,j} = \partial^2 F/\partial X_i \partial X_j$. Llavors*

$$\det H_F = \frac{n-1}{X_0}\begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{n-1}{X_0^2}\begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

Demostració. La primera igualtat l'obtenim multiplicant la primera fila per X_0, sumant-hi la segona i tercera fila multiplicades per X_1 i X_2, respectivament, i aplicant la fórmula d'Euler (1.25). La segona desigualtat l'obtenim amb el mateix procediment aplicat sobre les columnes.

$$\det H_F = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial Xj}\right)_{0 \le i,j, \le 2} = \frac{1}{X_0}\begin{vmatrix} X_0F_{00} & X_0F_{10} & X_0F_{20} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{n-1}{X_0}\begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{n-1}{X_0^2}\begin{vmatrix} X_0F_0 & F_1 & F_2 \\ X_0F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ X_0F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = \frac{n-1}{X_0^2}\begin{vmatrix} nF & F_1 & F_2 \\ (n-1)F_1 & F_{11} & F_{21} \\ (n-1)F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

∎

Proposició 1.35. *Sota les condicions de la Definició 1.33, amb $n = \deg F$, tenim les següents propietats*

a) *La corba Hessiana $H(C)$ és independent de la tria de coordenades;*

b) $\deg(\det H_F) = 3(n-2)$ *sempre que* $\det H_F \neq 0$*;*

c) *si $p \in C$ és singular, llavors $p \in H(C)$.*

Demostració. Per provar (a), considerem una transformació lineal de coordenades qualsevol donada per la matriu $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$. La matriu H_F es transformarà com una forma quadràtica, per tant $\det H_F$ es multiplicarà per $(\det A)^2 \neq 0$, donant lloc a la mateixa corba Hessiana.

La propietat (b) es dedueix de la definició del polinomi $\det H_F$.

Per provar (c), considerem un punt $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in C$ que sigui singular i escollim les coordenades per tal que $p_0 \neq 0$. Com que $F(p) = F_1(p) = F_2(p) = 0$, pel Lema 1.34 deduïm que $\det H_F(p) = 0$. ■

Amb el següent teorema veiem el significat de la corba Hessiana.

Teorema 1.36. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica que no conté cap recta. Llavors*

a) $\det H_F \neq 0$;

b) *un punt regular $p \in C$ és un punt d'inflexió si, i només si, $p \in H(C)$;*

c) *C i $H(C)$ no tenen cap component comuna;*

d) *si $p \in C$ és un punt d'inflexió simple, llavors*

$$\mathrm{mult}_p(C \cap H(C)) = 1.$$

Demostració. Per provar (b), escollim les coordenades per tal que $p = (1 : 0 : 0)$ sigui un punt regular de la corba amb tangent $T = V(X_2)$. Sigui $\deg F = n$. Com que $p \in C$, tenim que la restricció afí de la corba C ve donada pel polinomi

$$f = X_2 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n.$$

on $F_i \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg F_i = i$. Podem escriure el terme F_2 com

$$F_2 = a_0 X_1^2 + a_1 X_1 X_2 + a_2 X_2^2,$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$. Tenim que p és un punt d'inflexió, és a dir, $T = V(X_2)$ és una tangent d'inflexió de C si, i només si, $X_2 \mid F_2$, que és equivalent a $a_0 = 0$. Per tant, hem de veure que $p \in H(C)$ si, i només si, $a_0 = 0$. Amb el Lema 1.34 trobem aquest resultat, doncs

$$\det H_F(p) = (n-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \\ 1 & a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = -2(n-1)^2 a_0.$$

Per provar (a) necessitem provar que existeix un punt regular $q \in C$ que no sigui un punt d'inflexió. Suposem que tots els punts regulars de C són d'inflexió. Seguint la notació de l'apartat anterior, prenem un punt $p \in C$ regular. Tenim que $\partial f / \partial X_2 = a_2 \neq 0$ i $p = (0 : 0)$. Pel Teorema de la Funció Implícita existeixen dos oberts $U, V \subset \mathbb{C}$ i una funció $g : U \to V$ tals que $C \cap (U \times V) = \{(X, g(X))\}$ i $g(0) = 0$. Considerem el desenvolupament de Taylor de la funció g entorn el punt $a \in U$

$$g(X) = g'(a)(X-a) + \frac{g''(a)}{2}(X-a)^2 + \cdots.$$

Com que hem suposat que tots els punts de C són d'inflexió, tenim que $g''(a) = 0$ per tot $a \in U$, per tant $g'(a) = c$, amb $c \in \mathbb{C}$ constant. Així doncs, tenim que g defineix un segment de recta en l'entorn U. Ara bé, si una corba conté un segment d'una recta, conté la recta, el qual contradiu la hipòtesi que C no conté cap recta.

Amb el mateix argument també provem (c), doncs si C i $H(C)$ tenen una component comuna, que suposem irreductible, ha d'estar formada per punts singular, que només n'hi ha un nombre finit, i punts d'inflexió. Prenent l'obert U suficientment petit obtenim que la component comuna en l'obert U és una recta, i per tant tota la component és una recta, que de nou contradiu la hipòtesi que C no conté cap recta.

Per provar (d), escollim les coordenades com en l'apartat (b) i considerem que p és un punt d'inflexió. Per calcular la multiplicitat d'intersecció considerem la restricció de la corba en un obert afí del pla projectiu, que ve descrita pel polinomi

$$f = X_2 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n.$$

Tenint en compte que p és un punt d'inflexió, podem escriure les formes F_2 i F_3 com

$$F_2 = a_4 X_1 X_2 + a_5 X_2^2 \qquad F_3 = a_6 X_1^3 + a_7 X_1^2 X_2 + a_8 X_1 X_2^2 + a_9 X_2^3.$$

A més, tenim que p és punt d'inflexió simple, és a dir, $\operatorname{mult}_p(C \cap T) = 3$. Per tant, com que tenim que $T = V(X_2)$, això implica que $X_2 \nmid F_3$, és a dir, $a_6 \neq 0$. Anem a calcular el terme de menor ordre de $\det H_F$ usant el Lema 1.34

$$\det H_F = (n-1)\begin{vmatrix} nX_2 + O_2 & a_4 X_2 + O_2 & 1 + O_1 \\ (n-1)a_4 X_2 + O_2 & 6a_6 X_1 + 2a_7 X_2 + O_2 & a_4 + O_1 \\ (n-1) + O_1 & a_4 + O_1 & 2a_5 + O_1 \end{vmatrix} =$$
$$- 6(n-1)a_6 X_1 + ((2n-3)a_4^2 - 2(n-1)a_7)X_2 + O_2.$$

Com que $a_6 \neq 0$, veiem que $H(C)$ és regular en el punt p i, a més, la recta tangent de $H(C)$ al punt p és diferent que $T = V(X_2)$. Per tant, obtenim que $\operatorname{mult}_p(C \cap H(C)) = 1$, com volíem veure. ∎

Amb els resultats anteriors i utilitzant el Teorema de Bézout (1.15) entre les corbes C i $H(C)$, podem acotar el nombre de punts d'inflexió d'una corba.

Corol·lari 1.37. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica tal que $\deg C \geq 2$ i no conté cap recta. La corba té com a molt $3n(n-2)$ punt d'inflexió.*

Tanmateix, el nombre màxim de punts d'inflexió només es podrà assolir si no hi ha singularitats i tots els punts d'inflexió són simples.

Finalment, utilitzant els arguments que hem vist, podem veure en quines condicions la corba Hessiana és degenerada.

Proposició 1.38. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. Llavors, $C \subset H(C)$ si, i només si, C és la unió de diverses rectes. Més en concret:*

a) *Si C conté una recta L, llavors $L \subset H(C)$;*

b) *sigui $C' \subset C$ una component irreductible tal que $C' \subset H(C)$. Llavors C' és una recta.*

Demostració. Per provar (a), considerem $C = V(F)$, $L = V(X_0)$, i $F = X_0 G$. Escrivim $F_i = X_0 G_i$ i $F_{i,j} = X_0 G_{i,j}$, per $i, j = 1, 2$. Pel Lema 1.34

$$\det H_F = \frac{n-1}{X_0^2}\begin{vmatrix} nX_0 G & X_0 G_1 & X_0 G_2 \\ (n-1)X_0 G_1 & X_0 G_{11} & X_0 G_{21} \\ (n-1)X_0 G_2 & X_0 G_{12} & X_0 G_{22} \end{vmatrix} = X_0 \begin{vmatrix} n(n-1)G & G_1 & G_2 \\ (n-1)^2 G_1 & G_{11} & G_{21} \\ (n-1)^2 G_2 & G_{12} & G_{22} \end{vmatrix},$$

per tant, $L \subset H(C)$.

Per provar (b), considerem una components $C' \subset C$ que no és una recta. Si escollim un punt p en què C i C' són regulars, procedint com en la demostració de l'apartat (c) del Teorema 1.36, veiem que C i $H(C)$ no poden tenir en p una component comuna. ∎

1.5 Corba dual i fórmules de Plücker

Hem vist que les corbes algebraiques tenen diferents propietats invariants, com pot ser el grau de la corba i el nombre de components, singularitats o punts d'inflexió. També hem vist que aquests nombres generalment no són independents entre ells. En aquest apartat veurem que la relació exacta entre els diferents invariants vindrà descrita per les fórmules de Plücker. Finalment, aplicant aquest resultat a una corba quàrtica regular obtindrem el Resultat 0.1.

Abans, però, necessitem dotar l'espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ d'una estructura d'espai topològic i ho fem amb la topologia de Zariski.

Definició 1.39. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu. Definim la* ***topologia de Zariski*** *com la topologia més gruixuda per la qual per cada polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ el conjunt de punts on s'anul·la és un conjunt tancat.*

Més endavant considerarem algunes propietats que se satisfaran *en general* en el context d'un espai amb la topologia de Zariski. Podem formalitzar aquesta noció de la següent manera.

Definició 1.40. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu dotat de la topologia de Zariski. Diem que una propietat és* ***general****, o se satisfà en general, si se satisfà en un subconjunt dens $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.*

A partir d'ara totes les nocions topològiques se suposaran sobre la topologia de Zariski. Podem observar que tenim la següent propietat sobre les corbes algebraiques.

Proposició 1.41. *Sigui $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ el pla projectiu dotat de la topologia de Zariski. Tota corba algebraica $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ és un conjunt tancat.*

Per provar les fórmules de Plücker hem d'introduir la corba dual i per això ens hem de situar al pla projectiu dual $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$. Sabem que els punts de $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ estan en bijecció amb les rectes de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ associant a cada punt $y = (y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ la recta

$$V(y_0X_0 + y_1X_1 + y_2X_2) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

Anem a definir la corba dual en l'espai projectiu dual $\mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$.

Definició 1.42. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. Considerem el conjunt*

$$C^*_{reg} = \{L \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}) \mid L \text{ és tangent a } C \text{ en algun punt } p \in C \text{ regular } \}.$$

Llavors definim la ***corba dual*** *de C com*

$$C^* := \overline{C^*_{reg}},$$

és a dir, la clausura del conjunt C^*_{reg} en la topologia de Zariski.

Anem a trobar el polinomi que defineix la corba dual C^*. Considerem $C = V(F)$ i sigui $L = V(y_0X_0 + y_1X_1 + y_2X_2)$ una recta qualsevol, que està associada al punt $y = (y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$. Podem suposar que $y_2 \neq 0$. Llavors, si $\deg F = n$, podem definir el polinomi

$$G(X_0, X_1) = y_2^n F\left(X_0, X_1, -\frac{1}{y_2}(y_0X_0 + y_1X_1)\right) = b_0X_1^n + b_1X_1^{n-1}X_0 + \cdots + b_nX_0^n,$$

on $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2]$ són polinomis homogenis de grau n. Els zeros del polinomi G corresponen als punts d'intersecció de C i L. Situem-nos ara en un obert afí del pla projectiu i considerem $D \in \mathbb{C}[Y_0, Y_1, Y_2]$ el discriminant de $g(X_1) = G(1, X_1)$, que correspon a la resultant dels polinomis g i $\partial g / \partial X_1$. Notem que, pel Teorema A.5, D és un polinomi homogeni de grau $2n^2 - 2n$ i, pel Corol·lari 1.32, $D \neq 0$. Per tant, podem considerar la corba algebraica

$$C' := V(D) \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}).$$

Notem que si la recta L, associada al punt $y \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$, és una tangent de C en un punt regular, llavors existeix com a mínim un punt $p \in L$ tal que $\text{mult}_p(C \cap L) \geq 2$, per tant G té un zero múltiple. Si $p = (0 : 1)$, llavors $b_0(y) = 0$; en cas contrari, g té un zero múltiple. En qualsevol cas, tenim que $D(y) = 0$, per tant $y \in C'$. Això ens demostra que $C^*_{reg} \subset C'$.

Ara bé, degut a la construcció que hem dut a terme de la corba C', també inclou components addicionals que no són de C^*. Això es degut a les dues situacions següents.

Considerem un punt $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ singular de la corba C, que podem prendre amb $x_0 = 1$. Si el punt $y \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ està associat a una recta L que passa per x, llavors $G(1, X_1)$ té un zero múltiple a $X_1 = x_1$, doncs $\text{mult}_x(C \cap L) \geq 2$, per tant $D(y) = 0$. Així doncs, la recta

$$L^{*\prime} := V(x_0 Y_0 + x_1 Y_1 + x_2 Y_2) \subset C'$$

també és un factor irreductible de la corba C'.

D'altra banda, considerem els punts de la forma $x = (0 : x_1 : x_2) \in C \cap V(X_0)$. Podem assumir que $(0 : 0 : 1) \notin C$, de manera que $x_1 \neq 0$. Si el punt $y \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ està associat a una recta que passa per x, llavors ha de ser de la forma $y = (y_0 : -x_2 : x_1)$. Com que $G(0, x_1) = b_0(y) x_1^n = 0$, tenim que $b_0(y) = 0$, que suposa que $D(y) = 0$. Ara bé, com que això es dona per qualsevol punt de la forma $y = (y_0 : -x_2 : x_1)$, tenim que la recta

$$L^{*\prime\prime} := V(x_1 Y_1 + x_2 Y_2) \subset C'$$

també és un factor irreductible de la corba C'.

En resum, hem vist que la corba C' conté una col·lecció de rectes del tipus $L^{*\prime}$ i $L^{*\prime\prime}$ que podem associar als punts singulars de la corba C i als punts $p \in C \cap V(X_0)$, respectivament. Notem que només podem tenir un nombre finit d'aquests punts.

Considerem ara el conjunt

$$C^*_{reg,af} = C^*_{reg} \setminus \{L \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}) \mid L \textit{ és tangent a } C \textit{ en algun punt } p \in C \cap V(X_0)\}.$$

Com que pel Teorema de Bézout (1.15) tenim que el conjunt $C \cap V(X_0)$ està format per com a molt n punts, tenim que $C^*_{reg,af}$ i C^*_{reg} es diferencien com a molt per n punts. Així doncs,

$$\overline{C^*_{reg,af}} = \overline{C^*_{reg}} = C^*.$$

Ara bé, per definició del conjunt $C^*_{reg,af}$ tenim que

$$C' \setminus (L_1^* \cup \cdots \cup L_k^*) = C^*_{reg,af},$$

per tant, la clausura del conjunt $C' \setminus (L_1^* \cup \cdots \cup L_k^*)$ és la corba dual C^*. En altres paraules, traient un nombre finit de factors lineals del polinomi D obtenim el polinomi de la corba dual C^* que buscàvem.

En la Figura 5 podem observar el comportament de la corba dual d'una nodal cúbica, que és una cardioide.

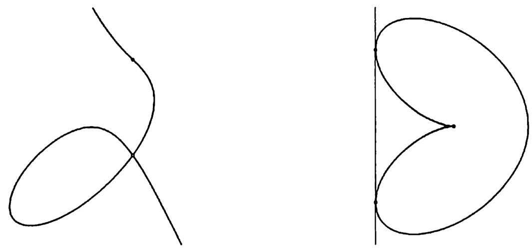

Figura 5: Cúbica nodal i la seva dual cardioide.

Amb el següent teorema anem a veure que la corba dual està ben definida.

Teorema 1.43. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica que no conté cap recta. Llavors*

a) *$C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ és una corba algebraica;*

b) *si C és irreductible, llavors C^* és irreductible i $\deg C^* \geq 2$;*

c) *$C^{**} = C$.*

Hem dividit la demostració d'aquest teorema en tres apartats diferents.

Demostració. (apartat (a) del Teorema 1.43). Hem vist que el conjunt C^* ve definit pels zeros d'un polinomi, per tant és una corba algebraica. ∎

Demostració. (apartat (b) del Teorema 1.43) Per veure aquesta demostració necessiteu un resultat previ. En primer lloc, donem la definició de superfície de Riemann.

Definició 1.44. *Una **superfície de Riemann** és un espai topològic de Hausdorff connex S conjuntament amb un atles complex*

$$\{\psi_i : V_i \longrightarrow U_i\}_{i \in I},$$

és a dir, una col·lecció de subconjunts oberts $V_i \subset \mathbb{C}$ i $U_i \subset S$ tals que $\{U_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de S, les cartes $\psi_i : V_i \longrightarrow U_i$ són homeomorfismes i, per tot $i, j \in I$, les funcions de transició

$$\psi_{i,j} : V_{ij} = \psi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_{ji} = \psi_j^{-1}(U_i \cap U_j),$$

són biholomorfes.

A continuació anem a enunciar el Teorema de Normalització. La seva demostració s'escapa de l'abast d'aquest treball, però que es pot trobar a [Mir95].

Teorema 1.45 (Teorema de Normalització)**.** *Per cada corba algebraica irreductible $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ existeix una superfície de Riemann compacta S i una aplicació holomorfa*

$$\varphi : S \to C$$

tal que és biholomorfa fora de les singularitats de C.

Farem servir $\varphi : S \to C$ per construir una parametrització holomorfa i univaluada en tots els punts

$$\varphi^* : S \to C^*.$$

En primer lloc construïm aquesta parametrització localment. Sigui $o \in S$ un punt fix i sigui t una coordenada, centrada en o, en un entorn obert suficientment petit $U \subset S$. Existeix una aplicació holomorfa, que anomenarem *elevació local*,

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \\ t &\longrightarrow (\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t)) \end{aligned}$$

tal que $\varphi|_U = (\phi_0(t) : \phi_1(t) : \phi_2(t))$. Sigui $\dot{\phi}_i = d\phi_i/dt$ i

$$A = \begin{pmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_0(t) & \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{pmatrix}.$$

L'aplicació φ és una immersió al punt t si, i només si, les files de A són linealment independents. En tal cas, la tangent $T_{\varphi(t)}C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ està generada pels vectors $\phi(t), \dot{\phi}(t) \in \mathbb{C}^3$. L'equació d'aquesta tangent ve donada per

$$a_0(t)X_0 + a_1(t)X_1 + a_2(t)X_2 = 0,$$

on $a_i(t) = (-1)^i \det A_i(t)$ i $A_i(t)$ és la submatriu de A que obtenim en eliminar la columna i-èssima. Per tant, obtenim la parametrització local que buscàvem

$$\varphi^*(t) = (a_0(t) : a_1(t) : a_2(t)) \in \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$$

si φ és una immersió en t. Els menors $a_i(t)$ són holomorfs, per tant l'aplicació

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ t &\longrightarrow (a_0(t), a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

és holomorfa. Veiem amb els següents lemes que podem estendre aquesta aplicació als punts on φ no és una immersió per poder obtenir l'aplicació holomorfa

$$\varphi^* : U \longrightarrow \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}).$$

Lema 1.46. *Sigui* $0 \in U \subset \mathbb{C}$ *i sigui* $\Psi : U \to \mathbb{C}^3$ *una aplicació holomorfa tal que l'únic zero de* Ψ *és* 0. *Llavors l'aplicació*

$$\begin{aligned} \psi : U \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \\ t &\longrightarrow (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) \end{aligned}$$

admet una extensió holomorfa al punt 0.

Demostració. Si $k \geq 1$ és el menor dels ordres dels zeros de Ψ_i a 0, podem escriure

$$\Psi(t) = t^k \Psi'(t), \text{ on } \Psi'(0) \neq (0, 0, 0).$$

Llavors, considerant $\psi(0) := (\Psi_0'(0) : \Psi_1'(0) : \Psi_2'(0))$ obtenim l'extensió desitjada. ∎

Lema 1.47. *Les parametritzacions locals* $\varphi^* : U \to \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ *obtingudes són independents de l'elecció de l'aplicació holomorfa local* ϕ *i de la coordenada local* t.

Demostració. La independència de l'elecció de la coordenada local t és deguda a la compatibilitat de les cartes que formen l'atles complex de la superfície de Riemann S donada pel Teorema 1.45. En [Mir95] es pot veure que canviant l'elevació local ϕ la parametrització és invariant. ∎

Així doncs, tenim una parametrització global, que és una aplicació holomorfa $\varphi^* : S \to \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$. Ara bé, per la definició de corba dual, $\varphi^*(S) = C^*$.

És immediat veure que C^* és irreductible. Suposem que $C^* = C_1 \cup C_2$, amb $C_1 \neq C_2$. Considerem els conjunts $S_i := \varphi^{*-1}(C_i) \subset S$, per $i = 1, 2$. Com que C_i són corbes algebraiques i φ^* és holomorfa, els subconjunts $S_i \neq S$ es poden descriure localment com el conjunt de zeros de funcions holomorfes, que han de ser aïllats. Com que S és compacte i connex, han de ser un conjunt finit. Però això contradiu el fet que $S = S_1 \cup S_2$.

Finalment, si C^* és una línia, llavors un nombre infinit de tangents de C passaria per un punt $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, el qual contradiu el Corol·lari 1.32. ∎

Demostració. (apartat (c) del Teorema 1.43) Volem veure que dualitzant dos cops una corba algebraica recuperem la corba original. Per veure aquest resultat utilitzarem una forma local especial de la parametrització holomorfa exposada en la demostració de l'apartat (b), donada pel següent lema.

Lema 1.48. *Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un entorn obert de l'origen i sigui $\varphi : U \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una aplicació holomorfa tal que $\varphi(U)$ no està contingut en una recta. Llavors existeixen dos nombres $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$, unívocament determinats, tals que, després d'una transformació lineal de coordenades de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, podem escriure $\varphi = (\varphi_0(t) : \varphi_1(t) : \varphi_2(t))$, on*

$$\varphi_0 = 1 \qquad \varphi_1 = t^{1+\alpha_1} + \cdots \qquad \varphi_2 = t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots .$$

Els nombres α_1, α_2 s'anomenen els invariants numèrics locals de la parametrització de φ al punt 0.

Demostració. Sigui $\phi : U \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ una elevació local de φ. Sigui ϕ^k la derivada k-èssima de ϕ respecte t. Com que $\varphi(U)$ no està contingut en una recta, existeixen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\{\phi(0), \phi^{1+\alpha_1}(0), \phi^{2+\alpha_1+\alpha_2}(0)\}$$

és una base de $\mathbb{C}^3$. Escollim els valors α_1, α_2 mínims amb aquesta propietat i adaptem les coordenades per aconseguir el resultat desitjat. En primer lloc, amb un canvi de coordenades podem tenir $\phi(0) = (1, 0, 0)$ i $\phi_0 = 1$. Llavors, per definició de α_1, tenim que

$$(\phi_1(t), \phi_2(t)) = t^{1+\alpha_1}(\phi_1'(t), \phi_2'(t)), \qquad \text{on } (\phi_1'(0), \phi_2'(0)) \neq (0, 0).$$

Podem canviar de nou les coordenades per obtenir $(\phi_1'(0), \phi_2'(0)) = (1, 0)$. Finalment, per definició de α_2, tenim que

$$\phi_2'(t) = t^{1+\alpha_2}\phi_2''(t), \qquad \text{on } \phi_2''(0) \neq 0.$$

de manera que $\phi_2(t) = t^{2+\alpha_1+\alpha_2}\phi_2''(t)$. Amb un darrer canvi de coordenades podem tenir $\phi_2''(0) = 1$. Així doncs, obtenim el resultat que volíem. La seva unicitat es dedueix de la tria minimal dels valors α_1 i α_2. ∎

Sigui $C = \varphi(U)$ un segment de corba definida en un entorn de $p = \varphi(0)$. Podem veure fàcilment les següents igualtats

$$1 + \alpha_1 = \mathrm{ord}_p C \qquad 2 + \alpha_1 + \alpha_2 = \mathrm{mult}_p(C \cap T_p C).$$

En concret, obtenim el següent resultats

$$\begin{aligned} p \text{ és una singularitat de } C &\iff a_1 \neq 0 \\ p \text{ és un punt d'inflexió de } C &\iff a_1 = 0 \text{ i } a_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Amb aquestes coordenades, calculem els menors a_i de l'apartat (b) de la demostració per descriure explícitament el pas d'una corba C a la seva corba dual C^*. Considerem les parametritzacions holomorfes

$$\varphi : S \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \qquad \varphi^* : S \to C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C}).$$

Per $o \in S$ i $o \in U \subset S$, sigui $\varphi|_U = (\phi_0 : \phi_1 : \phi_2)$, amb

$$\begin{array}{lll} \phi_0 = 1 & \phi_1 = t^{1+\alpha_1} + \cdots & \phi_2 = t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots \\ \dot{\phi}_0 = 0 & \dot{\phi}_1 = (1+\alpha_1)t^{\alpha_1} + \cdots & \dot{\phi}_2 = (2+\alpha_1+\alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots \end{array}$$

Si calculem els menors a_i obtenim

$$\begin{aligned} a_0 &= (1+\alpha_2)t^{2+2\alpha_1+\alpha_2} + \cdots \\ a_1 &= -(2+\alpha_1+\alpha_2)t^{1+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots \\ a_2 &= (1+\alpha_1)t^{\alpha_1} + \cdots . \end{aligned}$$

Segons el Lema 1.48, per obtenir una parametrització $\varphi^*|_U$ de l'aplicació $(a_0, a_1, a_2) : U \to \mathbb{C}^3$ tenim que factoritzar la potència de major ordre de t, que és t^{α_1}, i obtenim

$$\begin{aligned} \phi_0^* &= (1+\alpha_2)t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots \\ \phi_1^* &= -(2+\alpha_1+\alpha_2)t^{1+\alpha_2} + \cdots \\ \phi_2^* &= (1+\alpha_1) + \cdots . \end{aligned}$$

Llavors, si a_1^* i a_2^* són els invariants numèrics locals de φ^*, podem veure que $\alpha_1^* = \alpha_2$ i $\alpha_2^* = \alpha_1$.

Finalment, per obtenir φ^{**} i, per tant, C^{**}, hem de diferenciar φ^* i calcular els menors de nou. Obtenim el següent resultat

$$(a_0^* : a_1^* : a_2^*) = c \cdot t^{\alpha_2}(1 + \cdots : t^{1+\alpha_1} + \cdots : t^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots) = c \cdot t^{\alpha_2} \varphi^{**}(t),$$

on $c = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(2+\alpha_1+\alpha_2)$. En particular,

$$\varphi^{**}(o) = (1 : 0 : 0) = \varphi(o),$$

per tant, $C^{**} = C$, ja que $o \in S$ l'hem escollit arbitràriament. ∎

Amb això finalitzem la demostració del Teorema 1.43.

A continuació anem a definir una propietat de les corbes algèbriques que necessitarem en les fórmules de Plücker.

Definició 1.49. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. El màxim nombre de tangents que podem considerar des d'un punt $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ a punts regulars de la corba C es defineix com la* ***classe*** *de C.*

Proposició 1.50. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica irreductible tal que $\deg C \geq 2$, i sigui $C^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ la corba dual. Llavors la classe de la corba C és igual a $\deg C^* = n^*$. El màxim nombre n^* de tangents s'assoleix per pràcticament tots els punts $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.*

Demostració. A cada punt $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ li correspon una recta $q^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$. Per definició de la corba dual, a cada punt de $q^* \cap C^*$ li correspon una recta tangent de C que passa pel punt q. Per la Proposició 1.12, $q^* \cap C^*$ consisteix en n^* punts, comptats amb multiplicitats, i per casi totes les línies q^* tots els punts d'intersecció són simples. ∎

Finalment, les fórmules de Plücker requereixen que es consideri algunes restriccions a les corbes sobre les quals s'apliquen, i això porta a definir les corbes de Plücker. En concret, aquestes corbes només poden tenir singularitats simples. Així doncs, anem a caracteritzar els dos tipus més simples de singularitats que podem trobar en una corba algebraica. Segons la Definició 1.20 un punt $p \in C$ és singular si $\mathrm{ord}_p C > 1$. Per tant, el cas més senzill correspon a $\mathrm{ord}_p C = 2$.

Considerem una corba algebraica $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ tal que $\deg C = n$, $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ n'és un polinomi reduït i sigui $p = (1 : 0 : 0)$ un punt singular tal que $\mathrm{ord}_p C = 2$. Considerem la restricció de la corba en un obert afí del pla projectiu, donada pel polinomi f amb una descomposició en formes

$$f = F_2 + F_3 + \cdots + F_n,$$

on $F_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ són polinomis homogenis de grau k. Ens centrarem en el con tangent de la corba, donat per la forma F_2 i format per dues rectes.

Definició 1.51. *Sigui $C = V(F) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica i sigui $p \in C$ un punt de la corba. Diem que p és un **punt doble** si $\mathrm{ord}_p C = 2$. En tal cas, podem considerar els següents casos:*

a) *Si el con tangent de la corba C al punt p està format per dues rectes diferents, diem que p és un punt doble **nodal**.*

b) *Si el con tangent de la corba C al punt p està format només una recta, diem que p és un punt doble **cuspidal**.*

*Diem que un punt doble p és un **punt doble simple** si per tota recta tangent T de la corba C en p tenim que $\mathrm{mult}_p(C \cap T) = 3$.*

Notem que, amb un canvi de coordenades, podem escriure el con tangent d'una corba en un punt doble com $F_2 = X_1 X_2$, si el punt és nodal, o $F_2 = X_2^2$, si el punt és cuspidal.

Definició 1.52. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba algebraica. Diem que és una **corba de Plücker** si se satisfan les següents propietats:*

i) *C és irreductible i $\deg C \geq 2$;*

ii) *les singularitats de C i C^* són punts dobles simples.*

En una corba de Plücker, considerarem les següents propietats invariants:

$$d := \#\text{ nodes simples de } C \qquad d^* := \#\text{ nodes simples de } C^*$$
$$s := \#\text{ cúspides simples de } C \qquad s^* := \#\text{ cúspides simples de } C^*$$

Podem veure que aquestes propietats invariants estan relacionades amb el nombre de bitangents i de punts d'inflexió de la següent manera.

Proposició 1.53. *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba de Plücker. Llavors*

a) $d^* = \#$ *bitangents de C;*

b) $s^* = \#$ *punts d'inflexió de C;*

c) $d = \#$ *bitangents de C^*;*

d) $s = \#$ *punts d'inflexió de C^*.*

Demostració. Per provar (a), hem de veure que els nodes simples de C^* estan associats a rectes bitangents de C. Sigui $L^* \in C^*$ un node simple associat a una recta $L \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, que per definició de corba dual és una tangent de C. Per dualitat tenim que la tangent de C^* en el punt L^* està associada al punt en què L és tangent de C. Ara bé, per definició de node simple, existeixen dues tangents diferents $q_1^*, q_2^* \subset \mathbb{P}_2^*(\mathbb{C})$ de C^* que passen pel punt L^*, les quals estan associades a dos punts diferents $q_1, q_2 \in C$, respectivament, tal que L hi és tangent de C. Per tant, el node simple L^* de C^* està associat a una bitangent L de C.

Per provar (b), suposem que p és una cúspide simple. Tenim que $\mathrm{ord}_p C = 2$ i $\mathrm{mult}_p(C \cap T) = 3$ per la recta tangent T de la corba C en p. Si considerem els invariants numèrics locals d'una parametrització local entorn el punt p, segons els hem definit al Lema 1.48, tenim que $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 0$. Llavors, tindrem que $\alpha_1^* = 0$ i $\alpha_2^* = 1$. Per tant, les cúspides simples estan associades a punts d'inflexió simples.

Les propietats (c) i (d) es dedueixen, per bidualitat, de les propietats (a) i (b). ■

Amb tot això, anem a veure les fórmules de Plücker.

Teorema 1.54 (Fórmules de Plücker)**.** *Sigui $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una corba de Plücker de grau n i de classe n^*, llavors tenim*

a) $n^* = n(n-1) - 2d - 3s$;

b) $s^* = 3n(n-2) - 6d - 8s$;

c) $n = n^*(n^*-1) - 2d^* - 3s^*$;

d) $s = 3n^*(n^*-2) - 6d^* - 8s^*$.

Demostració. És suficient provar les fórmules (a) i (b), doncs (c) i (d) es dedueixen de considerar (a) i (b) sobre la corba de Plücker C^* de grau n^* i de classe n.
Per provar la fórmula (a), considerem la intersecció de la corba C amb la corba polar P_qC, on $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ és un punt escollit de manera que hi hagi exactament n^* tangents de C des del punt q a punts regular de la corba $p_1, \ldots, p_{n^*} \in C$, que podem assegurar-ho per la Proposició 1.50 i en ser C una corba de Plücker és suficient considerar triar el punt q de manera que no estigui contingut en cap bitangent o tangent d'inflexió de la corba C i només n'hi ha un nombre finit, doncs per la Proposició 1.53 les bitangents i els punt d'inflexió estan associats a singularitats de la corba dual C^*, i el nombre de singularitats en una corba és finit. També haurem de suposar que q no està contingut en cap tangent de C en un punt singular.
Per la Proposició 1.31, tenim que

$$\mathrm{mult}_p(C \cap P_qC) = 1 \text{ per } p \in \{p_1, \ldots, p_{n^*}\},$$

per tant, pel Teorema de Bézout (1.15),

$$n(n-1) = n^* + \sum_{p \in \mathrm{Sing}C} \mathrm{mult}_p(C \cap P_qC).$$

Ens queda veure que

$$\mathrm{mult}_p(C \cap P_qC) = \begin{cases} 2 & \text{si } p \text{ és un node simple,} \\ 3 & \text{si } p \text{ és una cúspide simple.} \end{cases}$$

Prenem $p = (1 : 0 : 0)$ i un punt qualsevol $q = (0 : q_1 : q_2)$. Sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomi reduït de la corba. Podem escriure els polinomis F i D_qF com

$$\begin{aligned} F &= X_0^{n-2}F_2 + X_0^{n-3}F_3 + \cdots + X_0F_{n-1} + F_n, \\ D_qF &= q_1(X_0^{n-2}\frac{\partial F_2}{\partial X_1} + X_0^{n-3}\frac{\partial F_3}{\partial X_1} + \cdots + X_0\frac{\partial F_{n-1}}{\partial X_1} + \frac{\partial F_n}{\partial X_1}) \\ &\quad + q_2(X_0^{n-2}\frac{\partial F_2}{\partial X_2} + X_0^{n-3}\frac{\partial F_3}{\partial X_2} + \cdots + X_0\frac{\partial F_{n-1}}{\partial X_2} + \frac{\partial F_n}{\partial X_2}), \end{aligned}$$

on $F_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg F_k = k$. Considerem ara la restricció afí de les corbes C i P_qC, que venen definides pels polinomis

$$\begin{aligned} f &= F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n, \\ d_qf &= \left(q_1\frac{\partial F_2}{\partial X_1} + q_2\frac{\partial F_2}{\partial X_2}\right) + \left(q_1\frac{\partial F_3}{\partial X_1} + q_2\frac{\partial F_3}{\partial X_2}\right) + \cdots + \left(q_1\frac{\partial F_n}{\partial X_1} + q_2\frac{\partial F_n}{\partial X_2}\right). \end{aligned}$$

Si p és un node simple podem escriure els dos terme de menor ordre del polinomi f com

$$F_2 = X_1X_2 \qquad F_3 = a_0X_1^3 + a_1X_1^2X_2 + a_2X_1X_2^2 + a_3X_2^3,$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$ i $a_0, a_3 \neq 0$, doncs en ser p una node simple tenim que $\mathrm{mult}_p(C \cap T_i) = 3$ per les dues tangents $T_1 = V(X_1)$ i $T_2 = V(X_2)$, per tant $X_1 \nmid F_3$ i $X_2 \nmid F_3$. D'altra banda, com que hem escollit $q = (0 : q_1 : q_2)$ sobre cap tangent de C tenim que $q_1, q_2 \neq 0$. Així doncs, els termes de menor ordre de f i d_qf són

$$\begin{aligned} f &= X_1X_2 + a_0X_1^3 + a_1X_1^2X_2 + a_2X_1X_2^2 + a_3X_2^3 + O_4, \\ d_qf &= q_1X_2 + q_2X_1 + q_1(3a_0X_1^2 + 2a_1X_1X_2 + a_2X_2^2) \\ &\quad + q_2(a_1X_1^2 + 2a_2X_1X_2 + 3a_3X_2^2) + O_3. \end{aligned}$$

Notem que p és un punt regular de P_qC, doncs $\nabla(d_qf)(p) = (q_2, q_1) \neq (0,0)$. Així mateix, notem que les corbes C i P_qC no tenen tangents comunes en p, doncs la tangent de P_qC en p és $T = V(q_1X_2 + q_2X_1)$ i les dues tangents de C en p, per l'elecció de les coordenades, són $T_1 = V(X_1)$ i $T_2 = V(X_2)$. Ara bé, $X_1 \nmid q_1X_2 + q_2X_1$ i $X_2 \nmid q_1X_2 + q_2X_1$, ja que $q_1 \neq 0$ i $q_2 \neq 0$, respectivament. Per tant, per la propietat (e) de la Proposició 1.27,

$$\mathrm{mult}_p(C \cap P_qC) = \mathrm{ord}_pC \cdot \mathrm{ord}_pP_qC = 2.$$

D'altra banda, si p és una cúspide simple podem escriure els dos termes de menor ordre del polinomi f com

$$F_2 = X_2^2 \qquad F_3 = a_0X_1^3 + a_1X_1^2X_2 + a_2X_1X_2^2 + a_3X_2^3,$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$ i $a_0 \neq 0$, doncs en ser p una cúspide simple tenim que $\text{mult}_p(C \cap T) = 3$ per la tangent doble $T = V(X_2)$, per tant $X_2 \nmid F_3$. D'altra banda, podem escollir el punt $q = (0:0:1)$. Llavors tenim que els termes de menor ordre de f i $d_q f$ són

$$\begin{aligned} f &= X_2^2 + a_0 X_1^3 + a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_1 X_2^2 + a_3 X_2^3 + O_4, \\ d_q f &= 2X_2 + a_1 X_1^2 + 2a_2 X_1 X_2 + 3a_3 X_2^2 + O_3. \end{aligned}$$

Notem que p és un punt regular de $P_q C$, doncs $\nabla(d_q f)(p) = (0,2) \neq (0,0)$. Considerem el polinomi $g = 2f - X_2 d_q f$, que pren la forma

$$g = 2f - X_2 d_q f = 2a_0 X_1^3 + a_1 X_1^2 X_2 - a_3 X_2^3 + O_4 = G_3 + O_4.$$

Notem que les corbes $P_q C$ i $C' = V(g)$ no tenen tangents comunes, doncs la tangent de $P_q C$ en p és $T = V(X_2)$, però T no és una tangent de $C' = V(g)$ en p, ja que $X_2 \nmid G_3$. Per tant, per les propietats (e) i (g) de la Proposició 1.27,

$$\begin{aligned} \text{mult}_p(C \cap P_q C) = \text{mult}_p(V(f) \cap V(d_q f)) = \text{mult}_p(V(g) \cap V(d_q f)) = \\ \text{ord}_p C' \cdot \text{ord}_p P_q C = 3. \end{aligned}$$

Per provar la fórmula (b), seguim un argument similar considerant la intersecció de la corba C amb la corba Hessiana $H(C)$. Com que la corba C és una corba de Plücker, les singularitats de C^* només són nodes simples i cúspides simples. Per tant, C només té punts d'inflexió simples i, pel Teorema 1.36,

$$\text{mult}_p(C \cap H(C)) = 1 \text{ per } p \in C \cap H(C).$$

Així doncs, pel Teorema de Bézout (1.15) i la Proposició 1.35,

$$3n(n-2) = s^* + \sum_{p \in \text{Sing} C} \text{mult}_p(C \cap H(C)).$$

Ens queda veure que

$$\text{mult}_p(C \cap H(C)) = \begin{cases} 6 & \text{si } p \text{ és un node simple,} \\ 8 & \text{si } p \text{ és una cúspide simple.} \end{cases}$$

Prenem $p = (1:0:0)$. Sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomi reduït de la corba. Considerem la restricció de la corba en un obert afí del pla projectiu, que ve definida pel polinomi

$$f = F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n,$$

on $F_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg F_k = k$.
Si p és un node simple podem escriure els dos terme de menor ordre del polinomi f com

$$F_2 = X_1 X_2 \qquad F_3 = a_0 X_1^3 + a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_1 X_2^2 + a_3 X_2^3,$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$ i $a_0, a_3 \neq 0$, doncs en ser p una node simple tenim que $\text{mult}_p(C \cap T_i) = 3$ per les dues tangents $T_1 = V(X_1)$ i $T_2 = V(X_2)$, per tant $X_1 \nmid F_3$ i $X_2 \nmid F_3$. Amb el Lema 1.34 podem calcular $\det H_F$ i obtenim que

$$\begin{aligned} \det H_F = (n-1)(n-2)X_1 X_2 - n(n-1)(a_0 X_1^3 + a_3 X_2^3) \\ +(n-1)(3n-8)(a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_1 X_2^2) + O_4 \end{aligned}$$

Considerem el polinomi $h = \det H_F - (n-1)(n-2)f$, que pren la forma

$$\begin{aligned} h = & \det H_F - (n-1)(n-2)f = \\ & -2(n-1)^2(a_0X_1^3 + a_3X_2^3) + 2(n-1)(n-3)(a_1X_1^2X_2 + a_2X_1X_2^2) + O_4 = H_3 + O_4. \end{aligned}$$

Notem que les corbes C i $C'' = V(h)$ no tenen tangents comunes, doncs les dues tangents de C en p són $T_1 = V(X_1)$ i $T_2 = V(X_2)$, però aquestes rectes no són tangents de C'', ja que $X_1 \nmid H_3$ i $X_2 \nmid H_3$, doncs tenim que $a_0, a_3 \neq 0$ i $n \geq 2$. Així mateix, tenim que $\mathrm{ord}_p h = 3$. Per tant, per les propietats (e) i (g) de la Proposició 1.27,

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_p(C \cap H(C)) = \mathrm{mult}_p(V(f) \cap V(\det H_F)) = \mathrm{mult}_p(V(f) \cap V(h)) = \\ \mathrm{ord}_p C \cdot \mathrm{ord}_p C'' = 6. \end{aligned}$$

D'altra banda, si p és una cúspide simple podem escriure els tres terme de menor ordre del polinomi f com

$$\begin{gathered} F_2 = X_2^2 \qquad F_3 = a_0X_1^3 + a_1X_1^2X_2 + a_2X_1X_2^2 + a_3X_2^3 \\ F_4 = a_4X_1^4 + a_5X_1^3X_2 + a_6X_1^2X_2^2 + a_7X_1X_2^3 + a_8X_2^4, \end{gathered}$$

on $a_\mu \in \mathbb{C}$ i $a_0 \neq 0$, doncs en ser p una cúspide simple tenim que $\mathrm{mult}_p(C \cap T) = 3$ per la tangent $T = V(X_2)$ de C en p i, per tant, $X_2 \nmid F_3$. De nou amb el Lema 1.34 podem calcular $\det H_F$ i obtenim que

$$\det H_F = 4(n-1)(n-2)(-3a_0X_1 - a_1X_2)X_2^2 - 6(n-1)(n-3)a_0^2X_1^4 + \cdots + O_5.$$

Considerem ara el polinomi $h' = \det H_F - 4(n-1)(n-2)(-3a_0X_1 - a_1X_2)f$, que podem escriure com

$$\begin{aligned} h' = & \det H_F - 4(n-1)(n-2)(-3a_0X_1 - a_1X_2)f = \\ & 6(n-1)^2a_0^2X_1^4 + \cdots + O_5 = H_4' + O_5. \end{aligned}$$

Notem que les corbes C i $C''' = V(h')$ no tenen tangents comunes, doncs la tangent de C en p és $T = V(X_2)$, però aquesta recta no és tangent de C''', doncs $X_2 \nmid H_4'$ perquè $a_0 \neq 0$ i $n \geq 2$. També tenim que $\mathrm{ord}_p h' = 4$. Per tant, per les propietats (e) i (g) de la Proposició 1.27,

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_p(C \cap H(C)) = \mathrm{mult}_p(V(f) \cap V(\det H_F)) = \mathrm{mult}_p(V(f) \cap V(h')) = \\ \mathrm{ord}_p C \cdot \mathrm{ord}_p C''' = 8. \end{aligned}$$

■

Aplicant les fórmules de Plücker a una corba plana quàrtica obtenim el resultat que buscàvem en aquesta secció.

Corol·lari 1.55. *Tota corba plana quàrtica regular té* 28 *rectes bitangents.*

Demostració. Sigui C una corba quàrtica regular, és a dir, la corba és de Plücker i $\deg C = 4$. Llavors la corba no té cap punt singular, per tant $d = 0$ i $s = 0$. Per la primera fórmula de Plücker obtenim que $n^* = 12$, i per la segona fórmula de Plücker obtenim que $s^* = 24$. Per tant, per la tercera fórmula de Plücker, obtenim que $d^* = 28$, que amb la Proposició 1.53 ens dona el resultat que busquem. ■

En la Figura 6 podem veure un exemple en què les 28 rectes bitangents d'una corba quàrtica són reals. És el cas de la corba de Trott.

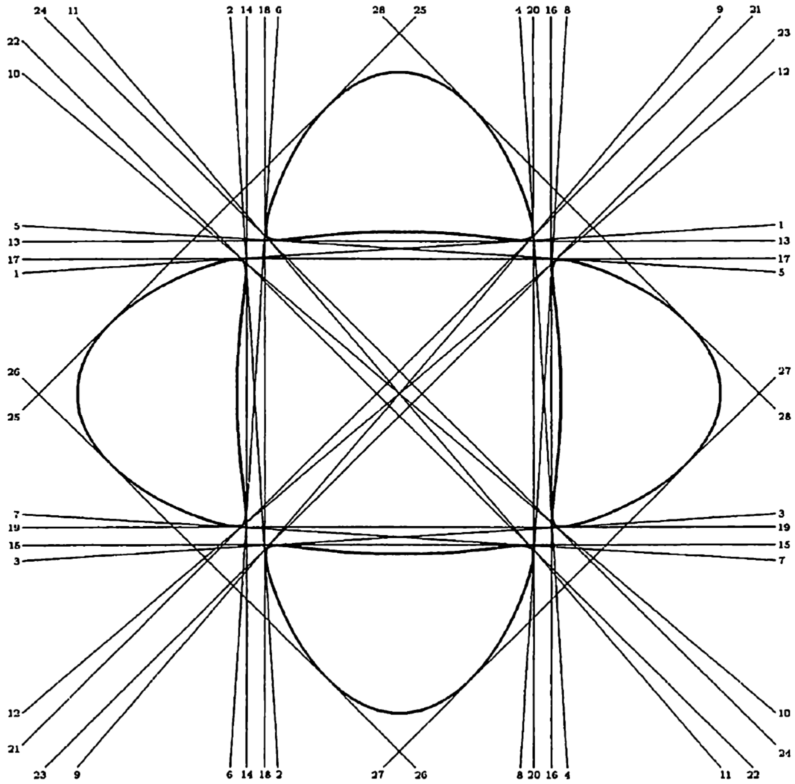

Figura 6: Les 28 bitangents de la corba de Trott.

2 Superfícies algebraiques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

En aquesta secció volem provar que una superfície cúbica regular conté 27 rectes (0.2). Per això generalitzarem els conceptes que hem introduït en la sessió anterior a una hipersuperfície d'un espai projectiu de dimensió arbitraria. També introduirem la Grassmaniana i alguns resultats de la teoria de la dimensió que ens seran necessaris. La secció s'ha seguit de les notes [NL21].

2.1 Hipersuperfícies algebraiques

De la mateixa manera que en 1.1 hem definit les corbes algebraiques en el pla projectiu $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, podem caracteritzar de forma equivalent les hipersuperfícies algebraiques de qualsevol espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, que podem definir de la següent manera.

Definició 2.1. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu. Anomenem* ***hipersuperfície algebraica*** *a tot subconjunt $H \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ tal que existeix un polinomi homogeni $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ amb $\deg F \geq 1$ tal que*

$$H = V(F) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \mid F(x_0 : \dots : x_n) = 0\}.$$

Si dotem l'espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ d'una estructura d'espai topològic amb la topologia de Zariski, llavors també tenim que les hipersuperfícies algebraiques són conjunts tancats.

Notem que podem considerar el Lema de Study (1.3) sobre una hipersuperfície algebraica, així com les nocions de irreductibilitat, components irreductibles, polinomi reduït i grau. Això ens donarà les eines per poder treballar amb hipersuperfícies algebraiques en espais projectius $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Més endavant en aquesta secció ens centrarem en l'estudi de les hipersuperfícies algebraiques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, que anomenarem **superfícies algebraiques**.

2.2 Tangents i singularitats de hipersuperfícies algebraiques

En aquest apartat ens centrarem en les propietats locals d'una hipersuperfície algebraica. Aquestes propietats són una generalització de les nocions que hem introduït la secció anterior, doncs les corbes són les hipersuperfícies del pla projectiu $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Ens situarem en un obert $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de l'espai projectiu, que podem dotar d'una estructura d'espai afí i denotarem per $\mathbb{C}^n$. Així com en 1.16 hem definit una corba afí, també tenim de forma equivalent una hipersuperfície afí de la següent manera.

Definició 2.2. *Una* ***hipersuperfície afí*** *és un subconjunt $H \subset \mathbb{C}^n$ tal que existeix un polinomi $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ amb $\deg f \geq 1$ que satisfà*

$$H = V(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

També podem veure que tota hipersuperfície algebraica $H = V(F) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ està associada a única hipersuperfície afí donada pel polinomi $f(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$. Per tant, també podem considerar en una hipersuperfície afí les propietats d'una hipersuperfície algebraica.

Anem a caracteritzar la noció de singularitat en una hipersuperfície afí. Per això necessitem definir la multiplicitat d'intersecció entre una hipersuperfície i una recta.

Considerem una hipersuperfície afí $H = V(f) \subset \mathbb{C}^n$ tal que f n'és un polinomi reduït i considerem un punt $p \in H$ amb coordenades afins $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Podem escriure el desenvolupament de Taylor del polinomi f entorn el punt p segons

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)(x_i - p_i)(x_j - p_j) + \cdots .$$

Denotem per $d_p f$ la part lineal del desenvolupament de Taylor

$$d_p f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i).$$

Considerem ara una recta afí L que passa pel punt p, que podem escriure segons

$$p + \lambda v = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda(v_1, \ldots, v_n),$$

on $v = (v_1, \ldots, v_n)$ és un vector no nul. Si substituïm l'expressió de la recta L en el desenvolupament de Taylor del polinomi f obtenim que

$$f(p + \lambda v) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) v_i v_j + \cdots = \lambda^m p_f(\lambda),$$

on $p_f \in \mathbb{C}[\lambda]$ és un polinomi tal que $p_f(0) \neq 0$. Amb aquesta notació podem definir la multiplicitat d'intersecció entre una hipersuperfície afí i una recta de la següent manera.

Definició 2.3. *Sigui $H = V(f) \subset \mathbb{C}^n$ hipersuperfície afí, sigui $p \in H$ un punt i sigui L una recta tal que $p \in L$. Amb la notació anterior, definim la* ***multiplicitat d'intersecció*** *de la hipersuperfície H i la recta L en el punt p com*

$$\mathrm{mult}_p(H \cap L) := \min\{m \mid p_f(0) \neq 0\}.$$

Amb la multiplicitat d'intersecció podem caracteritzar les rectes tangents a una hipersuperfície.

Definició 2.4. *Sigui $H \subset \mathbb{C}^n$ una hipersuperfície afí, sigui $p \in H$ un punt i sigui L una recta tal que $p \in L$. Diem que la recta L és* ***tangent*** *a la hipersuperfície H al punt p si*

$$\mathrm{mult}_p(H \cap L) \geq 2.$$

*Definim l'****espai tangent*** *de la hipersuperfície H al punt p com*

$$\hat{T}_p H = \bigcup_{\mathrm{mult}_p(H \cap L) \geq 2} L,$$

és a dir, la unió de totes les rectes tangents a la hipersuperfície H en el punt p.

Proposició 2.5. *Sigui $H = V(f) \subset \mathbb{C}^n$ una hipersuperfície afí i sigui $p \in H$ un punt. Llavors l'espai tangent $\hat{T}_p H$ és la superfície algebraica $V(d_p f)$.*

Demostració. Tenim que un punt $q = (q_1, \ldots, q_n) \in T_p H$ si, i només si, la recta $p \vee q$ és tangent a H al punt $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Podem escriure la recta $p \vee q$ com

$$p + \lambda \vec{pq} = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda(q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n).$$

Substituint l'expressió de la recta $p \vee q$ en el desenvolupament de Taylor de f obtenim

$$f(p + \lambda\vec{pq}) = \lambda \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(q_i - p_i) + \lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=j}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)(q_i - p_i)(q_j - p_j) + \cdots$$

Per tant, $\mathrm{mult}_p(H \cap L) \geq 2$ si, i només si, $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(q_i - p_i) = d_p f(q) = 0$. Així doncs, $T_p H = V(d_p f)$. ∎

Notem que si en un punt p s'anul·len totes les derivades parcials $\partial f / \partial x_i$, llavors l'espai tangent resulta $\hat{T}_p H = \mathbb{C}^n$. Amb aquesta propietat definirem la noció de punt singular.

Definició 2.6. *Sigui $H \subset \mathbb{C}^n$ una hipersuperfície afí i sigui $p \in H$ un punt. Diem que H és* ***singular*** *al punt p si, i només si,*

$$\dim \hat{T}_p H > n - 1.$$

Si un punt no és singular diem que és ***regular****. Denotem per $\mathrm{Sing} H$ el conjunt de punts singulars d'una hipersuperfície. Diem que una hipersuperfície H és regular si $\mathrm{Sing} H = \emptyset$.*

Notem que un canvi de coordenades afins conserva el grau dels termes del desenvolupament de Taylor, així que les rectes tangents a un punt es transformen en rectes tangents al mateix punt sota el canvi de coordenades. Així doncs, les nocions d'espai tangent i de singularitat són invariants sota canvis de coordenades.

Així doncs, podem escollir les coordenades de manera que $p = (0, 0, 0)$. Amb això definim l'ordre d'una hipersuperfície en un punt, que generalitza la Definició 1.19 de l'ordre d'una corba plana en un punt, i caracteritzem el con tangent.

Definició 2.7. *Sigui $H = V(f) \subset \mathbb{C}^n$ una hipersuperfície afí tal que f és un polinomi de la hipersuperfície i sigui $p \in H$. Escollim les coordenades de manera que $p = (0, 0, 0)$. Considerem el desenvolupament de Taylor del polinomi f entorn el punt p, que coincideix amb la seva* ***descomposició en formes***

$$f = \sum_{k=1}^{n} F_k,$$

on $F_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg F_k = k$. Definim l'ordre del polinomi F al punt p com

$$\mathrm{ord}_p f := \min\{k \mid F_k \neq 0\}.$$

*Si f és un polinomi reduït de la hipersuperfície, llavors definim l'****ordre de la hipersuperfície*** *H al punt p com*

$$\mathrm{ord}_p H := \mathrm{ord}_p f.$$

Definim el ***con tangent*** *de la hipersuperfície H al punt p com la hipersuperfície $TC_p H := V(F_m)$, on $m = \mathrm{ord}_p H$.*

Proposició 2.8. *Sigui $H = V(f) \subset \mathbb{C}^n$ una hipersuperfície afí tal que f n'és un polinomi reduït amb una descomposició en formes*

$$f = F_m + \cdots + F_n.$$

Per cada recta L que passi per l'origen $p = (0, 0, 0)$ tenim que $\mathrm{mult}_p(H \cap L) \geq \mathrm{ord}_p H$ i $TC_p H$ és la unió de les rectes L tals que $\mathrm{mult}_p(H \cap L) > \mathrm{ord}_p H$.

Demostració. Prenem una recta L qualsevol que passi per l'origen i tal que $v = (v_1, \dots, v_n)$ en sigui un vector director. Llavors, els punts de la recta són de la forma

$$p + \lambda v = (0, \dots, 0) + \lambda(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

Si substituïm l'expressió d'un punt de la recta L al polinomi f obtenim que

$$f(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = F_m(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) + \dots + F_n(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \\ \lambda^m F_m(v) + \dots + \lambda^n F_n(v) = \lambda^m (F_m(v) + \dots + \lambda^{n-m} F_n(v)).$$

Veiem doncs que $\mathrm{mult}_p(H \cap L) \geq m$. La desigualtat és estricta si, i només si, $F_m(v) = 0$, és a dir, si $L \subset TC_pH$. ■

Si ens situem de nou a l'espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ podem generalitzar-hi la noció de singularitat utilitzant la fórmula d'Euler (1.25) i amb un argument similar al de la Proposició 1.26, obtenint el següent resultat.

Proposició 2.9. *Sigui $H = V(F) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ una hipersuperfície algebraica tal que $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ n'és un polinomi reduït i sigui $p \in H$ un punt. Llavors el punt p és singular si, i només si, s'anul·la el gradient de F en el punt p*

$$\nabla F(p) := \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}(p), \dots, \frac{\partial F}{\partial X_n}(p) \right).$$

2.3 Grassmaniana

En el pla projectiu $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ tenim que les úniques varietats lineals són les rectes. Ara bé, en un espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de dimensió superior hi trobem varietats lineals que no són hiperplans, és a dir, no són varietats lineals de dimensió $n-1$. En aquest apartat estudiarem el comportament d'aquestes varietats amb la Grassmaniana i, en concret, ens centrarem en les rectes de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

Donat un espai vectorial E qualsevol definit sobre un cos K de característica 0, anem a descriure un subconjunt de $\mathbb{P}(\bigwedge^{r+1} E)$ que parametritzi les varietats lineals r-dimensionals de $\mathbb{P}_n(E)$. En l'Apèndix B es pot trobar més informació sobre el producte exterior d'espais vectorials.

Lema 2.10. *Siguin E un espai vectorial $(n+1)$-dimensional i siguin $F, G \subset E$ subespais vectorials $(r+1)$-dimensionals. Sigui $\{u_0, \dots, u_r\}$ una base de F i sigui $\{v_0, \dots, v_r\}$ una base de G. Llavors $F = G$ si, i només si,*

$$u_0 \wedge \dots \wedge u_r = c \cdot v_0 \wedge \dots \wedge v_r, \quad \text{amb } c \text{ costant.}$$

Demostració. Si $F = G$, llavors $\bigwedge^{r+1} F = \bigwedge^{r+1} G$ i $\dim \bigwedge^{r+1} F = \dim \bigwedge^{r+1} G = 1$. Així mateix, $u_0 \wedge \dots \wedge u_r$ i $v_0 \wedge \dots \wedge v_r$ són dues bases, per tant els dos vectors han de ser proporcionals.
Per altra banda, completem la base de F per obtenir una base $u_0, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ de E. Per cada vector v_i de la base de G podem escriure $v_i = a_0^i u_0 + \cdots a_n^i u_n$. Llavors

$$0 = c \cdot v_0 \wedge \dots \wedge v_r \wedge v_i = u_0 \wedge \dots \wedge u_r \wedge v_i = u_0 \wedge \dots \wedge u_r \wedge \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^i u_j = \\ \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j^i u_0 \wedge \dots \wedge u_r \wedge u_j \Longrightarrow \alpha_{r+1}^i = \dots = \alpha_n^i = 0.$$

Així doncs, $v_i \in \langle u_0, \dots, u_r \rangle$, per tant $G \subseteq F$. Com que F i G tenen la mateixa dimensió, tenim que $F = G$. ■

Definició 2.11. *Sigui E un espai vectorial. Diem que un element $x \in \bigwedge^{r+1} E$ és **descomponible** si existeixen vectors $v_0, \dots, v_r \in E$ tals que $x = v_0 \wedge \dots \wedge v_r$.*

Notem que podem estendre la definició d'element descomponible als elements de $\mathbb{P}_n(E)$. Amb el Lema 2.10 podem establir una bijecció entre el conjunt de totes les varietats lineals r-dimensionals de $\mathbb{P}_n(E)$ i

$$\mathrm{Gr}(r, n) := \{x \in \bigwedge^{r+1} E \mid x \text{ és descomponible } \} \subset \mathbb{P}\left(\bigwedge^{r+1} E\right),$$

i això ens porta a la definició de la Grassmaniana.

Definició 2.12. *El conjunt* $\mathrm{Gr}(r, n)$ *s'anomena la **Grassmaniana** de varietats lineals r-dimensionals en $\mathbb{P}_n(E$.*

Definició 2.13. *Siguin E un espai vectorial $(n+1)$-dimensional i sigui $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base de E. Això determina una referència projectiva en $\mathbb{P}_n(E)$ i en $\mathbb{P}(\bigwedge^{r+1} E)$, que denotem per $[e_I]$, amb $\#I = r+1$. Diem que les **coordenades de Plücker** d'una varietat lineal r-dimensional $L = \mathbb{P}(F) \subseteq \mathbb{P}_n(E)$ són les coordenades de $[v_0 \wedge \dots \wedge v_r]$ en el sistema de referència $[e_I]$, sent $\{v_0, \dots, v_r\}$ qualsevol base del subespai $F \subset E$ associat a la varietat lineal L.*

Notem que si $L = [\alpha_0^0 : \ldots : \alpha_n^0] \vee \dots \vee [\alpha_0^r : \ldots : \alpha_n^r]$ és una varietat lineal r-dimensional de $\mathbb{P}_n(E)$, a partir de la propietat (g) de la Proposició $B.3$ tenim que les coordenades de Plücker de L corresponen als menors d'ordre $(r+1)$ de la matriu

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \cdots & \alpha_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^r & \cdots & \alpha_n^r \end{pmatrix}.$$

Finalment, enunciem un resultat que ens serà útil més endavant.

Lema 2.14. *Sigui E un espai vectorial. Sigui $x \in \bigwedge^{r+1} E$ un element no trivial. Considerem l'aplicació lineal*

$$\begin{aligned} \eta_x : E &\longrightarrow \bigwedge^{r+1} E \\ v &\longrightarrow v \wedge x. \end{aligned}$$

Llavors, x és descomponible si, i només si, $\dim \ker(\eta_x) \geq r$.

Demostració. Suposem que $x = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ és descomponible, amb v_i vectors linealment independents, doncs en cas contrari tindríem que $x = 0$. Llavors, $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \subset \ker(\eta_x)$, com volíem veure.
Per altra banda, considerem una base $u_1, \dots, u_s$ de $\ker(\eta_x)$, amb $s \geq r$. Completem-la per obtenir una base $u_0, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_n$ de E. Tenim que $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_r}$, amb $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, és una base de $\bigwedge^{r+1} E$. Si denotem $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ i $u_I = u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_r}$, podem escriure $x = \sum \alpha_I u_I$. Llavors, tenim que per $i \leq s$

$$0 = u_i \wedge x = u_i \wedge \sum \alpha_I u_I = u_i \wedge \sum_{i \notin I} \alpha_I u_I.$$

Per tant, els coeficients α_I no nuls satisfaran que $\{1,\ldots,s\} \subseteq I$, el qual implica que $s = r$. Així doncs, només hi ha un coeficient no nul i podem escriure $x = \alpha_{1\ldots r} u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$, per tant x és descomponible. ∎

Anem ara a estudiar la Grassmaniana $\mathrm{Gr}(1,3)$ que parametritza les rectes de $\mathbb{P}_3$.

Tenim que $\mathrm{Gr}(1,3) \subset \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 E\right)$, amb $\dim E = 4$. Sigui $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ una base de E. Llavors, $\{e_i \wedge e_j\}$ amb $0 \leq i < j \leq 3$ és una base de $\bigwedge^2 E$. Volem saber quan un punt $x \in \bigwedge^2 E$, amb coordenades de Plücker $[x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}]$ està contingut a $\mathrm{Gr}(1,3)$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \eta_x : E &\longrightarrow \bigwedge^3 E \\ v &\longrightarrow v \wedge x = v \wedge \left(\sum x_{ij} e_i \wedge e_j\right). \end{aligned}$$

Si fixem la base $\{e_0 \wedge e_1 \wedge e_2, e_0 \wedge e_1 \wedge e_3, e_0 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ de $\bigwedge^3 E$, podem representar l'aplicació η_x amb una matriu. En primer lloc, calculem les imatges dels elements de la base de E

$$\begin{aligned} \eta_x(e_0) &= e_0 \wedge \left(\sum x_{ij} e_i \wedge e_j\right) = x_{12} e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + x_{13} e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 + x_{23} e_0 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ \eta_x(e_1) &= e_1 \wedge \left(\sum x_{ij} e_i \wedge e_j\right) = -x_{02} e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 - x_{03} e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 + x_{23} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ \eta_x(e_2) &= e_2 \wedge \left(\sum x_{ij} e_i \wedge e_j\right) = x_{01} e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 - x_{03} e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 - x_{13} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ \eta_x(e_0) &= e_3 \wedge \left(\sum x_{ij} e_i \wedge e_j\right) = x_{01} e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 + x_{02} e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 + x_{12} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Així doncs, la matriu de l'aplicació η_x pren la forma

$$\eta_x = \begin{pmatrix} x_{12} & -x_{02} & x_{01} & 0 \\ x_{13} & -x_{03} & 0 & x_{01} \\ x_{23} & 0 & -x_{03} & x_{02} \\ 0 & x_{23} & -x_{13} & x_{12} \end{pmatrix}.$$

Volem imposar que x sigui un element de $\mathrm{Gr}(1,3)$, que pel Lema 2.14 és equivalent a que $\mathrm{rang}(\eta_x) \leq 2$. Podem veure que tots els menors no nuls d'ordre 3 són de la forma

$$x_{ij}(x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12}).$$

Així doncs, la Grassmaniana $\mathrm{Gr}(1,3)$ és una hipersuperfície algebraica irreductible de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2 E\right)$ definida pel polinomi

$$G = x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12}.$$

2.4 Varietats algebraiques. Teoria de la dimensió

En aquest apartat introduirem alguns resultats de la teoria de la dimensió que utilitzarem més endavant. Algunes demostracions s'escapen de l'abast d'aquest treball, però es poden trobar en [Har92], [Sha13] i [NL21].

Per començar necessitem definir una varietat algebraica, un concepte que generalitza la noció de hipersuperfície algebraica en un espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Definició 2.15. *Sigui* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *un espai projectiu dotat de la topologia de Zariski. Anomenem* ***varietat algebraica*** *als tancats de* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$*, és a dir, a tot subconjunt* $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *tal que existeix un conjunt finit de polinomis homogenis* $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ *amb* $\deg F_\mu \geq 1$ *tals que*

$$X = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \mid F_\mu(x_0 : \ldots : x_n) = 0 \ \forall \mu\}.$$

Podem definir la noció d'irreductibilitat d'una varietat algebraica de la següent manera.

Definició 2.16. *Sigui* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *un espai projectiu dotat de la topologia de Zariski i sigui* $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *una varietat algebraica. Diem que* X *és* ***irreductible*** *si no existeixen subconjunts propis tancats* $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *tals que* $X = X_1 \cup X_2$*.*

A continuació anem a veure diverses propietats d'una varietat algebraica.

Definició 2.17. *Sigui* $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *una varietat algebraica. Una* ***cadena de varietats algebraiques*** *de* X *és una successió tal que*

$$\emptyset \neq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{d-1} \subsetneq X_d,$$

on $X_k \subsetneq X$ *són varietats algebraiques irreductibles diferents. Definim la* ***dimensió*** $\dim X$ *d'una varietat algebraica* X *com la màxima longitud de les cadenes de* X*.*
Si X *és una varietat algebraica amb diverses components irreductibles* X_i*,* $X = \cup_i X_i$*, definim la dimensió de* X *com*

$$\dim X = \max_i \dim X_i$$

Si totes les components de X *tenen la mateixa dimensió, diem que* X *té* ***dimensió pura****.*

Amb aquesta definició podem generalitzar les nocions de corba i superfície en un espai projectiu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de la següent manera.

Definició 2.18. *Sigui* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *un espai projectiu. Diem que* $C \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *és una* ***corba algebraica*** *si és una varietat algebraica de dimensió 1. Diem que* $S \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *és una* ***superfície algebraica*** *si és una varietat algebraica de dimensió* 2.

Podem veure que una hipersuperfície de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ té dimensió $n-1$ i $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ és una varietat de dimensió n. Un punt $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ té dimensió 0. Així mateix, la dimensió d'una varietat lineal $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ és la dimensió que es defineix en la teoria de varietats lineals.

Definició 2.19. *Siguin* $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *i* $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ *dues varietats algebraiques. Diem que* $f : X \longrightarrow Y$ *és un* ***morfisme de varietats algebraiques*** *si existeix una aplicació polinòmica*

$$F : \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$$

i se satisfà que $F|_X = f$*.*

Definició 2.20. *Siguin* $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *i* $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ *dues varietats algebraiques, sigui* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *un morfisme de varietats algebraiques i sigui* $p \in \varphi(X)$ *un punt. Diem que el conjunt tancat* $\varphi^{-1}(\{p\}) \subset X$ *és la* ***fibra*** *de* φ *al punt* p*.*

A continuació anem a enunciar dos teoremes que no demostrarem, ja que les seves demostracions s'escapen de l'abast d'aquest treball, però es poden trobar a [NL21].

Teorema 2.21 (Teorema de la Dimensió de les Fibres)**.** *Siguin $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ i $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ dues varietats algebraiques irreductibles i sigui $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfisme de varietats algebraiques exhaustiu. Llavors*

a) $\dim Y \leq \dim X$*;*

b) per cada punt $p \in \varphi(X)$, totes les components irreductibles de la fibra de φ al punt p tenen dimensió més gran o igual que $\dim X - \dim Y$*;*

c) existeix un conjunt obert no nul $U \subset \varphi(X)$ tal que per tot punt $p \in U$ la fibra de φ al punt p té dimensió pura $\dim X - \dim Y$*.*

Teorema 2.22 (Teorema de l'Eliminació)**.** *Siguin $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ i $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ dues varietats algebraiques i sigui $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfisme de varietats algebraiques. Llavors $\varphi(X)$ és un conjunt tancat.*

Amb aquest teorema podem obtenir la següent proposició.

Proposició 2.23. *Siguin $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ i $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ dues varietats algebraiques tal que Y és irreductible i sigui $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfisme de varietats algebraiques exhaustiu. Si totes les fibres de φ són irreductibles, llavors X és irreductible.*

Demostració. Provarem aquest resultat per reducció a l'absurd. Suposem que X és reductible, és a dir, existeixen dos subconjunts propis tancats $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ tals que $X = X_1 \cup X_2$. Per tot element $y \in Y$, podem escriure la fibra de φ en y com

$$\varphi^{-1}(y) = (\varphi^{-1}(y) \cap X_1) \cup (\varphi^{-1}(y) \cap X_2).$$

Ara bé, com que per hipòtesi tenim que totes les fibres de φ són irreductibles, doncs o bé $\varphi^{-1}(y) \subset X_1$ o bé $\varphi^{-1}(y) \subset X_2$. D'aquesta manera, podem considerar els conjunts

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\} = \varphi(X_1) \quad \text{i} \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\} = \varphi(X_2).$$

Com que tenim que $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \neq Y_2$ i, pel Teorema de l'Eliminació (2.22), Y_1 i Y_2 són dos conjunts propis tancats, arribem a la contradicció de que Y no és irreductible. ∎

2.5 Rectes en una superfície algebraica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

En aquest apartat estudiarem l'existència de rectes contingudes en una superfície de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ d'un grau fixat. Ens centrarem en les superfícies cúbiques per provar el Resultat 0.2.

Podem parametritzar el conjunt de totes les superfícies de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ de grau d amb un espai projectiu de dimensió $N(d) = \binom{d+3}{3} - 1$, doncs qualsevol superfície vindrà donada per un polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ de grau d, format per $\binom{d+3}{3}$ termes unívocament determinats llevat del producte per un factor no nul.

Considerarem el següent conjunt, que anomenarem **conjunt d'incidència**,

$$I_d = \left\{(l, S) \in \mathrm{Gr}(1,3) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C}) \mid l \subset S\right\} \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C}).$$

Podem dotar l'espai $\mathbb{P}_5(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ d'una estructura de varietat algebraica en l'espai projectiu $\mathbb{P}_{5N(d)+N(d)+5}(\mathbb{C})$ a partir de l'embedding de Segre, com podem veure en [Sha13]. Amb aquest resultat també podem dotar el conjunt $\mathrm{Gr}(1,3) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ d'una estructura de varietat algebraica. Anem a estudiar el conjunt d'incidència I_d.

Proposició 2.24. *El conjunt d'incidència I_d és una varietat algebraica irreductible de dimensió $N(d) - d + 3$.*

Demostració. En primer lloc, anem a veure que I_d és una varietat algebraica de $\mathrm{Gr}(1,3) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$. És suficient provar que la restricció

$$I_d \cap \big((\mathrm{Gr}(1,3) \cap \{x_{ij} \neq 0\}) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})\big)$$

és una varietat algebraica en $(\mathrm{Gr}(1,3) \cap \{x_{ij} \neq 0\}) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ per qualsevol $0 \leq i < j \leq 3$. Això és degut al fet que els conjunts oberts $(\mathrm{Gr}(1,3) \cap \{x_{ij} \neq 0\}) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ són un recobriment de tot l'espai $\mathrm{Gr}(1,3) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ i la noció de conjunt tancat és equivalent a ser tancat en la topologia subespai de cada obert del recobriment. Ho veurem per $i = 0, j = 1$, doncs la resta de casos són equivalents.

Tenim una bijecció entre en el subespai $\mathrm{Gr}(1,3) \cap \{x_{01} \neq 0\}$ i el conjunt de rectes de $\mathbb{P}_3$ que no interseuqen la recta $X_0 = X_1 = 0$. Efectivament, si la recta L interseca la recta $X_0 = X_1 = 0$, llavors podem escriure

$$L = [0 : 0 : a_2 : a_3] \vee [b_0 : b_1 : b_2 : b_3].$$

D'aquesta manera, la coordenada x_{01} és

$$x_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'altra banda, si L no interseca la recta $X_0 = X_1 = 0$, llavors interseca els plans $X_0 = 0$ i $X_1 = 0$ en dos punts diferents, de manera que podem escriure la recta L com

$$L = [1 : 0 : a_2 : a_3] \vee [0 : 1 : b_2 : b_3],$$

per tant, les coordenades de Plücker de la recta L són $[1 : b_2 : b_3 : -a_2 : -a_3 : a_2b_3 - a_3b_2]$, doncs $x_{01} \neq 0$. Així doncs, si tenim una recta $L \in \mathrm{Gr}(1,3) \cap \{x_{01} \neq 0\}$, podem obtenir-ne una parametrització a partir de les seves coordenades de Plücker segons

$$L = [1 : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}] \implies$$
$$L = [1 : 0 : -x_{12} : -x_{13}] \vee [0 : 1 : x_{02} : x_{03}] = [\lambda : \mu : -\lambda x_{12} + \mu x_{02} : -\lambda x_{13} + \mu x_{03}].$$

Considerem ara una superfície algebraica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ de grau d, que vindrà donada per un polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ que podem escriure segons

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum A_{i_0,i_1,i_2,i_3} X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3}.$$

Tenim que $L \subset S$ si, i només si, $F(\lambda : \mu : -\lambda x_{12} + \mu x_{02} : -\lambda x_{13} + \mu x_{03}) = 0$, és a dir,

$$\sum A_{i_0,i_1,i_2,i_3} \lambda^{i_0} \mu^{i_1} (-\lambda x_{12} + \mu x_{02})^{i_2} (-\lambda x_{13} + \mu x_{03})^{i_3} = \sum P_{rs}(x_{ij}, A_{i_0,i_1,i_2,i_3}) \lambda^r \mu^s = 0.$$

Per tant, el conjunt d'incidència I_d ve donat pels zeros dels polinomis $P_{rs}(x_{ij}, A_{i_0,i_1,i_2,i_3})$, que són lineals homogenis en els coeficients A_{i_0,i_1,i_2,i_3}.

Com que estem treballant en un espai $\mathrm{Gr}(1,3) \times \mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ amb una estructura de varietat algebraica induïda per l'embedding de Segre, la noció de varietat algebraica hi canvia lleugerament passant a ser les solucions dels polinomis bihomogenis, respectivament, en les coordenades dels dos espais inicials, en el nostre cas en les coordenades de Plücker de l'espai $\mathrm{Gr}(1,3)$ i en les coordenades de $\mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$. Ara bé, en estar treballant en una restricció afí de l'espai $\mathrm{Gr}(1,3)$, no esperarem homogeneïtat en aquestes coordenades. Així doncs, com que el conjunt d'incidència I_d ve donat per la solució de polinomis en les coordenades de $\mathrm{Gr}(1,3)$ i de $\mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ i, en aquestes darreres, són homogenis, tenim que I_d és una varietat algebraica.

Per provar que I_d és irreductible i poder-ne calcular la dimensió, considerem la següent projecció

$$\pi_1 : I_d \longrightarrow \mathrm{Gr}(1,3).$$

Com que podem expressar la projecció com una aplicació polinòmica, tenim que π_1 és un morfisme de varietats algebraiques.

Sigui $L \in \mathrm{Gr}(1,3)$ una recta qualsevol. Suposem que la fibra $\pi_1^{-1}(L)$ és isomorfa a $\mathbb{P}_{N(d)-d-1}(\mathbb{C})$. Tenim que π_1 és exhaustiva, doncs per cada recta podem trobar un superfície que la contingui. Com que $\mathrm{Gr}(1,3)$ és irreductible i totes les fibres de π_1 són irreductibles, en ser isomorfes a $\mathbb{P}_{N(d)-d-1}(\mathbb{C})$, pel Teorema 2.23 tenim que I_d és una varietat algebraica irreductible. Així mateix, pel Teorema de la Dimensió de les Fibres (2.21) obtenim que

$$\dim I_d = \dim \mathrm{Gr}(1,3) + \dim \pi^{-1}(l) = 4 + N(d) - d - 1 = N(d) - d + 3.$$

Només ens queda veure que $\pi_1^{-1}(L)$ és isomorf a $\mathbb{P}_{N(d)-d-1}(\mathbb{C})$. Escollim les coordenades de manera que la recta L tingui equació $X_2 = X_3 = 0$. Sigui S una superfície qualsevol de grau d, que ve donada pel polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Tenim que la superfície S conté la recta L si, i només sí, els coeficients dels termes $X_0^d, X_0^{d-1}X_1, \ldots, X_1^d$ són nuls. Això són $d+1$ equacions linealment independents, per tant la fibra és una varietat lineal de $\mathbb{P}_{N(d)}(\mathbb{C})$ de co-dimensió $d+1$, doncs és isomorfa a $\mathbb{P}_{N(d)-d-1}(\mathbb{C})$. ■

Centrem-nos ara en les superfícies cúbiques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

Proposició 2.25. *Tota superfície algebraica cúbica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ conté una recta.*

Demostració. Considerem la projecció

$$\pi_2 : I_3 \longrightarrow \mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C}).$$

De la mateixa manera que abans, com que podem expressar la projecció com una aplicació polinòmica, tenim que π_2 és un morfisme de varietats algebraiques. Per la Proposició 2.24 tenim que $\dim I_3 = N(3) - 3 + 3 = N(3)$, per tant tenim que I_3 i $\mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C})$ tenen la mateixa dimensió. Volem veure que l'aplicació π_2 és exhaustiva, doncs llavors tota superfície $S \in \mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C})$ conté una recta. Suposem que l'aplicació no és exhaustiva.

Pel Teorema de l'Eliminació (2.22) tenim que $\pi_2(I_3) = Y \subsetneq \mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C})$ és un conjunt tancat i, com que I_3 és irreductible i φ és un morfisme de varietats algebraiques, també és irreductible. També tenim que $\dim Y < \dim \mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C})$, perquè en cas contrari podríem completar la cadena de varietats algebraiques amb $Y \subsetneq \mathbb{P}_{N(3)}(\mathbb{C})$ i arribaríem a una contradicció. Llavors, pel Teorema de la Dimensió de les Fibres (2.21) tenim que totes les fibres tenen dimensió més gran o igual que $\dim I_3 - \dim Y > 0$. Per tant, si provem l'existència d'una fibra de dimensió zero haurem arribat a una contradicció i, per tant tindrem que el morfisme π_2 és exhaustiu.

Anem a provar, doncs, l'existència d'una superfície amb un nombre finit de rectes. Considerem la superfície S donada pel polinomi $F = X_0X_1X_2 - X_3^3$. La intersecció de la superfície S i el pla Π amb equació $X_3 = 0$ consisteix exactament en tres rectes. Per altra banda, les rectes contingudes en S però no al pla Π podem trobar-les considerant $X_3 = 1$ i estudiar la restricció afí de la superfície S, que vindrà donada pel polinomi $f = X_0X_1X_2 - 1$. Sigui L una recta qualsevol, que podem parametritzar segons

$$(a_0, a_1, a_2) + \lambda(v_0, v_1, v_2), \text{ amb } \lambda \in \mathbb{C}$$

Si $L \subset S$ tenim que

$$(a_0 + \lambda v_0)(a_1 + \lambda v_1)(a_2 + \lambda v_2) = 1, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

per tant, obtenim el següent sistema d'equacions

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3 &= 1 \\ v_1a_2a_3 + a_1v_2a_3 + a_1a_2v_3 &= 0 \\ v_1v_2a_3 + v_1a_2v_3 + a_1v_2v_3 &= 0 \\ v_1v_2v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Per la primera equació obtenim que tots els termes $a_i \neq 0$ i per la quarta equació obtenim que algun terme $v_i = 0$. Ara bé, per la tercera equació obtenim que hi ha un segon terme $v_j = 0$. Finalment, per la segona equació obtenim que tots els termes $v_i = 0$. Per tant, com que la recta L es redueix al punt (a_0, a_1, a_2), no hi ha més rectes contingudes a la superfície S. ∎

Havent provat la existència de com a mínim una recta continguda en qualsevol superfície cúbica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, anem a estudiar les superfícies cúbiques regulars. Enunciem, en primer lloc, un lema que utilitzarem més endavant.

Lema 2.26. *Sigui $S \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ una superfície algebraica regular cúbica. Llavors*

a) *no existeixen tres rectes independents $L_1, L_2, L_3 \subset S$ i un punt $p \in S$ tals que les tres rectes L_1, L_2, L_3 passen pel punt p;*

b) *no existeix un un pla $\Pi \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ que intersequi la superfície S en una recta doble i una tercera recta.*

Demostració. Per provar (a) suposem que $L_1, L_2, L_3 \subset S$ són tres rectes contingudes en S tals que existeix un punt $p \in S$ pel qual $p \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$. Si les rectes són independents, no estan contingudes en un mateix pla i, per tant, generen tot l'espai projectiu $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Així doncs, l'espai tangent $\hat{T}_pS$ té dimensió 3, el qual contradiu el fet que p sigui un punt regular.

Per provar (b) suposem que la superfície S ve descrita pel polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Suposem que el pla Π, amb equació $X_0 = 0$, interseca la superfície S en $2L + L'$, on $L, L' \subset S$ són rectes. Podem escollir les coordenades de manera que les equacions de la recta L siguin $X_0 = X_1 = 0$ i de la recta L' siguin $X_0 = X_2 = 0$. Llavors, el polinomi F pren la forma

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2 + X_0Q(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

on $Q \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ és un polinomi homogeni tal que $\deg G = 2$. Llavors tenim que

$$\nabla F = \left(Q + X_0\frac{\partial Q}{\partial X_0}, 2X_1X_2 + X_0\frac{\partial Q}{\partial X_1}, X_1^2 + X_0\frac{\partial Q}{\partial X_2}, X_0\frac{\partial Q}{\partial X_3} \right).$$

Ara bé, en la intersecció de la recta L amb la superfície quàrtica $S' = V(Q)$ hi ha necessàriament punts singulars de la superfície S, el qual contradiu que S sigui regular. ∎

Prenem una superfície cúbica regular $S = V(F) \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ i sigui $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ un polinomi reduït. Com hem vist anteriorment, podem assumir que existeix una recta $L \subset S$. Escollint les coordenades adequadament tenim que la recta L ve descrita per les equacions $X_0 = X_1 = 0$. D'aquesta manera, el polinomi F pren la forma

$$\begin{aligned} F(X_0, X_1, X_2, X_3) = {} & A_1(X_0, X_1)X_2^2 + B_1(X_0, X_1)X_3^2 + 2D_1(X_0, X_1)X_2X_3 + \\ & + 2E_2(X_0, X_1)X_2 + 2F_2(X_0, X_1)X_3 + C_3(X_0, X_1), \end{aligned}$$

on $A_1, B_1, D_1, E_2, F_2, C_3$ són polinomis homogenis i el seu subíndex denota el seu grau.

Considerem ara el pla Π_λ donat per l'equació $X_1 = \lambda X_0$, de manera que $L \subset \Pi_\lambda$. La intersecció $S \cap \Pi_\lambda$ resulta en la línia L i una cònica residual Q_λ. Volem estudiar per quins valors del paràmetre λ aquesta cònica Q_λ esdevé dues rectes diferents. Veiem aquest resultat amb el següent lema.

Lema 2.27. *En la notació anterior, hi ha exactament* 5 *valors del paràmetre* λ *pels quals la cònica* Q_λ *està formada per dues rectes diferents. En particular, hi ha exactament* 10 *rectes diferents contingudes a* S *que interseguen la recta* L*.*

Demostració. Si substituïm $X_1 = \lambda X_0$ en l'expressió del polinomi F obtenim

$$\begin{aligned} F = X_0\,(& A_1(1, \lambda)X_2^2 + B_1(1, \lambda)X_3^2 + 2D_1(1, \lambda)X_2X_3 + \\ & 2X_0E_2(1, \lambda)X_2 + 2X_0F_2(1, \lambda)X_3 + X_0^2C_3(1, \lambda). \end{aligned}$$

Per tant, podem escriure la matriu de la cònica Q_λ en les variables X_0, X_2, X_3 com

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} C_3(1,\lambda) & F_2(1,\lambda) & E_2(1,\lambda) \\ F_2(1,\lambda) & B_1(1,\lambda) & D_1(1,\lambda) \\ E_2(1,\lambda) & D_1(1,\lambda) & A_1(1,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Notem que $p(\lambda) = \det M_\lambda \in \mathbb{C}[\lambda]$ és un polinomi tal que $\deg p(\lambda) \leq 5$. Podem assumir que $p(\lambda) \neq 0$, doncs llavors per qualsevol valor de λ la intersecció $S \cap \Pi_\lambda$ dona lloc a tres rectes, però hem vist que en general el nombre de rectes contingudes a la superfície S és un nombre finit. Tenim que per les arrels d'aquest polinomi la cònica Q_λ és degenerada. Podem assumir que $\lambda = 0$ és una arrel del polinomi $p(\lambda)$, el qual correspon al cas en què el pla Π_0 té equació $X_1 = 0$ i interseca la superfície S en tres rectes, L, L_1 i L_2. Notem que aquestes rectes són necessàriament diferents per l'apartat (b) del Lema 2.26.

A continuació anem a veure que $\lambda = 0$ és una arrel simple del polinomi $p(\lambda)$. Amb el mateix raonament aplicat a qualsevol de les altres arrels obtenim que en la superfície S hi ha exactament 5 còniques Q_λ degenerades. Considerem els següents casos:

Si $L_1 \cap L_2 \notin L$. Podem escriure el polinomi F com

$$F = 2X_0X_2X_3 + X_1Q(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

on $Q \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ és un polinomi homogeni amb $\deg G = 2$ de la forma

$$aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 + dX_3^2 + 2eX_0X_1 + 2fX_0X_2 + 2gX_0X_3 + 2hX_1X_2 + 2iX_1X_3 + 2jX_2X_3.$$

Si substituïm $X_1 = \lambda X_0$, la matriu de la cònica Q_λ en les variables X_0, X_2, X_3 és

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} a\lambda + 2e\lambda^2 + b\lambda^3 & f\lambda + h\lambda^2 & g\lambda + i\lambda^2 \\ f\lambda + h\lambda^2 & c\lambda & 1 + j\lambda \\ g\lambda + i\lambda^2 & 1 + j\lambda & d\lambda \end{pmatrix}.$$

Així doncs, el polinomi $p(\lambda)$ pren la forma

$$p(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} a + 2e\lambda + b\lambda^2 & f\lambda + h\lambda^2 & g\lambda + i\lambda^2 \\ f + h\lambda & c\lambda & 1 + j\lambda \\ g + i\lambda & 1 + j\lambda & d\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ f & 0 & 1 \\ g & 1 & 0 \end{vmatrix} + O(\lambda^2) = -a\lambda + O(\lambda^2).$$

Ara bé, necessàriament tenim que $a \neq 0$, doncs en cas que $a = 0$ obtenim que el punt $q = (1, 0, 0, 0) \in S$ és singular, ja que

$$\nabla F = \left(2X_2X_3 + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_0}, Q + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_1}, 2X_0X_3 + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_2}, 2X_0X_2 + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_3} \right),$$

i, per tant, $\nabla F(q) = (0, 0, 0, 0)$. Així doncs, $\lambda = 0$ és una arrel simple del polinomi $p(\lambda)$ i aquest polinomi no és trivial. Per tant, existeixen plans que intersequen la superfície S en la recta L i una cònica no degenerada, i podem assumir que el pla Π_0 n'és un.

Finalment, de l'expressió que hem provat anteriorment del polinomi $p(\lambda)$ obtenim que el coeficient del terme de grau 5 és

$$\rho = \begin{vmatrix} b & h & i \\ h & c & j \\ i & j & d \end{vmatrix}.$$

Ara bé, notem que $\rho = 0$ si, i només si, la cònica $Q(0, X_1, X_2, X_3) = 0$ és degenerada, però això suposa que el pla Π_0 interseca la superfície S en tres rectes, arribant així a una contradicció. Per tant, tenim que $\deg p(\lambda) = 5$.

Si $L_1 \cap L_2 \in L$. En aquest cas podem escriure el polinomi F com

$$F = 2X_0X_3(X_0 - X_3) + X_1 Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$$

on $Q \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ és un polinomi homogeni amb $\deg G = 2$ de la forma

$$aX_0^2 + bX_1^2 + cX_2^2 + dX_3^2 + 2eX_0X_1 + 2fX_0X_2 + 2gX_0X_3 + 2hX_1X_2 + 2iX_1X_3 + 2jX_2X_3.$$

Si substituïm $X_1 = \lambda X_0$, la matriu de la cònica Q_λ en les variables X_0, X_2, X_3 resulta

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} a\lambda + 2e\lambda^2 + b\lambda^3 & f\lambda + h\lambda^2 & g\lambda + i\lambda^2 + 1 \\ f\lambda + h\lambda^2 & c\lambda & j\lambda \\ g\lambda + i\lambda^2 + 1 & j\lambda & d\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, el polinomi $p(\lambda)$ pren la forma

$$p(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} a\lambda + 2e\lambda^2 + b\lambda^3 & f + h\lambda & g\lambda + i\lambda^2 + 1 \\ f\lambda + h\lambda^2 & c & j\lambda \\ g\lambda + i\lambda^2 + 1 & j & d\lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & f & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & j & -1 \end{vmatrix} + O(\lambda^2) = -c\lambda + O(\lambda^2).$$

Ara bé, necessàriament tenim que $c \neq 0$, doncs en cas que $c = 0$ obtenim que el punt $q = (0, 1, 0, 0) \in S$ és singular, ja que

$$\nabla F = \left(2X_3(2X_0 - X_3) + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_0}, Q + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_1}, X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_2}, 2X_0(X_0 - 2X_3) + X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_3} \right),$$

i, per tant, $\nabla F(q) = (0,0,0,0)$. Així doncs, $\lambda = 0$ és una arrel simple del polinomi $p(\lambda)$ i aquest polinomi no és trivial. Podem veure que $\deg p(\lambda) = 5$ amb un argument idèntic a l'altre cas. ∎

Finalment, obtenim el resultat buscat en aquesta secció.

Teorema 2.28. *Tota superfície cúbica regular conté* 27 *rectes.*

Demostració. Sigui $S \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ una superfície cúbica regular. Fixem un pla Π que interseca la superfície S en tres rectes L_1, L_2, L_3, l'existència del qual ens ve donada pels arguments exposats en el Lema 2.27. Tota recta L continguda a la superfície S interseca el pla Π, per tant interseca alguna de les rectes L_i, i només una per l'apartat (a) del Lema 2.26. Així doncs, totes les rectes contingudes a la superfície S o bé intersequen una de les rectes L_i o bé són les rectes L_i contingudes al pla Π.

Pel Lema 2.27, hi ha 10 rectes diferents contingudes a la superfície S que intersequen L_1, però dues són L_2 i L_3. Per tant, hi ha 8 rectes diferents fora del pla Π que intersequen L_1. Podem assegurar el mateix de les rectes L_2 i L_3. Per tant, el nombre total de rectes contingudes en la superfície S és $3 \cdot 8 + 3 = 27$, com volíem veure. ∎

En la Figura 7 podem veure una representació de la superfície de Clebsch, una superfície cúbica regular per la qual les 27 rectes es poden definir sobre els nombres reals.

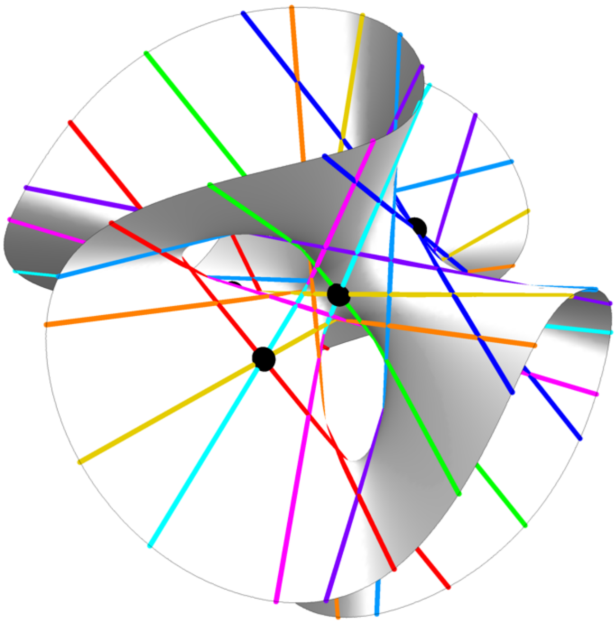

Figura 7: Les 27 rectes de la superfície de Clebsch. Font: [Ega22]

3 27 rectes i 28 bitangents

En aquesta darrera secció volem trobar una relació entre les 27 rectes inscrites en una superfície cúbica regular de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, que hem vist en el Teorema 2.28, i les 28 rectes bitangents d'una corba plana quàrtica regular, que hem vist en el Corol·lari 1.55.

Aquest resultat es pot trobar a [Bel+09], en què s'utilitza diversos resultats de Teoria de Feixos i de Geometria Algebraica. Proposarem una solució que eviti utilitzar moltes eines que s'escapin de l'abast d'aquest treball.

3.1 *Blow-Up* o Esclatament

En aquest apartat introduirem el *blow-up* o esclatament, un resultat que necessitarem per solucionar el problema que volem resoldre. Anem a definir-lo.

Definició 3.1. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu i sigui $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un punt. Definim el* ***blow-up de l'espai*** $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ***al punt*** *p com el subconjunt de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) := (\{p\} \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) \cup \{(x, L) \in (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus \{p\}) \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \mid x \in L\},$$

on $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ denota el conjunt de rectes de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ que passen pel punt p.

Podem interpretar el *blow-up* $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ com el conjunt d'elements $(x, L) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ tals que L és una recta que passa pel punt p i conté el punt x. Notem que tots els elements de la forma (p, L) estan continguts al *blow-up* $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$. Més endavant veurem que aquest elements formen el divisor excepcional del *blow-up*.

Considerem ara un punt qualsevol $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Amb l'elecció adequada de coordenades podem assumir que $p = (1 : p_1 : \ldots : p_n)$. En aquestes coordenades podem veure que un element $((x_0 : x_1 : \ldots : x_n), (z_1 : \ldots : z_n)) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ està contingut al *blow-up* $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ si anul·la els polinomis

$$(X_i - pi)Z_j - (X_j - pj)Z_i, \qquad \text{amb } 1 \leq i, j \leq n.$$

Així doncs, podem dotar el *blow-up* $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ d'una estructura de varietat algebraica. Considerem ara la projecció

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) &\longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ (x, L) = ((x_0 : x_1 : \ldots : x_n), (z_1 : \ldots : z_n)) &\longrightarrow x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n). \end{aligned}$$

Com que podem expressar la projecció com una aplicació polinòmica, tenim que π és un morfisme de varietats algebraiques. Aquest morfisme ens permet definir formalment el divisor excepcional.

Definició 3.2. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu, sigui $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un punt i sigui $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ el blow-up de l'espai $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ al punt p. Anomenem* ***divisor excepcional*** *del blow-up $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ al conjunt*

$$E := \pi^{-1}(\{p\}) \subset \mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})).$$

En la Figura 8 podem veure una representació conceptual del *blow-up* $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}))$.

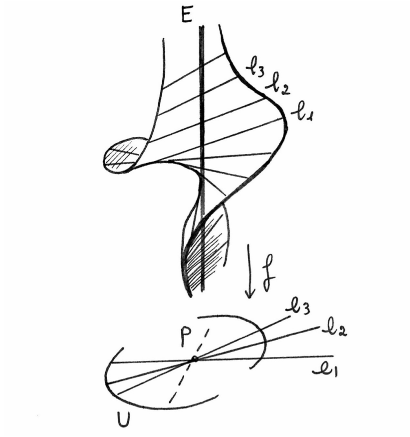

Figura 8: *Blow-up* del pla $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ al punt p. Font: [Mau18]

A continuació anem a generalitzar la definició de *blow-up* en una varietat algebraica.

Definició 3.3. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu, sigui $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ una varietat algebraica i sigui $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un punt. Definim el* ***blow-up de la varietat algebraica*** X ***al punt*** p *com*

$$\mathbb{B}_p(X) := \overline{\pi^{-1}(X \setminus \{p\})},$$

és a dir, la clausura de $\pi^{-1}(X \setminus \{p\})$ en $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ amb la topologia de Zariski. Anomenem ***divisor excepcional*** *del blow-up $\mathbb{B}_p(X)$ al conjunt*

$$E := \left(\pi|_{\mathbb{B}_p(X)}\right)^{-1}(\{p\}) \subset \mathbb{B}_p(X).$$

Anem a interpretar el *blow-up* $\mathbb{B}_p(H)$ d'una hipersuperfície algebraica $H \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Notem que la projecció π és un isomorfisme quan en considerem la restricció a $\mathbb{B}_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \setminus \pi^{-1}(p)$. Aixi doncs, $\mathbb{B}_p(H) \setminus \pi^{-1}(p)$ és isomorf a $H \setminus \{p\}$ i tenim que $\pi^{-1}(H \setminus \{p\})$ està format pels elements (x, L) tals que $x \in H$ i L és una recta que passa pel punt p i conté el punt x.

Amb la següent proposició anem a donar una representació com a conjunt del *blow-up* $\mathbb{B}_p(H)$ d'una hipersuperfície algebraica H.

Proposició 3.4. *Sigui $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un espai projectiu, sigui $H \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ una hipersuperfície algebraica i sigui $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un punt. En la notació anterior, podem expressar el blow-up $\mathbb{B}_p(H)$ de la hipersuperfície algebraica H al punt p com*

$$\mathbb{B}_p(H) = \pi^{-1}(H \setminus \{p\}) \ \cup \ (\{p\} \times TC_pH)\,.$$

Demostració. Hem de veure que $\mathbb{B}_p(H) \cap E = (\{p\} \times TC_pH)$. En primer lloc, si escollim un sistema de coordenades de manera que $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$ tenim que els punts de la forma $((x_0 : x_1 : \ldots : x_n), (z_1 : \ldots : z_n)) \in \pi^{-1}(H \setminus \{p\})$ anul·len la família de polinomis

$$X_iZ_j - X_jZ_i, \qquad \text{amb } 1 \leq i, j \leq n.$$

Així doncs, tenim que $\pi^{-1}((x_0 : x_1 : \ldots : x_n)) = ((x_0 : x_1 : \ldots : x_n), (x_1 : \ldots : x_n))$.

Fixem ara un obert afí $\mathbb{C}^n$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Podem identificar els elements $L \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ amb les classes mòdul producte per un escalar $k \in \mathbb{C}$ dels vectors $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ de manera que v és un vector director de la recta L, considerant en $\mathbb{C}^n$ una estructura d'espai vectorial. Situem-nos en l'espai $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Per veure que $(\{p\} \times TC_pH) \subset \mathbb{B}_p(H) \cap E$ prenem un punt $q \notin TC_pH$ i una recta $L \in TC_pH$, que serà una recta tangent a la superfície S al punt p. La intersecció del pla $\Pi = q \vee L$ amb la hipersuperfície H forma una corba plana continguda al pla Π. Podem considerar una parametrització local d'aquesta corba en un entorn del punt p, que vindrà donada per una col·lecció de funcions analítiques $x_i(s)$ tals que

$$x(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s)) \qquad \text{i} \qquad x(0) = p.$$

En cas que p sigui un punt singular, podem prendre una parametrització local d'una branca de la corba per la qual la recta L sigui tangent al punt p. Si calculem l'antiimatge per la projecció π de qualsevol punt diferent de p de l'entorn en què hem definit la parametrització local obtenim que

$$\pi^{-1}(x(s)) = ((x_1(s), \dots, x_n(s)), (x_1(s), \dots, x_n(s))) = \\ \left((x_1(s), \dots, x_n(s)), \left(\frac{x_1(s)}{s}, \dots, \frac{x_n(s)}{s} \right) \right),$$

on hem usat que els vectors $(x_1(s), \dots, x_n(s))$ i $\left(\frac{x_1(s)}{s}, \dots, \frac{x_n(s)}{s}\right)$ són de la mateixa classe. Així doncs, veiem que

$$\lim_{s \to 0} \pi^{-1}(x(s)) = \big((x_1(0), \dots, x_n(0)), \big(x_1'(0), \dots, x_n'(0)\big)\big) = (p, L),$$

on $(x_1'(0), \dots, x_n'(0))$ correspon al vector tangent de la corba al punt p en la parametrització local. Així doncs, el punt (p, L) està a l'adherència de $\pi^{-1}(H \setminus \{p\})$, com volíem veure.

D'altra banda, anem a veure que $\mathbb{B}_p(H) \cap E \subset (\{p\} \times TC_pH)$. Com que els punts $(p, L) \in \mathbb{B}_p(H) \cap E$ es troben a l'adherència $\pi^{-1}(H \setminus \{p\})$, ens hi podem aproximar a través d'una successió d'elements (x, L_x), amb x punts d'una corba continguda a la hipersuperfície H, que podem prendre sobre un pla. Ara bé, com que fora del divisor excepcional E la projecció π és un isomorfisme, també podem considerar la successió d'elements $\pi(x, L_x)$. Tenim que el límit de les dues successions ens han de portar al mateix lloc i ja hem vist que, amb aquesta construcció, el límit ens porta a un element de la forma (p, L), amb $L \in TC_pH$. ∎

Finalment, considerem la següent projecció, que utilitzarem més endavant

$$\begin{aligned} \varphi_H : \mathbb{B}_p(H) &\longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \\ (x, L) = ((x_0 : x_1 : \ldots : x_n), (z_1 : \ldots : z_n)) &\longrightarrow L = (z_1 : \ldots : z_n). \end{aligned}$$

De nou, com que podem expressar-la en termes de polinomis, tenim que φ_H és un morfisme de varietats algebraiques.

3.2 De 27 rectes a 28 bitangents

En aquest apartat final construirem un mètode per transformar les 27 rectes inscrites en una superfície algebraica cúbica regular de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ en les 28 rectes bitangents d'una corba plana quàrtica regular. Aquest resultat només el provarem per a una superfície cúbica regular general. Anem a donar un esquema del procediment que seguirem.

En primer lloc, prendrem una superfície cúbica regular $S \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ general, fixarem un punt $p \in S$ no contingut en cap recta de la superfície i fixarem un pla $\Pi \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ complementari al punt p.

Llavors, considerarem l'aplicació que projecta els punts $x \in S \setminus \{p\}$ a la intersecció de la recta $x \vee p$ amb el pla Π

$$\begin{aligned} S \setminus \{p\} &\longrightarrow \Pi \\ x &\longrightarrow (x \vee p) \cap \Pi. \end{aligned}$$

Aquesta aplicació l'estendrem a través del *blow-up* $\mathbb{B}_p(S)$ de la superfície S al punt p. Per això, considerarem la projecció φ_S del *blow-up* $\mathbb{B}_p(S)$ a $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, el conjunt de rectes de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ que passen pel punt p, i n'intersecarem la imatge amb el pla Π, obtenint

$$\begin{aligned} \varphi : S \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{B}_p(S) \longrightarrow \Pi \\ x &\longrightarrow (x, L) \longrightarrow L \cap \Pi = (x \vee p) \cap \Pi, \end{aligned}$$

on l'aplicació $S \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{B}_p(S)$ ve donada per l'isomorfisme $S \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{B}_p(S) \setminus E$.

Podem veure que la fibra d'aquesta aplicació en un punt $y \in \Pi$ general està formada per dos elements. Això es deu al fet que la recta $y \vee p$ interseca la superfície S, en general, en tres punts, x_1, x_2 i el punt p. Llavors, la fibra general consisteix en els elements x_1 i x_2.

Veurem que podem definir una corba plana quàrtica C continguda al pla Π a partir del conjunt de punts pels quals la fibra de l'aplicació està formada per només un element, és a dir, quan la recta L és tangent a la superfície cúbica S. Així mateix, també veurem que la projecció amb l'aplicació anterior dels punts de qualsevol recta continguda a la superfície S dona lloc a una recta del pla Π que és bitangent a la corba C.

Finalment, demostrarem que el divisor excepcional E del *blow-up* $\mathbb{B}_p(S)$ intersecat amb el pla Π també dona lloc a una nova recta del pla Π bitangent a la corba C.

Anem a veure-ho en detall.

Sigui $S \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ una superfície cúbica regular. Pel Teorema 2.28, la superfície S conté 27 rectes. Podem escollir les coordenades de manera que dues d'aquestes rectes, L_1 i L_2, vinguin donades per les equacions

$$L_1 : X_0 = X_1 = 0 \qquad\qquad L_2 : X_2 = X_3 = 0.$$

Amb tot això, podem associar a la superfície S un polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ que podem escriure segons

$$F = X_0 G_0 + X_1 G_1,$$

on $G_0, G_1 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ són polinomis de grau 2 de la següent forma

$$G_0 = a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{02}X_0X_2 + 2a_{03}X_0X_3 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3$$
$$G_1 = b_{22}X_2^2 + b_{33}X_3^2 + 2b_{02}X_0X_2 + 2b_{03}X_0X_3 + 2b_{12}X_1X_2 + 2b_{13}X_1X_3 + 2b_{23}X_2X_3$$

Fixem un punt $p \in S$ que no estigui contingut en cap de les 27 rectes de la superfície S. Escollint les coordenades adequadament podem escriure $p = (1 : 0 : 1 : 0)$. Com que el polinomi F s'ha d'anul·lar en el punt p, obtenim que $a_{22} + 2a_{02} = 0$.

Fixem també un pla $\Pi \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ qualsevol que no contingui el punt p. En particular, podem prendre el pla donat per l'equació $X_0 = 0$.

Sigui $\mathbb{B}_p(S)$ el *blow-up* de la superfície S al punt p. Considerem l'extensió de l'aplicació $S \setminus \{p\} \longrightarrow \Pi$ a través de $\mathbb{B}_p(S)$, que tal com hem vist abans podem escriure com

$$\begin{aligned} \varphi : S \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{B}_p(S) \longrightarrow \Pi \\ x &\longrightarrow (x, L) \longrightarrow L \cap \Pi = (x \vee p) \cap \Pi. \end{aligned}$$

Notem que un element $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in S \setminus \{p\}$ qualsevol es projecta a

$$((x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \vee (1 : 0 : 1 : 0)) \cap \Pi = (0 : x_1 : x_2 - x_0 : x_3).$$

Anem a veure que podem construir una corba quàrtica regular al pla Π a partir de l'anterior aplicació.

Proposició 3.5. *Amb la notació anterior, si la superfície cúbica S és suficientment general, el conjunt de punts del pla Π pels quals la fibra de l'aplicació φ està formada per només un punt formen una corba plana quàrtica.*

Demostració. Prenem un punt $y \in \Pi$ del pla, que és de la forma $y = (0 : \alpha : \beta : \gamma)$. Podem escriure un punt qualsevol de la recta $L = y \vee p$ segons la següent parametrització

$$(\lambda, \mu\alpha, \lambda + \mu\beta, \mu\gamma), \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Per poder calcular la fibra de l'aplicació φ en el punt y anem a calcular la intersecció de la recta L i la superfície S. Si substituïm la parametrització d'un punt qualsevol de la recta L al polinomi F de la superfície obtenim que els punts d'intersecció de la recta L i la superfície S satisfaran la següent equació

$$\begin{gathered} \lambda(a_{22}(\lambda + \mu\beta)^2 + a_{33}\gamma^2\mu^2 + 2a_{02}\lambda(\lambda + \mu\beta) + 2a_{03}\lambda\mu\gamma + \\ 2a_{12}\mu\alpha(\lambda + \mu\beta) + 2a_{13}\mu^2\alpha\gamma + 2a_{23}(\lambda + \mu\beta)\mu\gamma) + \\ \mu\alpha(b_{22}(\lambda + \mu\beta)^2 + b_{33}\gamma^2\mu^2 + 2b_{02}\lambda(\lambda + \mu\beta) + 2b_{03}\lambda\mu\gamma + \\ 2b_{12}\mu\alpha(\lambda + \mu\beta) + 2b_{13}\mu^2\alpha\gamma + 2b_{23}(\lambda + \mu\beta)\mu\gamma) = 0 \end{gathered}$$

Si tenim en compte que $a_{22} + 2a_{02} = 0$, obtenim que el terme λ^3 s'anul·la. D'aquesta manera, podem treure un factor comú μ i podem escriu l'anterior equació de la següent manera

$$\mu \left(C_{20}\lambda^2 + C_{11}\lambda\mu + C_{02}\mu^2 \right),$$

on els coeficients $C_{20}, C_{11}, C_{02} \in \mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$ venen donats per

$$\begin{aligned} C_{20} &= a_{22}\beta + 2a_{03}\gamma + 2a_{12}\alpha + 2a_{23}\gamma + b_{22}\alpha + 2b_{02}\alpha, \\ C_{11} &= a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma + \\ &\quad 2b_{22}\alpha\beta + 2b_{02}\alpha\beta + 2b_{03}\alpha\gamma + 2b_{12}\alpha^2 + 2b_{23}\alpha\gamma, \\ C_{02} &= b_{22}\alpha\beta^2 + b_{33}\alpha\gamma^2 + 2b_{12}\alpha^2\beta + 2b_{13}\alpha^2\gamma + 2b_{23}\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

Notem que la solució $\mu = 0$ de l'anterior equació està associada al punt $p = (1 : 0 : 1 : 0)$ d'intersecció de la recta L i la superfície S.

Volem buscar els punts $y \in \Pi$ tals que la fibra de l'aplicació φ en aquests punts estigui formada per només un element, és a dir, tals que la recta L interseca la superfície S en només un punt diferent de p. Aquesta condició és equivalent a que el polinomi $C_{20}\lambda^2 + C_{11}\lambda\mu + C_{02}\mu^2$ només tingui una solució, per tant hem de considerar els punts y del pla Π en què s'anul·la el discriminant d'aquest polinomi, que podem escriure com

$$D = C_{11}^2 - 4C_{20}C_{02} \in \mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$$

Notem que el conjunts de punts en què s'anul·la el polinomi discriminant D defineix una corba plana quàrtica $C = V(D)$ continguda al pla Π, com volíem veure.

Ens queda veure que, si la superfície S és suficientment general, aquesta corba és regular. Podem parametritzar el conjunt de totes les corbes planes quàrtiques de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ amb l'espai projectiu $\mathbb{P}_{14}(\mathbb{C})$, ja que qualsevol corba plana quàrtica vindrà donada per un polinomi homogeni $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ de grau 4, format doncs per 15 coeficients únicament determinats llevat del producte per un factor no nul. D'altra banda, hem vist que podem parametritzar les superfícies cúbiques regulars de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ amb 13 coeficients tals que dos dels coeficients estan repetits i que de nou tots els coeficients estan unívocament determinats llevats d'un producte per un escalar no nul. Per tant, la parametrització de les superfícies cúbiques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ve donada per l'espai projectiu $\mathbb{P}_{10}(\mathbb{C})$. Així doncs, tenim que amb la família de superfícies cúbiques no podem obtenir totes les quàrtiques, sinó només la imatge de l'espai $\mathbb{P}_{10}(\mathbb{C})$ en l'espai $\mathbb{P}_{14}(\mathbb{C})$ de les quàrtiques, que és un tancat per Teorema de l'Eliminació (2.22).

Dins de l'espai $\mathbb{P}_{14}(\mathbb{C})$ considerem el conjunt de les quàrtiques regulars, que és un obert en la topologia de Zariski perquè les quàrtiques singulars són aquelles a les quals se'ls anul·la el gradient i, per tant, defineixen un conjunt tancat, que no és el total perquè tenim quàrtiques no singulars.

Finalment, necessitem veure que el conjunt tancat imatge de l'espai $\mathbb{P}_{10}(\mathbb{C})$ i l'obert de les quàrtiques regulars es tallen. En tal cas, com que els conjunts oberts en la topologia de Zariski són densos en tots els subconjunts, tenim que l'obert de les quàrtiques regulars és dens en el subconjunt tancat imatge de l'espai $\mathbb{P}_{10}(\mathbb{C})$, amb la topologia de Zariski induïda per ser un subespai tancat, per tant obtenim que, en general, la quàrtica que obtenim a partir d'una superfície cúbica regular de $\mathbb{P}_{10}(\mathbb{C})$ és regular. Així doncs, només ens falta veure que els dos subconjunts es tallen, és a dir, que existeix una cúbica regular associada a una quàrtica també regular.

Considerem la superfície cúbica donada pel polinomi

$$F = X_0X_2^2 - X_0^2X_2 + X_0X_3^2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3,$$

que correspon a considerar $a_{22} = 1$, $a_{02} = -\frac{1}{2}$, $a_{33} = 1$, $b_{22} = 1$ i $b_{13} = \frac{1}{2}$. Per veure que aquesta superfície és regular considerem el gradient del polinomi F

$$\nabla F = (X_2^2 - 2X_0X_2 + X_3^2, X_2^2 + 2X_1X_3, 2X_0X_2 - X_0^2 + 2X_1X_2, 2X_0X_3 + X_1^2)$$

i veiem que no s'anul·la en cap punt $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Si $X_1 = 0$ obtenim la solució trivial, que no és possible en $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Per contra, prenent $X_1 = 1$, obtenim que $X_0, X_2, X_3 \neq 0$ i el problema es redueix a provar que els polinomis

$$f_1 = X^5 + 4X^3 - 8 \qquad\qquad f_2 = 2X^5 + 2X^3 - 1$$

no tenen cap arrel comuna. Com que la resultant $R_{f_1,f_2} \neq 0$, pel Teorema A.2 obtenim el resultat que busquem.

Utilitzant l'expressió analítica que hem trobat anteriorment, podem associar a aquesta superfície cúbica la corba quàrtica que ve donada pel polinomi

$$D = \beta^4 + \gamma^4 + 4\alpha\beta\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta\gamma - 4\alpha^3\gamma.$$

De nou, per veure que la corba és regular considerem el gradient del polinomi D

$$\begin{aligned}\nabla D = (&4\beta\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma - 12\alpha^2\gamma, 4\beta^3 + 4\alpha\gamma^2 + 4\beta\gamma^2 - 4\alpha^2\gamma,\\ &4\gamma^3 + 8\alpha\beta\gamma + 4\beta^2\gamma - 4\alpha^2\beta - 4\alpha^3)\end{aligned}$$

i veiem que no s'anul·la en cap punt de la corba quàrtica amb un argument similar al que hem fet servir per provar que la superfície era regular. Si $\gamma = 0$ obtenim la solució trivial, que no és acceptable, i si prenem $\gamma = 1$ obtenim que $\alpha \neq \frac{1}{2}$ i el problema es redueix de nou a provar que els polinomis

$$g_1 = 27X^4 - 19X^3 + 11X^2 - 5X + 1 \qquad g_2 = 2X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 5X + 1$$

no tenen cap arrel comuna. Com que la resultant $R_{g_1,g_2} \neq 0$, amb el Teorema A.2 obtenim el resultat esperat. ∎

Amb la següent proposició trobem la relació entre les rectes inscrites a la superfície S i les rectes bitangents de la corba C.

Proposició 3.6. *Amb la notació anterior, la projecció de qualsevol recta inscrita a la superfície S dona lloc a una recta al pla Π bitangent a la corba C.*

Demostració. Per provar aquest resultat serà suficient estudiar la projecció de la recta $L_2 \subset S$, donada per les equacions $X_2 = X_3 = 0$, doncs aquesta recta s'ha escollit amb tota generalitat. Si prenem un punt qualsevol d'aquesta recta, $q = (x_0 : x_1 : 0 : 0)$, obtenim que es projecta al punt $(0 : x_1 : x_2 : 0)$. Per tant, la projecció de la recta L_2 dona lloc a una recta del pla Π que, en les coordenades locals $(0 : \alpha : \beta : \gamma)$ del pla, té equació $\gamma = 0$.

Considerem la intersecció d'aquesta recta amb la corba plana quàrtica C. Podem trobar els punts d'intersecció prenent $\gamma = 0$ en l'expressió del polinomi de la corba C i, d'aquesta manera, obtenim el següent

$$\begin{aligned}&(C_{11}(\alpha,\beta,0))^2 - 4C_{20}(\alpha,\beta,0)C_{02}(\alpha,\beta,0) = 0 \implies\\ &a_{22}^2\beta^4 + 4a_{22}a_{12}\alpha\beta^3 + 4a_{22}b_{02}\alpha\beta^3 - 4a_{22}b_{12}\alpha^2\beta^2 + 4a_{12}\alpha^2\beta^2 +\\ &+ 8a_{12}b_{02}\alpha^2\beta^2 - 8a_{12}b_{12}\alpha^3\beta + 4b_{02}^2\alpha^2\beta^2 - 8b_{02}b_{12}\alpha^3\beta + 4b_{12}^2\alpha^4 = 0.\end{aligned}$$

Si fem el canvi $a_{22} = -2a_{02}$, podem obtenir la següent factorització

$$\begin{aligned}&4a_{02}^2\beta^4 - 8a_{02}a_{12}\alpha\beta^3 - 8a_{02}b_{02}\alpha\beta^3 + 8a_{02}b_{12}\alpha^2\beta^2 + 4a_{12}\alpha^2\beta^2 +\\ &+ 8a_{12}b_{02}\alpha^2\beta^2 - 8a_{12}b_{12}\alpha^3\beta + 4b_{02}^2\alpha^2\beta^2 - 8b_{02}b_{12}\alpha^3\beta + 4b_{12}^2\alpha^4 = 0 \implies\\ &4\left(a_{02}\beta^2 - (a_{12}+b_{02})\alpha\beta + b_{12}\alpha^2\right)^2 = 0 \implies\\ &\begin{cases} 4\alpha^2\left(b_{12}\alpha - (a_{12}+b_{02})\beta\right)^2 = 0, & \text{si } a_{02} = 0\\ 4\left(2a_{02}\beta - \alpha x_+\right)^2\left(2a_{02}\beta - \alpha x_-\right)^2 = 0, & \text{si } a_{02} \neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

on $x_+ = a_{12} + b_{02} + \sqrt{(a_{12}+b_{02})^2 - 4a_{02}b_{12}}$ i $x_- = a_{12} + b_{02} - \sqrt{(a_{12}+b_{02})^2 - 4a_{02}b_{12}}$.

D'aquesta manera, obtenim que la intersecció de la corba plana quàrtica C i la recta obtinguda de la projecció d'una de les rectes contingudes a la superfície S consisteix en dos punts diferents amb multiplicitat d'intersecció 2 en cadascun. Així doncs, la recta és una bitangent de la corba C. ∎

Per acabar, anem a trobar la darrera recta bitangent de la corba quàrtica.

Proposició 3.7. *Amb la notació anterior, la intersecció del divisor excepcional E del blow-up $\mathbb{B}_p(S)$ amb el pla Π dona lloc a una altra recta bitangent de la corba C.*

Demostració. Escollim les coordenades de manera que $p = (1 : 0 : 0 : 0)$, el pla Π vingui donat per l'equació $X_0 = 0$ i el pla tangent de la superfície cúbica S al punt p sigui $TC_pS = V(X_1)$. Notem que la intersecció de $E = TC_pS$ i el pla Π dona lloc a una recta del pla Π definida per les equacions

$$L : X_0 = X_1 = 0.$$

Hem de veure que aquesta recta L és una bitangent de la quàrtica C. Pel Teorema de Bezóut (1.15), una recta L i una corba C plana quàrtica es tallen en 4 punts, comptats amb multiplicitat. Anem a veure el comportament d'aquests quatre punts d'intersecció.

En el sistema de coordenades que hem escollit tenim que la superfície cúbica S ve descrita per un polinomi $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ que podem escriure com

$$F = X_0^2 X_1 + X_0 \left(a_{22} X_2^2 + a_{23} X_2 X_3 + a_{33} X_3^2 + X_1 G_1 \right) + F_3,$$

on $G_1, F_3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ són polinomis homogenis de grau 1 i 3, respectivament. Si intersequem la superfície cúbica S amb el pla tangent TC_pS de la superfície al punt p obtenim una corba plana cúbica C' continguda al pla $X_1 = 0$ i definida pel següent polinomi

$$F' = X_0 \left(a_{22} X_2^2 + a_{23} X_2 X_3 + a_{33} X_3^2 \right) + F_3.$$

Podem assumir que el punt p és un punt doble nodal de la corba C', que és equivalent a suposar que hem escollit la superfície cúbica S de manera suficientment general perquè se satisfaci la condició $a_{23}^2 - 4a_{22}a_{33} \neq 0$. Llavors tenim que $\mathrm{ord}_p C' = 2$ i el con tangent TC_pC' de la corba C' al punt p està formada per dues rectes diferents.

D'aquesta manera, si considerem la intersecció d'una recta L' qualsevol del pla tangent TC_pS amb la corba C', que pel Teorema de Bezóut (1.15) es tallen en 3 punts comptats amb multiplicitat, podem trobar-nos amb el següent:

$$L' \cap C' = \begin{cases} \{p\} \cup \{p'\} & \text{amb } \mathrm{mult}_p(L' \cap C') = 2 \text{ i } \mathrm{mult}_{p'}(L' \cap C') = 1, \\ \{p\} & \text{amb } \mathrm{mult}_p(L' \cap C') = 3. \end{cases}$$

En el primer cas, la recta L' talla la corba cúbica C' en els punts p i p', però no és tangent en cap d'aquests punts, doncs $\mathrm{mult}_{p_i}(L' \cap C') \not> \mathrm{ord}_{p_i}(C')$ per $p_i \in \{p, p'\}$. Així doncs, el punt de la recta L en que s'intersequen el pla Π i la recta L' no està contingut a la corba quàrtica C. En el segon cas, la recta L' talla la corba cúbica C' en el punt p i, com que $\mathrm{mult}_p(L' \cap C') > \mathrm{ord}_p(C')$, tenim que la recta L' és tangent al punt p. En aquest cas, doncs, tenim que el punt de la recta L en què s'interseca el pla Π i la recta L' està contingut a la corba quàrtica C.

Ara bé, com que p és un punt doble nodal de la corba C' i el con tangent TC_pC' de la corba C' al punt p està format només per dues rectes tangents, només tindrem dos punts en què la recta L interseca la corba quàrtica C. D'altra banda, amb un canvi de coordenades podem intercanviar les dues rectes del con tangent TC_pC', així que el comportament local en els dos punts d'intersecció amb la recta L ha de ser el mateix. Així doncs, la multiplicitat d'intersecció és 2 en cada punt. Per tant, tenim que la recta L també és una recta bitangent de la corba quàrtica C, com volíem veure.

Notem que podem assumir que la recta L és diferent de les bitangents que hem obtingut projectant les rectes L'_i contingudes a la superfície S si prenem el punt p de manera suficientment general perquè el con tangent TC_pS no contingui cap de les rectes L'_i. ∎

D'aquesta manera podem concloure que hem trobat totes les 28 bitangents de la corba quàrtica C', com ens assegura el Corol·lari 1.55.

Conclusions

Aquest treball ha representat una introducció molt interessant a la Geometria Algebraica i ens n'ha permès obtenir una descripció acurada de diversos conceptes i resultats bàsics.

En aquest sentit, el plantejament inicial de dos resultats 0.1 i 0.2 i la seva demostració ha sigut una bona oportunitat per poder-nos endinsar en la teoria de corbes planes i demostrar-ne els principals resultats. Així mateix, ens ha permès introduir alguns conceptes i eines més potents, com són la Grassmaniana, les varietats algebraiques i alguns resultats de la teoria de la dimensió. Utilitzar el *blow-up* també ens ha suposat haver d'aprofundir en una eina avançada de Geometria Algebraica.

Finalment, la construcció del mètode per solucionar el problema que ens havíem plantejat ha suposat un repte important i hem pogut resoldre'l de manera satisfactòria en el cas general. Fer servir eines més avançades potser ens hauria permès resoldre el problema amb tota generalitat, però això hauria augmentat el nombre de resultat fora de l'abast del treball.

En conclusió, hem aconseguit relacionar dos resultats clàssics de Geometria Algebraica, que són en si mateixos sorprenents, d'una forma elegant i relativament intuïtiva.

Referències

[Ful69] William Fulton. *Algebraic Curves. An introduction to Algebraic Geometry*. W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry. A First Course*. Springer New York, NY, 1992.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society, 1995.

[Fis01] Gerd Fischer. *Plane Algebraic Curves*. American Mathematical Society, 2001.

[Bel+09] Mauro C. Beltrametti et al. *Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties. A Classical View of Algebraic Geometry*. European Mathematical Society, 2009.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projective Space*. Springer Berlin, Heidelberg, 2013.

[Mau18] Mirko Mauri. *Ouverture: the art of being a blow-up. Junior Geometry Seminar*. Oct. de 2018.

[NL21] Joan Carles Naranjo i Martí Lahoz. *Notes de l'assignatura Introducció a la Geometria Algebraica*. Setembre de 2021.

[Ega22] Greg Egan. *Greg Egan's Home Page*. 2022. URL: http://www.gregegan.net.

A La resultant

Definició A.1. *Sigui A un anell commutatiu unitari i siguin $f, g \in A[X]$ tals que*

$$f = a_0X^m + \cdots + a_m \qquad g = b_0X^n + \cdots + b_n.$$

Definim la **resultant** *de f i g com*

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_0 & & \cdots & \cdots & & a_m & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & a_0 & & \cdots & \cdots & & a_m \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_n & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in A.$$

Teorema A.2. *Sigui A un domini de factorització única. Siguin $f, g \in A[X]$ com en la definició anterior amb $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. Llavors les següents condicions són equivalents:*

a) *f i g tenen un factor comú de grau major o igual que 1 a $A[X]$.*

b) *$R_{f,g} = 0$ a A.*

Enunciem la primera part de la demostració del Teorema A.2 en el següent lema.

Lema A.3. *Sigui A un domini d'integritat, llavors les següents condicions són equivalents:*

i) *Existeixen $\varphi, \psi \in A[X]$ tals que $(\varphi, \psi) \neq (0, 0)$, $\deg \varphi < \deg \psi$, $\deg \psi < \deg g$ i*

$$\psi f + \varphi g = 0.$$

ii) *$R_{f,g} = 0$ a A.*

Demostració. En l'espai vectorial $A[X]_{<m+n}$ de polinomis de grau menor o igual que $m + n$ considerem els següents elements

$$X^{n-1}f, \cdots, Xf, f, X^{m-1}g, \cdots, Xg, g.$$

Les files de la resultant són les components d'aquests polinomis considerats en la base $\{X^{m+n-1}, \cdots, X, 1\}$ de $A[X]_{\leq m+n}$. Per tant, tenir $R_{f,g} = 0$ suposa que els vectors són linealment independents, doncs tenim una relació no trivial

$$\mu_0X^{n-1}f + \mu_1X^{n-2}f + \cdots + \mu_{n-1}f + \lambda_0X^{m-1}g + \lambda_1X^{m-2}g + \cdots + \lambda_{m-1}g = \\ \psi f + \varphi g = 0$$

■

Demostració. (del Teorema A.2) En un domini de factorització única veiem que les propietats (a) del Teorema A.2 (i) i (a) del Lema A.3 (ii) són equivalents.
i) $\Rightarrow$ ii). Si existeix h un factor comú, llavors $f = f_1h$ i $g = g_1$ h, on $f_1, g_1 \in A[X]$. Només

ens queda definir $\varphi = f_1$ i $\psi = -g_1$.
ii) $\Rightarrow$ i). Descomponem els polinomis $f\psi = -g\varphi$ en factors primers

$$f_1 \cdots f_r \cdot \psi_1 \cdots \psi_k = -g_1 \cdots g_s \cdot \varphi_1 \cdots \varphi_l$$

Llevat d'una unitat, els factors $g_1, \cdots, g_s$ han d'aparèixer a la factorització de l'esquerra. Com que $\deg \psi < \deg g$, com a mínim algun factor g_λ de grau major o igual que 1 ha de ser factor primer de f. $\blacksquare$

Com que en $\mathbb{C}$ tots els factors primers d'un polinomi són lineals, tenim el següent corol·lari.

Corol·lari A.4. *Siguin $f, g \in \mathbb{C}[X]$ dos polinomis tals que $\deg f, \deg g \geq 1$. Llavors les següents condicions són equivalents:*

a) *f i g tenen un zero comú.*

b) *$R_{f,g} = 0$.*

En la demostració del Teorema de Bézout utilitzem el següent teorema sobre la resultant.

Teorema A.5. *Sigui K un cos i sigui $A = K[Y_1, \ldots, Y_r]$. Sigui $f, g \in A[X]$,*

$$f = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m, \qquad g = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n,$$

on $a_0, b_0 \neq 0$ i a_μ i b_ν són polinomis homogenis de grau μ i ν, respectivament. Llavors la resultant $R_{f,g} \in A$ és un polinomi homogeni de grau $m \cdot n$ o $R_{f,g} = 0$.

Demostració. Un polinomi $a \in K[Y_1, \ldots, Y_r]$ és homogeni de grau d si, i només si, se satisfà la següent propietat

$$a(TY_1, \ldots, TY_r) = T^d a(Y_1, \ldots, Y_r).$$

Si calculem la resultant de $R_{f,g}(TY_1, \ldots, TY_r)$, els elements del determinant es multipliquen per les següents potències de T

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & m & & & \\
 & 0 & & & & m-1 & m & & \\
 & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & & & & m \\
0 & 1 & & n-1 & n & & & & \\
 & 0 & & & & n & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & & 0 & 1 & & & n
\end{pmatrix}.$$

Si multipliquem les primeres n files per successives potències $T^i, 1 \leq i \leq n$, i les últimes

m files per successives potències $T^j, 1 \leq j \leq m$, obtenim

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & & & & m+1 & & & \\
 & 2 & & & & m+1 & m+2 & & \\
 & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & n & & & & & m+n \\
1 & 2 & & n & n+1 & & & & \\
 & 2 & & & & n+2 & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & & m & m+1 & & & m+n
\end{pmatrix}.$$

Ara bé, podem obtenir el mateix resultat si multipliquem la fila k-èssima per la potència T^k. Així doncs, prenent $p = (1 + \cdots + n) + (1 + \cdots + m)$ i $q = (1 + \cdots + (m + n)$, obtenim que

$$T^p R_{f,g}(TY) = T^q R_{f,g}(Y).$$

D'altra banda, notem que $q - p = m \cdots n$. Per tant, si $R_{f,g}$ és un polinomi no nul, tenim que és un polinomi homogeni de grau $m \cdot n$. ∎

B Producte exterior d'espais vectorials

Definició B.1. *Sigui K un cos i siguin $E_1, \dots, E_s$ K-espais vectorials de dimensió finita $n_1, \dots, n_s$, respectivament. Definim el* ***producte tensorial*** *dels K-espais vectorials $E_1, \dots, E_s$, denotat per $E_1 \otimes \cdots \otimes E_s$, com l'únic K-espai vectorial de dimensió $n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$ dotat d'una aplicació multilineal*

$$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_s \longrightarrow E_1 \otimes \cdots \otimes E_s,$$

tal que per qualsevol altra aplicació multilineal d'espais vectorials $f : E_1 \times \cdots \times E_s \to V$ hi ha una única factorització de f com

$$E_1 \times \cdots \times E_s \xrightarrow{\varphi} E_1 \otimes \cdots \otimes E_s \longrightarrow V,$$

on la segona aplicació és lineal.

Podem entendre la construcció del producte tensorial de la següent manera. Considerem el K-espai vectorial F generat per tots els elements de la forma $(e_1, \dots, e_s) \in E_1 \times \cdots \times E_s$, és a dir, F està format per combinacions lineals finites d'aquests elements amb coeficients en K. Notem que és un espai vectorial de dimensió infinita. Llavors, $E_1 \otimes \cdots \otimes E_s$ és el quocient de F pel subespai generat per les relacions

$$(e_1, \dots, e_i + e_i', \dots, e_s) - (e_1, \dots, e_i, \dots, e_s) - (e_1, \dots, e_i', \dots, e_s),$$
$$(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_s) - \lambda(e_1, \dots, e_i, \dots, e_s).$$

L'aplicació multilineal φ es defineix enviant cada vector $(e_1, \dots, e_s)$ a la seva classe en el quocient, que denotem per $e_1 \otimes \cdots \otimes e_s$. Notem que donades bases dels K-espais vectorials

$$\left\{ e_i^j \mid i \in \{1, \dots, n_j\}, j \in \{1, \dots, s\} \right\},$$

llavors una base del producte tensorial ve donada pels elements de la forma $e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_s}^s$, que és una col·lecció de $n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$ vectors.

Restringim-nos el cas $E_1 = \cdots = E_s =: E$, en què denotarem per $E^{\otimes s}$ el producte tensorial. Considerem l'acció del grup simètric S_s sobre $E^{\otimes s}$, que actua sobre la base de $E^{\otimes s}$ segons $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_s) \mapsto e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(s)}$. Aquesta acció s'estén per linealitat a tots els elements de $E^{\otimes s}$ segons

$$\begin{aligned} S_s \times E^{\otimes s} &\longrightarrow E^{\otimes s} \\ (\sigma, x) &\longrightarrow x^\sigma. \end{aligned}$$

Definició B.2. *Sigui K un cos i sigui E un K-espai vectorial. Fixem una base $e_1, \dots, e_n$ de E i denotem per G el subespai del producte tensorial $E^{\otimes s}$ generat pels elements de la forma*

$$x + x^\tau, \qquad \text{on } x = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \in E^{\otimes s} \text{ i } \tau \in S_s \text{ és una transposició.}$$

Definim el ***producte exterior*** *$\bigwedge^s E$ com el quocient del producte tensorial $E^{\otimes s}$ pel subgrup G. Denotem per $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$ la imatge de $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s}$ en $\bigwedge^s E$.*

Proposició B.3. *Sigui K un cos i sigui E un K-espai vectorial. Sigui $e_1, \ldots, e_n$ una base de E. Tenim les següents propietats del producte exterior:*

a) $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} = -e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$.

b) *Si $i_l = i_r$, llavors $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} = 0$.*

c) *Els elements de la forma $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$ amb $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n = \dim E$ formen una base de $\bigwedge^s E$.*

d) $\dim_K \bigwedge^s E = \binom{n}{s}$. *En concret, $\bigwedge^s E = 0$ si $s \geq n+1$ i $\bigwedge^n E$ és 1-dimensional.*

e) *L'aplicació*

$$\bigwedge^r E \times \bigwedge^s E \longrightarrow \bigwedge^{r+s} E$$
$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}) \longrightarrow e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s}$$

dota d'una estructura de K-àlgebra de dimensió $2^n - 1$ a l'espai vectorial

$$k \oplus E \oplus \bigwedge^2 E \oplus \ldots \oplus \bigwedge^n E.$$

f) *Donades dues bases $\{e_i\}$ i $\{v_j\}$ de E, llavors*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n) \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

g) *Més en general, donats uns vectors $v_1, \ldots, v_s \in E$ amb coordenades $v_i = \sum_{j=1}^n a_j^i e_j$ en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tenim que les coordenades de $v_1 \wedge \ldots \wedge v_s$ en la base natural*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \sum_{i_1, \ldots, i_s} A_{i_1, \ldots, i_s} e_1 \wedge \ldots \wedge e_s$$

venen donades pels menors d'ordre s de la matriu, tal que

$$A_{i_1, \ldots, i_s} \text{ és el menor format per les columnes } \{i_1, \ldots, i_s\} \text{ de la matriu } \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_n^s \end{pmatrix}$$