

TEMA 1**DISTRIBUCIONS MOSTRALS I TEORIA DE MOSTRES
EXERCICIS RECOMANATS****ESTADÍSTICA ECONÒMICA I EMPRESARIAL II
GRAU EN ECONOMIA**

1.1. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria formada per n variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb $E(X_i) = \mu$ i $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Consideri la distribució de la mitjana mostral,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- a. Es pot afirmar que la següent afirmació és certa? Per què?
 b. La mitjana mostral es distribueix normalment amb mitjana μ i variància σ^2/n per a qualsevol tamany mostral n .

1.2. Donada una mostra aleatòria de tamany n es defineixen la mitjana mostral i la variància mostral de la següent manera:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Es pot afirmar que les següents afirmacions són certes? Per què?

- a. L'esperança de la variància mostral S^2 és igual a la variància poblacional.
 b. L'esperança de la mitjana mostral coincideix amb la mitjana poblacional.

1.3. D'una mostra de 10 observacions la mitjana i la variància són 10.50 i 2.42, respectivament. Si s'hi afegeixen dues noves observacions, $x_{11}=10$ i $x_{12}=14$, quin és el nou valor de la variància mostral?

1.4. Els salaris diaris pagats al personal d'una empresa es distribueixen normalment amb mitjana 1204€ i desviació estàndar 375€. Quina és la probabilitat que el salari mensual mig d'una mostra aleatòria de 9 empleats difereixi de la mitjana poblacional com a màxim en ± 75 €?

1.5. Un equip de fútbol està interessat en comprar una important quantitat de botes a un fabricant. Aquest assegura que la durada mitjana de les botes és de 100 partits amb una desviació estàndar igual a 8 partits, sent la distribució normal. El club decideix comprar les botes sols si una mostra de 100 d'aquestes dóna com a resultat una vida mitjana d'almenys 101 partits. Quina és la probabilitat que l'equip de fútbol adquireixi les botes?

1.6. Sigui $X_1, \dots, X_{10}$ una mostra aleatòria formada per 10 variables aleatòries normals estàndar. Quina és la probabilitat que la variància mostral sigui inferior a 1.88?

1.7. Donada una mostra aleatòria de tamany $n=16$ d'una distribució normal amb mitjana i variància desconegudes. Quina és la probabilitat que S^2/σ^2 sigui inferior o igual a 2.041?

1.8. Sigui X una variable aleatòria caracteritzada per una distribució de Poisson amb desviació estàndar igual a 3. Quina és la probabilitat que la mitjana mostral de 100 d'aquestes variables aleatòries sigui inferior a 9.45?

1.9. Si la probabilitat que neixi un nen és de 0.514, ¿quina és la probabilitat que en 1000 naixements hi hagi menys homes que dones?

1.10. En la medició del temps que la gent tarda en reaccionar a un impuls lluminós (un flash) s'ha comprovat en base a la experiència que la desviació estàndar és de 0.5 segons. Quantes observacions s'han de prendre en un nou experiment per a que amb una probabilitat mayor o igual a 0.9 la diferència entre la mitjana mostral i la mitjana poblacional no excedeixi en valor absolut els 0.1 segons?

1.11. La renda dels residents en un país pot considerar-se representada per una variable aleatòria amb mitjana 216.500 € i desviació típica 20.000 €. Quina és la probabilitat que la renda mitjana d'un grup de 100 individus sigui superior a 220.000 €?

1.12. El comportament d'una població està caracteritzat per una distribució amb mitjana 15 i variància 100. Si s'agafa una mostra de tamany 100, determinar el valor a que verifica:

$$P(\bar{X} < a) = 0.97725$$

1.13. El número de periòdics que ven diàriament per terme mig una papereria és de 30, sent 5 la desviació típica. Quin hauria de ser el preu de venda dels diaris si es desitja que la probabilitat que s'ingressin més de 40 € de mitjana per la venda exclusivament de diaris en 100 dies sigui de 0.02275?

1.14. Sigui X una variable aleatòria caracteritzada per una distribució de Poisson amb desviació típica igual a 2.

a. Calcular la probabilitat que la mitjana de 100 d'aquestes variables aleatòries discretes independents sigui superior a 4.25.

b. Calcular la probabilitat que la mitjana de 100 d'aquestes variables aleatòries discretes independents sigui inferior a 4.35.

1.15. La durada d'uns aparells elèctrics es distribueix exponencialment amb paràmetre $\alpha=0.1$. S'agafa una mostra de 50 aparells, calcular la probabilitat que la vida mitjana de la mostra sigui superior a les 12 hores.

1.16. El 40% dels habitants d'una ciutat ha votat a un determinat partit polític. Si es considera una mostra de 160 persones, calcular la probabilitat que en aquesta mostra al menys 70 persones hagin votat a aquest partit.

1.17. Suposi que $\Pi=0.4$ representa la proporció de famílies que tenen un determinat electrodomèstic. Si es considera una mostra de 225 famílies, calcular la probabilitat que en la mostra es trobin més de 100 famílies amb aquest electrodomèstic.

1.18. Consideri la següent funció de densitat:

$$f(x) = cx^{(c-1)} \begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 & i \quad c > 0 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

- a. Si es considera una mostra de tamany $n=1$, obtenir la funció de versemblança de la mostra.
 b. Quin és el valor c pel qual és més versemblant la mostra obtinguda?
 c. Si es considera una mostra de tamany $n=2$, obtenir la funció de versemblança de la mostra.

1.19. Suposi una mostra de tamany n d'una població amb distribució exponencial. Calcular el punt en el que la funció de versemblança assoleix el seu màxim.

1.20. La funció de densitat $f(x) = ae^{(-ax)}$ amb $x \geq 0$ té un paràmetre a que pot prendre un dels tres valors següents: 0.5, 1 i 1.5. Es pren una mostra de tamany $n=1$, resultant un valor comprès entre 1.7 i 2.6. A partir de la funció de versemblança mostral determinar, amb base a la informació proporcionada per la mostra, per quin dels tres valors del paràmetre a s'hauria d'optar.

1.21. Consideri la següent llei de probabilitat:

$$P(X = x) = \Pi^x (1 - \Pi)^{(1-x)}$$

Si s'extreu una mostra de tamany n , calcular la funció de versemblança.

1.22. Una variable aleatòria té per funció de densitat:

$$f(x) = \frac{2a}{1-a} x^{\left(\frac{3a-1}{1-a}\right)} \quad 0 \leq x \leq 1$$

sent a una constant igual o superior a zero. Si s'extreu una mostra de tamany n , calcular la funció de versemblança.

1.22. Una variable aleatòria té per funció de densitat:

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{\left(\frac{-x}{a}\right)} \quad x \geq 0$$

sent a una constant igual o superior a zero. Si s'extreu una mostra de tamany n , calcular la funció de versemblança.

1.23. Una caixa conté 5 boles blanques o negres. S'extreu sense reemplaçament una mostra de tamany $n=3$, obtenint que dues de les boles són blanques i una negra. Obtenir la composició més versemblant de la caixa.

a. Variarien les seves conclusions si es realitzés l'experiment anterior amb reemplaçament? Justificar la resposta.