UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoria de l'aproximació en una variable

Autora: Alba Martí

Director: Dr. Joaquim Ortega

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

The approximation theory is concerned with how functions can best be approximated with simpler functions, in this work we will focus in approximating functions by polynomials on one variable.

We will start with the Stone-Weierstrass theorem, one of the firsts in the field which states that all continuous functions in a closed interval can be approximated uniformly by polynomials. We will continue with the Müntz-Szász theorem, in which there are added restrictions in the polynomials, specifically on the degrees of the monomials. Once we have seen this theorem, we will see differents extensions and variations of the same, beginning by the so called full Müntz-Sász theorem which considers all possible behaviours of the monomials degrees and the corresponding version for the Lebesgue space of functions. Finally, we will see a theorem that can be considered equivalent to the Weierstrass theorem but in the complex domain, the Runge's theorem.

Resum

La teoria de l'aproximació estudia com algunes funcions poden ser aproximades per altres més simples. En aquest treball ens centrarem en l'aproximació de funcions per polinomis en una variable.

Començarem amb el teorema de Stone-Weierstrass, un dels primers en el camp i que ens diu que tota funció contínua en un interval tancat pot ser aproximada per polinomis. Continuarem amb el teorema de Müntz-Szász, el qual afegeix restriccions en els polinomis, concretament en els graus dels monomis. Un cop vist aquest teorema veurem diferents extensions i variacions del mateix, començant per l'anomenat teorema de Müntz-Szász complet que considera més possibles comportaments dels graus dels polinomis i després veurem la versió per a funcions de Lebesgue. Per acabar, veurem el que seria una versió equivalent al teorema de Weierstrass però per a funcions holomorfes en el pla complex, el teorema de Runge.

2020 Mathematics Subject Classification. 41A10, 39B62, 30C10

Agraïments

Vull agrair al Dr Joaquim Ortega Cerdà per l'esforç dedicat i per guiar-me al llarg del treball per a que mica en mica anés agafant forma.

També vull agrair a la meva família tot el recolzament que m'han donat aquests anys i per haver-me donat l'oportunitat d'estudiar el que realment m'agrada.

Finalment agrair a totes les persones que m'han anat fent costat durant aquests quatre anys i que han fet que aquest camí hagi sigut molt més agradable.

Índex

1 Introducció

En Matemàtiques és molt freqüent l'estudi d'objectes molt complexos, és a dir, difícil comprensió o manipulació, que podrien fer ballar el cap de més d'un, és per això que hi ha un gran interès en buscar elements més senzills els quals puguin assimilar-se tant com es desitgi als elements complexos i ens facilitin l'estudi i la manipulació.

Un exemple d'objecte complex podria ser el conjunt de les funcions, on n'hi podem intuir una gran quantitat i de ben diverses. A partir d'aquest conjunt i l'interès acabat de mencionar la pregunta és natural, podem aproximar totes les funcions a partir de les funcions més senzilles que coneixem, els polinomis?

Només començar el grau ja ens van presentar els polinomis de Taylor els quals ens permeten aproximar a qualsevol funció de classe $\mathcal{C}^\infty$ al voltant d'un punt. Aquest resultat em va semblar d'allò més sorprenent, però en aquell moment no vaig ser conscient que amb el que ens havien explicat, realment no podia aproximar ni totes les funcions contínues, menys encara, ni les $\mathcal{C}^\infty$ en un interval qualsevol, clarament altres funcions més generals com les integrables encara quedaven molt lluny.

Una mica més avançat el grau ja ens van presentar i demostrar el teorema d'aproximació de Weierstrass o Stone-Weierstrass, demostrat per Karl Weierstrass el 1885 i simplificada el 1937 per Marshall H. Stone. Aquest teorema, àmpliament conegut, ens diu que tota funció continua en un interval tancat pot ser aproximada uniformement per una successió de polinomis.

Aquest teorema va ser la llavor que al 1912 va portar Serguei Bernstein a plantejar en el *International Congress of Mathematicians* de Cambringe quina havia de ser la condició que havia de satisfer una successió de nombres reals $\{\lambda_n\}_n$ positius per tal que l'espai de les combinacions lineals finites $\{t^{\lambda_n}\}_n$ fos dens en l'espai de les funcions contínues en l'interval $[0,1]$, és a dir, si hi havia alguna condició que ens permetés prescindir d'alguns monomis i poder continuar aproximant les funcions contínues reals en un interval tancat.

La resposta va arribar el 1914 de part de Herman Müntz, i dos anys més tard Otto Szász va acabar de completar la prova del teorema que actualment es coneix com el teorema de Müntz-Szász el qual enuncia que si la successió $\{\lambda_n\}_n$ és creixent, per tal que el conjunt de les combinacions lineals finites de

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

sigui dens en el l'espai de les funcions contínues en l'interval $[0,1]$ han de complir la següent condició:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$$

De fet aquest enunciat és un si i només si. Una interpretació que podríem donar a aquesta condició és que ens ve a dir que la quantitat de polinomis ha de ser molt gran, que s'han d'acumular a ∞ molt lentament, i clarament queda descartat que amb un nombre finit en tinguem prou.

Aquest és el primer gran resultat que veurem en aquest treball. A part de l'interès intrínsec del teorema, la pròpia demostració té una bellesa especial, ja que per tal de poder arribar al nostre resultat d'anàlisi real haurem de fer un camí que tan passarà per l'anàlisi funcional amb els teoremes de Hahn-Banach i el de representació Riesz com per l'anàlisi complexa amb els resultats de Blaschke sobre els zeros de funcions holomorfes.

Un cop enunciat i demostrat el teorema que denotarem com a clàssic de Müntz-Szász, enunciarem la versió més general del teorema de Müntz-Szász la qual recull tots els comportaments que podrien tenir la successió de nombres reals positius que corresponen als graus dels polinomis.

Tornant a la motivació inicial de l'aproximació, un pot replantejar-se la pregunta sobre l'aproximació de funcions amb polinomis reemplaçant les funcions contínues per les funcions integrables en l'interval $[0,1]$. Concretament ens preguntem quina ha de ser la condició de la successió $\{\lambda_n\}_n$ amb $\lambda_n > -1/p$ que ens permeti aproximar totes les funcions dels espais $L^p([0,1])$. En aquest treball veurem que la condició és la següent, una petita variació de la anterior:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n + 1/p}{(\lambda_n + 1/p)^2 + 1} = \infty$$

El teorema que enuncia aquest resultat va ser demostrat per Peter Borwein i Tamás Erdély. Durant la redacció del treball vam notar que hi havia un error en el cas $L^1([0,1])$, i que aquest apareix en tota la literatura. I és que en aquesta primera publicació [3] de la demostració van cometre un error. Aquest error però, va ser solucionat més endavant fent alguna modificació i restringint algunes condicions per Tamás Erdélyi i William B. Johnson en la publicació [6] on també van incloure altres correccions i resultats auxiliars que complementaven la primera publicació.

Fins al moment només ens hem centrat en l'anàlisi real i funcional però, simultàniament en el treball, hem anat afegint resultats addicionals sempre i quan fos possible estendre els teoremes anteriors al cos dels complexes. Tot i això, per finalitzar el treball hem afegit un dels que es podrien considerar els teoremes anàlegs en l'anàlisi complexa sobre l'aproximació de funcions amb polinomis, el teorema de Runge, el qual segueix en la línia d'aproximar o expressar funcions, en aquest cas holomorfes, en un compacte per successions de polinomis o funcions racionals.

Estructura

En aquesta mateixa secció introductòria començarem el contingut matemàtic amb el teorema de Weierstrass, el qual, com ja hem comentat, és un dels primers resultats sobre la teoria d'aproximació amb polinomis.

Seguidament, per tal que el treball sigui autocontingut dedicarem dues seccions a introduir tots els conceptes i resultats que més endavant necessitarem per tal de demostrar els teoremes principals. La secció 2 està dedicada a l'anàlisi funcional la qual conté un seguit de definicions, les desigualtats de Jensen, Hölder i Minkowski demostrades i els teoremes de Hahn-Banach i el de representació de Riesz enunciats. En l'altra secció de preliminars, la secció 3, trobareu els resultats corresponents a l'anàlisi complexa, d'on destacarem la fórmula de Jensen i la condició i teorema de Blaschke.

A la secció 4 presentarem i demostrarem el teorema principal del treball, el teorema de Müntz-Szász. Primerament, en la subsecció 4.1 veurem la versió clàssica i en la secció 4.2 la versió completa. En la secció 5 seguirem amb el mateix teorema però amb les versions per a funcions integrables en l'interval $[0,1]$.

Finalment, en la secció 6 veurem el teorema de Runge amb dos resultats previs per a la seva demostració.

1.1 El teorema d'aproximació de Weierstrass

Comencem enunciant i demostrant el Teorema d'aproximació de Weierstrass un dels primers sobre l'aproximació de funcions mitjançant polinomis i el que inicia la motivació d'aquest treball:

Teorema 1.1. *Sigui f una aplicació contínua en un interval tancat, és a dir, $f \in C[a,b]$ on $a, b \in \mathbb{R}$. Aleshores hi ha una successió de polinomis $\{p_n\}_n$ que convergeixen uniformement a f en $[a,b]$*

Demostració: Primer de tot veiem que és equivalent considerar que $f \in C[0,1]$ i que $f(0) = f(1) = 0$.
Per a canviar l'interval, podem considerar el canvi $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$. Per a l'altra condició definim:

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)),$$

on clarament $g \in C[0,1]$, $g(0) = g(1) = 0$ i la resta $f - g = p$ és un polinomi i $f = p + g$. Per tant, si tenim una successió q_n de polinomis que convergeix uniformement en $[0,1]$ a g, aleshores $q_n + p$ és també una successió de polinomis que convergeix a f.
Un cop vist que podem considerar $f \in C[0,1]$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, estenem f a tot $\mathbb{R}$ definint $f \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [0,1]$. Observem que f és uniformement continua en $\mathbb{R}$.
Per $n \in \mathbb{N}$, definim $Q_n = c_n(1 - x^2)^n$, on c_n és una constant que compleix:

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1$$

Aquesta condició implica que $c_n \leq \sqrt{n}$.
Per tal de comprovar aquesta desigualtat considerem la funció $h(x) = (1-x^2)^n - 1 + nx^2$ i com és creixent a $x \geq 0$ tenim que $(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2$. Per tant:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \geq 2\int_{0}^{1} (1 - nx^2)\, dx$$

$$\geq 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nx^2)\, dx = \left[2(x - \frac{x^3}{3})\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Per $0 \leq x \leq 1$ definim $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\, dt$. I usant que $f \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ i el canvi de variable $u = x + t$ tenim:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\, dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{1} f(u)Q_n(u-x)\, du = c_n \int_{0}^{1} f(u)(1 - (u-x)^2)^n\, du$$

On acabem veient que $P_n(x)$ és un polinomi. Ara falta veure que P_n convergeix uniformement a f en $[0,1]$:
Com f és uniformement contínua en $\mathbb{R}$ tenim que donat $\varepsilon > 0$, existeix $0 < \delta < 1$ tal que:

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

Per tant, com $\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt = 1$ tenim:

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\, dt - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))Q_n(t)\, dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt$$

$$= \int_{|t|<\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \; + \int_{\delta \leq |t| \leq 1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt$$

Del primer sumand tenim $|x + t - x| = |t| < \delta$, per tant:

$$\int_{|t|<\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \; < \; \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|<\delta} Q_n(t)\, dt \; \leq \; \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^{1} Q_n(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

Pel segon sumand, considerem $M = sup|f(x) > 0$ i com $c_n \leq \sqrt{n}$ i $\delta \leq |t| \leq 1$ tenim:

$$Q_n(t) = c_n(1 - t^2)^n \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n$$

Per l'altra banda:

$$\int_{\delta \leq |t| \leq 1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \; \leq \; 2M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \int_{\delta \leq |t| \leq 1} dt$$

Com $\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \to 0$ quan $n \to \infty$, tenim n_0 tal que $\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \; < \frac{\varepsilon}{2}$ i seguint les desigualtats anteriors:

$$\leq 4M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \; < \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalment ajuntant els dos sumands hem obtingut:

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

És a dir, que P_n convergeix uniformement a f en $[0, 1]$ $\square$

1.1.1 Les convolucions en el teorema de Weierstrass

En aquesta demostració del teorema de Weierstrass s'han utilitzat les convolucions sense especificar-ho, és per això que hi dedicarem una petita secció per tal de definir-les i comentar algunes de les seves propietats.

Definició 1.2. *Donades dues funcions f, $g \in L^1(\mathbb{R})$, es defineix la **convolució** d'aquestes com:*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) g(t)\, dt$$

Lema 1.3. *Siguin $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ i $c \in \mathbb{R}$, aleshores:*

i) $f * g = g * f$

ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

iii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$

iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$

Totes aquestes propietats són fàcilment demostrables aplicant canvis de variables o les propietats bàsiques de la integració.

Una de les principals característiques de les convolucions és que al convolucionar dues funcions, la resultat manté la millor de les condicions/propietats de les dues. Per exemple, siguin $f \in L^1$ i $g \in \mathcal{C}^3$, la funció $f * g$ resultant serà $\mathcal{C}^3$.
Aquesta característica es demostra fàcilment gràcies a la commutativitat de les convolucions.

Anem a veure el resultat general que s'ha emprat per dur a terme la demostració del teorema de Weierstrass:

Teorema 1.4. *Sigui $g_n(x)$ una successió de funcions tal que:*

i). $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \geq 0$, $g_n \in L^1(\mathbb{R})$

ii). $\forall n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = 1$,

iii). $\forall \delta \geq 0$, $\forall \varepsilon \geq 0$, $\exists n_0$ *tal que* $\int_{|x|\geq\delta} |g_n(x)|dx \leq \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.

Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ uniformement contínua i acotada, aleshores g_n és una aproximació a la identitat, és a dir la convolució $(g_n * f)$ convergeix uniformement a f.

Demostració: Per veure que la convolució convergeix uniformement cap a f hem de veure que per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$

$$|(g_n * f)(x) - f(x)| \to 0$$

Utilitzant la condició *ii)* que han de complir $g_n(x)$ i propietats dels mòduls obtenim:

$$|(g_n * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)f(x-t) - f(x)dt \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)(f(x-t) - f(x)dt \right| = \left| \int_{|t|<\delta} g_n(t)(f(x-t) - f(x))dt + \int_{|t|>\delta} g_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right|$$

$$\leq \int_{|t|<\delta} |g_n(t)||f(x-t) - f(x)|dt + \int_{|t|>\delta} |g_n(t)||f(x-t) - f(x)|dt$$

Com f és contínua, del primer sumand tenim que per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix δ tal que si $|t| < \delta$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Per l'altra banda per *ii)* tenim la desigualtat $\int_{|t|<\delta} |g_n(t)| \leq 1$, per tant

$$\int_{|t|<\delta} |g_n(t)||f(x-t) - f(x)|dt \leq \varepsilon$$

Per a l'altre sumand, com f és acotada i $f \in L^\infty(\mathrm{I})$ i la condició *iii)*

$$\int_{|t|>\delta} |g_n(t)||f(x-t) - f(x)|dt \ \leq\ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|t|>\delta} |g_n(t)|dt \ \leq\ \varepsilon \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Ajuntant les acotacions obtingudes de ambdós sumands i definint $M = \|f\|_{L^\infty(I)}$ obtenim que per a tota $x \in I$

$$|(g_n * f)(x) - f(x)| \leq (1 + M)\varepsilon$$

Tal i com volíem veure. □

Un cop vist i demostrat el resultat, podem apreciar que en la demostració del teorema de Weierstrass, els polinomis $Q_n(x)$ són un cas particular de les $g_n(x)$ del teorema 1.4.

1.2 Notació

En algunes demostracions seran emprats alguns símbols l'ús dels quals no està generalitzat, és per això que a continuació farem alguns aclariments sobre aquests:

Notació 1. *Farem ús del símbol* $\lesssim$ *per a la següent relació d'ordre:*

$$A \lesssim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists C \quad \textit{tal que} \quad A \leq CB$$

on C *pot variar.*

Notació 2. *Farem ús de l'expressió* $\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...\rangle$ *sempre que volguem fer referència al conjunt generat mitjançant combinacions lineals pels elements* $t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}$.

2 Preliminars d'anàlisi funcional

En aquesta secció esmentarem tots els conceptes i resultats sobre l'anàlisi funcional que necessitarem al llarg del treball.

Definició 2.1. *Sigui E un espai vectorial (complex o real) normat, és a dir, cada $x \in E$ té associat un nombre real no negatiu $\|x\|$ anomenat norma que compleix:*

(i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *si* $x \in X$ *i* α *és un escalar,*

(iii) $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$.

Si a més l'espai normat és complet, és a dir, tota successió de Cauchy és convergent, diem que l'espai X és un ***espai de Banach****.*

Definició 2.2. *Sigui Λ una aplicació lineal entre X i Y espais normats, aleshores definim la seva* ***norma*** *com:*

$$\|\Lambda\| = sup \left\{ \frac{\|\Lambda(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0 \right\}$$

Si $\| \Lambda \| < \infty$, aleshores anomenem Λ una ***aplicació lineal acotada*** o *equivalentment, una aplicació lineal i contínua*

Definició 2.3. *Sigui $1 \leq p < \infty$ i (S, Σ, μ) un espai mesurable, amb μ una mesura complexa, definim la* ***p-norma*** *d'una funció com:*

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Aleshores, podem definir els ***espais de Lebesgue*** *$L^p(S, \mu)$ com l'espai de les funcions mesurables tals que la seva p-norma és finita.*

Teorema 2.4. ***(Hahn-Banach)*** *Sigui E un espai normat, $M \subset E$ un subespai de E, i f una aplicació lineal acotada en M, aleshores f admet una extensió acotada F tal que $\|F\| = \|f\|$.*

Definició 2.5. *Sigui E un espai vectorial, definim l'* ***espai dual de E*** *com :*

$$E' = \{\mu : E \longrightarrow \mathbb{C} \mid \mu \text{ lineal i contínua}\}$$

Definició 2.6. *El* ***suport*** *d'una mesura μ de Borel és*

$$supp(\mu) = \{x \in X \mid \forall \, N_x, \;\; \mu(N_x) > 0 \,\}$$

on N_x és un entorn de x.

Definició 2.7. *Siguin, μ_+, μ_- dues mesures, tals que $supp(\mu_+) \cap supp(\mu_-)$ és un conjunt de mesura 0, donat un conjunt A definim la* ***mesura real o amb signe*** *$\mu(A)$ com*

$$\mu(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$$

Donades dues mesures reals μ_a, μ_b, definim la ***mesura complexa d'un conjunt*** *A com*

$$\mu(A) = \mu_a(A) + i \, \mu_b(A)$$

Definició 2.8. *Siguin $p, q \in [1, \infty]$ dos exponents tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aleshores direm que p i q són* ***exponents conjugats****.*

Definició 2.9. *Sigui $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció real, aleshores diem que és* ***convexa*** *en un interval (a, b) on $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si*

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

és certa sempre que $a < x < b$, $a < y < b$, i $0 \leq \lambda \leq 1$. Equivalentment podem considerar que una funció és convexa sempre i quan

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

sempre que $a < s < t < u < b$

Teorema 2.10. ***Desigualtat de Jensen****. Sigui $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on μ és una mesura probabilística $\mu(X) = 1$. Si $f : X \to (a, b)$ és una funció de $L^1(\mu)$ i $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ és una funció convexa, llavors*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$$

Demostració: Sigui $t = \int_X f d\mu$. I Aleshores $a < t < b$, on $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sigui β el suprem dels quocients de la segona condició en la definició 2.9, aleshores tenim

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t), \qquad a < s < b$$

passant tot a la dreta i substituint s per $f(x)$ ens queda que per tota $x \in X$

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geq 0$$

Com φ és convexa això implica que també és contínua, així doncs $\varphi \circ f$ és mesurable. Integrem ambdós costats observant que t és una constant:

$$\int (\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t))\, d\mu \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\int_X \varphi \circ f(x) d\mu - \varphi(t) \int_X d\mu - \beta(\left(\int_X f(x) d\mu - t \int_X d\mu\right) \geq 0$$

substituint t pel seu valor i aplicant que la mesura és probabilística aconseguim finalment la desigualtat que volem provar

$$\int_X \varphi \circ f(x) d\mu - \varphi\left(\int_X f d\mu\right) - \beta\left(\int_X f(x) d\mu - \int_X f(x) d\mu\right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) - \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \geq 0$$

□

Teorema 2.11. ***Desigualtat de Hölder****. Siguin $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espai de mesura, considerem $f, g : X \to [0, \infty]$ dues funcions mesurables i $p, q \in (0, \infty)$ exponents conjugats. Aleshores*

$$\int_X fg\, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Per a $p = q = 2$ la desigualtat de Hölder s'anomena ***desigualtat de Schwarz***

Demostració: Per tal de veure el resultat farem ús de la següent desigualtat, que és coneguda com la desigualtat generalitzada entre la mitjana geomètrica i la mitjana aritmètica:

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

Aquesta desigualtat és una conseqüència directa de la desigualtat de Jensen considerant $X = \{a, b\}$ i $\mu = \frac{1}{p}\delta_a + \frac{1}{q}\delta_b$, on δ_x és la delta de Dirac, i prenent $f(x) = \log(x)$ i $\varphi(x) = e^x$ com a funció convexa. Aleshores tenim:

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\,(\frac{1}{p}\delta_a + \frac{1}{q}\delta_b) = \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y) = \frac{1}{p}\log(a) + \frac{1}{q}\log(b) = \log(a^{1/p}b^{1/q})$$

i per acabar apliquem la desigualtat de Jensen

$$\varphi \int_X f\, d\mu = a^{1/p}b^{1/q} \leq \int_X \varphi \circ f(\frac{1}{p}\delta_a + \frac{1}{q}\delta_b) = \int_X \left(\frac{1}{p}\delta_a + \frac{1}{q}\delta_b\right) = \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

Un cop vista aquesta desigualtat, tenim que si $f = 0$ o $g = 0$ g.p.t. aleshores tenim $0 \leq 0$. Si cap de les dues és nul·la, definim , $A = \int_X f^p d\mu > 0$ i $B = \int_x g^q d\mu > 0$. Apliquem la desigualtat anterior amb $a = f^p/A$ i $b = g^q/B$, tenim

$$0 \leq \frac{fg}{A^{1/p}B^{1/q}} \leq \frac{f^p}{pA} + \frac{g^q}{qB}$$

Si integrem tenim

$$0 \leq \frac{1}{A^{1/p}B^{1/q}} \int_X fg\, d\mu \leq \frac{1}{pA}\int_X f^p + \frac{1}{qB}\int_X g^q = \frac{A}{pA} + \frac{B}{qB} = 1$$

Per tant ja hem obtingut el resultat que volíem:

$$\int_x fg\, d\mu \leq A^{1/p}B^{1/q} = \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

□

Teorema 2.12. *Siguin (S_1, μ_1) i (S_2, μ_2) dues mesures σ-finites, i $F : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ una funció mesurable. Aleshores la* ***desigualtat de Minkowski per integrals*** *és la següent:*

$$\left[\int_{S_2} \left|\int_{S_1} F(x,y)d\mu_1(x)\right|^p d\mu_2(y)\right]^{1/p} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x,y)|^p d\mu_2(y)\right)^{1/p} d\mu_1(x)$$

Demostració: Sense pèrdua de generalitat suposarem que $F \geq 0$. També, observem que el cas $p = 1$ és una reformulació del teorema de Tonelli, per tant, suposem que $p > 1$ i definim $G(y) = \int_{S_1} F(x,y)d\mu_1(x)$. Aleshores, calculem la seva norma p-èssima

$$\|G\|^p_{L^p(\mu_2)} = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} F(x,y)d\mu_1(x)\right)^p d\mu_2(y) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} F(x,y)d\mu_1(x)G(y)^{p-1}\right) d\mu_2(y)$$

Com les integrals són positives, apliquem Tonelli i canviem l'ordre d'integració

$$= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} F(x,y)G(y)^{p-1}d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)$$

Apliquem Hölder a la integral interior amb q conjugat de p $\left(\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}\right)$

$$\leq \int_{S_1} \left[\left(\int_{S_2} F(x,y)^p d\mu_2(y) \right)^{1/p} \left(\int_{S_2} G(y)^{\frac{p(p-1)}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] d\mu_1(x)$$

$$= \int_{S_1} \left[\left(\int_{S_2} F(x,y)^p d\mu_2(y) \right)^{1/p} \|G\|_{L^p}^{p-1} \right] d\mu_1(x) = \|G\|_{L^p}^{p-1} \int_{S_1} \left(\int_{S_2} F(x,y)^p d\mu_2(y) \right)^{1/p} d\mu_1(x)$$

Si $\|G\|_{L^p}^{p-1} d\mu_1 < \infty$ passant dividint a l'expressió inicial ja tenim el resultat que volem veure

$$\frac{\|G\|_{L^p}^{p}}{\|G\|_{L^p}^{p-1}} = \|G\|_{L^p} =$$

$$= \left(\int_{S_2} \left(\int_{S_1} F(x,y) d\mu_1(x) \right)^p d\mu_2(y) \right)^{1/p} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x,y)|^p d\mu_2(y) \right)^{1/p}$$

Si en canvi tenim que $\|G\|_{L^p}^{p-1} = \infty$, escollim unes seqüències monòtones de conjunts $A_n \subset S_1$ i $B_n \subset S_2$ tals que

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad \bigcup A_n = S_1, \quad \mu_1(A_n) < \infty$$

$$B_m \subseteq B_{m+1}, \quad \bigcup B_m = S_2, \quad \mu_2(B_m) < \infty$$

i per qualsevol $k \in \mathbb{N}$ definim $f_k = \min\{f, k\}$. Aleshores la següent desigualtat és certa ja que les mesures de A_m i B_n són finites i f_k està acotada superiorment

$$\left(\int_{B_n} \left(\int_{A_m} f_k(x,y) d\mu_1(x) \right)^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leq \int_{A_m} \left(\int_{B_n} |f_k(x,y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} d\mu_1(x).$$

Per acabar la demostració, primer fem el límit quan k tendeix a infinit ja que $f_k \to f$ si $k \to \infty$, així obtenint

$$\left(\int_{B_n} \left(\int_{A_m} f(x,y) d\mu_1(x) \right)^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leq \int_{A_m} \left(\int_{B_n} |f(x,y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} d\mu_1(x).$$

seguidament fent el límit quan $n \to \infty$ ($B_n \to S_2$) i acabem fent el límit de la expressió quan $m \to \infty$,($A_m \to S_1$) on en ambdós límits es manté la desigualtat gràcies a que les successions són monòtones, obtenint així finalment el resultat desitjat. □

A continuació escriurem una versió del teorema de representació de Riesz que caracteritza el dual de l'espai de les aplicacions contínues a $[0,1]$.

Teorema 2.13. *Sigui E l'espai de vectorial de les funcions contínues a l'interval $[0,1]$ amb la norma del suprem, és a dir $E = (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|)$ on $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Observem que tenim un espai de Banach. Aleshores, donada una forma lineal i acotada $\Phi \in E'$, hi ha una única mesura complexa μ, tal que*

$$\Phi(f) = \int_0^1 f d\mu$$

A més, es compleix que:

$$\|\phi(f)\| \leq |\mu|(E)$$

Un cop enunciada aquesta versió del teorema de Riesz, veurem l'equivalent però per a espais L^p:

Teorema 2.14. *Suposem $1 \leq p < \infty$ i sigui $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si tenim $g \in L^q(A, \mu)$ podem considerar l'aplicació $\Lambda_g : L^p(A, \mu) \to \mathbb{C}$ definida com*

$$\Lambda_g(f) = \int_A f\overline{g} d\mu$$

Aleshores Λ_g defineix una forma lineal i contínua en $L^p(A, \mu)$.

Demostració: Primer de tot veurem que Λ és lineal.
Per les propietats de les integrals és immediat veure que Λ és lineal, siguin $f, h \in L^p(A, \mu)$ i $a, b \in \mathbb{K}$:

$$\Lambda(af + bh) = \int_A (af + bh)\overline{g}\, d\mu = a \int_A f\overline{g} d\mu + b \int_A h\overline{g}\, d\mu = a\Lambda(f) + \Lambda(h)$$

Ara hem de veure que Λ és una aplicació contínua, que és equivalent a que veure que és acotada:

$$|\Lambda_g(f)| = \left| \int_A f\, \overline{g}\, d\mu \right| \leq \int_A |f|\, |\overline{g}| d\mu \leq \left(\int_A f^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_A \overline{g}^q\, d\mu \right)^{1/q}$$

On hem utilitzat la desigualtat de Hölder, utilitzant que $\|\overline{g}\|_q = \|g\|_q$ acabem obtenint

$$|\Lambda_g(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

Ja que $f \in L^p(A, \mu)$ i $g \in L^q(A, \mu)$. □

El recíproc d'aquest teorema també és cert, per tant, tenim que l'espai dual de $L^p(A, \mu)$ es pot identificar amb $L^q(A, \mu)$, on p i q són exponents conjugats, a continuació enunciarem aquest teorema però no en donarem la demostració.

Teorema 2.15. *Suposem $1 \leq p < \infty$. Si Λ és una forma lineal sobre $L^p(A, \mu)$, aleshores existeix una única $g \in L^q(A, \mu)$ tal que $\Lambda = \Lambda_g$.*
Si $p = \infty$ el resultat no és cert.

Definició 2.16. *Donada una funció $f \in L^p((0, \infty))$ podem definir l'**operador de Hardy** $H : L^p\left((0, \infty)\right) \to L^p\left((0, \infty)\right)$ com*

$$H(f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

Teorema 2.17. *Sigui $p > 1$ i $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^p(0, +\infty)$, aleshores si H és l'operador de Hardy, $H(f) \in L^p(0, +\infty)$, a més*

$$\|H(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

Demostració: Primer de tot observem que, fent el canvi t=sx, obtenim la següent igualtat

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(xs)ds$$

i per tant tenim la següent expressió de $\|H(f)\|_p$ a la qual li aplicarem la desigualtat de Minkowski 2.12

$$\begin{aligned}
\|H(f)\|_p &= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^1 f(xs)ds\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty |f(xs)|^p dx\right)^{1/p} ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty |f(t)|^p \frac{dt}{s}\right)^{1/s} ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{s}\right)^{1/p} ds \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \\
&= \frac{p}{1-p}\|f\|_p
\end{aligned}$$

□

3 Preliminars d'anàlisi complexa

Com en la secció anterior, en aquesta esmentarem tots els conceptes i resultats sobre l'anàlisi complexa que necessitarem al llarg del treball.

Lema 3.1. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0.$

Demostració: Considerem $\Omega = \{z \,|\, Re\, z < 1\}$. Com $z-1$ mai s'anul·la en Ω i el conjunt és homòleg a 0 podem considerar la única determinació del logaritme $h(z)$ tal que

$$e^{\log(z)} = z - 1 \quad i \quad h(0) = 0.$$

Observem que $Re\, h(z) = \log|1-z|$ i $|Im\, h(z)| < \frac{\pi}{2}$.
Sigui $\delta > 0$ molt petita, definim el camí

$$\Gamma(t) = e^{it,} \quad (\delta \le t \le 2\pi - \delta)$$

Definim també γ l'arc circular de centre 1 i que va de $e^{i\delta}$ a $e^{-i\delta}$ per l'interior del disc unitat.

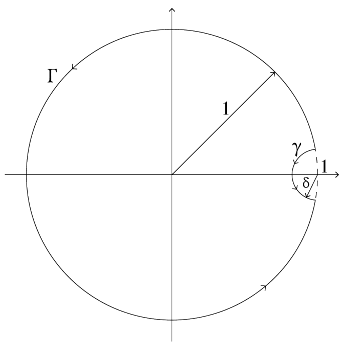

Figura 1: Camí.

Aplicant la definició d'integral de línia veiem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{i\theta})\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log(1-e^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} Im\ (\log(1-e^{i\theta})d\theta)
\end{aligned}$$

Si només ens quedem amb la part real acabem obtenint:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]$$

Com $h(0) = 0$ i el camí γ va en sentit contrari del camí Γ aplicant la fórmula de Cauchy tenim la següent igualtat

$$Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\frac{dz}{z}\right] = Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]$$

La longitud de γ és mes petita que $\pi\delta$. D'aquí podem veure que el valor absolut de la integral és menor que $C\delta\log(\frac{1}{\delta})$, per comprovar-ho usarem la notació $z(t) = 1 + \delta e^{it}$.

$$\left|Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]\right| = \left|Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{a(\delta)}^{b(\delta)} h(z(t))z'(t)\frac{dt}{z(t)}\right]\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{a(\delta)}^{b(\delta)} |\log(1-(1+\delta e^{it}))|\frac{|\delta e^{it}|dt}{|1+\delta e^{it}|}$$

Observem que podem considerar $\frac{1}{2} \leq 1-\delta \leq |z(t)| \leq 1+\delta \leq 2$ i per tant utilitzant el que hem observat anteriorment sobre la part real i imaginària de $h(z)$ i que $\delta < 1$

$$\left|Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]\right| \leq \frac{2\delta}{2\pi}\int_{a(\delta)}^{b(\delta)} |\log(\delta e^{it})|dt$$
$$\leq C\delta\int_{a(\delta)}^{b(\delta)} \left|\log|\delta e^{it}| + \frac{\pi}{2}\right| dt \leq C\delta 2|\log(\delta)| = C'\delta\log\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

i per tant quan δ tendeix cap a 0 la integral també i per tant, podem concloure que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0$. $\square$

Teorema 3.2. *Suposem* $\Omega = D(0,R)$*, una funció holomorfa* $f \in H(\Omega)$*,* $f(0) \neq 0$*,* $0 < r < R$*, i* $\alpha_1, ..., \alpha_N$ *són els zeros de* f *en* $\overline{D(0,r)}$*, repetits tenint en compte la multiplicitat. Aleshores*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\}$$

Aquesta igualtat és coneguda com ***la fórmula de Jensen****.*
Prenent logaritmes a cada costat de la igualtat tenim una la següent fórmula equivalent:

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

Demostració: Sigui $b \in \mathbb{C}$ tal que $|b| < 1$ aleshores l'aplicació $\frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ va del disc unitat al disc unitat i els elements de la frontera van a la frontera. Per tant $\frac{r^2(z-a_n)}{r^2-\bar{a_k}z}$ és una aplicació que envia elements de $D(0,r)$ a $D(0,r)$.
Ordenem els zeros de la funció de tal manera que $a_1, a_2, ..., a_m$ són del disc $D(0,r)$ i que $|a_{m+1}| = ... = |a_N| = r$. Considerem ara la següent aplicació:

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{a_n}z}{r(a_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{a_n}{a_n-z} \tag{3.1}$$

Aquesta aplicació g és holomorfa en $\mathcal{D}(0, r+\varepsilon)$ per algun $\varepsilon > 0$ i no té cap zero en $\mathcal{D}(0, r+\varepsilon)$. Per tant, $\log|g(z)|$ és una funció harmònica i tenim que

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta \tag{3.2}$$

Per al definició de g tenim que

$$|g(0)| = |f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|a_n|} \tag{3.3}$$

Per a la part dreta, tenim que el mòdul dels $|a_n| = r$ per $m < n < N$ i per tant $a_n = e^{i\theta_n}$. Per tant:

$$\begin{aligned}\log|g(a_n)| =& \log|g(re^{i\theta_n})| = \log|f(re^{i\theta_n})| + \sum_{n=m+1}^{N} \log|\frac{re^{i\theta_n}}{re^{i\theta_n} - re^{i\theta}}| \\ &= \log|f(re^{i\theta})| + \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|\end{aligned} \tag{3.4}$$

Per tant, substituint l'expressió $|g(0)|$ de (3.3) a l'expressió (3.2) i $\log|g(re^{i\theta)}|$ també aplicant el lema 3.1 que ens diu que la integral del logaritme de g és igual a la integral del logaritme de f, obtenim la segona versió de la igualtat de Jensen. □

Observació 3.3. Hem d'evitar confondre la fórmula de Jensen, acabada de definir i de demostrar, amb la desigualtat de Jensen (Teorema 2.10) ja que tot i tenir noms molt similars i haver estat presentades i demostrades per la mateixa persona, Johan Jensen, cadascuna és ben diferent, ja que una pertany a l'àmbit de l'anàlisi funcional i l'altra al de l'anàlisi complexa.

Definició 3.4. *Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de nombres complexos, definim la* ***condició de Blaschke*** *com:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$$

Teorema 3.5. *Sigui f una funció holomorfa acotada en el disc unitat, $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, siguin $Z(f) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ els zeros de f, aleshores $Z(f)$ compleix la condició de Blaschke $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$.*

Demostració: Per tal de fer aquesta demostració considerarem, sense pèrdua de generalitat, que $f(0) \neq 0$ ja que en cas contrari, prendríem $g(z) = z^{-m}f(z)$ on m és l'ordre dels zeros de l'origen i g té exactament els mateixos zeros que f excepte l'origen.
Sigui $0 < r < 1$ i k el nombre de zeros de f al disc $\overline{D(0,r)}$, aleshores per la fórmula de Jensen, teorema 3.5, tenim que

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{k} \log\frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

Com f és acotada, tenim que $|f(re^{i\theta})| \leq \|f(re^{i\theta})\|_\infty$i per tant, prenem $C \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\|f(re^{i\theta})\|_\infty = C$$

Llavors ens queda la condició

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{k} \log\frac{r}{|a_n|} \leq C \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} \log\frac{r}{|a_n|} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{1}{|a_n|} < \infty$$

Finalment per acabar la prova hem de veure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{1}{|a_n|} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 - |a_n| < \infty$$

Considerem el quocient de les funcions respectives a les series i prenem el límit aplicant l'Hôpital:

$$\lim_{r \to 1} \frac{\log \frac{1}{r}}{1-r} = 1$$

Per tant, pel criteri de comparació de series tenim la equivalència i per tant queda demostrat el teorema. $\square$

Comentari 3.6. El següent teorema d'aquesta secció enuncia que el recíproc també és cert i que es demostra mitjançant els productes de Blaschke, pel propòsit d'aquest treball no és necessari i per tant no en veurem la prova.

Teorema 3.7. *Si a_n és uns seqüència en $\mathbb{D}$ tal que $a_n \neq 0$ i que compleixen la condició de Blaschke $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$, sigui $k \in \mathbf{N}$,i el* ***producte de Blaschke*** *per $z \in \mathbb{D}$*

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - z)|a_n|}{(1-\bar{a_n})z_n}$$

aleshores $B \in H^\infty$ i els zeros de B són únicament els punts de la successió a_n i el 0 si $k > 0$

Corol·lari 3.8. *Sigui $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, si $a_1, a_2, a_3, ...$ són zeros de f en $\mathbb{D}$, i si $\sum(1-|a_n|) = \infty$. aleshores $f(z) = 0$ per tota $z \in \mathbb{D}$.*

Demostració: Hem vist que la condició de Blaschke ($\sum(1-|a_n|) < \infty$) és necessària per tal que $a_1, a_2, a_3, ...$ siguin els zeros de qualsevol funció holomorfa i acotada, per tant si f no compleix la condició de Blaschke, ha de ser necessàriament zero. $\square$

Teorema 3.9. *(Teorema de Morera) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, aleshores $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ si i només si $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ per a tot $T \subset \Omega$ tancat.*

Demostració: Aquest resultat s'ha vist a l'assignatura d'anàlisi complexa de tercer curs.

Definició 3.10. *Sigui $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació del pla complex, diem que és racional si es pot expressar com*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

on P i Q són polinomis

4 Teorema de Müntz-Szász en $\mathcal{C}([0,1])$

Començarem els nostres resultats sobre l'aproximació de funcions contínues a partir de polinomis en l'interval $[0,1]$ amb el teorema de Müntz-Szász, primer començarem amb la proposada inicialment i anomenada el teorema clàssic de Müntz-Szász, i seguirem amb la versió més general del mateix.

4.1 El teorema clàssic de Müntz-Szász

Amb l'ajuda dels resultats vistos als preliminars, ja podem enunciar i demostrar el primer teorema sobre l'aproximació de funcions contínues en $[0,1]$ amb polinomis, el teorema clàssic de Müntz-Szász.

Teorema 4.1. *Suposem $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...$ i sigui X la clausura en $\mathcal{C}([0,1])$ del conjunt de les combinacions finites de les funcions*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

(i) si $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, aleshores $X = \mathcal{C}(I)$
(ii) si $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, i $\lambda \notin \{\lambda_n\}, \lambda \neq 0$, aleshores X no conté la funció t^λ.

Abans de començar amb la demostració farem uns petits comentaris sobre el conjunt $\{\lambda_n\}_n$ i un petit resultat que se'n deriva.

Comentari 4.2. Observem que per a tota $n > 0$, tenim que $\lambda_n > 0$, aquesta condició és necessària si el que volem és aproximar funcions de $\mathcal{C}([0,1])$, ja que sinó, tots els monomis amb grau negatiu no serien continus en $t = 0$ i estaríem aproximant funcions contínues amb algunes que no ho són, i això no és possible.

Comentari 4.3. En el teorema de Müntz-Szász (el clàssic i el que veurem més endavant) considerarem sempre $\lambda_0 = 0$. En cas contrari, no podríem obtenir les funcions constants diferents de 0 o les que no passen per l'origen.

Per l'altra banda, tenim que amb la successió $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, és a dir, sense $\lambda_0 = 0$, i complint que $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ podem aproximar totes les funcions contínues de $f \in \mathcal{C}[0,1]$ tals que $f(0) = 0$. Veiem-ho en forma de lema.

Lema 4.4. *Sigui $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de nombres reals tal que*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...$$

l'espai $X = \langle 1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ... \rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$, si i només si

$$\overline{\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ... \rangle} = Y, \qquad Y = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$$

Demostració: Sigui $f \in \mathcal{C}[0,1]$ tal que $f(0) = 0$, aleshores existeix una successió de polinomis $\{p_n\}$ de la forma

$$p_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^n t^{\lambda_i}$$

on a_i^n indica el coeficient del monomi i-èssim del polinomi n-èssim, tals que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) = f(t)$$

Observem que $p_n(0) = a_0^n$. Com $f(0) = 0$ i p_n convergeix uniformement a f en particular convergeix puntualment i per tant ha de complir que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(0) = \lim_{n\to\infty} a_0^n = 0$$

És per això que considerarem la successió de polinomis $\{\tilde{p}_n(t)\}_n$ on $\tilde{p}_n(t) = p_n(t) - a_0^n$, ja que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t) - a_0^n = \lim_{n\to\infty} p_n(t) - \lim_{n\to\infty} a_0^n = f(t) - 0 = f(t)$$

Per tant, hem vist que si $0 \notin \{\lambda_n\}_n$ podem aproximar a totes les funcions contínues en $[0,1]$ tals que $f(0) = 0$.

Veiem el recíproc, és a dir, si $\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...\rangle$ dens en Y, aleshores $X = \langle 1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$.

Sigui $f(x) \in \mathcal{C}([0,1])$, aleshores definim

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

Clarament $g(0) = 0$ i conseqüentment $g(x) \in Y$, el que implica que existeix una successió de polinomis $\{p_n\}_n \subset Y$ tal que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} p_n$$

sumant $f(0)$ a ambdós costats tenim

$$f(x) = g(x) + f(0) = \lim_{n\to\infty} p_n + f(0)$$

obtenint el resultat que volíem, ja que si $p_n \in \langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...\rangle$ aleshores $p_n \in X$ i $f(0) \in X$ i per conseqüent tota funció $f \in \mathcal{C}([0,1])$ es pot aproximar per polinomis de X. $\square$

Acabats els comentaris previs, ens disposem a demostrar el teorema clàssic de Müntz-Szász, la qual seguirà l'esquema que es veu en el llibre de Rudin [1].

Demostració: Comencem amb el resultat (i):
Suposem que $X \neq \mathcal{C}(I)$. Aleshores existeix $\varphi \in \mathcal{C}(I)$ tal que $\varphi \notin X$. Considerem:

$$Y = \{f + \lambda\varphi \,|\, f \in X,\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definim ara l'aplicació:

$$\Lambda : Y \to \mathbb{R} \ , \ \ \Lambda(f + \lambda\varphi) = \lambda$$

Veiem que és lineal. Siguin $f, g \in X$ i $\lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\Lambda\left(a(f + \lambda\varphi) + (g + \mu\varphi)\right) = \Lambda((af + g) + (a\lambda + \mu)\varphi)$$

Observem que $af + g \in X$ i que $\Lambda(af + a\lambda) = a\lambda$ i $\Lambda(g + \mu) = \mu$ i per conseqüent

$$\Lambda\left(a(f + \lambda\varphi) + (g + \mu\varphi)\right) = a\lambda + \mu = \Lambda(af + a\lambda) + \Lambda(g + \mu) = \mu$$

Veiem ara que és acotada. Volem comprovar que

$$\sup \frac{\|\Lambda(f + \lambda\varphi)\|}{\|f + \lambda\varphi\|} = \sup \frac{\lambda}{\|f + \lambda\varphi\|} = \delta < \infty$$

Com $\varphi \notin X$ i X és un espai tancat, aleshores existeix una bola de radi $\delta > 0$ de centre φ que no interseca amb X. Observem que si $f \in X$ aleshores $-\frac{1}{\lambda} f \in X$ i tenim que

$$\|\varphi - \left(-\frac{1}{\lambda} f\right) \| > \delta$$

multiplicant per λ obtenim

$$\delta|\lambda| \; < \; |\lambda| \, \|\frac{1}{\lambda} f + \varphi\| \; = \; \|f + \lambda\varphi\|$$

Ara que ja hem vist que λ és lineal i acotada podem aplicar el teorema de Hahn-Banach (teorema 2.4) dels preliminars d'anàlisi funcional. Gràcias a aquest sabem que existeix una extensió acotada $\widetilde{\Lambda} : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ de Λ tal que $\widetilde{\Lambda}_{|X} = 0$ i $\widetilde{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\varphi) = 1$.

Observem que $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{C}(I)'$, pel teorema de Riesz 2.13, sabem que el dual esta determinat per les mesures, i per tant existeix una mesura complexa μ tal que

$$\int_0^1 \varphi \, d\mu = 1 \qquad i \qquad \int_0^1 f \, d\mu = 0 \quad \forall f \in X$$

En particular tenim que per tota n

$$\int_0^1 t^{\lambda_n} d\mu = 0$$

Definim $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_0^1 t^z d\mu$$

Primer de tot observem que és contínua en el semiplà dret

$$\Omega = \{z | Re(z) \geq 0\}$$

Observem que podem expressar

$$\int_0^1 t^z d\mu = \int_0^1 e^{z \log(t)} d\mu(t)$$

Observem que quan $t \to 0$ el límit de integral és 0, en la resta de casos veiem que és un composició de funcions contínues amb l'exponencial, per tant és contínua.

Per veure que també és holomorfa primer veurem que $F(z)$ és integrable, sigui $z = x+iy$ amb $x > 0$ i $0 < t \leq 1$ aleshores $|t^z| = t^x \leq 1$ així que

$$|F(z)| = \left| \int_0^1 t^z d\mu \right| \leq \int_0^1 |t^z| d\mu \leq \int_0^1 1 d\mu = 1$$

Gràcies a la integrabilitat de $F(z)$ podem usar Fubini i comprovar que donat qualsevol $T \subset \Omega$ tancat, la integral sobre la frontera de T és nul·la:

$$\int_{\partial T} F(z) dz = \int_{\partial T} \left(\int_0^1 t^z d\mu(t) \right) dz = \int_0^1 \left(\int_{\partial T} t^z dz \right) d\mu(t) = \int_0^1 0 \, d\mu(t) = 0$$

Comentem que $\int_{\partial T} t^z d = 0$ pel teorema de Cauchy.

Un cop vist això podem aplicar el teorema de Morera 3.9 i obtenim que $F(z)$ és holomorfa, al ser també acotada tenim que $F \in H^\infty$.

Definim la funció $T : \mathbb{D} \to \Omega$
$$T(z) = \frac{1+z}{1-z}$$
que envia el disc unitat al semiplà dret, com T és una bijecció holomorfa entre aquests dos conjunts, podem definir la seva amb inversa $T^{-1} : \Omega \to \mathbb{D}$
$$T^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$$
que envia el semiplà dret al disc unitat.
Definim $g : \mathbb{D} \to \Omega$
$$g(z) = F \circ T(z) = F\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$
Aleshores $g \in H^\infty$ i si considerem $a_n = T^{-1}(\lambda_n) = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ estem traslladant els zeros λ_n de F al disc unitat.

Primer de tot observem que si la successió $\{\lambda_n\}_n$ tingués algun punt d'acumulació dins del domini, aleshores automàticament $g(z)$ seria nul·la, ja que si els zeros de les funcions holomorfes tenen algun punt d'acumulació, vam veure a l'assignatura d'anàlisi complexa que la funció aleshores és idènticament zero.

Per tant, al ser $\{\lambda_n\}_n$ una successió estrictament creixent, només ens falta veure el cas que la successió tendeixi a infinit i comprovar si es compleix la condició de Blaschke amb els zeros a_n de g.

Si $\lambda_n \to \infty$ aleshores existeix un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n > 1$, és per això que tenim
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) \leq \sum_{n=m}^{\infty}(1-|a_n|) = \sum_{n=m}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right) = \sum_{n=m}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right)$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n + 1} = \infty$$
Pel Corol·lari 3.5, $g \equiv 0$ en tots els possibles casos i, per tant, també $f \equiv 0$, en particular, f s'anul·la en totes les $z = k$ on $k = 0, 1, 2, 3, ...$, és a dir
$$\int_0^1 t^k d\mu(t) = 0$$
Això implica que la integral de tots els monomis t^k amb $k \in \mathbb{N}$ (incloent el monomi 1) és nul·la i per tant també la de tots els polinomis, ja que són combinacions lineals d'aquests. Només ens falta veure que la integral de $\varphi \notin X$ que havíem suposat inicialment que valia 1 també s'anul·la.

Com $\varphi \in \mathcal{C}(I)$, pel teorema d'aproximació de Weierstrass 1.1, vist a la introducció, tenim que existeix una successió de polinomis $\{P_n(t)\}_n$ que convergeix uniformement a φ, és a dir, $\lim_{n\to\infty} P_n(t) = \varphi$. Utilitzant que la convergència és uniforme i que les integrals dels polinomis són nul·les tenim les següents igualtats:
$$\int_0^1 \varphi \, d\mu(t) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} P_n(t)\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(t)\, d\mu(t) = 0$$

És a dir, hem arribat a contradicció al suposar que podria haver alguna $\varphi \in \mathcal{C}(I) \setminus X$ i per tant podem concloure que $X = \mathcal{C}(I)$. Donem per finalitzada la primera part de la demostració.

Seguim amb el segon resultat (ii):
En aquest cas volem construir una mesura μ en I tal que la funció $f(z) = \int_I t^z d\mu(t)$ sigui holomorfa en $\{z|Re(z) > -1\}$, i que els seus únics zeros siguin a $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Pel teorema de Riesz 2.13 , amb aquesta construcció, obtindrem una forma del dual de X que s'anul·larà en t^λ sempre que $\lambda \neq 0$ o $\lambda \notin \{\lambda_n\}$.
Per començar a construir la mesura, primer creem una funció $f(z)$ els zeros de la qual siguin $\{\lambda_n\}$:

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - z)}{2 + \lambda_n + z}$$

Observem que $\frac{(\lambda_n - z)}{2+\lambda_n+z} = 1 - \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z}$, aleshores:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - z)}{2 + \lambda_n + z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z}\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z}\right) < \infty$$

Per criteri de comparació de sèries, tenim que el sumatori es finit si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z} < \infty$. Per tant, com partim de la hipòtesi que $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. La sèrie és convergent sempre que $z \neq -\lambda_n - 2$, $\forall n$.

Així doncs tenim que $f(z)$ és una funció meromorfa a tot $\mathbb{C}$ amb pols en $z = -2$ i en $z = -\lambda_n - 2$.

Però si només considerem el semiplà $Re(z) \geq -1$ observem que cap dels pols hi pertany i per tant la funció és holomorfa en aquesta regió. Si $Re(z) \geq -1$ es compleix que $|z| \leq |2+z|^3$, a més, si $\lambda_n - z > 0$ tenim

$$\lambda_n - z \leq 2 + \lambda + z \iff -1 \leq z$$

en canvi, si $\lambda_n - z < 0$ tenim

$$z - \lambda_n \leq 2 + \lambda_n + z \iff -1 \leq \lambda_n$$

per tant, com el denominador sempre és positiu tenim $|\lambda_n - z| \leq |2 + \lambda + z|$, és a dir, en aquest mateix semiplà tenim que $|f(z)| \leq 1$.
El factor $(2+z)^3$ ens assegura que la restricció de f a $Re(z) = -1$ és L^1.

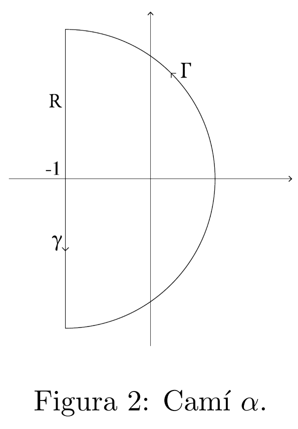

Figura 2: Camí α.

Fixem z tal que $Re(z) > -1$ i considerem la fórmula de Cauchy de $f(z)$ pel camí tancat α representat en la figura anterior, el qual consisteix en el semicercle Γ de centre -1 i radi R, on $R > 1+|z|$, que va de $-1-iR$ a $-1+iR$ i el segment γ que va de $-1+ir$ a $-1-iR$,.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega$$

En el cas de Γ tenim que

$$|f(z)| \lesssim \frac{R}{R^3} \Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega\right| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left|\frac{f(\omega)}{\omega - z}\right| d\omega \lesssim \frac{R}{R^4} \longrightarrow_{R\to\infty} 0$$

Per tant quan $R \to \infty$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds \qquad (Re(z) > -1)$$

Observem que

$$\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}dt \qquad (Re(z) > -1)$$

aplicant Fubini podem reescriure $f(z)$ com

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 t^{z-is}f(-1+is)dtds = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty} t^{z-is}f(-1+is)dsdt \\ &= \int_0^1 t^z\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}ds\right\}dt \end{aligned}$$

anomenem a la part interior de les claus $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)e^{-is\log(t)}ds$$

Veiem que $h(z)$ és contínua, és a dir volem veure que:

$$h(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}ds$$

Anteriorment hem vist que $|f(z)| < 1$ i que també $|t^{-is}|$ ja que $t \in [0,1]$, per tant tenim que $|\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}| < 1$, per tant, pel teorema de convergència dominada podem entrar el límit dins la integral:

$$h(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to t_0} f(-1+is)t^{-is}ds$$

I com f és contínua i $t^{-is} = e^{-is\log(t)}$ també ho és tenim que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to t_0} f(-1+is)t^{-is}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t_0^{-is}ds = h(t_0)$$

amb el que acabem de veure que $h(t)$ és contínua i pels mateixos arguments acabats d'utilitzar de cotes, $h(t)$ també és acotada.

Finalment hem vist que $h(t)$ és una funció densitat i aleshores, $h(t)dt$, és una mesura, si anomenem $d\mu(t) = h(t)dt$ hem obtingut finalment la mesura que buscàvem:

$$f(z) = \int_0^1 t^z d\mu(t)$$

□

Comentari 4.5. Aquest teorema es pot estendre als complexos sempre que $Re(\lambda_n) > 0$, i la condició que hauran de complir haurà de ser la mateixa que per als reals, que la condició de Blaschke sigui divergent, tot i que a diferència del cas anterior aquesta no es podrà simplificar res més enllà que el sumatori que hem definit ala definició 3.3, és per això que a continuació enunciarem el següent resultat en forma de teorema.

Teorema 4.6. *Sigui $\{\lambda_i\}$, tal que $\lambda_i \in \mathbb{C}$ i $Re\lambda_i > 0$, aleshores*

$$\overline{\langle 1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, ... \rangle} = \mathcal{C}([0,1])$$

si i només si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right) = \infty$$

4.2 Teorema de Müntz-Szász complet en $C([0,1])$

En l'apartat anterior hem vist el teorema clàssic de Müntz-Szász 4.1 el qual deixa encara moltes preguntes per contestar, una de les quals seria, què passa si la successió $\{\lambda_n\}_n$ no és creixent i s'acumula en el 0? Podria ser que en aquest cas també puguem aproximar a totes les funcions de $\mathcal{C}([0,1])$? La resposta a aquestes preguntes i d'altres similars que sorgeixen de possibles comportament de la successió $\{\lambda_n\}_n$ ens les dona el teorema complet de Müntz-Szász.

Teorema 4.7. *Sigui $\{\lambda_n\}_n$ uns successió de diferents nombres reals positius, sigui X la clausura en $\mathcal{C}([0,1])$ del conjunt de combinacions finites de les funcions*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

aleshores X és dens en $\mathcal{C}([0,1])$ si i només si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + 1} = \infty$$

Demostració: Primer de tot considerarem els comportaments de la successió en 4 casos diferents:

1. $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.
3. $\{\lambda_n\} = \{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$, amb $\alpha_n \to 0$ i $\beta_n \to \infty$

4.$\{\lambda_n\}$ té un punt d'acumulació en $(0, +\infty)$.

Aquests quatre casos ens inclouen tots els comportaments possibles de $\{\lambda_n\}_n$, i per tant, els anirem demostrant per separat, de fet, el primer no serà necessari fer-ne la prova ja que és el cas del teorema clàssic i del quart tampoc ja que, també en la prova del teorema clàssic, hem vist que si la successió té un punt d'acumulació, automàticament la funció $F(z)$ definida usant el teorema de Hahn-Banach 2.4 i el teorema de Riesz 2.13 és idènticament 0.

(2) Comencem doncs amb el segon cas, és a dir, que la nostra successió $\{\lambda_n\}_n$ compleix

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$$

Primer de tot veurem que si es compleix que, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, aleshores $X = \mathcal{C}(I)$.

La demostració d'aquest apartat del teorema és idèntica a la del primer resultat del teorema de Müntz-Szász 4.1, exceptuant la part on comprovem la condició de Blaschke per als zeros a_n de la funció $g = F \circ T$. Recordem que la funció F l'havíem definit usant la mesura $d\mu$ i suposant que f s'anul·la en tots els polinomis de $[0,1]$ que no pertanyien en X.

En aquest cas, com la sèrie s'acumula en el 0, ha d'existir un n_0 tal que per a tot $n > n_0$ aleshores $\lambda_n < 1$ i, per tant, $\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} < 0$ quan $n > n_0$. Considerem a continuació la condició de Blaschke:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty}(1-|a_n|) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right)$$
$$= \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1}$$

Observem que podem acotar el denominador entre dues constants, concretament 1 i 2, ja que si $n > n_0$ $\lambda_n \in (0,1)$ i per tant tenim que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{2} < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{1}$$

i aleshores

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} < \infty \iff \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n < \infty$$

I com teníem com a hipòtesi que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, també tenim $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n+1} = \infty$ obtenint de nou que la funció g i conseqüentment f son idènticament 0 i repetint idènticament l'argument de la prova anterior acabem aquest cas.

Abans de seguir amb la resta, observem que no hem utilitzat la condició de l'enunciat $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} = \infty$, sinó que només hem usat que $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, condició completament diferent a la que havíem usat en el teorema clàssic de Müntz-Szász 4.1, concretament hem vist que:

La successió $\{\lambda_n\}_n$ ha de ser estrictament creixent i complir que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, on ens podríem trobar que s'acumul·la en qualsevol punt de la recta real positiu diferent del zero o en l'infinit, o en el cas de no ser creixent, hauria d'acumular-se en el 0 i complir que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$.

Aquestes dos casos es poden fusionar en una sola condició, que és que la següent sèrie divergeixi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n^2} = \infty$$

Que aquesta sèrie divergeixi recull totes les opcions anteriors ja que si $\lambda_n \to \infty$, aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

I si $\lambda_n \to 0$, pel mateix argument usat en el Teorema 5.1 usant l'acotació del denominador obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$$

Acabem així l'incís respecte les condicions que han de complir $\{\lambda_n\}_n$ depenent del seu comportament quan $n \to \infty$ per a que X sigui dens en $\mathcal{C}([0,1])$.

Continuem amb el recíproc en el cas $\lambda_n \to 0$ quan $n \to \infty$.Volem veure que si X és dens en $\mathcal{C}([0,1])$ aleshores s'ha de complir que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} = \infty$, és a dir, volem veure

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} < \infty, \ \ i \ \lambda \notin \{\lambda_n\} \Longrightarrow t^{\lambda} \notin X$$

Igual que en la implicació anterior a demostració d'aquest resultat és pràcticament idèntica a la de la segona part del teorema clàssic de Müntz-Szász (Teorema 4.1), només que farem petites variacions en la funció $f(z)$ definida a $Re(z) > 0$ depenent del comportament de la successió $\{\lambda_n\}$.
Considerem el cas 2, és a dir $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$ i la nova $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-\lambda_n}{\lambda_n + z}$$

clarament aquesta funció s'anul·la sempre que $z = \lambda_n$.

Anem a comprovar que el productori és convergent:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z-\lambda_n)}{\lambda_n + z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + z}\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + z}\right) < \infty$$

Pel criteri de comparació de sèries tenim que el sumatori és finit si $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda_n}{z+\lambda_n}\right) < \infty$, com $\lambda_n \to 0$, i $\lambda_n > 0$ la condició $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} < \infty$ és equivalent a que $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ i per tant com tenim el denominador acotat per z tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda_n}{\lambda_n + z}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda_n}{z}\right) < \infty$$

Ara només ens falta veure que la funció f segueix sent acotada.

Observem que el numerador del productori és el càlcul de la distància entre z i les λ_n, en canvi, el denominador és la distància entre z i $-\lambda_n$ al ser $z > 0$, la distància entre qualsevol λ_n serà sempre menor que amb la de la seva oposada, per tant tenim que $|\lambda_n - z| \leq |\lambda_n + z|$. Fem una petita exemplificació gràfica

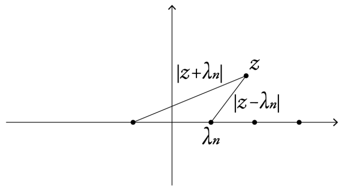

Figura 3: Desigualtat gràfiques

És a dir, en $Re(z) > 0$ sempre tindrem que $\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z}\right| < 1$ i per tant, f és holomorfa i acotada en $Re(z) > 0$.
Un cop vist això, la resta de la demostració és idèntica a la del Teorema 4.1

Passem a demostrar el cas **(3)**:
Veiem primer que si es compleix que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} = \infty$, aleshores $\langle 1, \lambda_1, \lambda_2, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$.
Si la nostra successió és $\{\lambda_n\} = \{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$, amb $\alpha_n \to 0$ i $\beta_n \to \infty$, podem expressar la condició $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} = \infty$ com:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\beta_i^2+1} = \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = \infty$$

Per tant, tenim que com a mínim un dels dos sumatoris no ha de ser convergent, és a dir, aplicant els casos anteriors tenim que $\langle 1, t^{\lambda_1} t^{\lambda_2}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$.

Veiem la implicació contrària, sigui $\{\lambda_n\} = \{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$, amb $\alpha_n \to 0$ i $\beta_n \to \infty$, aleshores si $\lambda \notin \{\lambda_n\}$ i $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2+1} < \infty$ tenim que $t^{\lambda} \notin X$.
Igual que en els casos anteriors, hem de construir una funció $f(z)$ que s'anul·li en tota λ_n.
Com sabem que $\{\lambda_n\} = \{\alpha_m\} \cup \{\beta_k\}$, amb $\alpha_n \to 0$ i $\beta_n \to \infty$ definim la nostra funció $f : \Omega \to [0,1]$ on $\Omega = \{z \int \mathbb{C} | Re(z) > 0$ de la següent manera.

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)^3} \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_n - z}{2 + \beta_n + z} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{z - \alpha_n}{z + \alpha_n}$$

Clarament aquesta funció s'anul·la en tots els valors de la successió $\{\lambda_n\}$ i com en els casos previs hem vist que ambdós productoris són finits i acotats, el producte d'aquests també ho és. Per tant, tenim que aquesta nova f està ben definida i és acotada, per tant ja hem acabat la demostració perquè el que segueix és idèntic que en el cas del Teorema 4.1. $\square$

5 Teorema de Müntz-Szász complet per $L^p([0,1])$.

Tal i com hem mencionat a la introducció és natural preguntar-se què passa amb altres funcions que no han de perquè ser contínues secció, és per això que enunciarem i demostrarem el resultat equivalent del teorema complet de Müntz-Szász per espais $L^p([0,1])$ amb $1 \leq p < \infty$.

Observem que ometem el cas $p = \infty$, en el qual no es compleix el teorema, això és degut a què volem aproximar amb funcions contínues (polinomis) funcions acotades amb la norma del suprem, i això no és possible. Veiem-ho en forma de lema.

Lema 5.1. *Sigui $\{\lambda_n\}_n$ una successió de nombres reals, aleshores, el conjunt $\langle 1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, ...\rangle$ mai podrà ser dens en $L^\infty([0,1])$.*

Demostració: Si tenim que una successió de funcions contínues és convergent amb la norma del suprem, aleshores la convergència és uniforme i per tant la funció resultant també ha de ser contínua, en canvi, l'espai de les funcions acotades conté moltes funcions no contínues, com per exemple podria ser el cas de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$$

□

A continuació ens disposem a veure el resultat equivalent del teorema complet de Müntz-Szász a $L^p([0,1])$, tot i que per qüestions tècniques que comentarem més endavant anirem veient-lo desglossat per parts.

Comencem veient en forma de teorema la direcció on suposem que $\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i + \frac{1}{p}}{(\lambda_i+\frac{1}{p})^2+1} = \infty$ i que aleshores tenim que els polinomis de grau λ_n són densos en $L^p([0,1])$ per a tota $0 < p < +\infty$.

Teorema 5.2. *Sigui $1 \leq p < \infty$. i $\{\lambda_n\}_n$, amb $\lambda_n > -\frac{1}{p}$ $\forall n$, una successió de nombres reals tals que*

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i + \frac{1}{p}}{(\lambda_i + \frac{1}{p})^2 + 1} = \infty$$

aleshores, el conjunt de combinacions finites de les funcions

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

és dens en $L^p([0,1])$.

Demostració: Estem suposant que

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i + 1/p}{(\lambda_i + 1/p)^2 + 1} = \infty$$

de manera que, seguint els mateixos arguments que en la demostració del teorema de Müntz-Szász clàssic (Teorema 4.1), amb el teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.4) i els teoremes 2.14 i 2.15 (l'equivalent al teorema de Riesz 2.13 però per espais L^p), el conjunt

$\langle t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, ...\rangle$ no és dens en $L^1([0,1])$ si i només si existeix una funció $h \in L^\infty([0,1])$ no nul·la tal que $\forall i$

$$\int_0^1 t^{\lambda_i} h(t)dt = 0$$

seguint amb el guió de la demostració del teorema clàssic, definim

$$F(z) := \int_0^1 t^z h(t)dt$$

en la regió $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > -1\}$.

Per a continuar, com en el cas complet del teorema de Müntz-Szász, diferenciarem el comportament de $\{\lambda_n\}_n$ en els quatre casos possibles:

1. $\{\lambda_n\}$ té un punt d'acumulació en $(-\frac{1}{p}, +\infty)$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = -1/p$.
4. $\{\lambda_n\} = \{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$, amb $\alpha_n \to -1/p$ i $\beta_n \to \infty$.

***(1)** La successió tingui un punt d'acumulació més gran de -1/p.* En aquest cas, com $F(z)$ és una funció holomorfa, els zeros de la qual, tenen un punt d'acumulació, conseqüentment obtenim que és idènticament 0.

***(2)** La successió s'acumula a l'infinit.* En aquest cas considerarem la regió

$$\Omega' = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq 0\}$$

definim la funció $T : \mathbb{D} \to \Omega'$

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

com T és una bijecció holomorfa entre aquests dos conjunts podem definir la seva amb inversa $T^{-1} : \Omega' \to \mathbb{D}$

$$T^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Definim $g : \mathbb{D} \to \Omega'$

$$g(z) = F \circ T(z) = F\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Comprovem que efectivament $g(z)$ és integrable i per tant holomorfa

$$|g(z)| = \left|\int_0^1 t^{(1+z)/(1-z)} h(t)dt\right| \leq \int_0^1 t^{Re((1+z)/(1-z))} |h(t)|dt \leq \|h(t)\|_{L^1([0,1])} < \infty$$

Acabem de comprovar que g és acotada i analítica en el disc unitat.

Com que $\lambda_n \to \infty$ ha d'existir un n_0 tal que $\lambda_n > 0$, si considerem $a_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ per a tota $n > n_0$ tenim, per construcció de g i F, que

$$g(a_n) = F(\lambda_n) = 0$$

per tant, hem de veure que no es compleix la condició de Blaschke per als zeros de g, és a dir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right) = \infty$$

i pel corol·lari 3.8 tindrem que $g = f = 0$. Comprovem-ho, com $\lambda_n \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\lambda_n-1}{\lambda_n+1}\right|\right) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\lambda_n-1}{\lambda_n+1}\right|\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n-1}{\lambda_n+1}\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{2}{\lambda_n+1}\right)$$

Com hem suposat que $\sum \frac{\lambda_n+1/p}{(\lambda_n+1/p)^2+1)} = \infty$ i estem en el cas $\lambda_n \to \infty$ aleshores existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n > 1$, és per això que tenim

$$\sum \frac{\lambda_n + 1/p}{(\lambda_n+1/p)^2+1} = \infty \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\lambda_n+1/p} = \infty$$

i observant que

$$\sum \frac{1}{\lambda_n+1} < \sum \frac{1}{\lambda_n+1/p} = \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{\lambda_n+1} = \infty$$

És a dir, la condició de Blaschke també és divergent i consegüentment $F(z) = 0$.

***(3)** La successió s'acumula en -1/p.* En aquest cas definirem $g : D(1-1/p, 1) \to \mathbb{C}$, on $D(1-\frac{1}{p}, 1)$ és el dir el disc de radi 1 centrat en $-1/p$.

$$g(z) := (z+1/p)^2 F(z+1-1/p)$$

Veiem que està ben definida

$$|g(z)| \leq |z+1/p|^2 \left(\int_0^1 t^{pRe(z)}dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |h(t)|^q dt\right)^{1/q} = |z+1/p|^2\left(\frac{1}{px+1}\right)^{1/p}\|h(t)\|_q$$

Observem que aquesta funció podria no estar acotada en $z = -1/p$, però tenim que g està definida en un conjunt acotat, per tant, pel principi del màxim d'anàlisi complexa, el màxim s'assoleix a la frontera, per consegüent, en tenim prou estudiant un entorn de $z = -1/p$ a la frontera.

En aquest entorn de -1/p els punts $z = x+iy$ formen una corba parabòlica que podem expressar com $x = Cy^2 - 1/p$ tal i com ho podem observar en el dibuix inferior.

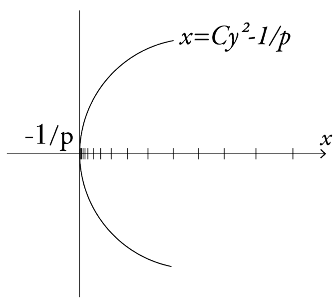

Figura 4: Entorn de -1/p en el disc.

i per tant, retornant a la cota que havíem calculat de $g(z)$ tenim:

$$|g(z)| \leq \frac{(x+1/p)^2+y^2}{(p(Cy^2-1/p)+1/p)^{1/p}}\|h(t)\|_q = \frac{(Cy^2-1/p+1/p)^2+y^2+1}{(p(Cy^2-1/p))^{1/p}}\|h(t)\|_q$$
$$= \frac{C^2y^4+y^2}{C'y^{2/p}}\|h(t)\|_q < \infty$$

Si fem el límit quan $y \to 0$, que és quan $z \to -1/p$ i podia haver la singularitat, tenim que la cota tendeix cap a $\frac{\|h(t)\|_q}{C'}$, així doncs, hem vist que $g(z)$ és acotada en el disc.

Com ara tenim una funció definida en el disc unitat podem comprovar si es compleix la condició de Blaschke. Observem abans que $a_n = \lambda_n + 1/p - 1$ són els zeros de g obtinguts al traslladar λ_n al disc

Sabem que la successió $\{\lambda_n\}_n$ s'acumula en -1/p, així doncs, existeix un n_0 tal que per a tota $n > n_0$ es compleix que $\lambda_n < 0$, per tant com les $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty}(1-|a_n|) = \sum_{n=n_0}^{\infty}(1+a_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} 1+\lambda_n-1+1/p$$
$$= \sum_{n=n_0}^{\infty}\lambda_n+1/p = \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n+1/p}{(\lambda_n+1/p)^2+1} = \infty$$

Conseqüentment hem vist, pel corol·lari del teorema de Blaschke 3.8 i 3.5, que g i per tant també F són idènticament 0.

Finalment considerem l'últim cas:

(4) La successió s'acumula tan en el -1/p com a ∞. Aquest comportament és equivalent a que $\{\lambda_n\} = \{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$, amb $\alpha_n \to -1/p$ i $\beta_n \to \infty$ i per tant la condició de divergència es poden reinterpretar com

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n+1/p}{(\lambda_n+1/p)^2+1} = \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i+1/p = \infty \text{ o } \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_i+1/p} = \infty$$

Per tant, aplicant el cas *(3)* a $\{\alpha_i\}_i$ en el cas que $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i+1/p = \infty$ o el cas *(2)* en $\{\beta_i\}_i$ si $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_i+1/p} = \infty$ obtenim el resultat desitjat.

Havent finalitzat aquest darrer cas *(4)* podem donar per acabada la prova en una direcció del teorema de Müntz-Szász per espais de Lebesgue.

□

Seguirem veient el recíproc d'aquest mateix teorema que acabem de demostrar però només en el cas $p = 1$:

Teorema 5.3. *Sigui* $\{\lambda_n\}_n$*, amb* $\lambda_n > -1\ \forall n$*, una successió de nombres reals, i el conjunt de combinacions finites de les funcions*

$$t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

és dens en $L^1([0,1])$ *aleshores*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i+1}{(\lambda_i+1)^2+1} = \infty$$

Demostració: Anomenem X a l'espai de les combinacions lineals de les t^{λ_i} i suposem que X és dens en $L^1([0,1])$.

Fixem un enter no negatiu m. Per $\varepsilon > 0$, escollim un polinomi $p \in X$ de la forma $p(t) = a_0 t^{\mu_0} + a_1 t^{\mu_1} + ...$ on $\mu_i \in \{\lambda_n\}_n$ tal que

$$\|t^m - p\|_{L^1([0,1])} < \varepsilon$$

definim la funció

$$q(t) := \int_0^t p(s)ds$$

Que clarament pertany a $\langle t^{\lambda_0+1}, t^{\lambda_1+1}, ...\rangle$. Usant la desigualtat anterior tenim

$$\begin{aligned} \left\| \frac{t^{m+1}}{m+1} - q \right\|_{\mathcal{C}([0,1])} &= \sup \left| \frac{t^{m+1}}{m+1} - \int_0^t p \right| \leq \left| \int_0^t (t^m - p) \right| \\ &\leq \int_0^t |t^m - p| \leq \int_0^1 |t^m - p| < \varepsilon \end{aligned}$$

És a dir, per cada enter m positiu podem trobar un element de $\langle t^{\lambda_0+1}, t^{\lambda_1+1}, ...\rangle$ tal que $\left\| \frac{t^{m+1}}{m+1} - q \right\|_{\mathcal{C}([0,1])} < \varepsilon$, i pel teorema d'aproximació de Weierstrass 1.1 sabem que els polinomis són densos en $\mathcal{C}([0,1])$, així que $\langle 1, t^{\lambda_0+1}, t^{\lambda_1+1}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$. Finalment, aplicant el teorema complet de Müntz-Szász (Teorema 5.3) podem concloure substituint els λ_n per $\lambda_i + 1$ en la condició necessària en $\mathcal{C}([0,1])$ que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + 1}{(\lambda_i + 1)^2 + 1} = \infty$$

Obtenint així la condició desitjada. $\square$

Ara ja quasi tenim totes les eines per tal d'acabar demostrar el teorema de Müntz-Szász en $L^p([0,1])$, només ens falta un lema:

Lema 5.4. *Sigui $\{\mu_n\}_n$ una successió de nombres reals positius, tals que el conjunt*

$$\langle t^{\mu_1 - 1/r}, t^{\mu_2 - 1/r}, ...\rangle$$

és dens en $L^r([0,1])$. Aleshores, per $s > r$, l'espai

$$\langle t^{\mu_1 - 1/s}, t^{\mu_2 - 1/s}, ...\rangle$$

és dens en $L^s([0,1])$ i $\langle 1, t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$.

Demostració: Considerem l'espai $A = \langle t^{\mu_1 - 1/r}, t^{\mu_2 - 1/r}, ...\rangle$ i els espais de funcions $X = L^r([0,1])$ i $Y = L^s([0,1])$.
El nostre objectiu és construir un operador lineal que anomenarem J entre els espais X i Y tal que $J(X)$ sigui dens en Y i per tant observem que també obtindrem que $J(A)$ és dens en Y.
Considerem l'operador $J : L^r([0,1]) \to L^s([0,1])$

$$(J\varphi)(t) = t^{-(1/r' + 1/s)} \int_0^t \varphi(u)du, \qquad t \in [0,1],\ \varphi \in L^r([0,1])$$

on $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$.

Per tal que sigui lineal hem de veure que l'operador és acotat en $L^s([0,1])$. A continuació començarem usant la desigualtat de Hölder amb una h que definirem una mica més tard i per fer la notació una mica menys farragosa, definirem $\alpha=\frac{1}{r'}+\frac{1}{s}$. Comencem considerant la norma de l'operador elevada a s i fem alguna petita modificació

$$\int_0^1\left|t^{-\alpha}\int_0^t\varphi(u)\right|^s=\int_0^1\left|t^{-\alpha+1/r-1/r}\int_0^t\varphi(u)\right|^s=\int_0^1\left|t^{1/r-\alpha}\left(\frac{1}{t^{1/r}}\int_0^t\varphi(u)\right)\right|^s$$

apliquem la desigualtat de Hölder amb $p=\frac{r-s}{r}$ i el seu conjugat, $q=\frac{r}{s}$:

$$\leq\left(\int_0^1 t^{(1/r-\alpha)s(r-s)/r}\right)^{(r-s)/r}\left(\int_0^1\left|\left(\frac{1}{t^{1/r}}\right)^{s(r/s)}\int_0^t\varphi(u)du\right|^{s(r/s)}\right)^{s/r}$$

Tractarem primer el segon factor, simplificant tenim

$$\int_0^1\left|\left(\frac{1}{t^{1/r}}\right)^{s(r/s)}\int_0^t\varphi(u)du\right|^{s(r/s)}=\int_0^1\left|\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(u)du\right|^r=\|H\varphi\|_r^r\leq C\|\varphi\|_r^r$$

Per tant, tenim que

$$\left(\int_0^1\left|\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(u)du\right|^r\right)^{s/r}\leq C'\|\varphi\|_r^s$$

per l'altra banda ens falta comprovar que

$$\left(\int_0^1 t^{(1/r-\alpha)s(r-s)/r}\right)^{(r-s)/r}<\infty$$

hem d'assegurar-nos que l'exponent de t és més gran que -1, primer veiem una expressió més clara de l'exponent

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}-\frac{1}{s}\right)s\frac{1}{h}=-\left(\frac{2}{r}-1+\frac{1}{s}\right)s\left(\frac{r}{r-s}\right)=-\frac{(r-1)s+r}{r-s}=-1-\frac{rs}{r-s}$$

per tant,

$$-1-\frac{rs}{r-s}>-1\iff\frac{rs}{r-s}>0$$

I com per hipòtesi tenim que $s>r>0$ aquesta desigualtat és certa. Per tant ja hem vist que l'operador J està acotat al haver comprovat que els dos factors de la desigualtat de Hölder estan acotats.

Per cada $n\in\mathbb{N}$ definim la funció $\psi_n(t):=(n+\frac{1}{r'}+\frac{1}{s})t^{n+1/s-1/r}$ per $t\in[0,1]$. Observem que $\psi_n\in L^r([0,1])$

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_r^r&=\int_0^1\left|(n+\frac{1}{r'}+\frac{1}{s})t^{n+1/s-1/r}\right|^r\\&=\int_0^1\left|n+\frac{1}{r'}+\frac{1}{s}\right|^r|t|^{nr+r/s-1}\leq\int_0^1 C1^{nr+r/s-1}<\infty\end{aligned}$$

i que també compleix $(J\psi_n)(t)=t^n$, aquesta igualtat es veu fàcilment integrant i usant que $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$.

Com a partir d'elements de X mitjançant l'operador T podem obtenir qualsevol polinomi, pel teorema d'aproximació de Weierstrass 1.1 podem concloure que el conjunt $J(X)$ és dens en $L^s([0,1])$

Per veure que $\langle 1, t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$, considerem un altre operador lineal $J : L^r([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$

$$(J\varphi)(t) = t^{-1/r'} \int_0^t \varphi(u)du, \quad t \in (0,1], \quad (J\varphi)(0) = 0$$

Amb $\varphi \in L^r([0,1])$ i r' conjugada de r. Repetint l'argument de la primera part del lema podem concloure que el conjunt $\langle 1, t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, ...\rangle$ és dens en $\mathcal{C}([0,1])$. $\square$

Ara ja podem enunciar i demostrar l'últim resultat per a tenir la versió completa per $L^p([0,1])$ amb $p > 1$:

Teorema 5.5. *Sigui* $1 < p < \infty$. *i* $\{\lambda_n\}_n$*, amb* $\lambda_n > -\frac{1}{p}$ $\forall n$ *una successió de nombres reals, i el conjunt de combinacions finites de les funcions*

$$t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

és dens en $L^p([0,1])$*, aleshores*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + \frac{1}{p}}{(\lambda_i + \frac{1}{p})^2 + 1} = \infty$$

Demostració: Suposem que $\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...\rangle$ és dens en $L^p([0,1])$, definim $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{p}$, per tota $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, així obtenint que el conjunt

$$\langle t^{\mu_1 - 1/p}, t^{\mu_2 - 1/p}, t^{\mu_3 - 1/p}, ...\rangle$$

és dens en $L^p([0,1])$.

Pel lema 5.4 anterior tenim que l'espai

$$\langle t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, t^{\mu_3}, ...\rangle$$

és dens en $\mathcal{C}[(0,1)]$. Per tant, aplicant el teorema de Müntz-Szász complet (Teorema 4.7) tenim que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + \frac{1}{p}}{(\lambda_i + \frac{1}{p})^2 + 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu_i}{\mu_i^2 + 1} = \infty$$

$\square$

Amb aquest últim teorema ja hem acabat de demostrar totes les components que necessitem per provar la versió del teorema de Müntz-Szász en $L^p([0,1])$ però que encara no hem enunciat, veiem-lo:

Teorema 5.6. *Sigui* $1 \leq 1 < \infty$ *i* $\{\lambda_n\}_n$*, amb* $\lambda_n > -\frac{1}{p}$ $\forall n$*, una successió de nombres reals, aleshores, el conjunt de combinacions finites de les funcions*

$$t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

és dens en $L^p([0,1])$ *si i només si*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i + \frac{1}{p}}{(\lambda_i + \frac{1}{p})^2 + 1} = \infty$$

A part de la demostració desglossada que acabem de veure, també podríem veure una demostració alternativa de la direcció on suposem que $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i+\frac{1}{p}}{(\lambda_i+\frac{1}{p})^2+1}=\infty$ i veiem que l'espai de les combinacions dels polinomis és dens en $L^p([0,1])$ però partint d'una demostració d'aquest mateix resultat per $p=1$ i el lema 5.4.

A continuació tornem a enunciar el resultat amb la demostració alternativa:

Teorema 5.7. *Sigui* $1<p<\infty$. *i* $\{\lambda_n\}_n$, *amb* $\lambda_n>-\frac{1}{p}$ $\forall n$, *una successió de nombres reals tals que*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i+\frac{1}{p}}{(\lambda_i+\frac{1}{p})^2+1}=\infty$$

aleshores, el conjunt de combinacions finites de les funcions

$$1,t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},t^{\lambda_3},...$$

és dens en $L^p([0,1])$.

Demostració: Considerem la successió $\{\lambda_n\}_n$ que satisfà $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i+\frac{1}{p}}{(\lambda_i+\frac{1}{p})^2+1}=\infty$ i que $\lambda_i>-\frac{1}{p}$. A continuació considerem la successió $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ on $v_i=\lambda_i-\frac{1}{q}$ per tota $i\geq 0$ on $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Per hipòtesis tenim que

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{v_i+1}{(v_i+1)^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_i+1/p}{(\lambda_i+1/p)^2+1}=\infty$$

Per tant, pel teorema5.2 considerant només el cas $p=1$ podem concloure que l'espai $\langle t^{v_i}\rangle=\langle t^{\lambda_i-1/q}$ és dens en $L^1([0,1])$.

Prenem $\mu_i=\lambda_i+\frac{1}{p}$, per tota $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, observem que

$$\langle t^{\mu_1-1/p},t^{\mu_2-1/p},t^{\mu_3-1/p},...\rangle=\langle t^{\lambda_1},t^{\lambda_2},t^{\lambda_3},...\rangle$$

i per tant per l'anterior lema 5.4 tenim que ambdós conjunts són densos en $L^p([0,1])$ sempre que $p>0$. $\square$

Comentari 5.8. La majoria de d'articles sobre el teorema de Müntz-Szász en $L^p([0,1])$ es basen en l'article [3] de Peter Borwein i Tamás Erdélyi, ja que van ser els primers en estendre el teorema més enllà de funcions contínues. En aquesta publicació els autors van enunciar i demostrar el teorema complet per $\mathcal{C}([0,1])$ i $L^1([0,1])$.

L'enunciat era correcte però en la demostració quan usaven el teorema de Hahn-Banach i el de Riesz definien

$$F(z):=\int_0^1 t^z h(t)dt$$

on $h(t)\in L^\infty([0,1])$ i que $\forall\, n$ compleix $F(\lambda_n)=0$. Seguidament, mantenint el curs de la demostració clàssica, també definien

$$g(z):=F\left(\frac{1+z}{1-z}-1\right)$$

però cap de les dues no estaven ben definides ja que

$$|F(z)| \leq \int_0^1 |t^z|\,|h(t)|dt \leq \int_0^1 t^{Re(z)}\|h(t)\|_\infty dt$$

i quan $z \to -1$ aquesta funció no està acotada, el que implica que no és vàlida pel cas $\lambda_n \to -1$.

Per tal de solucionar aquest problema, uns quants anys més tard Tamás Erdélyi i William B. Johnson es van adonar de l'error i al 2001 van mencionar i rectificar l'error en l'article [6] on definien la funció g tal i com esta descrita a continuació, però només en el disc de radi 1 centrat en el $-1/p+1$ en comptes de a tot el semiplà complex $Re(z) > -1/p$

$$g(z) := (z+1)^2 F\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

i amb la qual tot funciona correctament en $L^1([0,1])$, és a dir, per $p = 1$. Per a la resta de casos en canvi és incorrecta, al no haver especificat la demostració no es pot saber si no es van adonar del nou l'error o simplement és un error d'escriptura, ja que al funció que s'ha usat en la demostració és la següent

$$g(z) := (z+1/p)^2 F\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

la qual segueix estant definida en el disc de radi 1 i centrat en $1 - 1/p$ però el terme quadràtic és lleugerament diferent ja que sinó no podríem cancel·lar termes quan la successió tendeix a $-1/p$.

Aquest error en la demostració inicial del teorema és el motiu pel qual hem fet la demostració alternativa del teorema 5.7, atès que és la que es pot trobar en tot els articles sobre la temàtica exceptuant el que conté la correcció.

Aquesta rectificació de la demostració fa que, a diferència del cas en $\mathcal{C}([0,1])$, no puguem estendre el teorema generalment a tots els complexos.

Ens trobem, però, que diferenciant casos del comportament de $\{\lambda_n\}_n$ i restringint l'espai a on pertanyen sí que podem trobar un resultat equivalent, és aquest el que enunciarem en forma de teorema a continuació.

Teorema 5.9. *Sigui $1 \leq p < \infty$ i $\{\lambda_n\}_n$ una successió de nombres complexos tal que per a tota n, $\lambda_n \in \mathbb{C}$ i $Re(\lambda_n) > -1/p$*

(i) Si $Re(\lambda_n) \to \infty$

$$\overline{\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, ...\rangle} = L^p([0,1])$$

si i només si

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}\right|\right) = \infty$$

(ii) Si la successió $\{\lambda_n\}_n$ s'acumula en $-1/p$, quan $n \to \infty$ i pertanyen al disc de radi 1 centrat en $-1/p+1$, aleshores

$$\overline{\langle t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, ...\rangle} = L^p([0,1])$$

si i només si
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|\lambda_n-1+1/p|)=\infty$$

Comentari 5.10. El cas no mencionat en el teorema anterior, és a dir quan la successió $\{\lambda_n\}_n$ compleix que $Re(\lambda_n) > -1/p$ i $Re(\lambda_n) \to -1/p$ sabem que el comportament de $F(z)$ és de la següent forma
$$|F(z)| \leq \frac{C}{Re(z)+1/p}$$
Al no estar en el disc i no ser acotada no podem aplicar el Teorema de Blaschke 3.5, però hi ha altres condicions que ens podrien donar un resultat similar però aquests resultats no estan recollits en la literatura.

6 Teorema de Runge

Hem arribat a la última secció del treball, on acabarem veient un resultat més sobre aproximació de polinomis però en aquest per a aproximar funcions holomorfes, tot el contingut d'aquesta secció s'ha basat en el llibre d'anàlisi complexa de Joaquim Bruna i Julià Cufí [7].

El resultat que voldrem provar serà el teorema de Runge, però per tal d'arribar-hi primer haurem d'enunciar i demostrar uns resultats previs

Proposició 6.1. *Sigui γ un camí del pla complex i F la funció holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ definida per la integral de Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega, \qquad z \notin \gamma^*$$

on f és una funció contínua sobre γ^*. Sigui K un compacte de $\mathbb{C}$ disjunt amb γ^* i $\varepsilon > 0$ qualsevol. Aleshores hi ha una funció racionar R amb pols simples a γ^* tal que

$$|F(z) - R(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K$$

Demostració: Sigui γ el camí definit per $\gamma(t)$ amb $a \leq t \leq b$. La funció $\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}$ és contínua per a tota $t \in [a,b]$ i tota $z \in K$ ja que $z \notin \gamma^*$ i està definida en el compacte $[a,b] \times K$, per tant a més a més és uniformement contínua, per consegüent existeix una partició

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

tal que

$$\left|\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i) - z}\right| < \frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)}, \qquad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \qquad z \in K$$

on M és una cota superior de $|\gamma'(t)|$. Considerem ara la funció racional

$$R(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z}(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j))$$

Aleshores tenim que passant la funció dins la integral i aplicant la cota de la continuïtat uniforme

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega - R(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z}\right)\gamma'(t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}M\frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)}(b-a) = \varepsilon\end{aligned}$$

És a dir, hem trobat una funció racional que aproxima $F(z)$ □

La següent proposició és coneguda com el *mètode de translació de pols* ja que si tenim una aproximació racional d'una funció, aquest mètode ens permet canviar de lloc els pols de la funció racional.

Proposició 6.2. *sigui K un compacte de $\mathbb{C}$. Llavors tenim que*

(i) Si V és una component connexa de $\mathbb{C}\backslash K$ i a,b $\in V$, la funció $\frac{1}{(z-a)}$ es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis en $\frac{1}{z-b}$.

(ii) Si V_∞ és la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ i $a \in V_\infty$, la funció $\frac{1}{z-a}$ es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis.

(iii) Recíprocament, si $a \notin K$ i la funció $\frac{1}{z-a}$ es pot aproximar uniformement per polinomis sobre K, aleshores $a \in V_\infty$.

Demostració: Comencem demostrant *(i)*, considerem, fixada $b \in V$, el conjunt

$$A = \left\{ a \in V : \frac{1}{z-a} \textit{és límit uniforme sobre } K \textit{ de polinomis en } \frac{1}{z-b} \right\}$$

El conjunt A és tancat, ja que per qualsevol successió $\{a_n\}_n \to a$ on $\forall n\ a_n, a \in V$ podem trobar $m > 0$ tal que $d(a_n, K) > m$, aleshores tenim

$$\left| \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a_n} \right| = \frac{|a-a_n|}{|z-a||z-a_n|} \leq \frac{|a-a_n|}{m^2} \qquad \forall z \in V$$

per tant $\frac{1}{z-a_n}$ tendeix uniformement a $\frac{1}{z-a}$ sobre K. Per transitivitat, resulta $a \in A$. Veiem que el conjunt A també és obert, sigui $a \in A$ i $\overline{D}(a,r) \subset V$, amb $r > 0$, volem veure que per tot punt $w \in D(a,r)$, $w \in A$. Considerem el següent desenvolupament,

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a-(w-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \qquad z \in K$$

aquesta sèries és uniformement convergent en K ja que com w, $a \in D(a,r)$ i $z \notin V$, tenim que

$$|w-a| < |z-a| \Rightarrow \left| \frac{w-a}{z-a} \right| < 1.$$

Acabem de veure que $\frac{1}{z-w}$ aproxima uniformement a K per polinomis en $\frac{1}{z-a}$, però com $a \in A$ i $\frac{1}{z-a}$ s'aproxima uniformement a K per polinomis en $\frac{1}{z-b}$ i , per tant, també les seves potència, per transitivitat obtenim que $w \in A$. Com hem vist que A és obert i tancat a V i no és buit ja que $b \in A$, tenim que $A = V$.

Seguim amb la demostració de l'apartat *(ii)*.

Sigui $M = \max\{|z| : z \in K\}$ i $b \in \mathbb{C}$ amb $|b| > M + 1$, clarament $b \in V_\infty$. considerem el següent desenvolupament de sèries de potències

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{b(\frac{z}{b}-1)} = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n, \qquad z \in K$$

és uniformement convergent sobre K ja que $\left|\frac{z}{b}\right| \leq \frac{M}{M+1} < 1$. Per tant, hem vist que $\frac{1}{1-b}$ s'aproxima per polinomis en z i en conseqüència, els polinomis en $frac11 - b$ també s'aproximen uniformement per polinomis en K.

Si $a \in V_\infty$, com és la component no acotada del complementari d'un compacte ha de ser connexa i podem aplicar l'apartat *(i)*, i tenim que $\frac{1}{1-a}$ s'aproxima per polinomis en

$\frac{1}{1-b}$, per tant, per transitivitat, deduïm que $\frac{1}{1-a}$ s'aproxima per polinomis en z.

Acabem ja la demostració veient l'apartat *(iii).*

Veurem aquest apartat fent us del contrarrecíproc, és a dir, si $a \notin K$ i a està en una component acotada $V \subset \mathbb{C} \setminus K$, aleshores $\frac{1}{1-a}$ no es pot aproximar uniformement per polinomis sobre K.

Si tenim una successió de polinomis $\{P_n(z)\}_n$ tals que convergeixen uniformement a $\frac{1}{1-a}$ en K i al ser K compacte, tenim que $\partial V \subset K$, en particular la successió $\{P_n(z)\}_n$ és uniformement convergent en ∂V. És a dir, per $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $\forall n > n_0$

$$\left| P_n(z) - \frac{1}{z-a} \right| < \varepsilon, \qquad z \in \partial V$$

considerant $\varepsilon < \frac{1}{2\mathrm{diam}(V)}$ tenim

$$|(z-a)P_n(z) - 1| < \varepsilon |z-a| < \frac{1}{2}, \qquad z \in \partial V$$

Pel principi del màxim sabem que el màxim d'una funció holomorfa s'assoleix a la frontera, i per la desigualtat anterior sabem que aquest és menor o igual a $\frac{1}{2}$, però al prendre $z = a \in V$ ens trobem que un valor de l'interior te mòdul més gran que -1, és a dir que hem arribat a contradicció.

Finalment poder dir que si a està en una component acotada no podem aproximar $\frac{1}{z-a}$ uniformement per polinomis sobre K. $\square$

Ara ja tenim totes les eines per enunciar i demostrar el teorema de Runge.

Teorema 6.3. ***Teorema de Runge per compactes***

(i) Si K és un compacte de $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, llavors tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis. Recíprocament, si aquesta aproximació és possible per a tota funció, holomorfa en un entorn de K, llavors $\mathbb{C} \setminus K$ és connex.

(ii) Si $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex i $A \subset \mathbb{C}$ és un conjunt que talla cadascuna de les components acotades de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar uniformement sobre K per funcions racionals que tenen els seus pols en punts de A.

Demostració: Comencem amb el primer apartat. Sigui f una funció holomorfa en un entorn U de K i $\varepsilon > 0$. Com $\mathbb{C} \setminus K$ és connex podem trobar un camíγ tal que $\gamma^* \subset U \setminus K$ tal que, per la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad z \in K$$

Llavors per la proposició 6.1 hi ha una funció racionar R amb pols a $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus K$ tal que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon/2, \qquad z \in K$$

Al ser R una funció racional, aquesta ha de ser una combinació lineal de funcions de la forma

$$\frac{1}{z-a_j}, \qquad a_j \notin K$$

Si $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, pel segon apartat de la proposició 6.2, cadascuna d'aquestes funcions s'aproxima uniformement sobre K per polinomis, conseqüentment, hi ha un polinomi P tal que

$$|R(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in K$$

amb el que acabem obtenint

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K$$

Veiem l'altra implicació, aquest resultat és una conseqüència del tercer apartat de la proposició 6.2, si $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex, aleshores ha de tenir una component acotada V, i si $a \in V$, la funció $\frac{1}{z-a}$, que és holomorfa en entorn de K, no es podrà aproximar per polinomis.

Comencem amb el segon apartat. Suposem que $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex i que A talla totes les components acotades de $\mathbb{C} \setminus K$. Definim la funció racional R com

$$R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

on R_1 té pols en la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ i R_2 té els pols en les components acotades. Com K és compacte, les components no acotades han de ser connexes i per tant per l'apartat anterior que acabem de veure existeix un polinomi P tal que

$$|R_1(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad z \in K.$$

Per acabar, és suficient veure que tots els pols en components acotades es poden traslladar a A, per obtenir una altra funció racional $R_3(z)$ amb pols a A tal que

$$|R_2(z) - R_3(z)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad z \in K.$$

La funció R_2 és una combinació lineal de funcions de la forma

$$\frac{1}{z - a_j}, \qquad a_j \notin K \cup V_\infty$$

així doncs, és suficient demostrar que

$$\frac{1}{z - a}, \qquad a \notin K \cup V_\infty$$

s'aproxima uniformement sobre K per funcions racionals amb pols dins de A.

Si V és la component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ que conté a, per hipòtesi hi ha un punt $b \in V \cap A$ i per tant pel primer apartat de la proposició 6.2 tenim que podem aproximar $\frac{1}{z-a}$ per polinomis en $\frac{1}{z-b}$ acabant així la demostració. □

Aquest teorema que acabem de demostrar es considera l'anàleg al teorema de Weierstrass però en el cos dels complexos, tot i això hi ha un Teorema encara més precís i similar al de Weierstrass que ens diu que podem aproximar funcions contínues en un compactes i que a la vegada siguin holomorfes en el seu interior, el teorema en qüestió és el teorema de Mergelyan i l'enunciarem (no el demostrarem) a continuació per tal d'acabar el treball amb un resultat més que ens obre la porta a possibles futurs estudis sobre la teoria d'aproximació en una variable.

Teorema 6.4. *sigui K un subconjunt compacte del pla complex $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus K$ és connex. Aleshores tota funció contínua $f : K \to \mathbb{C}$ tal que la restricció de f en l'interior de K és holomorfa, pot ser aproximada uniformement en K amb polinomis.*

7 Conclusions

Un cop finalitzat aquest viatge per la teoria de l'aproximació hem pogut apreciar en diversos contextos com podem aproximar amb polinomis una gran diversitat de funcions.

El nostre punt de partida ha estat el teorema d'aproximació de Stone-Weierstrass, hem continuat amb Müntz-Szász el qual ens ha permetès saber quines condicions han de tenir els graus dels polinomis sempre que en manquin per tal de poder aproximar funcions tant continues en $[0, 1]$ com funcions de Lebesgue i les seves extensions al considerar exponents complexos.

També ha sigut molt interessant detectar un error i haver de fer una revisió més exhaustiva de la literatura per solucionar-lo.

Finalment hem vist amb el teorema de Runge un equivalent al teorema d'aproximació de Weierstrass per a funcions holomorfes.

Tot i haver estudiat la teoria de l'aproximació en diversos contextos hem vist que en tots encara han quedat portes obertes per a seguir l'estudi, com és el cas de l'aproximació de funcions pertanyents a espais de Lebesgue amb exponents complexos fora del disc o en el cas l'anàlisi complexa anar una mica més enllà amb el teorema de Mergelyan.

Referències

[1] Rudin, W., 1970. *Real and Complex Analysis* P. 2. McGraw-Hill.

[2] Conway, J.B., 2012. *Functions of one complex variable II* (Vol. 159). Springer Science and Business Media.

[3] Borwein, P. and Erdélyi, T. *The full Müntz theorem in* $\mathcal{C}[0,1]$ *and* $L_1[0,1]$. In: Journal of the London Mathematical Society. Second Series 54.1 (1996), pp. 102–110. ISSN: 0024-6107.

[4] Bolón, D.; Corbalán, C.M.; González-Donña, F.J.; Nieves, D; Oitavén, C.C.; Quero, A., and Miana, P.J. *Approximation and the full Müntz-Szász theorem.* In: TEMat monográficos, 1 (2020): Artículos de las VIII y IX Escuela-Taller de Análisis Funcional, pp. 33-45. ISSN: 2660- 6003.

[5] Hardy G.H, Littlewood J.E., Pólya G.,*Inequalities.*

[6] Erdélyi, T. and Johnson, W.B., 2001. *The "Full Müntz Theorem" in* $L^p[0,1]$ *for* $0 < p < \infty$. Journal D'Analyse Mathématique, 84(1), pp.145-172.

[7] Bruna, J. and Cufí, J., 2008. *Anàlisi complexa* (Vol. 49). Univ. Autònoma de Barcelona.