Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

La Constant de de Bruijn-Newman

Autor: Rafael Martínez Vergara.

Director: Dr. Jordi Marzo.
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica.

Barcelona, 13 de juny de 2022.

Abstract

One of the most famous conjectures from number theory is the Riemann hipothesis. This conjecture has been studied from different branches of mathematics but unfortunately even today is not resolved.

A way of study the behaviour of the zeros of the Riemann zeta function is by studying the de Bruijn-Newman constant.

This work has as a goal to understand some results about this constant. We explain the results that lead to this constant, we see the relation between the constant and the Riemann Hipothesis and other results. Our main goal is to comprehend the article of George Csordas, Wayne Smith i Richard S. Varga, one of the most important contributions about the de Bruijn-Newman constant.

Resum

A teoria de nombres una de les conjectures més importants que hi ha és la hipòtesi de Riemann. Aquesta conjectura ha estat estudiada utilitzant diferents branques de les matemàtiques, però encara no s'ha pogut resoldre.

Una manera d'estudiar el comportament dels zeros de la funció zeta de Riemann és a través de l'estudi de la constant de de Bruijn-Newman.

Aquest treball té com a objectiu entendre uns resultats d'aquesta constant. Comentarem els resultats que van propiciar la constant, veurem la relació que té la constant amb la Hipòtesi de Riemann i altres resultats. El nostre objectiu principal és comprendre l'article de George Csordas, Wayne Smith i Richard S. Varga, una de les contribucions més rellevants que hi ha sobre la constant de de Bruijn-Newman.

2020 Mathematics Subject Classification: 30D10, 30D15.

Agraïments

Primer de tot vull agrair al meu tutor el Dr. Jordi Marzo, per dirigir-me el treball i guiar-me durant tot el procés d'elaboració. També vull agrair a la meva família, el meu pare i el meu germà, gràcies a ells he pogut dedicar-me a fer el que més m'agrada. Agrair als meus avis que sempre han estat presents durant tota la meva vida. Vull agrair a la meva parella Irene per ajudar-me sempre i estar allà quan ho he necessitat. Finalment, vull agrair a tots els amics que he fet durant la carrera i que han estat sempre un bon suport emocional per comentar i parlar. Moltes gràcies a tots.

Índex

1 Introducció

Donada una mesura de Borel $\sigma : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ positiva i finita, es pot definir per a $\lambda \in \mathbb{R}$

$$H_{\sigma,\lambda}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izt} e^{\lambda t^2} d\sigma(t).$$

Quan σ te una densitat $f(t)$ respecte de la mesura de Lebesgue podem expressar la funció anterior com

$$H_{f,\lambda}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izt} e^{\lambda t^2} f(t) dt.$$

El problema general que tracten els treballs que citarem en aquest se centren a donar resultats sobre quan aquest tipus de funcions són enteres i quan tots els seus zeros del pla complex són reals. Aquests resultats tenen interès per a la teoria analítica de nombres perquè estan relacionats amb la hipòtesi de Riemann. Originalment, Euler defineix la funció $\zeta(x)$ per a $x \in \mathbb{R}$ i $x > 1$ com

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} n^{-x}.$$

Amb aquesta definició la funció zeta de Riemann és holomorfa al domini $\{\Re(z) > 1\}$ i està relacionada amb la distribució dels nombres primers via els productes d'Euler $\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} n^{-z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1}$ sobre els primers $p \geq 2$. Riemann va demostrar que la funció zeta admet una continuació analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ i en $z = 1$ té un pol simple, addicionalment va veure que la localització dels zeros de la funció zeta està fortament relacionada amb el comportament asimptòtic de $\pi(x)$ (el nombre de primers menors o iguals que x) quan $x \to \infty$. La hipòtesi de Riemann és l'afirmació de què els zeros de la funció zeta de Riemann són només els enters negatius parells i nombres complexos amb part real $\frac{1}{2}$.

La funció Xi de Riemman és

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Es pot obtenir la següent expressió de la funció Xi de Riemann

$$\frac{\xi(z/2)}{4} = 2 \int_0^\infty \Phi(u) \cos(zu) du,$$

on

$$\Phi(u) = \sum_{n \geq 1} (4\pi^2 n^4 e^{\frac{9u}{2}} - 6\pi n^2 e^{\frac{5u}{2}}) e^{-\pi n^2 e^{2u}}.$$

Es pot demostrar que $\Phi(u)$ és una funció parella. Llavors la funció ξ és la transformada de Fourier de $\Phi(u)$:

$$\xi(z) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(u) e^{izu} du.$$

Les funcions $H_{f,\lambda}$ suggereixen una forma natural d'estudiar la hipòtesi de Riemann, estudiar quan les transformades de Fourier de densitats només tenen zeros reals, i aplicar aquest estudi a la funció zeta.

Pólya, motivat per la hipòtesi de Riemann estudia quan la transformada de Fourier d'una funció té només zeros reals. A [SP14] Pólya i Schur obtenen un resultat que jugarà un paper important en l'estudi d'aquest tipus de funcions.

Teorema 1.1. *La funció entera f és límit uniforme sobre compactes de polinomis reals amb només zeros reals si i només si*

$$f(z) = cz^n e^{-az^2+bz} \prod_i \left(1 - \frac{z}{x_i}\right) e^{\frac{z}{x_i}}$$

on $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, $x_k \in \mathbb{R}$, el producte pot ser finit o infinit i $\sum_i x_i^{-2} < \infty$.

Aquest tipus de funcions es diu que pertanyen a la classe de funcions de Laguerre-Pólya i s'escriu $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. La hipòtesi de Riemann és equivalent a $\xi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. En [Tit86, 2.12] Titchmarsh demostra que la funció ξ és d'ordre 1.

Pólya estudia a [Pól27] quan funcions de la forma

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{izt} dt,$$

tenen només zeros reals, amb $F(t)$ complint les següents condicions

1. $F(-t) = F(t)$ per a tot t.
2. $|F(t)| \leq Ae^{-|t|^{2+\alpha}}$, per a $A, \alpha > 0$ i per a tot t.

De Bruijn a [DB50] va continuar els treballs de Pólya i va proporcionar resultats que particularitzaven el tipus de funcions que compleixen que els zeros de la seva transformada de Fourier són només reals. Va demostrar que si F satisfà les condicions anteriors i els zeros de la funció f estan en $|\Im(z)| \leq \Delta$, aleshores els zeros de la funció

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{\frac{\lambda t^2}{2}} e^{izt} dt$$

es troben a $|\Im(z)| \leq (\max(\Delta^2 - \lambda, 0))^{\frac{1}{2}}$. Aquest plantejament va donar les bases per a treballs posteriors.

Recordem que la funció Φ està relacionada amb la funció ξ de Riemann. Per tant, podem definir per a $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ les funcions

$$H_\lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t^2} \Phi(t) e^{izt} dt.$$

Aplicant els resultats de Pólya i de De Bruijn que hem mencionat es pot demostrar que existeix una constant Λ, que anomenarem com la constant de de Bruijn-Newman, tal que H_λ té zeros reals si i només si $\lambda \geq \Lambda$. També va demostrar a [DB50] que $\Lambda \leq \frac{1}{2}$ i que si existeix t_0 tal que $H_{t_0}(z)$ només té zeros reals llavors per a tot $t \geq t_0$ la funció $H_t(z)$ només té zeros reals.

La primera cota inferior per a Λ va ser donada per Newman a [New76]. Amb aquests resultats es pot veure que la Hipòtesi de Riemann és equivalent a què tots els zeros de H_0 són reals. Llavors la relació de la Hipòtesi de Riemann amb la constant de de Bruijn-Newman és que la Hipòtesi és equivalent a $\Lambda \leq 0$.

L'any 1976 Newman conjectura a [New76] que $\Lambda \geq 0$ amb el seu cèlebre comentari: *the Riemann Hypothesis if true, is only barely so.*

En aquest moment es comencen a estudiar cotes inferiors per a la constant Λ. Csordas, Smith i Varga demostren a [CSV94] que $\Lambda \geq -4.379 \cdot 10^{-6}$ i també demostren uns resultats essencials per a l'estudi de la constant Λ. Treballen amb el que s'anomena parelles de zeros de Lehmer, que són parelles de zeros de la funció zeta molt propers.

Demostren que si x_0 és un zero real i simple de H_λ aleshores en un entorn de x_0 existeix una funció diferenciable $x(\lambda)$ definida en aquest entorn on

$$x'(\lambda) = \frac{H''_\lambda(x(\lambda))}{H'_\lambda(x(\lambda))}.$$

Amb aquest resultat poden entendre que si $\{x_k(\lambda_1), x_{k+1}(\lambda_1)\}$ són dos zeros positius i simples consecutius de H_{λ_1} aquests zeros s'allunyen en incrementar λ respecte de λ_1 i s'apropen en fer decréixer λ respecte de λ_1.

Amb aquests resultats i la classe de funcions de Laguerre-Pólya demostren que si existeixen λ real i x_0 un zero de H_λ de multiplicitat més gran a dos, llavors $\lambda \leq \Lambda$.

També troben que la funció H_t satisfà l'equació inversa de la calor

$$\partial_t H_t = -\partial^2_{zz} H_t.$$

Aquest fet serà utilitzat després per Rodgers i Tao [RT20]. Utilitzant un altre cop els resultats sobre les funcions de la classe de Laguerre-Pólya Csordas, Smith i Varga demostren que el moviment dels zeros de H_t es pot expressar com l'equació diferencial següent

$$x'_k(t) = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k(t) - x_j(t)}.$$

Suposant $\Lambda < 0$ (que és certa la hipòtesi de Riemann) llavors els zeros de $H_0 = \xi$ són reals pels resultats de de Bruijn. Donat $t > \Lambda$ i $0 < x_1 < x_2 < ...$ els zeros no negatius de la funció H_t, defineixen

$$g_k(t) := \sum_{j \neq k, k+1} \left(\frac{1}{(x_k(t) - x_j(t))^2} + \frac{1}{(x_{k+1}(t) - x_j(t))^2} \right).$$

Demostren que si $t \in (\Lambda, 0] \cap (-1/8g_k(0), 0)$ aleshores

$$g_k(t) < \frac{g_k(0)}{1 + 8g_k(0)t}.$$

Amb aquests resultats que hem esmentat George Csordas, Wayne Smith i Richard S. Varga demostren a [CSV94] que

Teorema 1.2. *La constant de de Bruijn-Newman satisfà que per a tot k*

$$\Lambda \geq \lambda_k$$

on

$$\lambda_k := \frac{(1 - \frac{5}{4} g_k (x_{k+1} - x_k)^2)^{\frac{4}{5}} - 1}{8 g_k}.$$

Anomenarem de forma imprecisa que una parella de zeros de H_0 és una parella de zeros de Lehmer si són dos zeros de H_0 molt propers l'un de l'altre. A la secció 3.2 es dona la definició de parelles de zeros de Lehmer de H_0 de forma precisa. A conseqüència del teorema anterior obtenen el següent resultat relacionat amb la conjectura de Newman.

Corol·lari 1.3. *Suposem que H_0 té infinites parelles de zeros de Lehmer $\{x_{k_i+1}, x_{k_i}\}_i$ tal que $g_{k_i}(0) > 0$ per a tot $i \geq 1$ i $\lim_i \Delta^2_{k_i} = 0$. Aleshores $0 \leq \Lambda$.*

Finalment Rodgers i Tao a [RT20] demostren la conjectura de Newman, que $\Lambda \geq 0$. Ells es centren en el comportament dels zeros en intervals $[T, T+\alpha]$, on $1 << \alpha << \log(T)$ i demostren que si $\Lambda < 0$ llavors els zeros de H_0 es distribueixen localment com una aproximació d'una progressió aritmètica. Utilitzen que H_t satisfà l'equació inversa de la calor

$$\partial_t H_t = -\partial^2_{zz} H_t,$$

amb condició terminal h_0. Aquest fet ja és observat anteriorment a [CSV94] i que per a $t > \Lambda$ els zeros reals $x_k(t)$ segueixen el sistema de ODE,

$$\partial_t x_k = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k - x_j}.$$

Una família de solucions de les ODE anteriors és $H_t(z) = e^{tu^2} \cos(zu)$ per a $u > 0$, notem que els zeros es distribueixen com la progressió aritmètica $\left\{ \frac{2\pi(k+\frac{1}{2})}{u} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

De fet per a $\Lambda < t \leq 0$ es pot definir el hamiltonià

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{j \neq k} \log \frac{1}{|x_k - x_j|},$$

i mirar l'evolució de H_t com un flux de gradient de $\mathcal{H}(t)$

$$\partial_t \mathcal{H}(t) = -4E(t),$$

amb

$$E(t) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{|x_k - x_j|^2}.$$

La suma anterior és una suma formal, Rodgers i Tao estudien una versió modificada i demostren que $\{x_j(t)\}$ en $t = 0$ satisfaria que

$$x_{j+1}(0) - x_j(0) = \frac{4\pi + O_T(1)}{\log T} \qquad \text{si } j \in [T \log T, 2T \log T].$$

Això implicaria, juntament amb la suposició que $\Lambda < 0$, que els espais entre els zeros de la funció zeta normalment són similars als de progressió aritmètica. Això seria contradictori amb un resultat de Montgomery a [Mon73]. El resum dels resultats sobre la constant de de Bruijn-Newman es pot ampliar a [NW20] on es parla del que hem comentat i també sobre altres aspectes relacionats.

L'objectiu d'aquest treball és entendre les demostracions de George Csordas, Wayne Smith i Richard S. Varga a [CSV94]. En aquest treball, que és el nucli del nostre, els autors demostren resultats sobre el comportament dels zeros de les funcions H_t i amb això demostren cotes inferiors per a la constant de de Bruijn-Newman.

Inicialment, dedicarem la secció 2 a introduir conceptes i resultats que necessitarem en seccions posteriors. Introduirem en la secció 2.1 els conceptes sobre convergència uniforme sobre compactes, en la secció 2.2 demostrarem la fórmula de sumació de Poisson. En la secció 2.3 demostrarem la fórmula de Jensen. En la secció 2.4 es demostra una expressió de la funció zeta de Riemann que jugarà un paper clau en tot el treball. En la secció 2.5 demostrarem teoremes de factorització bàsics per a funcions enteres que ens seran útils per comprendre resultats posteriors. En la secció 2.6 introduirem la classe de funcions de Laguerre-Pólya que necessitarem per a seccions posteriors.

En la secció seguirem l'article [CSV94] i demostrarem el teorema principal i altres resultats que necessitarem per a poder comentar els resultats numèrics a la secció 4 obtinguts per George Csordas, Wayne Smith i Richard S. Varga.

2 Preliminars

Aquesta secció la dedicarem a introduir teoremes d'anàlisi complexa que necessitarem per a entendre els arguments de l'article [CSV94], utilitzarem aquests conceptes i teoremes en les demostracions posteriors del mateix article.

2.1 Convergència uniforme sobre compactes

En aquest apartat introduirem la convergència uniforme sobre compactes, la convergència natural per a successions de funcions definides al pla complex. Seguirem [BC13, cap.9].

En la teoria de funcions de variable real, sovint les funcions es defineixen com a límit o sèries de funcions conegudes. Donades dues successions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ i $\{g_n\}_{n\geq 1}$ definides en un domini comú $U \subset \mathbb{R}$, podem considerar per a $z \in U$

$$f(z) = \lim_n f_n(z),$$
$$g(z) = \sum_{n\geq 1} g_n(z).$$

Entenem que això és possible només quan la successió $\{f_n\}_{n\geq 1}$ o la sèrie $\sum g_n$ convergeix en algun sentit. És necessari que les funcions convergeixin puntualment, és a dir, per a cada $z \in U$ la successió $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ o la sèrie $\sum_{n\geq 1} g_n(z)$ han de ser convergents. Però la convergència puntual de sèries no conserva algunes propietats importants de les funcions f_n en la funció f. Per a poder garantir que les bones propietats es mantenen en el límit haurem de considerar altres tipus de convergència més forts. El més destacat d'aquests és el concepte de convergència uniforme sobre compactes.

Definició 2.1. *Una successió de funcions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es diu que convergeix localment uniforme cap a f a $U \subset \mathbb{C}$ si per a cada $a \in U$ existeix un disc $D(a, r) \subset U$ tal que $f_n(z) \to f(z)$ uniformement per a cada $z \in D(a, r)$.*

Podem demostrar que

Proposició 2.2. *Una successió de funcions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ convergeix localment uniforme cap a f a U si i només si per a cada compacte $K \subset U$, la successió $\{f_n\}_{n\geq 1}$ convergeix uniformement cap a f a K.*

Demostració. En una de les direccions està clar que si agafem $K = \overline{D(a, r)} \subset U$ llavors tenim que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ convergeix localment uniforme cap a f a U. En l'altra direcció, donat un compacte $K \subset U$ podem recobrir-lo per una quantitat finita de discs continguts a U, $K = \bigcup_{i=1}^{N} D(a_i, r_i)$. Per tant, com en cada disc hi ha convergència uniforme aleshores també hi ha convergència uniforme sobre K. $\square$

El següent teorema en mostra que la convergència uniforme sobre compactes és la convergència natural a $\mathbb{C}$.

Teorema 2.3 (Weierstrass). *Sigui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ una successió funcions holomorfes a l'obert $U \subset \mathbb{C}$, suposem que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ convergeix uniformement cap a una funció f sobre compactes de U. Llavors f és holomorfa en U i la successió de derivades $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ convergeix uniformement cap a f' sobre compactes de U.*

Demostració. Observem que si $\gamma(t)$ amb $t \in [a,b]$ és un camí contingut en U, per les hipòtesis tenim que

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Com que $f_n \to f$ uniformement en el compacte $\gamma([a,b])$, llavors $f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \to f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ uniformement en $[a,b]$, integrant obtenim la igualtat anterior.

Com que cada f_n és holomorfa en U, donat un triangle $T \subset U$ tenim que pel teorema de Morera

$$\int_T f(z)dz = \lim_n \int_T f_n(z)dz = 0.$$

Això demostra que f és holomorfa en U.

Ens queda provar que $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ convergeix uniformement cap a f' sobre compactes de U. Fixem un disc $\overline{D(a,r)} \subset U$, llavors tenim que

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{D(a,r)}} \frac{f_n(z)}{(w-z)^2}dw, \qquad\qquad z \in D(a,r).$$

Per tant, obtenim que

$$\lim_n f_n'(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{D(a,r)}} \frac{f_n(z)}{(w-z)^2}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{D(a,r)}} \frac{f(z)}{(w-z)^2}dw = f'(z).$$

□

Observació 2.4. El resultat anterior es pot iterar per obtenir que si $f_n \to f$ uniformement sobre compactes a U, llavors $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ uniformement sobre compactes a U.

2.2 Fórmula de sumació de Poisson

Aquest apartat definirem la transformada de Fourier d'una funció i demostrarem uns resultats que més tard utilitzarem. Per a les demostracions seguirem [SS03].

Definició 2.5. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$, es defineix la transformada de Fourier de f com a*

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}dt.$$

Definició 2.6. *Sigui $\mathcal{F}_a$ el conjunt de funcions que satisfan:*

1. *La funció f es holomorfa a $S_a := \{z \in \mathbb{C} | |Im(z)| < a\}$.*
2. *Existeix una constant $A > 0$ tal que*

$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ i } |y| < a.$$

Definició 2.7. *Sigui $\mathcal{F}$ el conjunt de funcions tals que $f \in \mathcal{F}_a$ per algun $a > 0$.*

Teorema 2.8 (formula de sumació de Poisson)**.** *Donada una funció $f \in \mathcal{F}$, es compleix que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Demostració. Com que $f \in \mathcal{F}$, aleshores existeix un $a > 0$ tal que $f \in \mathcal{F}_a$. Sigui $0 < b < a$, $g(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}$ té pols simples a $z \in \mathbb{Z}$ amb residu $\frac{1}{2\pi i}$.
Considerem el camí d'integració:
Siguin $\delta_1(t) := N + \frac{1}{2} + it$ amb $t \in [-b, b]$, $\delta_2(t) := t + ib$ amb $t \in [-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}]$, $\delta_3(t) := -N - \frac{1}{2} + it$ amb $t \in [-b, b]$, $\delta_4(t) := t - ib$ amb $t \in [-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}]$. Definim el camí d'integració $\delta := \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_4$.
Si apliquem el teorema de residu a fg en aquest camí d'integració obtenim que

$$\sum_{n=-N}^{N} f(n) = \int_\delta f(z)g(z)dz = \int_\delta \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}dz.$$

Observem que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\delta_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}dz\right| &= \left|\int_{-b}^{b} \frac{f(N+\frac{1}{2}+it)}{e^{2\pi i(N+\frac{1}{2}+it)}-1} i dt\right| \leq \int_{-b}^{b} \frac{|f(N+\frac{1}{2}+it)|}{|e^{2\pi i(N+\frac{1}{2}+it)}-1|}dt \\
&\leq \frac{A_f}{1+(N+\frac{1}{2})^2}\int_{-b}^{b} \frac{1}{|e^{-2\pi t}e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})}-1|}dt \xrightarrow{N\to\infty} 0, \\
\left|\int_{\delta_3} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}dz\right| &= \left|\int_{-b}^{b} \frac{f(-N-\frac{1}{2}+it)}{e^{2\pi i(-N-\frac{1}{2}+it)}-1} i dt\right| \leq \int_{-b}^{b} \frac{|f(-N-\frac{1}{2}+it)|}{|e^{2\pi i(-N-\frac{1}{2}+it)}-1|}dt \\
&\leq \frac{A_f}{1+(N+\frac{1}{2})^2}\int_{-b}^{b} \frac{1}{|e^{-2\pi t}e^{-2\pi i(N+\frac{1}{2})}-1|}dt \xrightarrow{N\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Com que $|e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})}| = -1$ perquè $N \in \mathbb{Z}$ aleshores $|e^{-2\pi t}e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})} - 1| \neq 0$ i, per tant, la primera integral convergeix cap a zero. De forma similar succeeix amb la segona integral. Per tant ens queda que en el límit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\int_{\delta_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}dz + \int_{\delta_4} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}dz. \tag{2.1}$$

En δ_2 com que $\delta_2(t) := t + ib$, aleshores $|e^{2\pi i z}| = |e^{-2\pi b}e^{2\pi i t}| < 1$. En δ_4 com que $\delta_4(t) := t - ib$, aleshores $|e^{2\pi i z}| = |e^{2\pi b}e^{2\pi i t}| > 1$.
Sabem que si $|\omega| < 1$ aleshores

$$\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n,$$

i si $|\omega| > 1$, podem considerar $|\omega|^{-1} < 1$, per tant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^{-n} = \frac{1}{1-\omega^{-1}} = \omega\frac{1}{\omega-1}.$$

Per tant si $z \in \delta_4$ es dona que

$$\frac{1}{e^{2\pi i z}-1} = e^{-2\pi i z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi i n z}},$$

i si $z \in \delta_2$ aleshores es dona que

$$\frac{1}{1-e^{2\pi i z}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z}.$$

Si apliquem les observacions anteriors a l'equació (2.1) obtenim que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) &= \int_{\delta_2} \frac{f(z)}{1-e^{2\pi iz}}dz + \int_{\delta_4} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz \\
&= \int_{\delta_2} f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}\right)dz + \int_{\delta_4} f(z)\left(e^{-2\pi iz}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}\right)dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\delta_2} f(z)e^{2\pi inz}dz + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\delta_4} f(z)e^{-2\pi i(n+1)z}dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t+ib)e^{2\pi in(t+ib)}dt + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t-ib)e^{-2\pi i(n+1)(t-ib)}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}(-n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n).
\end{aligned}$$

A la quarta igualtat entre els coeficients de Fourier de $f(t+ib)$ s'aplica que $\int_{\mathbb{R}} f(t+ib)e^{2\pi in(t+ib)}dt$ és $\hat{f}(n)$ [SS03, pag.115]. De forma similar $\int_{\mathbb{R}} f(t-ib)e^{-2\pi i(n)(t-ib)}dt$ és $\hat{f}(-n)$. $\square$

Lema 2.9. *Sigui $f(x) = e^{-\pi tx^2}$. La transformada de Fourier de $f(x)$ és $\hat{f}(s) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\pi s^2\frac{1}{t}}$.*

Demostració. Com que

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx}(-2\pi ix)dx = \frac{i}{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi tx)e^{-2\pi isx}dx \\
&= \frac{i}{t}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi isx}dx = \frac{i}{t}\left[f(x)e^{-2\pi isx}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{i}{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx}(-2\pi is)dx \\
&= -\frac{2\pi s}{t}\hat{f}(s).
\end{aligned}$$

La solució d'aquesta equació diferencial és $\hat{f}(s) = ce^{-\frac{\pi s^2}{t}}$. Com que

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2}dx = t^{\frac{-1}{2}} = c,$$

aleshores $\hat{f}(s) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\pi s^2\frac{1}{t}}$. $\square$

Com que $f, \hat{f} \in \mathcal{F}$, podem aplicar la fórmula de sumació de Poisson i obtenim que

$$\psi(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi s} = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi}{s}} = s^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{1}{s}\right). \tag{2.2}$$

2.3 Fórmula de Jensen

En aquesta secció demostrarem la fórmula de Jensen. Aquest resultat ens serà útil per a entendre el comportament dels zeros de la funció ζ de Riemann. Principalment, seguirem les demostracions de [SS03, p.135, (5.1)] i de [You01, p.50, (1.2)], amb alguns lemes de [Ahl53, p.207, (3.1)] que també necessitarem.

Lema 2.10.

$$\int_0^{\pi} \log\left|1-e^{2i\theta}\right| d\theta = 0$$

Demostració. Si considerem $z = x + iy$ aleshores

$$1 - e^{2iz} = 1 - e^{-2y}(\cos(2x) + i\sin(2x)).$$

Aquesta expressió es negativa si $y \leq 0$ i $x = n\pi$ per a $n \in \mathbb{Z}$. Per tant, podem definir $\log|1-e^{2iz}|$ sempre que no passem per les semirectes definides per $y \leq 0$ i $x = n\pi$ amb $n \in \mathbb{Z}$.
Considerem la regió d'integració amb l'orientació amb sentit antihorari:

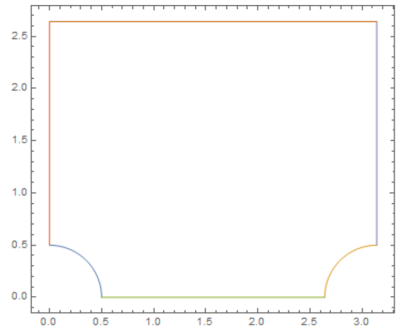

Figura 1: Camí d'integració.

Les parametritzacións són, per a $\delta > 0$ fixat, $\gamma_1(t) = \pi + it$ on $t \in (\delta, Y)$, $\gamma_2(t) = t + iY$ on $t \in (0,\pi)$, $\gamma_3(t) = it$ on $t \in (\delta, Y)$, $\gamma_4(t) = t$ on $t \in (\delta, \pi - \delta)$, $\epsilon_1(t) = \delta e^{it}$ on $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\epsilon_2(t) = \pi + \delta e^{it}$ on $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Amb aquesta paramteriztació les γ_i són els costats del quadrat on integrem. Per evitar passar pels punts on la funció no es analítica utilitzem uns camins semicirculars ϵ_i que passen al voltant del punts $\{0, \pi\}$.
Amb la parametrització donada $Q = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \epsilon_1 + \gamma_4 - \epsilon_2$, així doncs com que en l'interior d'aquest camí d'integració la funció no té cap residu

$$\int_Q \log\left|1-e^{2i\theta}\right| d\theta = 0.$$

Com que $e^{2i(\pi+iy)} = e^{2iiy}$ llavors resulta que

$$\int_{\gamma_1} \log\left|1-e^{2i\theta}\right| d\theta = \int_{\delta}^{Y} \log\left|1-e^{2i(\pi+it)}\right| idt = \int_{\delta}^{Y} \log\left|1-e^{2i(it)}\right| idt$$
$$= \int_{\gamma_3} \log\left|1-e^{2i\theta}\right| d\theta$$

En γ_2 tenim que

$$\int_{\gamma_2} \log\left|1-e^{2i\theta}\right| d\theta = \int_0^{\pi} \log\left|1-e^{2i(t+iY)}\right| dt = \int_0^{\pi} \log\left|1-e^{-2Y}e^{2it}\right| dt \xrightarrow[Y\to\infty]{} 0.$$

En ϵ_1 i ϵ_2 considerem el límit

$$\lim_{z\to 0} \frac{|1-e^{2iz}|}{|z|} = \lim_{z\to 0} \frac{|2iz + O(z^2)|}{|z|} = 2,$$

aleshores
$$\lim_{z\to 0}\frac{\log|1-e^{2iz}|}{\log|z|}=\log(2).$$
Ara, considerem les integrals als quarts de cercle ϵ_i. Aquestes satisfan que

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon_1}\log\left|1-e^{2i\theta}\right|d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left|1-e^{2i\delta e^{it}}\right|\delta i e^{it}dt \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,\\
\int_{\epsilon_2}\log\left|1-e^{2i\theta}\right|d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log\left|1-e^{2i(\pi+\delta e^{it})}\right|\delta i e^{it}dt\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log\left|1-e^{2i\pi}e^{\delta e^{it})}\right|\delta i e^{it}dt \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

En el cas de γ_4 podem veure que

$$\int_{\gamma_4}\log\left|1-e^{2i\theta}\right|d\theta = \int_{\delta}^{\pi-\delta}\log\left|1-e^{2it}\right|dt \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_0^{\pi}\log\left|1-e^{2it}\right|dt$$

Finalment obtenim que

$$0=\int_Q\log\left|1-e^{2i\theta}\right|d\theta \xrightarrow[\delta\to 0]{Y\to\infty} \int_0^{\pi}\log\left|1-e^{2it}\right|dt.$$

□

Teorema 2.11 (Fórmula de Jensen)**.** *Sigui f una funció analítica a $D(0,R)$ i suposem que $f(0)\neq 0$. Si $\{z_i\}_{i=1}^n$ són els zeros de f a $D(0,r)$ amb $0<r<R$, aleshores*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\log|f(0)|+\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|z_k|}\right).$$

Demostració. Considerem que f no s'anul·la en $D(0,r)$. En aquest cas esta definit $\log(f)$, i és holomorfa. Per tant, aplicant el teorema de Cauchy i agafant part real obtenim que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\log|f(0)|.$$

Si f s'anul·la a $z_1,...,z_n$ amb $|z_k|=r$ per a tot $k\in\{1,...,n\}$ aleshores definim

$$g(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{z_k}{z_k-z}.$$

Aquesta funció g no s'anula en $D(0,r)$. Podem aplicar l'argument anterior

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta=\log|g(0)|.$$

Si substituïm en l'equació l'expressió de la g aleshores

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{z_k}{z_k-re^{i\theta}}\right|d\theta\right)=\log|f(0)|.$$

Si considerem $z_k = re^{i\theta_k}$ llavors obtenim que

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right|d\theta\right) = \log|f(0)|.$$

Com que sabem que

$$\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i\theta}\right|d\theta = 2\int_0^{\pi}\log\left|1-e^{2it}\right|dt = 0,$$

resulta que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)|.$$

Enfoquem el cas general. Sigui $r = |z|$ i siguin $z_1, ..., z_n$ zeros de $f(z)$ de $\overline{D(0,r)}$. Definim la funció

$$F(z) := f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2-\overline{z_k}z}{r(z-z_k)}.$$

$F(z)$ és una funció analítica i sense zeros a $D(0,r)$. Com que si $|z| = r$ tenim que $|F(z)| = |f(z)|$, aleshores

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Com que

$$|F(0)| = |f(0)|\prod_{k=1}^{n}\frac{r}{|z_k|},$$

obtenim que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|z_k|}\right).$$

□

Teorema 2.12. *Sigui f una funció holomorfa a la clausura d'un disc $D(0,R)$ de radi R i centrat a l'origen. Si $\{z_n\}_{n=1}^{N}$ són els zeros de f continguts a $\overline{D(0,R)}$ i $\boldsymbol{n}(r)$ el nombre de zeros de f a $\overline{D(0,r)}$ aleshores*

$$\int_0^R \boldsymbol{n}(r)\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{N}\log\left|\frac{R}{z_k}\right|.$$

Demostració. Sabem que

$$\sum_{k=1}^{N}\log\left|\frac{R}{z_k}\right| = \sum_{k=1}^{N}\int_{|z_k|}^{R}\frac{dr}{r}.$$

Sigui

$$\mu_k(r) = \begin{cases} 1 & si \quad r > |z_k|, \\ 0 & si \quad r \le |z_k|. \end{cases}$$

Podem veure que $\sum_{k=1}^{N} \mu_k = \mathbf{n}(r)$, per tant, obtenim que

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{|z_k|}^{R} \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{R} \mu_k(r) \frac{dr}{r} = \int_{0}^{R} \left(\sum_{k=1}^{N} \mu_k(r) \right) \frac{dr}{r} = \int_{0}^{R} \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r}.$$

□

Amb aquest ultim teorema, podem reescriure la fórmula de Jensen:

Corol·lari 2.13. *Sigui f una funció analítica a $D(0,R)$ i suposem que $f(0) \neq 0$. Si $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ són els zeros de f a $D(0,r)$ amb $0 < r < R$, aleshores*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta = \log|f(0)| + \int_{0}^{R} \boldsymbol{n}(r) \frac{dr}{r}.$$

Observació 2.14. Amb els resultats que hem vist en aquesta secció es pot deduir com es planteja la hipòtesi de Riemann utilitzant les funcions de Bessel i l'expressió integral que demostrarem en la secció posterior.

2.4 Expressions de la funció ζ de Riemann

En aquesta secció volem demostrar una expressió de la funció ξ de Riemann, aquesta expressió és una eina clau per a relacionar l'estudi que farem en seccions posteriors. Seguirem la demostració de [Tit86].

Definició 2.15. *Sigui $s = \sigma + it$ per a $\sigma, t \in \mathbb{R}$. La funció zeta de Riemann per a $\sigma > 1$ es*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

Observació 2.16. La funció zeta de Riemann es pot prolongar analíticament mitjançant l'equació funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Definició 2.17. *Per a $t \in \mathbb{R}$, la funció Xi de Riemann és*

$$\Xi(t) := \pi^{-\frac{\frac{1}{2}+it}{2}} \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Per a $s \in \mathbb{C}$, la funció xi de Riemann és

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(s\right).$$

Proposició 2.18. *Sigui ξ la funció xi de Riemann i*

$$\Phi(u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4 \pi^2 e^{\frac{9}{2}u} - 3n^2 \pi e^{\frac{5}{2}u}) e^{-n^2 \pi e^{2u}}.$$

Es compleix que

$$\frac{\xi(s/2)}{8} = \int_{0}^{\infty} \Phi(u) \cos(su) du \qquad \text{per a } s \in \mathbb{C}.$$

Demostració. Si $\sigma > 0$ aleshores $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ i obtenim l'expressió amb $u = n^2\pi x$

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{n^2\pi}\right)^{\frac{s}{2}-1} e^{-u}\frac{du}{n^2\pi} = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{n^s\pi^{\frac{s}{2}}}.$$

Si $\sigma > 1$ aleshores tenim convergència absoluta, ja que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \qquad (s = \sigma + it),$$

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} < \infty.$$

Per tant,

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}}n^{-s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}dx.$$

Aleshores si $\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$ obtenim l'expressió

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx. \tag{2.3}$$

A partir de (2.2) podem veure que

$$2\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} + 1\right)$$

Per tant, obtenim que

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) \text{ per a } x \neq 0. \tag{2.4}$$

Si apliquem aquesta igualtat que acabem de trobar a (2.3) obtenim que

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\psi(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx.
\end{aligned}$$

En la última integral es canvia s per $(1-s)$ i també $1/x$ per x adequant els límits d'integració.
Si multipliquem per $\frac{s(s-1)}{2}$ aleshores obtenim

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}}\frac{s(s-1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty (x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx.$$

Si canviem s per $\frac{1}{2}+it$ aleshores obtenim

$$\begin{aligned}
\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{2}+it)(-\frac{1}{2}+it)}{2}\int_1^\infty (x^{\frac{-(\frac{1}{2}+it)}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{\frac{1}{2}+it}{2}-1})\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{2}+\frac{(it)^2-\frac{1}{4}}{2}\int_1^\infty (x^{\frac{1}{2}(-it-\frac{3}{2})}+x^{\frac{1}{2}(it-\frac{3}{2})})\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\frac{(x^{\frac{-it}{2}}+x^{\frac{it}{2}})}{2}\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t\log(x)}{2}\right)\psi(x)dx.
\end{aligned}$$

Aleshores obtenim l'expressió:

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t\log(x)}{2}\right)\psi(x)dx. \tag{2.5}$$

Sabem que com $\psi(x)$ és uniformement convergent, aleshores tenim

$$\psi'(x)=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^2\pi x}$$

Com a resultat de (2.4), tenim la identitat:

$$4\psi'(1)+\psi(1)=\frac{-1}{2}.$$

Integrant per parts (2.5) amb

$$\begin{cases} u=\psi(x)x^{\frac{1}{4}} & du=\psi'(x)x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\psi(x)x^{\frac{-3}{4}} \\ dv=\frac{t}{2x}\cos(\frac{t}{2}\log x) & v=\sin(\frac{t}{2}\log x)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Xi(t) &= \frac{1}{2}-2t\left(\left[\psi(x)x^{\frac{1}{4}}\sin(\frac{t}{2}\log(x))\right]_1^\infty-\int_1^\infty\left(\psi'(x)x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\right)\sin(\frac{t}{2}\log(x))dx\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x)) \\
&= \frac{1}{2}+2t\int_1^\infty\left(\psi'(x)x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\right)\sin(\frac{t}{2}\log(x))dx-\frac{1}{4}\int_1^\infty\psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x)).
\end{aligned}$$

En aquesta última expressió integrem per parts el primer sumand amb

$$\begin{cases} u=\psi'(x)x^{\frac{5}{4}} & du=\psi''(x)x^{\frac{5}{4}}+\frac{5}{4}\psi'(x)x^{\frac{1}{4}} \\ dv=-\frac{t}{2x}\sin(\frac{t}{2}\log(x)) & v=\cos(\frac{t}{2}\log(x))\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= -2t\int_1^\infty \psi'(x)x^{\frac{1}{4}}\sin(\frac{t}{2}\log(x))dx \\
&= \left[-4\psi'(x)x^{\frac{5}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x))\right]_1^\infty+4\int_1^\infty(\psi''(x)x^{\frac{5}{4}}+\frac{5}{4}\psi'(x)x^{\frac{1}{4}})\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx \\
&= 4\psi'(1)+4\int_1^\infty(\psi''(x)x^{\frac{5}{4}}+\frac{5}{4}\psi'(x)x^{\frac{1}{4}})\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx.
\end{aligned}$$

Integrem per parts el segon sumand amb

$$\begin{cases} u = \psi(x)x^{\frac{1}{4}} & du = \psi'(x)x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\psi(x)x^{\frac{-3}{4}} \\ dv = -\frac{t}{2x}\sin(\frac{t}{2}\log(x)) & v = \cos(\frac{t}{2}\log(x)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -2t\int_1^\infty \frac{1}{4}\psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\sin(\frac{t}{2}\log(x))dx \\ &= \left[-4\psi(x)x^{\frac{1}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x))\right]_1^\infty + \int_1^\infty (\psi'(x)x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\psi'(x)x^{\frac{-3}{4}})\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx \\ &= -\psi(1) + \int_1^\infty (\psi'(x)x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\psi'(x)x^{\frac{-3}{4}})\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx. \end{aligned}$$

Per tant, tenim la expressió:

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \frac{1}{2} + I_1 + I_2 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{-3}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x)) \\ &= \frac{1}{2} + 4\psi'(1) + \psi(1) + 4\int_1^\infty (\psi''(x)x^{\frac{5}{4}} + \frac{6}{4}\psi'(x)x^{\frac{1}{4}})\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx \\ &= 4\int_1^\infty (\psi''(x)x^{\frac{6}{4}} + \frac{6}{4}\psi'(x)x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{-1}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log(x))dx \\ &= 4\int_1^\infty \nu(x)\cos\left(\frac{t\log(x)}{2}\right)dx. \end{aligned}$$

On $\nu(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))x^{\frac{-1}{4}} = (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\psi'(x) + x^{\frac{3}{2}}\psi''(x))x^{\frac{-1}{4}}$.

Finalment d'aquesta expressió veurem que $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos(ut)du$ amb el canvi de variable $e^{2u} = x$.

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= 4\int_0^\infty \nu(e^{2u})\cos(tu)2e^{2u}du. \\ 2\nu(e^{2u}) &= 3e^{\frac{u}{2}}\psi'(e^{2u}) + 2e^{\frac{5u}{2}}\psi''(e^{2u}) \\ &= \left(3e^{\frac{u}{2}}(-1)\sum_{n=1}^\infty n^2\pi + 2e^{\frac{5u}{2}}\sum_{n=1}^\infty n^4\pi^2\right)e^{-n^2\pi e^{2u}}. \end{aligned}$$

Si simplifiquem aquestes expressions obtenim:

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos(tu)du.$$

On $\Phi(u) = \left(-3e^{\frac{4u}{2}}\sum_{n=1}^\infty n^2\pi + 2e^{\frac{9u}{2}}\sum_{n=1}^\infty n^4\pi^2\right)e^{-n^2\pi e^{2u}}$.

Volem veure, aplicant el teorema de Morera, que l'expressió de la dreta és una funció entera. Integrem sobre triangles T

$$\int_T 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos(tu)du = 2\int_0^\infty \left(\int_T \Phi(u)\cos(tu)\right)du = 0.$$

Com que existeix $C > 0$ tal que $\sum_{n\geq 1}|n^a e^{-n^2e^{2u}}| \leq \sum_{n\geq 1} C|n^{-(1+a)}|$ uniformement per a tot $a > 0$, a més ϕ i $\cos(tu)$ amb $t \in (0, \infty)$ son funcions enteres,

$$\begin{aligned}\left|2\int_0^\infty \Phi(u)\cos(tu)du\right| &\leq 2\int_0^\infty |\Phi(u)\cos(tu)|du \\ &\leq 2\int_0^\infty |\Phi(u)|du \\ &\leq 2(3\pi\sum_0^\infty n^2\int_0^\infty e^{2u-n^2\pi e^{2u}}du + 2\pi\sum_0^\infty n^2\int_0^\infty e^{\frac{9}{2}u-n^2\pi e^{2u}}du) < \infty.\end{aligned}$$

aleshores es pot aplicar Morera.
Pel principi de prolongació analítica i que $\xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta\left(s\right).$ obtenim que aquesta és una expressió vàlida de $\xi(s)$ per a tot $s \in \mathbb{C}$. Per tant amb el canvi de variable $u = 2\omega$ i $2t = s$ obtenim

$$\frac{\xi(\frac{s}{2})}{8} = \int_0^\infty \Phi(\omega)\cos(s\omega)d\omega. \tag{2.6}$$

□

Observació 2.19. Un dels resultats obtinguts en la demostració anterior ens permet deduir l'equació funcional de la ζ. Hem vist que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\psi(x)dx.$$

Si canviem s per $(1-s)$ l'expressió de la dreta no canvia, aleshores obtenim que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}},$$

una expressió equivalent a l'equació funcional.

2.5 Teoremes de factorització de funcions enteres

En aquesta secció demostrarem dos teoremes importants que donen factoritzacións de funcions enteres com a producte dels seus zeros amb altres funcions. Seguirem la manera d'introduir aquests teoremes de [You01].

Definició 2.20. *Els factors primers de Weierstrass són*

$$\begin{aligned} &E(u, 0) = 1 - u, \\ &E(u, p) = (1-u)\exp\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}u^n\right) \qquad\qquad p \in \mathbb{N}, p > 0.\end{aligned}$$

Volem veure que existeixen polinomis $p_n(z)$ que fan que el producte

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{p_n(z)}$$

convergeixi a una funció entera en cada regió acotada del pla, si $|z_n| \to \infty$. Sigui $|u| < 1$, aleshores

$$\log(E(u,p)) = \log(1-u) + \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}u^n = -\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}u^n.$$

Per tant, si $|u| \leq \delta < 1$ aleshores

$$|\log(E(u,p))| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |u|^n \leq |u|^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} |u|^n \leq \frac{|u|^{p+1}}{1-\delta}.$$

Per a z en una regió acotada, tenim que $\left|\frac{z}{z_n}\right| \to 0$. Per tant per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que si $n \geq n_0$ aleshores $\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \varepsilon < 1$. Doncs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\log\left(E\left(\frac{z}{z_n}, n\right)\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} \left|\log\left(E\left(\frac{z}{z_n}, n\right)\right)\right| + \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\log\left(E\left(\frac{z}{z_n}, n\right)\right)\right| < \infty.$$

Per tant, el producte infinit convergeix uniformement en cada regió acotada del pla i defineix una funció amb zeros només a $\{z_n\}_n$.

Teorema 2.21 (Factorització de Weistrass)**.** *Sigui f una funció entera diferent de zero, $\{z_n\}_n$ els seus zeros diferents de zero. Aleshores f es pot representar de la forma:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z)},$$

on $m \in \mathbb{N}$, g és una funció entera i $p_n(z)$ està donat per

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k.$$

Demostració. Suposem que f té un zero d'ordre m a l'orígen. Sigui

$$\phi(z) := z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z)}.$$

Aleshores ϕ és una funció entera amb zeros en $z = 0$ i $z = z_n$ per a cada $n \in \mathbb{N}$. Per tant, $\frac{f(z)}{\phi(z)}$ és una funció entera sense zeros, aleshores $\log(\frac{f(z)}{\phi(z)})$ està ben definit. Llavors,

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} = e^{g(z)},$$

per a alguna funció entera g. □

La utilitat del teorema de factorització de Weierstrass està limitada pel fet que els polinomis $p_n(z)$ tenen graus molt alts. Hi ha un cas on l'expansió de $f(z)$ es pot simplificar molt. Suposem que per algun enter positiu p,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |z_n|^{-(p+1)} < \infty.$$

Podem concloure doncs que

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

convergeix uniformement i absolutament en cada regió acotada del pla.

En aquest $f(z)$ es pot escriure com

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z).$$

Si p és l'enter positiu més petit pel qual la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^{-(p+1)} < \infty$ és convergent, llavors $P(z)$ es diu el producte canònic associat a la seqüència $\{z_n\}$, i el nombre p es diu el gènere del producte canònic.

Teorema 2.22 (Borel)**.** *L'ordre d'un producte canònic és exactament l'exponent de convergència dels seus zeros.*

Demostració. Sigui

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right),$$

un producte canònic de gènere p i ordre ρ compost pels zeros $z_1, z_2...$ i sigui λ l'exponent de convergència d'aquests zeros. Com que $\lambda \leq \rho$ és suficient veure que $\rho \leq \lambda$. Per veure l'ordre de creixement de P, hem d'estimar l'ordre de creixement dels factors que el componen.
Fixat z, sigui $r = |z|$ i $r_n = |z_n|$. Si apliquem logaritme a P, obtenim que

$$\log|P(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \sum_{r_n \leq 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \sum_{r_n > 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right|.$$

Per al segon sumatori utilitzem que si $|u| \leq \frac{1}{2}$ aleshores $\log|E(u,p)| \leq 2|u|^{p+1}$.

$$\sum_{r_n > 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq 2 \sum_{r_n > 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} = 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} r_n^{-(p+1)}.$$

Si $\lambda = p + 1$ aleshores

$$\sum_{r_n > 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = O(r^{p+1}).$$

Si $\lambda < p + 1$ i $\varepsilon > 0$ prou petit aleshores $\lambda + \varepsilon < p + 1$. Així doncs

$$\begin{aligned}\sum_{r_n > 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| &\leq 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} r_n^{-(p+1)} = 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} r_n^{\lambda+\varepsilon-(p+1)} r_n^{-(\lambda+\varepsilon)} \\ &< 2r^{p+1} (2r)^{\lambda+\varepsilon-(p+1)} \sum_{r_n > 2r} r_n^{-(\lambda+\varepsilon)} = O(r^{\lambda+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Ara considerem el primer sumatori. Sigui $p > 0$, tenim que

$$\log|E(u,p)| \leq \log|1-u| + \sum_{k=1}^{p} \frac{|u|^k}{k}.$$

Si $|u| \geq \frac{1}{2}$ aleshores

$$|u|^k \leq 2^{p-k} |u|^p \qquad (1 \leq k \leq p).$$

Per tant, obtenim que

$$\log|E(u,p)| \leq \log|1-u| + 2^p|u|^p \leq 2^{p+1}|u|^p.$$

Així doncs per a tot $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{r_n \leq 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| &\leq 2^{p+1}r^p \sum_{r_n\leq 2r} r_n^{-p} = 2^{p+1}r^p \sum_{r_n \leq 2r} r_n^{-(\lambda+\varepsilon+p)} r_n^{\lambda+\varepsilon} \\ &< 2^{p+1}r^p(2r)^{\lambda+\varepsilon-p} \sum_{r_n\leq 2r} r_n^{-(\lambda+\varepsilon)} = O(r^{\lambda+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Si $p = 0$ aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ tenim que

$$\log|E(u,0)| = O(|u|^{\varepsilon}).$$

Finalment tenim que en tots els casos, per a tot $\varepsilon > 0$ tenim que

$$\log|P(z)| = O(r^{\lambda+\varepsilon}),$$

llavors, deduïm que $\rho \leq \lambda$. □

Definició 2.23. *Es diu que una funció f entera és de tipus exponencial si la desigualtat*

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$$

es compleix per a tot $z \in \mathbb{C}$ amb A, B constants positives.

Teorema 2.24. *Si f una funció entera és de tipus exponencial, aleshores $\frac{n(r)}{r}$ es manté acotat si $r \to \infty$.*

Demostració. Podem suposar sense perdre generalitat que $f(0) = 1$, ja que si $f(0) \neq 0$ aleshores considerem $g(z) = \frac{f(z)}{f(0)}$, si f té un zero d'ordre m considerem $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$.
Sigui

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Com f es de tipus exponencial si $|z| \leq r$ aleshores existeixen A, B positius tal que

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq \log(A) + Br,$$

per tant, aplicant la fórmula de Jensen

$$N(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta \leq \log(A) + Br.$$

Com que $n(r)$ és una funció creixent i positiva, aleshores

$$n(r)\log(2) = n(r)\int_r^{2r} \frac{dt}{t} \leq \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t} dt \leq N(2r).$$

□

Definició 2.25. *Donada una funció f la funció de mòdul màxim associada a f és*

$$M_f(r) := \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Definició 2.26. *Una funció entera f és d'ordre finit si existeix k positiu i existeix $r_0(k)$ positiu tal que per a tot $r \geq r_0$ es compleix que*

$$M_f(r) \leq e^{r^k}.$$

L'ínfim dels k que satisfan aquesta propietat s'anomena l'ordre de la funció f i es denota per ρ.

Teorema 2.27. *Si f es una funció entera d'ordre finit ρ, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$*

$$n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

Demostració. Utilitzant una cota de la demostració anterior veiem que

$$\begin{aligned} n(r)\log(2) \leq N(2r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(2re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(e^{r^{(\rho+\varepsilon)}})d\theta \\ &= \frac{r^{(\rho+\varepsilon)}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = r^{(\rho+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.28. *Si f es una funció entera d'ordre finit ρ i $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ els seus zeros (excepte $z = 0$), si $\alpha > \rho$ aleshores*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty.$$

Demostració. Podem suposar que $\{|z_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ estan ordenats de forma creixent. Donat $\alpha > \rho$ escollim un β que compleixi que $\rho < \beta < \alpha$. Com que f és d'ordre finit ρ, aleshores per a tot r

$$n(r) \leq Ar^\beta,$$

per a alguna constant A. Aleshores si $|z_n| = r$ obtenim que

$$n(|z_n|) \leq A|z_n|^\beta.$$

Com que $1 < \frac{\alpha}{\beta}$ aleshores

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} < \infty.$$

□

Teorema 2.29. *Sigui $P(z)$ un producte canònic d'ordre ρ. Per a cada $\varepsilon > 0$ existeix un $r_0 > 0$ tal que per a tot $r \geq r_0$ si $|z| = r$ llavors*

$$|P(z)| > e^{-r^{(\rho+\varepsilon)}}.$$

Demostració. Sigui p el gènere de P, fixem $h > \rho$, sigui $D_n := \{z : |z - z_n| \leq |z_n|^{-h}\}$. Com que la suma dels radis d'aquests discs és finit, aleshores $\mathbb{C} \setminus \bigcup_n D_n$ es no buit. Sigui $r_n := |z_n|$, aleshores

$$\begin{aligned} \log|P(z)| &\geq \sum_{r_n\leq 2r} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - O\left(\sum_{r_n\leq 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^p\right) - O\left(\sum_{r_n>2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right) \\ &= \sum_{r_n\leq 2r} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| - O(r^{\rho+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_n D_n$ i $r_n \leq 2r$ aleshores

$$\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geq r_n^{-h-1} \geq (2r)^{-h-1}.$$

Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$ i valors de r prou grans obtenim que

$$\begin{aligned}\sum_{r_n \leq 2r} \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| &\geq -(h+1)\log(2r)n(2r) \\ &\geq -(h+1)\log(2r)r^{\rho+\varepsilon} \\ &> -r^{\rho+2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Finalment obtenim que

$$\log|P(z)| > -r^{\rho+2\varepsilon} - O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

□

Necessitem un resultat abans de poder demostrar el teorema que busquem. La demostració d'aquest resultat es pot trobar a [Tit39, p.174].

Teorema 2.30 (Desigualtat de Borel-Carathéodory)**.** *Sigui $f(z)$ una funció analítica i regular per a $|z| \leq R$. Siguin $M(r)$ i $A(r)$ el mòdul màxim de f i el mòdul màxim de $Re(f(z))$ a $|z| = r$. Llavors per a $0 < r < R$ es compleix que*

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

Teorema 2.31 (Factorització de Hadamard)**.** *Sigui f una funció entera d'ordre finit ρ, si la factorització canònica de f és*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$$

aleshores g és un polinomi de grau $\leq \rho$.

Demostració. Sigui λ l'exponent de convergència dels zeros del producte canònic P. Aleshores P és d'ordre λ i $\lambda \leq \rho$. Sigui $\varepsilon > 0$ aleshores com que ρ és l'ordre de f tenim que existeix un $r_0 > 0$ tal que per a tot $r \geq r_0$ si $|z| = r$ aleshores

$$\log|f(z)| \leq r^{(\rho+\varepsilon)}.$$

Pel teorema 2.29, també tenim que

$$\log(|P(z)|) > -r^{\lambda+\varepsilon} > -r^{\rho+\varepsilon}.$$

Aleshores combinant les dues desigualtats obtenim que

$$Re(g(z)) = \log\left|\frac{f(z)}{z^m P(z)}\right| < 2r^{\rho+\varepsilon}.$$

Com que g és entera, aleshores per la desigualtat de Borel-Carathéodory

$$|g(z)| = O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

Per tant, g és un polinomi de grau menor o igual a $\rho + \varepsilon$. □

2.6 La classe de Laguerre-Pólya

En aquesta secció definirem el que és la classe de funcions de Laguerre-Pólya i demostrarem alguns resultats que necessitarem posteriorment. Essencialment, els resultats sobre la classe de Laguerre-Polya es poden trobar a [Lev64] i a [HW05], les desigualtats que compleixen les funcions de la classe de Laguerre-Pólya es poden trobar a [CE05].

Definició 2.32. *Una funció f pertany a la classe de funcions de Laguerre-Pólya $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ si és límit uniforme sobre compactes a $\mathbb{C}$ d'una successió de polinomis amb només zeros reals.*

Seguim [HW05] per demostrar que aquesta classe de funcions té una caracterització que ens serà útil per a demostrar les desigualtats que necessitem. Abans enunciem un teorema.

Demostrem primer un lema que necessitarem per la demostració del teorema de Montel.

Lema 2.33. *Sigui $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ una successió de funcions que estan acotades a cada punt de D. Llavors per a tot subconjunt numerable $A \subset D$ existeix una subsuccessió $\{g_n\}$ de $\{f_n\}$ que convergeix puntualment a A.*

Demostració. Sigui $a_0, a_1, \dots$ una enumeració de A. Per a cada $l \in \mathbb{N}$ existeix una subsuccessió $f_{l0}, f_{l1}, \dots$ de la successió f_n tal que

a) la successió $\{f_{ln}\}_{n\geq 0}$ convergeix a a_l,

b) la successió $\{f_{ln}\}_{n\geq 0}$, $l \geq 1$, es una subsuccessió de $\{f_{(l-1)n}\}_{n\geq 0}$.

Argumentem inductivament. Donada una successió $\{f_{kn}\}_{n\geq 0}$, $k < l$, escollim una subsuccessió $\{f_{ln}\}_{n\geq 0}$ de $\{f_{(l-1)n}\}_{n\geq 0}$ que convergeixi a a_l. Llavors a) i b) se satisfan per a tota successió $\{f_{kn}\}_{n\geq 0}$, $k \leq l$.

Amb les successions $f_{l0}, f_{l1}, \dots,$ construïm una successió diagonal $g_0, g_1, \dots,$ amb $g_n := f_{nn}$, $n \in \mathbb{N}$. Aquesta convergeix a cada punt $a_m \in A$ perquè per b), a partir del terme g_m existeix una subsuccessió $f_{m0}, f_{m1}, \dots,$ que convergeix a a_m per a). □

Definició 2.34. *Una successió de funcions $f_1, f_2, \dots$ holomorfes a una regió $D \subset \mathbb{C}$ és acotada en un subconjunt $A \subset D$ si existeix un $M > 0$ tal que $|f_n(z)| \leq M$ per a tot $z \in A$ i per a tot n. Una successió de funcions $f_1, f_2, \dots$ holomorfes en una regió $D \subset \mathbb{C}$ és localment acotada en D si per a tot $z \in D$ existeix un entorn $U \subset D$ de z on la successió és acotada. Això succeeix si i només si la successió de funcions és acotada per a tot compacte de D.*

Demostrem primer un altre lema que necessitarem.

Lema 2.35. *Donada una successió de funcions f_n holomorfes a D localment acotada a D. Per a tot punt $c \in D$ i per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un disc $B \subset D$ amb c a dins tal que*

$$|f_n(w) - f_n(z)| \leq \varepsilon \text{ per a tot } n \in \mathbb{N} \text{ i per a tot } w, z \in B.$$

Demostració. Escollim $r > 0$ prou petit per a què $B(c, 2r) \subset D$. Per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$\begin{aligned} f_n(w) - f_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,2r)} f_n(s) \left(\frac{1}{s-w} - \frac{1}{s-z} \right) ds \\ &= \frac{w-z}{2\pi i} \int_{\partial B(c,2r)} \frac{f_n(s)}{(s-w)(s-z)} ds. \end{aligned}$$

Com que per a $s \in \partial B(c, 2r)$ i $w, z \in B(c, r)$ es compleix que $|(s-w)(s-z)| \geq r^2$ aleshores

$$|f_n(w) - f_n(z)| \leq \frac{2}{r}|w-z||f_n|_{B(c,2r)} \text{ on } |f_n|_{B(c,2r)} \text{ és la cota de } f_n \text{ a B(c,2r).}$$

Com que $\{f_n\}_n$ és localment acotada llavors $M := \frac{2}{r} \sup_n |f_n|_{B(c,2r)} < \infty$. Podem asuimir que $M > 0$. Per acabar és suficient agafar $B := B(c, \delta)$ amb $\delta := \min\{\varepsilon/(2M), r\}$. □

Demostrem el teorema de Montel, seguirem [Rem98].

Teorema 2.36 (Montel)**.** *Tota successió de funcions $f_1, f_2, \ldots$ de funcions holomorfes a una regió $D \subset \mathbb{C}$ que és acotada localment té una subsuccessió que convergeix sobre compactes a D.*

Demostració. Escollim un conjunt dens i numerable $A \subset D$, per exemple el conjunt de tots els nombres complexos racionals a D. Pel lema 2.33 existeix una subsuccessió g_n de f_n que convergeix puntualment a A. Volem demostrar que convergeix uniformement sobre compactes en D.

Sigui $\varepsilon > 0$, considerem $\{z_n\}_n \subset D$ tal que $\lim_n z_n = z^* \in D$. Pel lema 2.35 existeix un disc $B \subset D$ amb z^* a dins tal que $|g_n(w) - g_n(z)| \leq \varepsilon$ per a tot n si $w, z \in B$. Com que A és dens a D, llavors existeix un punt $a \in A \cap B$. Com que $\lim_n z_n = z^*$ llavors existeix un n_1 tal que per a tot $n \geq n_1$ els $z_n \in B$. Tenim la desigualtat

$$|g_n(z_n) - g_m(z_m)| \leq |g_m(z_m) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_n(a)| + |g_n(z) - g_n(a)|.$$

Com que el $\lim_n g_(a)$ existeix, llavors existeix un n_2 tal que $|g_m(a) - g_n(a)| \leq \varepsilon$ per a tot $m, n \geq n_2$. Per tant, per a tot $m, n \geq \max\{n_1, n_2\}$ tenim que $|g_n(z_n) - g_m(z_m)| \leq 3\varepsilon$. Llavors la successió $g_n(z_n)$ és de Cauchy i és convergent. □

Aquest teorema l'utilitzarem en les demostracions que segueixen.

Definició 2.37. *Una funció entera f pertany a la classe de funcions E si i només si f és de la forma*

$$f(z) = e^{-az^2+bz} \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) e^{\frac{z}{x_k}},$$

on amb $a \geq 0$, $\{x_k\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ són els zeros de f, $b \in \mathbb{R}$ i $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{|x_k|^2} < \infty$.

Observació 2.38. El producte de dos funcions de E també pertany a E.

Ara volem demostrar que qualsevol funció de la classe E és límit uniforme de polinomis amb zeros reals. Abans necessitem un resultat preliminar de [HW05].

Lema 2.39. *Si* $|z| \leq A$ *i* $n \geq 2A$ *aleshores*

$$\left| z + \log\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{A^2}{n}.$$

Demostració. La branca del logaritme és la que redueix a 0 quan $z = 0$. Utilitzant la expansió de Maclaurin tenim que

$$\begin{aligned} \left| z + \log\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \right| &\leq n\left(\frac{1}{2}\left|\frac{z}{n}\right|^2 + \frac{1}{3}\left|\frac{z}{n}\right|^3 + \dots\right) \\ &\leq \frac{n}{2}\frac{|z|^2}{n^2(1 - \frac{|z|}{n})} \leq \frac{A^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.40. *Si* $f \in E$*, llavors existeix una seqüència de polinomis* $p_1(z), p_2(z), \dots,$ *cada polinomi amb només zeros reals, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(z) = f(z)$$

uniformement sobre el cercle $|z| \leq A$ *per a tot* $A > 0$.

Demostració. A conseqüència del teorema de factorització de Weierstrass sabem que quan la successió dels zeros de un producte canònic compleix que $\sum_n \frac{1}{|x_n|^2} < \infty$ llavors el producte canònic es pot aproximar uniformement pels productes parcials a $|z| \leq A$. Com que el producte parcial és un polinomi amb zeros reals multiplicat per un exponencial e^{bz} és suficient demostrar que e^{-cz^2} i e^{bz}, $cb \neq 0$, també es poden aproximar per polinomis amb només zeros reals.

Sigui $z = -bs$ al lema 2.39, tenim que per a $|s| \leq \frac{A}{|b|}$

$$\left| -bs + \log\left(1 + \frac{bs}{n}\right)^n \right| \leq \frac{A^2}{n}.$$

Utilitzant la desigualtat $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1$, obtenim que

$$\left| \left(1 + \frac{bs}{n}\right)^n e^{-bs} - 1 \right| \leq e^{\frac{A^2}{n}} - 1.$$

Per tant, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{bs}{n}\right)^n = e^{bs}$$

uniformement sobre $|s| \leq \frac{A}{|b|}$. Si substituïm bs per $-cs^2$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{cs^2}{n}\right)^n = e^{-cs^2}$$

uniformement sobre $|s| \leq \left(\frac{A}{|C|}\right)^{\frac{1}{2}}$. En els dos casos els polinomis que aproximen les funcions només tenen zeros reals ($c > 0$). □

Acabem de demostrar que si la funció és de E, llavors existeix una successió de polinomis amb zeros reals que l'aproxima. Només ens falta veure que una successió de polinomis uniformement convergent sobre compactes té com a límit una funció de E.

Teorema 2.41. *Si es compleixen les següents condicions*

1. $a_k = a_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ *són reals,*
2. $E_n(s) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s}{a_k}\right)$,
3. $\lim_{n\to\infty} E_n(s) = f(s)$ *uniformement a* $|s| \le A$ *per a algun* $A > 0$,

llavors $f \in E$.

Demostració. Considerem la successió de polinomis $\{E_n(s)\}_{n\ge1}$ uniformement convergent amb zeros reals i $E_n(0) = 1$. Pel teorema de Weierstrass $E(s)$ és una funció analítica en $s = 0$ i a més

$$\lim_{n\to\infty} E_n'(0) = E'(0), \qquad \lim_{n\to\infty} E_n''(0) = E''(0).$$

Sigui

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k(n)}, \qquad q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2(n)}.$$

Llavors pels límits considerats tenim que

$$\lim_{n\to\infty} p_n = -E'(0) =: p, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = (E'(0))^2 - E''(0) =: q.$$

Com a conseqüència obtenim que $\{p_n\}_{n\ge1}$ i $\{q_n\}_{n\ge1}$ estan acotades per cada n, diguem-ne per una constant M:

$$|p_n| < M, \qquad 0 \le q_n < M.$$

Sabem que

$$|(1-z)e^z| \le e^{|z|^2}, \qquad |z| \le \frac{1}{2}.$$
$$|(1-z)e^z| \le (1+|z|)e^{|z|} \le e^{2|z|} \le e^{4|z|^2}, \qquad |z| \ge \frac{1}{2}.$$

Per tant, per a tot s tenim que

$$|E_n(s)e^{p_n s}| = \left|\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{\frac{s}{a_k}}\right| \le e^{4q_n|s|^2}.$$
$$|E_n(s)| \le e^{|p_n s| + 4q_n|s|^2} \le e^{M|s| + 4M|s|^2}.$$

La successió $\{E_n\}_{n\ge1}$ és uniformement acotada en qualsevol cercle. Pel teorema de Montel té una parcial que convergeix uniformement sobre compactes, per tant, $E(z)$ és una funció entera. Pel teorema de Hurwitz [Tit39] els zeros de $E(z)$ són tots reals. Podem assumir que $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ són els zeros de $E(z)$ en mòdul creixent, també que $a_k(n)$ estan ordenats de manera que

$$\lim_{n\to\infty} a_k(n) = \alpha_k.$$

Amb les consideracions anteriors tenim que per a tot $p \le n$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k^2(n)} \le q_n < M, \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\alpha_k^2} \le q \le M,$$

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \le q.$$

Definim les funcions

$$g(s) := as + \sum_{k\ge 1}\left(\frac{1}{s-\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\right) = \sum_{k\ge 1} \frac{s^2}{\alpha_k^2(s-\alpha_k)},$$
$$g_n(s) := q_n s + \sum_{k\ge 1}\left(\frac{1}{s-a_k(n)} + \frac{1}{a_k(n)}\right) = \sum_{k\ge 1} \frac{s^2}{a_k(n)^2(s-a_k(n))}.$$

Sigui D una regió acotada, dins de $|s| < R$, que no contingui α_k. Volem demostrar que $g_n(s) \xrightarrow{n\to\infty} g(s)$ uniformement a D.

Sigui $T > R$, denotem per N el nombre de α_k a dins de $|s| < T$. El teorema de Hurwitz ens diu que per a n prou gran el nombre de $a_k(n)$ al cercle és N:

$$\begin{array}{lll} |\alpha_k| < T, & |a_k(n)| < T, & \text{per a } k = 1, 2, \dots, N, \\ |\alpha_k| \ge T, & |a_k(n)| \ge T, & \text{per a } k = N+1, N+2, \dots. \end{array}$$

Per tant, tenim que

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{s^2}{\alpha_k^2(s-\alpha_k)}\right| \le \frac{R^2}{T-R} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \le \frac{MR^2}{T-R} \qquad |s| \le R,$$
$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{s^2}{a_k^2(n)(s-a_k(n))}\right| \le \frac{R^2}{T-R} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2(n)} \le \frac{MR^2}{T-R} \qquad n > N.$$

Llavors

$$|g(s) - g_n(s)| \le \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{s^2}{\alpha_k^2(s-\alpha_k)} - \frac{s^2}{a_k^2(n)(s-a_k(n))}\right| + \frac{2MR^2}{T-R}.$$

El primer terme de la dreta clarament tendeix uniformement a D cap a 0 si $n \to \infty$. Llavors escollint T i n podem fer que $|g(s) - g_n(s)|$ sigui tan petit com vulguem, més petit que un $\varepsilon > 0$ donat, per a tot $s \in D$.

Com que

$$g_n(s) = \frac{E_n'(s)}{E_n(s)} + p_n + q_n s,$$

pel teorema de Weierstrass obtenim que

$$\frac{E'(s)}{E(s)} + p + qs = as + \sum_{k\ge 1}\left(\frac{1}{s-\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Aquesta sèrie convergeix uniformement a D, integrant terme per terme de 0 a s obtenim que

$$E(s)e^{ps+\frac{q}{2}s^2} = e^{\frac{a}{2}s^2}\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{s}{\alpha_k}\right)e^{\frac{s}{\alpha_k}}.$$

Com que $a \leq q$ llavors deduïm que $E(s) \in E$. □

Acabem de demostrar el següent resultat de la classe de funcions de Laguerre-Pólya.

Teorema 2.42. *$f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ si i només si f es de la forma*

$$f(x) = Ce^{-ax^2+bx}x^m\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x}{x_k}\right)e^{\frac{x}{x_k}},$$

amb $a \geq 0$, $\{x_k\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ són els zeros de f, $b \in \mathbb{R}$ i $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{|x_k|^2} < \infty$.

Teorema 2.43 (Laguerre inequality)**.** *Sigui $\phi(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, aleshores*

$$L(\phi)(x) := (\phi'(x))^2 - \phi(x)\phi''(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A més dona la igualtat si i només si $\phi(x) = Ce^{bx}$ o x és un zero múltiple de ϕ.

Demostració. Si considerem $\phi(x) = Ce^{bx}$ aleshores

$$L(\phi)(x) := (\phi'(x))^2 - \phi(x)\phi''(x) = (Cb)^2e^{2bx} - Ce^{bx}Cb^2e^{bx} = 0.$$

Si no, podem considerar que

$$\phi(x) = Ce^{-ax^2+bx}x^m\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x}{x_k}\right)e^{\frac{x}{x_k}},$$

on $a \geq 0$, $\{x_k\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ són els zeros de ϕ, $b \in \mathbb{R}$ i $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{|x_k|^2} < \infty$.
Aleshores

$$\log(\phi(x)) = \log(C) - ax^2 + bx + m\log(x) + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{x}{x_k} + \log\left(1-\frac{x}{x_k}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)(x) &= \frac{(\phi'(x))^2 - \phi(x)\phi''(x)}{(\phi(x))^2} = \frac{L(\phi)(x)}{(\phi(x))^2}\\ &= \frac{m}{x^2} + 2a + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(x-x_k)^2} > 0\end{aligned}$$

□

Com hem vist en la secció 2.1 sabem que si f és límit uniforme de polinomis amb zeros reals sobre compactes llavors f' és límit uniforme de les derivades d'aquests mateixos polinomis. Pel teorema de Rolle sabem que tenim tots els altres zeros reals. Per tant, aquesta derivada també és de la classe de funcions de Laguerre-Pólya. Amb això obtenim el resultat següent

Corol·lari 2.44 (Desigualtat general de Laguerre-Pólya)**.** *Sigui $\phi(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, aleshores*

$$L_n(\phi)(x) := (\phi^{(n)}(x))^2 - \phi^{(n-1)}(x)\phi^{(n+1)}(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

A més dona la igualtat si i només si $\phi(x) = Ce^{bx}$ o x és un zero múltiple de ϕ.

3 Parelles de zeros de Lehmer i la constant de de Bruijn-Newman

En aquesta secció aplicarem tots els coneixements que hem anat recopilant en seccions anteriors per a demostrar un teorema de George Csordas, Wayne Smith i Richard S.Varga [CSV94]. Aquest teorema és de gran importància perquè permet calcular cotes inferiors de la constant de Bruijn-Newman Λ. Primer enunciarem algunes definicions i teoremes que ens serviran com a base per als resultats posteriors que tractarem. Veurem quina és la relació de la constant de de Bruijn-Newman Λ amb la hipòtesi de Riemann i també veurem la relació de la constant amb la classe de funcions de Laguerre-Polya.

Primer de tot mostrarem la relació de la funció ξ amb el tipus de funcions que tractarem.

3.1 La funció H_t

En la secció 2.4 hem vist que la funció ξ es pot expressar de la següent manera

$$\frac{\xi(x/2)}{8} = \int_0^\infty \Phi(u)\cos(xu)du \qquad\qquad x \in \mathbb{C}.$$

El tipus de funcions que tractarem i estudiarem són les següents:

Definició 3.1. *Per a tot $t \in \mathbb{R}$ i per a tot $x \in \mathbb{C}$*

$$H_t(x) := \int_0^\infty e^{tu^2}\Phi(u)\cos(xu)du.$$

La relació que hi ha entre la ξ i les funcions $H_t(s)$ és pot enunciar com

$$H_0(x) = \frac{\xi(\frac{x}{2})}{8}.$$

Newman al seu treball [New76] millora el resultat anterior i demostra que el comportament dels zeros de les funcions H_t depenen d'una constant.

Teorema 3.2. *Existeix una constant Λ real que compleix que:*

(i) $H_t(s)$ només té zeros reals si i només si $t \geq \Lambda$.

(ii) $H_t(s)$ té zeros no-reals si i només si $t < \Lambda$.

Λ s'anomena la constant de Bruijn-Newman.

Amb aquest teorema Csordas, Rittan i Varga a [CRV91] reformulen el resultat de Newman i dona un resultat que utilitzarem molt

Corol·lari 3.3. *$H_t \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ si i només si $t \geq \Lambda$.*

3.2 Parelles de Lehmer

Ara presentem un concepte que necessitem per a poder estudiar el comportament dels zeros de la funció H_0.

Sabem que H_t és una funció entera real i parella d'ordre 1 [CNV87]. Llavors pel teorema de factorització de Hadamard que sabem que per a $x \in \mathbb{C}$

$$H_t(x) = H_t(0) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x_j^2(t)}\right).$$

amb els zeros $\{x_j(t)\}_{j\geq 1}$ satisfent que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j(t)|^{-2} < \infty.$$

Definició 3.4. *Sigui $t > \Lambda$, $x_k(t), x_{k+1}(t)$ dos zeros simples i positius consecutius de H_t. Les funcions f_k i g_k són*

$$f_k(t) := \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{2}{(x_{k+1}(t) - x_j(t))(x_k(t) - x_j(t))},$$
$$g_k(t) := \sum_{j\neq 0,k,k+1} (x_k(t) - x_j(t))^{-2} + (x_{k+1}(t) - x_j(t))^{-2}.$$

Observació 3.5. Aquestes funcions estan ben definides perquè per a t fixat existeixen constants $C_0(t,k)$,$C_1(t,k)$ tals que per a j suficientment gran

$$\begin{aligned} |(x_{k+1}(t) - x_j(t))(x_k(t) - x_j(t))| &\geq |x_j(t)^2 - x_j(t)(x_{k+1}(t) + x_k(t))| \geq |x_j(t)(x_{k+1}(t) + x_k(t))| \\ &\geq C_0(t,k)|x_j(t)|^2, \\ |x_k(t) - x_j(t)|^2 &\geq |x_j(t)^2 - 2x_j(t)x_k(t)| \geq C_1(t,k)|x_j(t)|^2. \end{aligned}$$

Aleshores pel criteri M de Weierstrass tenim que tant $g_k(t)$ com $f_k(t)$ convergeixen uniformement.

Definició 3.6. *Sigui $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donats $x_k(0) < x_{k+1}(0)$ dos zeros consecutius de H_0, aquests seran una parella de zeros de Lehmer si*

$$\Delta_k^2 \cdot g_k(0) < \frac{4}{5},$$

on

$$\Delta_k := x_{k+1}(0) - x_k(0).$$

Lema 3.7. *Sigui x_0 un zero real i simple de H_{t_0}, amb $t_0 \in \mathbb{R}$. Existeix un entorn I de t_0 i existeix una funció $x(t)$ real que satisfà les següents condicions:*

1. $x(t_0) = x_0$.
2. *$x(t)$ es un zero simple de H_t i $H_t(x(t)) = 0$ per a tot $t \in I$.*
3.

$$x'(t) = \frac{H_t''(x(t))}{H_t'(x(t))} \qquad\qquad t \in I.$$

Demostració. Sabem que
$$H_{t_0}(x_0) = 0.$$
Si apliquem el teorema de la funció implícita, existeix un entorn I de t_0 i una funció diferenciable $x(t)$ tals que $x(t)$ és un zero simple de H_t i $H(x(t)) = 0$ per a tot $t \in I$.

Si derivem $H_t(x(t)) = 0$ respecte de t obtenim que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(H_t(x(t))) &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{tu^2}\Phi(u)\cos(x(t)u)du \\
&= \int_0^\infty \Phi(u)(u^2 e^{tu^2}\cos(x(t)u) - e^{tu^2}\sin(x(t)u)x'(t)u)du \\
&= -H_t''(x(t)) + H_t'(x(t))x'(t) = 0.
\end{aligned}$$

□

Per il·lustrar el resultat del lema 3.7, considerem que H_t té dos zeros consecutius, positius i simples $x_k(t_1)$ i $x_{k+1}(t_1)$, i els altres zeros de H_t estan lluny de $x_k(t_1)$ i $x_{k+1}(t_1)$. Es pot veure que $H''_{t_1}(x) > 0$ en un interval $[x_k(t_1), x_{k+1}(t_1)]$, i que $H'_{t_1}(x_k(t_1)) < 0$, però que $H'_{t_1}(x_{k+1}(t_1)) > 0$. Amb el lema 3.7 concloem que $x'_k(t_1) < 0$ i que $x'_{k+1}(t_1) > 0$. Això indica que, en fer decréixer t, $x_k(t)$ creix, mentre que x_{k+1} decreix. Aquest fet és equivalent al fet que la parella de zeros s'apropa en fer decréixer t respecte de t_1 i s'allunyen en fer créixer t respecte de t_1.

És de molt interes per al nostre treball la situació quan H_t té dos zeros simples i positius consecutius $x_k(t_1)$ i $x_{k+1}(t_1)$ i com aquests zeros s'apropen quan t decreix, i col·lapsen per a alguna t.

Volem mostrar que aquest procés ens condueix a una cota inferior per a Λ. En centrem ara en el cas en què $x_k(t_0) = x_{k+1}(t_0)$, això es equivalent al fet que $H_{t_0}(x_k(t_0)) = H'_{t_0}(x_k(t_0)) = 0$.

Lema 3.8. *Suposem que per a* t_0, x_0 *reals*
$$H_{t_0}(x_0) = H'_{t_0}(x_0) = 0.$$
Aleshores
$$t_0 \leq \Lambda.$$

Demostració. Primer considerem que $H''_{t_0}(x_0) \neq 0$. Sigui $\delta > 0$, aleshores

$$\begin{aligned}
H_{t_0-\delta}(x) &= \int_0^\infty e^{t_0u^2}e^{-\delta u^2}\Phi(u)\cos(xu)du = \int_0^\infty e^{t_0u^2}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\delta u^2)^k}{k!}\right)\Phi(u)\cos(xu)du \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta^k}{k!}\int_0^\infty u^{2k}(-1)^k e^{t_0u^2}\Phi(u)\cos(xu)du = \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta^k}{k!}H_{t_0}^{(2k)}(x)
\end{aligned}$$

Derivem respecte x i obtenim l'expressió

$$\frac{d^j H_{t_0-\delta}}{dx^j}(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta^k}{k!}H_{t_0}^{(2k+j)}(x) \qquad j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Donada una funció g entera real, sigui

$$L_1(g(x)) := (g'(x))^2 - g(x)g''(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Considerem aquesta expressió per a $H_{t_0-\delta}$

$$\begin{aligned} L_1(H_{t_0-\delta}(x_0)) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} H_{t_0}^{(2k+1)}(x_0)\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} H_{t_0}^{(2k)}(x_0)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} H_{t_0}^{(2k+2)}(x_0)\right) \\ &= -\delta\left(H_{t_0}^{(2)}(x_0)\right)^2 + \delta^2\left(H_{t_0}^{(3)}(x_0) - \frac{3}{2}H_{t_0}^{(2)}(x_0)H_{t_0}^{(4)}(x_0)\right) + O(\delta^3), \end{aligned}$$

amb $\delta \to 0^+$. Com que $H_{t_0}^{(2)}(x_0) \neq 0$ aleshores $L_1(H_{t_0-\delta}(x_0)) < 0$ per a $\delta > 0$ prou petit. Sabem pel corol·lari 2.44 que si $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ aleshores f satisfà la següent desigualtat

$$L_m(f(x)) = (f^{(m)}(x))^2 - f^{(m-1)}(x)f^{(m+1)}(x) \geq 0 \qquad m \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

Aleshores veiem que $H_{t_0} \notin\in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ per a $\delta > 0$ prou petit. Per tant, deduïm que $t_0 - \delta < \Lambda$ amb $\delta > 0$ prou petit, per tant, $t_0 \leq \Lambda$.

Considerem el cas en que x_0 es un zero múltiple de H_{t_0}, de multiplicitat $k+1$ amb $k \geq 1$. Es a dir es satisfà que

$$H_{t_0}^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (0 \leq j \leq k) \text{ amb } H_{t_0}^{(k+1)}(x_0) \neq 0 \qquad k \geq 1.$$

Sigui

$$h_t(x) := H_t^{(k-1)}(x) = \int_0^{\infty} u^{k-1} e^{tu^2} \Phi(u) \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2} + xu\right) du.$$

Aleshores tenim que

$$h_{t_0}(x_0) = h'_{t_0}(x_0) = 0 \text{ i } h''_{t_0}(x_0) \neq 0.$$

Per tant pel mateix argument que en el cas anterior

$$L_1(h_{t_0-\delta}(x_0)) = -\delta(h''_{t_0}(x_0))^2 + O(\delta^2),$$

amb $\delta \to 0$. Per tant obtenim que per a $\delta > 0$ suficientment petit $H_{t_0-\delta}^{(k-1)} \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Com que $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ es tancat sota derivació aleshores $H_{t_0-\delta} \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$, per tant $t_0 \leq \Lambda$. □

Corol·lari 3.9. *Per a tot $t > \Lambda$ els zeros de H_t són reals i simples.*

Demostració. Com que $t > \Lambda$ llavors tots els zeros de H_t són reals. Si algun d'ells, diguemne x_0, no és simple aleshores $H_t(x_0) = H'_t(x_0) = 0$. Pel lema anterior llavors obtindríem que $t \leq \Lambda$ que és contradictori amb el que hem suposat, $t > \Lambda$. □

Ara volem obtenir una fórmula més explícita per a $x'(t)$.

Lema 3.10. *Sigui f analítica en un domini $D \subseteq \mathbb{C}$. Sigui*

$$g(z) := (z-w)f(z) \text{ per a } w \in D \text{ i amb } f(w) \neq 0.$$

Aleshores $g'(w) \neq 0$ i

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = 2\frac{f'(w)}{f(w)}.$$

Demostració. Com que $g'(z) = (z-w)f'(z) + f(z)$ per a $z \in D$, aleshores

$$\frac{d}{dz}\log(g'(z)) = \frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{(z-w)f''(z) + 2f'(z)}{(z-w)f'(z) + f(z)} \qquad z \in D.$$

□

Definim algunes funcions auxiliars que ens seran útils per als següents lemes.

Lema 3.11. *Sigui $t > \Lambda$. Sigui k un nombre enter positiu, $x_k(t), x_{k+1}(t)$ dos zeros simples i positius consecutius de H_t. Aleshores la següent igualtat per a $x_k'(t)$ es valida:*

$$x_k'(t) = 2\sum_{j\neq 0,k} \frac{1}{(x_k(t) - x_j(t))}.$$

A més es verifica que

$$x_{k+1}'(t) - x_k'(t) = \frac{4}{(x_{k+1}(t) - x_k(t))} - f_k(t)(x_{k+1}(t) - x_k(t)).$$

Demostració. Pel corol·lari 3.9 sabem que per a $t > \Lambda$ els zeros de H_t son reals i simples. Per a $t > \Lambda$, el teorema de Hadamard ens permet escriure per a k fixat

$$H_t(x) = (x - x_k(t))q_t(x),$$

on

$$q_t(x) := H_t(0)\left(1 + \frac{x}{x_k(t)}\right)\left(\frac{1}{-x_k(t)}\right)\prod_{j=1,j\neq k}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2(t)}\right).$$

Apliquem els lemes 3.7 i 3.10 per veure que

$$x_k'(t) = \frac{H_t''(x_k(t))}{H_t'(x_k(t))} = 2\frac{q_t'(x_k(t))}{q_t(x_k(t))} = 2[\log q_t(x_k(t))]'.$$

Podem veure que aplicant logaritme a $q_t(x)$

$$\log q_t(x) = \log\left(H_t(0)\right) + \log\left(1 + \frac{x}{x_k(t)}\right) + \log\left(\frac{1}{-x_k(t)}\right) + \sum_{j=1,j\neq k}^{\infty}\log\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2(t)}\right).$$

Derivant aquesta expressió obtenim

$$\begin{aligned}
[\log q_t(x)]' &= \frac{1}{x_k(t)+x} + \sum_{j=1, j\neq k}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - x_j^2(t)} \\
&= \frac{1}{x - x_{-k}(t)} + \sum_{j=1, j\neq k}^{\infty} \frac{1}{x - x_j(t)} + \frac{1}{x + x_j(t)} \\
&= \frac{1}{x - x_{-k}(t)} + \sum_{j=1, j\neq k}^{\infty} \frac{1}{x - x_j(t)} + \sum_{-\infty}^{j=-1, j\neq -k} \frac{1}{x - x_{-j}(t)} \\
&= \sum_{j\neq 0,k} \frac{1}{x - x_j(t)}.
\end{aligned}$$

Que és el primer resultat que volíem. Restant les expressions obtingudes per a k i $k+1$ obtenim que

$$\begin{aligned}
x'_{k+1}(t) - x'_k(t) &= 2 \sum_{j\neq 0,k+1} \frac{1}{(x_{k+1}(t) - x_j(t))} - 2 \sum_{j\neq 0,k} \frac{1}{(x_k(t) - x_j(t))} \\
&= \frac{4}{(x_{k+1}(t) - x_k(t))} - 2 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{x_{k+1}(t) - x_k(t)}{(x_{k+1}(t) - x_j(t))(x_k(t) - x_j(t))} \\
&= \frac{4}{(x_{k+1}(t) - x_k(t))} - f_k(t)(x_{k+1}(t) - x_k(t)).
\end{aligned}$$

□

Observació 3.12. Aquest últim lema mostra que el comportament de $x'(t)$ depèn d'una sèrie formada pels zeros de $H_t(x)$. Aquest comportament es pot interpretar com una equació diferencial que descriu el moviment de $x_k(t)$. L'estudi d'aquesta equació diferencial és també la clau de la solució de la conjectura de Newman per Rodgers-Tao.

Lema 3.13. *Si $t > \Lambda$ i k un enter positiu aleshores*

$$g'_k(t) > -8(g_k(t))^2.$$

A més, si $\Lambda < 0$ aleshores

$$g_k(t) < \frac{g_k(0)}{1 + 8g_k(0)\cdot t} \qquad i\ t \in (\Lambda, 0] \cap \left(-\frac{1}{8g_k(0)}, 0\right).$$

Demostració. Com que $t > \Lambda$ sabem pel corol·lari 3.9 que tots els zeros de H_t són reals i simples. Per a cada j i $t > \Lambda$, localment $x'_j(t)$ està definida i és analítica. En qualsevol compacte de $(\Lambda, 0)$ la serie $g_k(t)$ convergeix uniformement i absolutament. Per tant, per a $t > \Lambda$

$$g'_k(t) = -2 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \left(\frac{(x'_k(t) - x'_j(t))}{(x_k(t) - x_j(t))^3} + \frac{(x'_{k+1}(t) - x'_j(t))}{(x_{k+1}(t) - x_j(t))^3} \right).$$

Per tant, si $j \neq k$ i $t > \Lambda$ aleshores per lema

$$\begin{aligned}
x'_k(t) - x'_j(t) &= 2 \sum_{i\neq 0,k} \frac{1}{(x_k(t) - x_i(t))} - 2 \sum_{i\neq 0,j} \frac{1}{(x_j(t) - x_i(t))} \\
&= \frac{4}{(x_k(t) - x_j(t))} - 2 \sum_{i\neq 0,j,k} \frac{x_k(t) - x_j(t)}{(x_k(t) - x_i(t))(x_j(t) - x_i(t))}.
\end{aligned}$$

Si substituïm en l'expressió de $g_k'(t)$ obtenim que per a $t > \Lambda$ (no posem la dependència de la t per facilitar la notació)

$$
\begin{aligned}
g_k'(t) = &-2 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{\frac{4}{(x_k-x_j)} - 2\sum_{i\neq 0,j,k} \frac{x_k-x_j}{(x_k-x_i)(x_j-x_i)}}{(x_k-x_j)^3} \\
&+ \frac{\frac{4}{(x_{k+1}-x_j)} - 2\sum_{i\neq 0,j,k+1} \frac{x_{k+1}-x_j}{(x_{k+1}-x_i)(x_j-x_i)}}{(x_{k+1}-x_j)^3} \\
&= -8 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k-x_j)^4} + \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^4} \right) \\
&+ 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_{k+1})(x_j-x_{k+1})} \\
&+ 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_k)(x_j-x_k)} \\
&+ 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \sum_{i\neq 0,j,k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_i)(x_j-x_i)} + \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_i)(x_j-x_i)} \right).
\end{aligned}
$$

Per facilitar el treball definim de la següent manera

$$
\begin{aligned}
A_k(t) &:= -8 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k-x_j)^4} + \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^4} \right), \\
B_k(t) &:= 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_{k+1})(x_j-x_{k+1})} \\
&+ 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_k)(x_j-x_k)} \\
&+ 4 \sum_{j\neq 0,k,k+1} \sum_{i\neq 0,j,k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_i)(x_j-x_i)} \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_i)(x_j-x_i)} \right).
\end{aligned}
$$

Així podem reescriure la igualtat anterior com

$$g_k'(t) = A_k(t) + B_k(t) \qquad\qquad (t > \Lambda).$$

En els dos primers sumands de B_k podem simplificar

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\neq 0,k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_{k+1})(x_j-x_{k+1})} + \frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_k)(x_j-x_k)} \right) \\
&= \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{x_k-x_{k+1}}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_{k+1})(x_j-x_{k+1})^2} \\
&= \sum_{j\neq 0,k,k+1} \frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_j-x_{k+1})^2}.
\end{aligned}
$$

En el doble sumand de B_k intercanviem i, j als sumatoris i veiem que ens queda

$$\sum_{j\neq 0,k,k+1}\sum_{i\neq 0,j,k,k+1}\left(\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_i)(x_j-x_i)}+\frac{1}{(x_k-x_i)^2(x_k-x_j)(x_i-x_j)}\right)$$
$$+\sum_{j\neq 0,k,k+1}\sum_{i\neq 0,j,k,k+1}\left(\frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_i)(x_j-x_i)}+\frac{1}{(x_{k+1}-x_i)^2(x_{k+1}-x_j)(x_i-x_j)}\right)$$
$$=\sum_{j\neq 0,k,k+1}\sum_{i\neq 0,j,k,k+1}\frac{x_j-x_i}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_i)^2(x_j-x_i)}$$
$$+\sum_{j\neq 0,k,k+1}\sum_{i\neq 0,j,k,k+1}\frac{x_j-x_i}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_i)^2(x_j-x_i)}.$$

Ara combinem les expressions reduïdes per a obtenir

$$\begin{aligned}B_k(t)=&\,4\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_j-x_{k+1})^2}\\&+2\sum_{j\neq 0,k,k+1}\sum_{i\neq 0,j,k,k+1}\left(\frac{1}{(x_k-x_j)^2(x_k-x_i)^2}+\frac{1}{(x_{k+1}-x_j)^2(x_{k+1}-x_i)^2})\right).\end{aligned}$$

Com que tots els sumands de $B_k(t)$ són positius aleshores

$$B_k(t)>0 \qquad\qquad \text{per a } t>\Lambda.$$

Per tant deduïm que

$$g_k'(t)>A_k(t) \qquad\qquad \text{per a } t>\Lambda.$$

Per a obtenir la desigualtat utilitzarem la següent desigualtat entre sumes de termes positius, per a k fixat

$$\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_k(t)-x_j(t))^4}<\left(\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_k(t)-x_j(t))^2}\right)^2 \qquad \text{per a } t>\Lambda.$$

Aleshores amb les expressions que hem obtingut podem veure que per a $t>\Lambda$

$$\begin{aligned}-\frac{A_k(t)}{8}&<\left(\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_k(t)-x_j(t))^2}\right)^2+\left(\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_{k+1}(t)-x_j(t))^2}\right)^2\\&<\left(\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_k(t)-x_j(t))^2}+\sum_{j\neq 0,k,k+1}\frac{1}{(x_{k+1}(t)-x_j(t))^2}\right)^2\\&=(g_k(t))^2.\end{aligned}$$

Per tant, obtenim que per a $t>\Lambda$

$$-\frac{g_k'(t)}{8}<-\frac{A_k(t)}{8}<(g_k(t))^2,$$

la primera desigualtat que volíem demostrar.

Ara en centrem en la segona part del lema. Sigui $s \in (\Lambda, 0] \cap \left(-\frac{1}{8g_k(0)}, 0\right)$. Sabem que si $t > \Lambda$ aleshores per definició $g_k(t) > 0$, per tant, veiem que

$$\int_s^0 \frac{-g_k'(t)}{(g_k'(t))^2} dt < 8 \int_s^0 dt = -8s.$$

Integrant a la desigualtat anterior obtenim les següents desigualtats que ens porten a la desigualtat que volem.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{g_k(0)} - \frac{1}{g_k(s)} < -8s \\
&\frac{1}{g_k(s)} - \frac{1}{g_k(0)} > 8s \\
&\frac{g_k(0)}{g_k(s)} > 1 + 8sg_k(0) \\
&\frac{g_k(0)}{1 + 8sg_k(0)} > g_k(s).
\end{aligned}$$

□

3.3 Cotes inferiors de Λ amb parelles de Lehmer

El següent resultat és la clau en la cerca de cotes inferiors de la constant de de Bruijn-Newman, i és el resultat principal de [CSV94].

Teorema 3.14. *Donada una parella de zeros de Lehmer $\{x_k(0), x_{k+1}(0)\}$ es compleix que:*

1. *Si $g_k(0) \leq 0$ aleshores $\Lambda > 0$.*
2. *Si $g_k(0) > 0$,*

$$\lambda_k := \frac{(1 - \frac{5}{4}\Delta_k^2 \cdot g_k(0))^{\frac{4}{5}} - 1}{8g_k(0)}$$

aleshores $\lambda_k \leq \Lambda$.

Demostració. Sigui $\{x_k(0), x_{k+1}(0)\}$ una parella de zeros de Lehmer de H_0. Si tots els zeros $x_j(0)$ de H_0 són reals aleshores $g_k(0)$ és una suma de termes positius i, per tant, $g_k(0) > 0$. En conseqüència si $g_k(0) \leq 0$ aleshores H_0 té algun zero no real, per tant, $\Lambda > 0$.

Suposem doncs que $g_k(0) > 0$. Com que $\{x_k(0), x_{k+1}(0)\}$ una parella de zeros de Lehmer de H_0 llavors λ_k satisfà la desigualtat següent

$$\frac{-1}{8g_k(0)} < \lambda_k < 0.$$

Suposem que $\Lambda < \lambda_k < 0$. Donat $t \in [\lambda_k, 0]$ sigui

$$y_k(t) := x_{k+1}(t) - x_k(t),$$

observem que $y_k(t) > 0$ per a tot $t \in [\lambda_k, 0]$, ja que tots els zeros de H_t són reals i simples. Considerem la següent equació diferencial amb la notació del lema 3.11 i la definicio 3.6, per a $t \in [\lambda_k, 0]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_k(t) = \frac{4}{y_k(t)} - f_k(t) y_k(t), \\ y_k(0) = \Delta_k. \end{cases}$$

Multipliquem l'equació per $2y_k(t)$ obtenim la següent equació diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_k^2(t) + 2f_k(t) y_k^2(t) = 8, \\ y_k^2(0) = \Delta_k^2. \end{cases}$$

Aquesta equació diferencial admet com a factor integrant el terme

$$I_k(t) = e^{F_k(t)} \qquad \text{amb } F_k(t) := -2 \int_t^0 f_k(u) du.$$

La solució de l'equació diferencial es donada per

$$\frac{1}{8}(\Delta_k^2 - I_k(t) y_k^2(t)) = \int_t^0 I_k(u) du.$$

Per a obtenir una contradicció, veurem que podem trobar una cota inferior per la part de la integral de $I_k(u)$. Com que $\{x_k(0), x_{k+1}(0)\}$ és una parella de zeros de Lehmer de H_0 i $g_k(0) > 0$ llavors $\lambda_k > \frac{-1}{8g_k(0)}$. Com sabem que $0 < f_k(t) < g_k(t)$ juntament amb el lema 3.13 podem veure que

$$F_k(t) = -2 \int_t^0 f_k(t) du > -2 \int_t^0 g_k(t) du \geq -2 \int_t^0 \frac{g_k(0)}{1 + 8g_k(0)u} du \qquad t \in [\lambda_k, 0].$$

Per tant, deduïm que per a $t \in [\lambda_k, 0]$ es satisfà que

$$F_k(t) \geq \frac{1}{4} \log(1 + 8g_k(0)t).$$

Aplicant aquest resultat a $I_k(t)$ veiem que per a $t \in [\lambda_k, 0]$

$$\int_t^0 I_k(u) du \geq \int_t^0 (1 + 8g_k(0)u)^{\frac{1}{4}} du = \frac{1}{10g_k(0)} (1 - (1 + 8g_k(0)t)^{\frac{5}{4}}).$$

Ara fixem $t = \lambda_k$ i veiem que

$$\frac{1}{8}(\Delta_k^2 - I_k(\lambda_k) y_k^2(\lambda_k)) = \int_{\lambda_k}^0 I_k(u) du \geq \frac{1}{10g_k(0)} (1 - (1 + 8g_k(0)\lambda_k)^{\frac{5}{4}}) = \frac{\Delta_k^2}{8}.$$

Sabem que per a $t > \Lambda$ es satisfà que $f_k(t) > 0$ i en conseqüència $I_k(\lambda_k) > 0$, per tant, resulta que

$$y_k^2(\lambda_k) = (x_{k+1}(\lambda_k) - x_k(\lambda_k))^2 \leq 0.$$

Sabem que per a tot $t > \Lambda$ la funció H_t té zeros reals i simples, és a dir, $y_k^2(t) > 0$ per a tot $t > \Lambda$. Això és una contradicció amb l'última desigualtat. Finalment deduïm que llavors $\lambda_k \leq \Lambda$. □

Corol·lari 3.15. *Suposem que H_0 té infinites parelles de zeros de Lehmer $\{x_{k_i+1}, x_{k_i}\}_i$ tal que $g_{k_i}(0) > 0$ per a tot $i \geq 1$ i $\lim_i \Delta_{k_i}^2 = 0$. Aleshores $0 \leq \Lambda$.*

Demostració. Donada $\{x_{k_i+1}, x_{k_i}\}_i$ zeros de H_0 sabem que satisfan que per a $i \geq 1$

$$0 < \Delta_{k_i}^2 g_{k_i}(0) < \frac{4}{5}.$$

Sigui $t_i := \frac{5\Delta_{k_i}^2 g_{k_i}(0)}{4}$, es satisfà que $0 < t_i < 1$. Podem expressar λ_k de la manera següent, per a tot $i \geq 1$

$$\frac{\lambda_k}{\Delta_{k_i}^2} = \frac{5((1-t_i)^{\frac{4}{5}} - 1}{32t_i}.$$

Com que la funció $d(t) := \frac{5((1-t)^{\frac{4}{5}}-1}{32t}$ és monòtona decreixent en l'interval $(0,1)$, ja que

$$d'(t) = \frac{4(1-t)^{-\frac{1}{5}}32t - 32(5((1-t)^{\frac{4}{5}} - 1)}{(32t)^2} \leq 0 \qquad\qquad t \in (0,1).$$

Llavors obtenim que per a $t \in (0,1)$

$$-\frac{5}{32} < d(t) < -\frac{1}{8}.$$

Finalment veiem que

$$0 = \lim_{t\to\infty} \Delta_{k_i}^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_{k_i}}{d(t)}.$$

Llavors es dedueix del teorema 3.14 que $0 \leq \Lambda$. $\square$

Observació 3.16. Cal remarcar que existeixen parelles de zeros de Lehmer de H_0 i que amb aquests resultats s'han obtingut numèricament cotes inferiors de Λ en [CSV94]. En la següent secció comentarem aquests resultats.

4 Existència de parelles de zeros de Lehmer de H_0 i cotes numèriques per a Λ

Finalment, veurem com s'aplica tots aquests resultats numèricament i comentarem els resultats que s'han obtingut a [CSV94].

Considerarem $g_k(0)$ discutida anteriorment i continuarem amb el següent lema

Lema 4.1. *Per a k i N enters positius amb $N > k+1$, sigui*

$$g_{k,N}(0) := \sum_{|j|\leq N, j\neq k,k+1} \left(\frac{1}{(x_k(0)-x_j(0))^2} + \frac{1}{(x_{k+1}(0)-x_j(0))^2} \right),$$

i sigui

$$R_{k,N+1}(0) := g_k(0) - g_{k,N}(0).$$

Aleshores

$$|R_{k,N+1}(0)| < 2\Re\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{x_j^2(0)} \right) \left(\frac{|x_{N+1}^2(0)|}{(|x_{N+1}(0)| - |x_k(0)|)^2} + \frac{|x_{N+1}^2(0)|}{(|x_{N+1}(0)| - |x_{k+1}(0)|)^2} + 2 \right),$$

i llavors

$$\lim_{N\to\infty} R_{k,N+1}(0) = 0.$$

En la cerca de parelles de zeros de Lehmer de H_0 es busquen parelles de zeros simples reals amb la propietat de què els zeros veïns estiguin "relativament lluny". Considerarem en particular, la parella de zeros que va observar Lehmer a [Leh56]

$$\begin{cases} x_{6709}(0) = 14010.125732349841..., \\ x_{6710}(0) = 14010.201129345293..., \end{cases}$$

per tant

$$\Delta_{6709} = x_{6710}(0) - x_{6709}(0) = 0.07539699452\ldots.$$

Cal remarcar que aquesta parella compleix el que volem, ja que

$$x_{6708}(0) = 14008.087446998657..., x_{6711}(0) = 14013.479324767898\ldots.$$

Es demostra a [CSV94] que aquesta parella de zeros $\{x_{6709}(0), x_{6710}(0)\}$ és una parella de zeros de Lehmer de H_0 amb la definició que es dona al propi article. Aplicant el teorema 3.14 es demostra a [CSV94] que

Teorema 4.2. *Si Λ és la constant de de Bruijn-Newman, llavors*

$$-7.113 \cdot 10^{-4} < \Lambda.$$

Seguint la mateixa idea es demostra a [CSV94] que la parella de zeros trobada per Odlyzko

$$\begin{cases} x_{1115578}(0) = 1326637.016620..., \\ x_{1115579}(0) = 1326637022538..., \end{cases}$$

és també una parella de zeros de Lehmer de H_0. Amb aquesta parella de zeros es demostra també a l'article que

Teorema 4.3. *Si Λ és la constant de de Bruijn-Newman, llavors*

$$-4.378 \cdot 10^{-6} < \Lambda.$$

5 Conclusions

En aquest treball hem demostrat un teorema que ens permet calcular cotes inferiors de la constant de de Bruijn-Newman.

Per poder demostrar el teorema hem hagut d'introduir-nos en alguns resultats d'anàlisi complexa. Hem introduït el concepte de convergència uniforme de funcions sobre compactes. Hem demostrat la fórmula de Jensen, que ens pot permetre estudiar el comportament dels zeros de la funció zeta de Riemann. Inicialment vam considerar explicar, utilitzant la fórmula de Jensen, el plantejament de la hipòtesi de Riemann i raonar perquè es postula, però com que s'anava molt del tema al final no ho hem inclòs al treball. Hem demostrat que la funció zeta es pot expressar com a integral trigonomètrica d'una funció Φ especial. Per poder justificar alguns raonaments d'aquesta demostració hem utilitzat la fórmula de sumació de Poisson, un resultat d'anàlisi harmònica que hem demostrat prèviament.

Hem reformulat la hipòtesi de Riemann en termes de l'expressió obtinguda. Considerant la forma de l'expressió de la funció ξ de Riemann és natural introduir un conjunt especial de funcions, la classe de Laguerre-Polya. Hem estudiat els resultats principals d'aquesta classe de funcions, on ens ha sigut especialment útil els conceptes de convergència uniforme sobre compactes, i hem donat algunes demostracions de resultats fonamentals d'aquesta classe de funcions.

Amb aquesta classe de funcions i els seus resultats hem pogut relacionar la hipòtesi de Riemann amb la pertinença, del tipus de funcions que hem estudiat, a la classe de funcions de Laguerre-Polya.

Aquest últim fet ens facilita l'eina principal per a la majoria de resultats que hem demostrat i hem pogut donar la demostració d'un resultat que ens permetria afirmar que la constant de de Bruijn-Newman és positiva o zero, fet fortament relacionat amb la hipòtesi de Riemann.

Per concloure cal remarcar que el teorema que ens hem plantejat demostrar no només permet estudiar el comportament de la constant de de Bruijn-Newman analíticament sinó que també proporciona eines que es poden tractar numèricament. Aquest estudi avança en el qüestionament de la ja esmentada hipòtesi de Riemann i dona bases per a treballs posteriors sobre aquest tema, treballs com els de Tao i Rodgers que finalment demostren la conjectura de Newman i avancen en l'estudi de la constant de de Bruijn-Newman.

Referències

[Ahl53] Lars V Ahlfors. Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. *New York, London*, 177, 1953.

[BC13] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex analysis*. European Mathematical Society, 2013.

[CE05] George Csordas and Alain Escassut. The laguerre inequality and the distribution of zeros of entire functions. In *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, volume 12, pages 331–345, 2005.

[CNV87] George Csordas, Timothy S Norfolk, and Richard S Varga. A low bound for the de bruijn-newman constant. *Numerische Mathematik*, 52(5):483–497, 1987.

[CRV91] George Csordas, A Ruttan, and Richard S Varga. The laguerre inequalities with applications to a problem associated with the riemann hypothesis. *Numerical Algorithms*, 1(2):305–329, 1991.

[CSV94] George Csordas, Wayne Smith, and Richard S Varga. Lehmer pairs of zeros, the de bruijn-newman constant λ, and the riemann hypothesis. *Constructive Approximation*, 10(1):107–129, 1994.

[DB50] NG De Bruijn. The roots of trigonometric integrals. *Duke Mathematical Journal*, 17(3):197–226, 1950.

[HW05] Isidore Isaac Hirschman and David V Widder. *The convolution transform*. Courier Corporation, 2005.

[Leh56] Derrick H Lehmer. On the roots of the riemann zeta-function. *Acta Mathematica*, 95:291–298, 1956.

[Lev64] Boris I. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*, volume 5 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Soc., 1964.

[Mon73] Hugh L Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 24, pages 181–193, 1973.

[New76] Charles M Newman. Fourier transforms with only real zeros. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 61(2):245–251, 1976.

[NW20] Charles Newman and Wei Wu. Constants of de bruijn–newman type in analytic number theory and statistical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57(4):595–614, 2020.

[Pól27] George Pólya. Über trigonometrische integrale mit nur reellen nullstellen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1927.

[Rem98] Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory*, volume 172. Springer Science, 1998.

[RT20] Brad Rodgers and Terence Tao. The de bruijn–newman constant is non-negative. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 8. Cambridge University Press, 2020.

[SP14] J Schur and G Pólya. *Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen.* Walter de Gruyter, Berlin, 1914.

[SS03] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2003.

[Tit39] Edward Charles Titchmarsh. *The theory of functions.* Oxford university press, 1939.

[Tit86] Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* Oxford university press, 1986.

[You01] Robert M Young. *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series, Revised Edition, 93.* Elsevier, 2001.