Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Resolucions lineals i ideals de grafs

Autor: Ton Merino Abelló

Director: Dr. Santiago Zarzuela Armengou
Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 11 de juny de 2022

Abstract

In this work we study some of the correspondences between commutative algebra and graph theory. We start with an introduction on edge and cover ideals that lead into introducing the algebra basic tools that lets us state Fröberg's Theorem on linear resolutions of edge ideals and chordal graphs. The work ends with a proof of Fröberg's Theorem given by Adam Van Tuyl, based on monomial splittings and some propierties of chordal graphs.

Resum

En aquest treball estudiem algunes de les correspondències entre l'àlgebra commutativa i la teoria de grafs. Comença amb una introducció dels edge i cover ideals que porta a un resum de les eines bàsiques d'àlgebra que ens permeten enunciar el Teorema de Fröberg sobre resolucions lineals d'edge ideals i grafs cordals. El treball acaba amb una demostració del Teorema de Fröberg donada per Adam Van Tuyl, basada en splittings monomials i algunes propietats dels grafs cordals.

2020 Mathematics Subject Classification. 05C25, 13D02

Agraïments

No puc concluir aquest treball sense expressar el meu sincer agraïment a totes les persones que m'han ajudat a recórrer aquest camí.

En primer lloc, vull donar les gràcies al Dr. Santiago Zazuela per haver-me descobert aquesta branca de les matemàtiques, que desconeixia i ha resultat un autèntic plaer estudiar. També per la seva paciència i dedicació, sense les quals aquest treball no hagués tirat endavant.

Així mateix, agraïments a la meva familia pels seus consells i pel suport incondicional que sempre m'han donat.

Per últim, vull donar les gràcies a totes aquelles persones que han trobat un moment del seu temps per escoltar-me i, en especial, a la Mar, per ser-hi sempre.

Índex

1 Edge and Cover Ideals **3**

1.1 Definició i propietats . . . 3

2 Mòduls **10**

2.1 Definició i propietats . . . 10

2.2 Producte directe i suma de mòduls . . . 12

2.3 Mòduls lliures . . . 12

2.4 Producte tensorial . . . 13

3 Anells i mòduls Noetherians **18**

4 Mòduls graduats i resolucions lliures graduades **21**

4.1 Anells graduats . . . 21

4.2 Mòduls graduats . . . 23

4.3 Resolucions graduades lliures . . . 25

4.4 Resolucions minimals . . . 26

4.5 Teorema de les sizígies de Hilbert . . . 27

4.6 Resolucions lineals . . . 32

5 Grafs Cordals **34**

5.1 Definició i propietats . . . 34

5.2 Identificació de grafs cordals . . . 38

6 Teorema de Fröberg **40**

6.1 Splittings d'ideals monomials . . . 40

6.2 Demostració del Teorema de Fröberg . . . 43

6.3 Exemples . . . 45

7 Conclusions **47**

Introducció

Durant la dècada dels 1970 alguns matemàtics es van començar a interessar en l'estudi de les propietats dels grafs simples i finits a través dels ideals monomials. L'any 1990 el matemàtic suec Ralf Fröberg va publicar un dels primers teoremes importants en aquesta matèria. Aquest teorema afirma que l'edge ideal d'un graf finit i simple té una resolució lliure lineal si, i només si, el complementari del graf associat és cordal. Aquest resultat ha tingut molta rellevància, ja que, ha sigut un precursor important a tots els resultats que s'han continuat publicant sobre aquesta correspondència entre l'àlgebra i la teoria de grafs. Posteriorment, altres matemàtics han intentat demostrar una versió del Teorema de Fröberg per hipergrafs, en aquest cas el problema esdevé molt més difícil, doncs, la característica del cos base passa a tenir rellevància. El lector interessat pot consultar [18].

Aquest treball pretén ser un petit resum d'algunes de les relacions entre aquestes dues branques de les matemàtiques. Inclou una introducció als edge i cover ideals junt amb alguns exemples de com les propietats dels ideals es tradueixen en propietats dels grafs i recíprocament. Veurem que els cover ideals estan estretament relacionats amb els colorings d'un graf. El problema del coloring en teoria de grafs és molt estudiat i té aplicacions interessants en problemes d'assignació. Tot i que en aquest treball no es tracta, una altra relació entre grafs i àlgebra ve donada per la construcció de Stanley-Reisner, com que els edge i cover ideals són ideals monomials lliures de quadrats, aleshores, es pot associar un complex simplicial a cada ideal. Aquesta relació es troba explicada en [18].

L'objectiu final d'aquest treball és definir i construir totes les eines necessàries per enunciar el Teorema de Fröberg. En definir les resolucions lliures graduades d'un mòdul, ens podem preguntar per la seva existència, la seva unicitat o la seva finitud. Aquesta última pregunta la respon el Teorema de les sizígies de Hilbert. Tot i que la finalitat d'aquest treball no és aprofundir completament en la part d'àlgebra homològica, està inclosa una demostració del Teorema de les sizígies de Hilbert. Després de construir les bases per poder enunciar el Teorema de Fröberg, el treball acaba donant una demostració feta per Adam Van Tuyl en [18]. Aquesta demostració està construida a partir de resultats de Francisco, Hà i Van Tuyl a [7] i [8] junt amb resultats de Eliahou i Kervaire a [6]. La demostració de Van Tuyl, a diferència de l'original de Fröberg a [10], utilitza els splittings monomials per demostrar el resultat per inducció sobre el nombre de vèrtexs del graf. La demostració original, en canvi, es duu a terme utilitzant la construcció de Stanley-Reisner i complexos simplicials.

Tot i que aquest treball intenta ser el màxim autocontingut possible, no totes les demostracions estan incloses, en alguns casos per acotar l'extensió del treball i en altres perquè s'allunyaven massa de l'objectiu central d'aquest. He dedicat els capítols 2 i 3 a explicar teoria de mòduls que es veu a l'assignatura d'àlgebra commutativa, donat que, al no haver-la pogut cursar, ha estat part de l'estudi previ fet per dur a terme el treball.

Estructura de la Memòria

1. La primera secció està dedicada a resumir algunes de les relacions entre l'àlgebra commutativa i la teoria de grafs. Es defineixen els edge i cover ideals associats a un graf finit i simple i s'expliquen algunes de les correspondències que existeixen entre les propietats d'aquests ideals i les dels seus grafs associats.

2. La segona secció és un resum de les propietats bàsiques dels mòduls. Els mòduls seran l'estructura algebraica sobre la qual poder construir les resolucions lliures.

3. La tercera secció està dedicada a explicar la propietat de Noetherianitat per a mòduls. Aquesta propietat permetrà justificar perquè les sizígies de les resolucions són finitament generades.

4. La quarta secció comença amb la definició i algunes propietats dels anells i mòduls graduats, això porta a la introducció de les resolucions lliures. La secció continua amb la prova d'un resultat important, la versió graduada del Teorema de les sizígies de Hilbert. Finalment, l'última part de la secció està dedicada a caracteritzar algunes propietats més de les resolucions lliures.

5. La cinquena secció comença amb la definició dels grafs cordals. Continua amb la demostració d'un lema que caracteritza els grafs cordals a partir d'alguns dels seus subgrafs. Aquest lema resulta ser molt important més endavant a l'hora de demostrar el Teorema de Fröberg. La secció acaba amb una caracterització que permet utilitzar un algoritme de temps lineal per identificar grafs cordals.

6. A l'última secció s'introdueixen els splittings monomials, finalment, la secció i el treball acaben amb una demostració del Teorema de Fröberg original de Van Tuyl.

1 Edge and Cover Ideals

1.1 Definició i propietats

En aquesta secció i durant tot el treball únicament considerarem grafs finits i simples junt amb ideals monomials en un anell de polinomis sobre un cos K. A un graf G de n vèrtexs li associarem un ideal de l'anell de polinomis $K[x_1, ..., x_n]$.

Definició 1.1. *Un graf $G = (V(G), E(G))$ és un parell ordenat format per un conjunt $V(G)$ de vèrtexs i $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V(G)\}$ un conjunt d'arestes que són parells no ordenats de vèrtexs. Direm que dos vèrtexs x i y són veïns o estan connectats si existeix una aresta $\{x, y\} \in E(G)$. Direm que una aresta és adjacent a un vèrtex x si el connecta amb un altre vèrtex y. Un graf és simple si no té arestes que connectin un vèrtex amb ell mateix ni té més d'una aresta connectant els mateixos dos vèrtexs.*

Definició 1.2. *Sigui G un graf $G = (V(G), E(G))$. Anomenem edge ideal de G a l'ideal monomial següent:*

$$I(G) = \langle x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)\rangle \subseteq K[x_1, ..., x_n]$$

Anomenem cover ideal de G a l'ideal monomial:

$$J(G) = \bigcap_{\{x_i, x_j\} \in E(G)} \langle x_i, x_j\rangle \subseteq K[x_1, ..., x_n]$$

Observem que donat un ideal monomial I lliure de quadrats a $K[x_1, ..., x_n]$ de la forma

$$I = \langle x_{1,1}x_{1,2}, ..., x_{k,1}x_{k,2}\rangle$$

li podem associar un únic graf G amb

$$V(G) = \{x_1, ..., x_n\}, \quad E(G) = \{\{x_{1,1}x_{1,2}\}, ..., \{x_{k,1}x_{k,2}\}\}$$

Fixem-nos què és necessari fixar que, si $|V(G)| = n$, aleshores, l'anell base de l'ideal és $K[x_1, ..., x_n]$. Això és degut a que donat el graf G que acabem de descriure, si considerem el graf G' amb $V(G') = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ i $E(G') = E(G)$, aleshores, $I(G) = I(G')$ com a ideals de $K[x_1, ..., x_n]$, per tenir una correspondència un a un entre grafs i els seus edge ideals necessitem considerar $I(G')$ com un ideal de $K[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]$. Per tant, obsevem que afegir vèrtexs aïllats a un graf no canvia els generadors del seu edge ideal associat però si canvia l'anell base de l'ideal.

Donat un ideal monomial lliure de quadrats a $K[x_1, ..., x_n]$ de la següent forma

$$J = \bigcap_{i=1}^{k} \langle x_{i,1}, x_{i,2}\rangle$$

li podem associar un únic graf G amb

$$V(G) = \{x_1, ..., x_n\}, \quad E(G) = \{\{x_{1,1}x_{1,2}\}, ..., \{x_{k,1}x_{k,2}\}\}$$

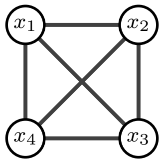
La situació és la mateixa que amb els edge ideals. Els vèrtexs aillats no tenen cap influencia en el cover ideal, per tant, és necessari que si $|V(G)| = n$, aleshores, l'anell base de l'ideal és $K[x_1, ..., x_n]$.

L'estudi dels edge i cover ideals vol veure com es relacionen els invariants dels grafs amb els dels seus ideals associats.

Definició 1.3. *Anomenarem el cicle de n vèrtexs i denotarem C_n al graf amb $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ i $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_{n-1}, x_n\}\}$.*

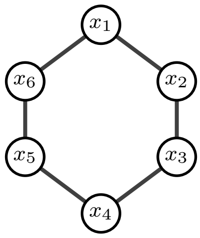
I anomenarem el graf complet o clique de n vèrtexs i denotarem K_n al graf amb $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ i $E(G) = \{\{x_i, x_j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Veiem alguns exemples de les definicions anteriors, sigui $G = K_4$ tenim que



$$I(G) = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4]$$
$$J(G) = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_1, x_3 \rangle \cap \langle x_1, x_4 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_2, x_4 \rangle \cap \langle x_3, x_4 \rangle =$$
$$= \langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Si $G = C_6$

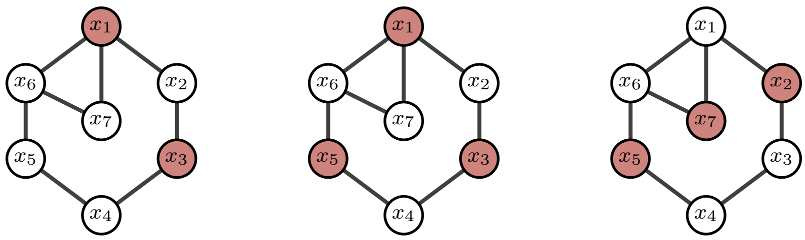


$$I(G) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$$
$$J(G) = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_3, x_4 \rangle \cap \langle x_4, x_5 \rangle \cap \langle x_5, x_6 \rangle \cap \langle x_6, x_1 \rangle =$$
$$= \langle x_1x_3x_5, x_2x_4x_6 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$$

Les següents definicions ens permetran caracteritzar els cover ideals.

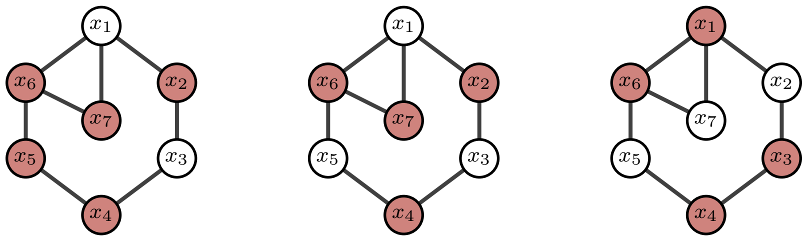
Definició 1.4. *Sigui $G = (V(G), E(G))$ un graf, un subconjunt $W \subseteq V(G)$ l'anomenem independent set si cap aresta de $E(G)$ té els dos extrems en W. Direm que un independent set és maximal si és maximal respecte la inclusió, i.e sigui W_1 un independent set maximal i W_2 un independent set, si $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$.*

A la següent pàgina es troben tres exemples de independent sets sobre un graf. En el primer graf $W_1 = \{x_1, x_3\}$ clarament és un independent set, doncs no hi ha cap aresta que connecti x_1 i x_3. En el segon graf, $W_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$ i també s'observa que els vèrtexs W_3 no estan connectats entre ells, per tant, és un independent set. Observem que $W_1 \subseteq W_2$ i $W_1 \neq W_2$, per tant, W_1 no és un independent set maximal, en canvi, W_2 si que ho és, ja que a l'intentar afegir un vèrtex a W_2 el conjunt deixa de ser un independent set. En el tercer graf, $W_3 = \{x_1, x_3, x_5\}$ és un independent set maximal. Fixem-nos que en general els independent sets maximals d'un graf no són únics.



Definició 1.5. *Sigui un subconjunt $W \subseteq V(G)$, diem que W és un vertex cover si $W \cap e \neq \varnothing$ per tot $e \in E(G)$. Un vertex cover W es diu minimal si cap subconjunt propi de W és un vertex cover.*

Veiem a continuació tres exemples de vertex covers sobre un graf. En el primer graf $W_1' = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ clarament és un vertex cover doncs no hi ha cap aresta que no sigui adjacent a com a mínim un dels vèrtexs de W_1'. En el segon graf, $W_2' = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$ també és un vertex cover. Observem que $W_2' \subseteq W_1'$ és un subconjunt propi de W_1', per tant, W_1' no és un vertex cover minimal, en canvi, W_2' sí ja que si intentem treure un vèrtex de W_2', aquest deixa de ser un vertex cover. En el tercer graf, $W_3' = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$ i també és un vertex cover minimal. Fixem-nos que en general els vertex covers minimals d'un graf no són únics.



Lema 1.6. *Un subconjunt $W \subseteq V(G)$ és un independent set $\iff V(G) \setminus W$ és un vertex cover. En particular, un subconjunt $W \subseteq V(G)$ és un independent set maximal $\iff V(G) \setminus W$ és un vertex cover minimal.*

Demostració. Sigui $W \subseteq V(G)$ un independent set, aleshores cap aresta de G té els dos extrems en $W \Leftrightarrow$ tota aresta té almenys un dels extrems en $V(G) \setminus W \Leftrightarrow (V(G) \setminus W) \cap e \neq \varnothing$ $\forall e \in E(G) \Leftrightarrow V(G) \setminus W$ és un vertex cover. W és un independent set maximal $\Leftrightarrow$ no existeix W' tal que $W \subset W'$ i W' independent set $\Leftrightarrow$ No existeix W' tal que $(V \setminus W') \subset (V \setminus W)$ i W' independent set $\Leftrightarrow$ No existeix W' tal que $(V \setminus W') \subset (V \setminus W)$ i $V \setminus W'$ vertex cover $\Leftrightarrow$ $(V \setminus W)$ vertex cover minimal. $\square$

Aquest lema ens diu que els vertex covers i els independent sets es determinen entre ells. Observant els exemples previs sobre vertex covers i independent sets veiem que $W_i = V(G) \setminus W_i'$ per i=1,2,3, per tant, verifiquen el Lema 1.6.

Si $W \subseteq V(G)$ utilitzarem la següent notació per monomis

$$x_W := \prod_{x_i \in W} x_i$$

La següent proposició ens diu que els generadors del cover ideal d'un graf són els monomis associats als vertex covers minimals de G. La següent demostració es troba a [18].

Proposició 1.7. *Sigui G un graf i $J(G)$ el seu cover ideal. Es compleix*

$$J(G) = \langle x_W \mid W \subseteq V(G) \text{ és un vertex cover minimal de } G \rangle$$

Demostració. $\supseteq$) Sigui $I = \langle x_W \mid W \subseteq V(G)$ és un vertex cover minimal de $G\rangle$, sigui x_W un dels generadors de I, tenim que per tot $e = \{x_i, x_j\} \in E(G)$, es compleix que $W \cap e \neq \varnothing$, per tant, o bé $x_i \in W$ o $x_j \in W \Rightarrow x_i | x_W$ o $x_j | x_W \Rightarrow x_W \in \langle x_i, x_j \rangle$. Per tant

$$x_W \in \bigcap_{\{x_i,x_j\} \in E(G)} \langle x_i, x_j \rangle = J(G)$$

$\subseteq$) Sigui $x \in J(G)$ un generador minimal qualsevol, com que $J(G)$ és una intersecció d'ideals lliures de quadrats $\Rightarrow x$ és un monomi lliure de quadrats, és a dir $x = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$. Sigui $W = \{x_{i_1} \cdots x_{i_k}\}$, com que $x \in \bigcap_{\{x_i,x_j\} \in E(G)} \langle x_i, x_j \rangle \Rightarrow x \in \langle x_i, x_j \rangle$ per tot $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ aleshores o bé $x_i | x$ o bé $x_j | x$, per tant, o bé $x_i \in W$ o bé $x_j \in W \Rightarrow W$ és un vertex cover. Sigui $W' \subseteq W$ un vertex cover minimal. Com que $x_{W'} \in I$ i $x_{W'}$ divideix $x_W = x$, tenim $x \in I$. $\square$

A continuació descriurem un algoritme que es troba en [6], l'algoritme s'utilitza per calcular la intersecció entre dos ideals monomials a partir de bases de Gröbner. Donats dos ideals I i J a $K[x_1, ..., x_n]$ es considera el següent ideal $tI + (1-t)J \subseteq K[x_1, ..., x_n, t]$ que és un ideal doncs la suma d'ideals és un ideal. A continuació es calcula la base de Gröbner d'aquest ideal, el resultat és un conjunt de generadors, alguns d'aquests generadors poden ser divisibles per t, considerant únicament els generadors no divisibles per t s'obté un conjunt de generadors per $I \cap J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$.

Si es vol calcular la intersecció de n ideals monomials es va calculant iterativament la intersecció d'ideals dos a dos.

Veiem doncs que la caracterització que ens dona la Proposició 1.7 pot ser útil per calcular la intersecció entre els ideals del tipus que s'obtenen al considerar cover ideals. Tot i que en grafs senzills es poden calcular minimal vertex covers de forma visual i intuïtiva, quan els grafs són més complexos no és així, de fet, a nivell computacional el problema de calcular minimal vertex covers és un conegut algoritme NP-hard, és a dir, els problemes que són com a mínim tant difícils com els NP, el lector interessat pot veure [3].

Un exemple interessant de les conseqüències d'aquest resultat és el següent.

Lema 1.8. *Sigui $G = K_n$ un graf complet, es compleix la següent igualtat.*

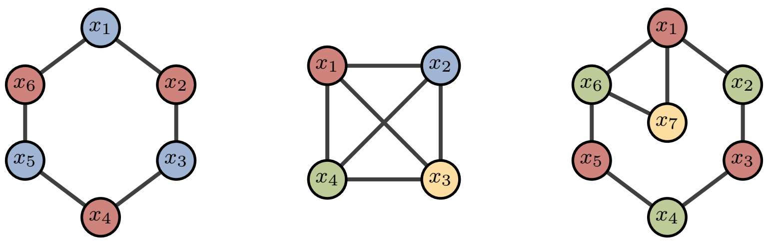
$$J(K_n) = \bigcap_{\substack{i<j \\ i,j \in \{1,...,n\}}} \langle x_i, x_j \rangle = \langle x_1 \cdots x_n / x_i \mid i \in \{1, ..., n\} \rangle$$

Demostració. Sigui K_n un graf complet amb $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ aleshores $W_i = V(G) \setminus x_i$ són els vertex covers minimals de G per tot i. Veiem que són vertex covers, sigui $e \in E(G)$ si e té un extrem en $V(G) \setminus x_i \Rightarrow e \cap (V(G) \setminus x_i) \neq \varnothing$, Si e té un extrem en x_i com que G és simple, l'altre extrem ha de pertànyer a $V(G) \setminus x_i \Rightarrow e \cap (V(G) \setminus x_i) \neq \varnothing$. Suposem que existeix $W' \subset W_i$ vertex cover, aleshores $W' \subset (V(G) \setminus \{x_i, x_j\})$ per algun $j \in \{1, ..., n\}$ però aleshores $W' \cap \{x_i, x_j\} = \varnothing$ i $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ per ser G complet, per tant, obtenim una contradicció i W_i és minimal. Utilitzant la Proposició 1.7 obtenim el resultat.$\square$

Fixem-nos que l'exemple de K_4 vist anteriorment és un cas particular d'aquest lema.

Un cop vist com es caracteritzen els cover ideals la següent pregunta que ens podriem fer és quin paper hi juguen al considerar els colorings d'un graf. Recordem que sigui G

un graf, un *coloring* és l'assignació d'un color a cada vèrtex del graf, de tal forma que els vèrtexs veïns no coincideixen en color. Donat un graf, s'anomena *chromatic number* i es denota $\chi(G)$ al mínim nombre de colors necessaris per a fer un colouring del graf.
A continuació hi ha uns quants exemples de grafs, amb alguns dels seus colorings minimals.



Observem que, per exemple, per un graf complet K_n tenim que $\chi(K_n) = n$ i per un cicle C_n tenim que $\chi(C_n) = 2$ si n parell i $\chi(C_n) = 3$ si n imparell.

A continuació, veiem un teorema que ens determina el chromatic number d'un graf a partir de les potències del seu cover ideal. Anunciem primer un lema previ.

Lema 1.9. *Sigui G un graf, $\chi(G) \leq d$ si, i només si $V(G) = C_1 \sqcup ... \sqcup C_d$ podem fer una partició de V(G) en d independent sets.*

La demostració és òbvia assignant un color a cada independent set de la partició i fent l'assignació recíproca. Fixem-nos que, en el fons, quan parlem del chromatic number ens estem referint al mínim nombre de independent sets que formen una partició del graf.

El següent teorema es troba en [18].

Teorema 1.10. *Sigui G un graf amb $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ i $J(G)$ el seu cover ideal, aleshores*

$$\chi(G) = min\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J(G)^d\}$$

Demostració. En primer lloc volem veure que si $\chi(G) = d$, aleshores $(x_1 \cdots x_n) \in J(G)^d$. Si $\chi(G) = d$ pel lema anterior se sap que es pot fer una partició de $V(G) = C_1 \sqcup ... \sqcup C_d$ en independent sets, com que cada C_i és un independent set tenim que $W_i = G \setminus C_i$ és un vertex cover i per tant pel teorema anterior $x_{W_i} \in J(G)$ per tot $i \Rightarrow x_{W_1} \cdots x_{W_d} \in J(G)^d$. Tenim que cada x_i es troba en un únic C_i i per tant cada x_i es troba en exactament $d - 1$ dels W_j, en conseqüència $x_{W_1} \cdots x_{W_d} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J(G)^d$. Per tant obtenim que

$$\chi(G) \geq min\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = \langle x_1 \cdots x_n \rangle^{d-1} \in J(G)^d\}$$

Considerem ara $(x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J(G)^d$, per tant podem trobar d vertex covers minimals $W_1, ..., W_d$ tal que $(x_1 \cdots x_n)^{d-1} = x_{W_1} \cdots x_{W_d} M \in J^d$ on M és un monomi (possiblement $M = 1$). Siguin

$$C_1 = V(G) \setminus W_1$$

$$C_2 = (V(G) \setminus W_2) \setminus C_1$$

$$C_2 = (V(G) \setminus W_3) \setminus (C_1 \sqcup C_2)$$

$$\vdots$$

$$C_d = (V(G) \setminus W_d) \setminus (C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_{d-1})$$

Aleshores $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_d$ és un coloring de G. Veiem primer que cada C_i és un independent set, doncs és un subconjunt de $V(G) \setminus W_i$. D'altra banda, per construcció, els C_i són disjunts dos a dos. Ens falta veure que si $x_j \in V(G)$ aleshores hi ha com a mínim un W_i tal que $x_j \neq W_i$. Suposem el contrari, suposem que $x_j \in W_i$ per tot i, tenim doncs que $x_j^d \mid x_{W_1} \cdots x_{W_d} M = (x_1 \cdots x_n)^{d-1}$ per tant, una contradicció. Per tant, tenim que $x_j \in C_i = V(G) \setminus W_i$ o bé $x_j \in C_1 \sqcup ... \sqcup C_{i-1}$. En conseqüència $\chi(G) \leq min\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J(G)^d\}$. $\square$

Veiem a continuació uns quants exemples del Teorema 1.10.

Exemple 1.11. Considerem a continuació K_4 tenim que l'únic coloring és $V(G) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\} \Rightarrow \chi(K_4) = 4$, com els conjunts $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ són maximal independent sets $\Rightarrow V(K_4) \setminus \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ són minimal vertex covers aleshores $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}$,$\{x_1, x_2, x_4\}$ i $\{x_1, x_2, x_3\}$ són minimal vertex covers i per tant $x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_2x_3 \in J(G)$. Per tant pel Teorema 2.10

$$(x_1x_2x_3x_4)^3 = (x_2x_3x_4)(x_1x_3x_4)(x_1x_2x_4)(x_1x_2x_3) \in J(G)^4$$

Si considerem C_6, aleshores, un minimal coloring és $V(G) = \{x_1, x_3, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_6\}$ $\Rightarrow \chi(C_6) = 2$ i per tant com són independent sets maximals i són dos conjunts que són unió disjunta de $V(G)$ en concret també són vertex covers minimals $x_1x_3x_5, x_2x_4x_6 \in J(G)$ i per tant pel Teorema 1.10 tenim que

$$(x_1x_3x_5)(x_2x_4x_6) = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6)^1 \in J(G)^2$$

Finalment, per veure que els edge i cover ideals no son les úniques construccions que es poden fer a partir de grafs, passem a veure algunes construccions addicionals.

Definició 1.12. *Un complex simplicial en $V = \{x_1, ..., x_n\}$ és un subconjunt $\triangle$ del conjunt potencia de V tal que*

1. *Si $F \in \triangle$ i $G \subseteq F$, aleshores $G \in \triangle$.*
2. *$\{x_i\} \in \triangle$ per tot i.*

Els complexos simplicials es poden associar a un ideal monomial lliure de quadrats de l'anell de polinomis.

Definició 1.13. *L'ideal de Stanley-Reisner associat a un complex simplicial $\triangle$, és l'ideal lliure de quadrats següent*

$$I_\triangle = \langle x_W \mid W \notin \triangle \rangle$$

aquesta operació es reversible, és a dir, donat un ideal lliure de quadrats, li podem associar un complex simplicial de la següent manera

$$\triangle(I) = \{W \in V \mid x_w \notin I, x_W \textit{ lliure de quadrats}\}$$

Passem a veure un cas concret. Aquesta és una de les moltes construccions que es poden fer utilitzant complexos simplicials en aquest àmbit.

Definició 1.14. *Sigui G un graf. El independence complex de G és el complex simplicial següent*

$$\triangle(G) = \{W \in V(G) \mid W \text{ és un independent set}\}$$

Tenim doncs que per les definicions.

Lema 1.15. *Sigui G un graf associat a un complex simplicial $\triangle(G)$, aleshores*

$$I(G) = I_{\triangle(G)}$$

Demostració. Sigui $\triangle$ el complex simplicial associat a $I(G)$

$$\triangle = \{W \subset V(G) \mid x_W \notin I(G)\}$$

$$= \{W \subset V(G) \mid \text{per cada } \{x_i, x_j\} \in E(G), x_i x_j \nmid x_W\}$$
$$= \{W \subset V(G) \mid \text{cap subconjunt de } W \text{ és una aresta}\} = \triangle(G)$$

Veiem doncs que tornem a tenir una correspondència entre ideals i grafs. Establint les relacions que acabem de descriure, es poden interpretar alguns dels invariants dels grafs en termes dels edge i cover ideals a través de resultats de la teoria de Stanley-Reisner. Per més resultats veure [18].

A l'hora de considerar edge i cover ideals cal recalcar que no només es poden considerar sobre grafs, de fet, les definicions es poden estendre a hipergrafs. Els hipergrafs es poden pensar com grafs on les arestes poden connectar qualsevol subconjunt de vèrtexs del graf, és a dir, les arestes no estan limitades a connectar únicament dos vèrtexs. Tenim doncs, que les definicions de edge i cover ideals es poden estendre a hipergrafs. A [18] es poden veure tant refèrencies sobre aquest tema com construccions addicionals.

Aquestes són algunes de les moltes construccions que existeixen relacionant els invariants dels ideals de grafs amb els dels seus grafs associats. No obstant, en aquest treball estem interessats en les resolucions lliures dels edge ideals, passem a veure les eines algebraiques necessàries per poder enunciar el Teorema de Fröberg.

2 Mòduls

Aquesta secció està dedicada a construir i recopilar les propietats dels mòduls que s'utilitzen durant tot el treball. Els anells que es consideren en aquest treball són principalment anells de polinomis sobre un cos K. Aquests, són anells commutatius i unitaris, per tant, d'ara endavant quan es parli d'anells, ens estarem referint sempre a anells commutatius i unitaris. La teoria per mòduls és més general que la que es descriu a continuació, els mòduls es defineixen sobre anells que no tenen perquè ser commutatius, ara donarem la definició general de mòdul tot i que després ja no distingirem entre mòduls per l'esquerra o per la dreta. Durant tota la secció s'utilitzen les fonts [2], [5], [14] i [16].

2.1 Definició i propietats

Definició 2.1. *Sigui R un anell definim un R-mòdul per l'esquerra com un conjunt M amb:*

1. *Una operació $+$ en M tal que $(M, +)$ és un grup abelià.*
2. *Una acció*

$$\begin{aligned} r\colon R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

que satisfà:
i) $(r + s)x = rm + sm$ per tot $r, s \in R, m \in M$
ii) $(rs)m = r(sm)$ per tot $r, s \in R, m \in M$
iii) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ per tot $r \in R, m_1, m_2 \in M$
Si $1 \in R$ aleshores: iv) $1m = m$ per tot $m \in M$

Un R-mòdul per la dreta es defineix de manera analoga prenent l'aplicació $r : M \times R \longrightarrow M$, en el cas que l'anell R sigui commutatiu, aleshores, si M és un R-mòdul per l'esquerra, per la commutativitat del producte en R també serà un R-mòdul per la dreta. Els mòduls que compleixen el quart axioma es diuen *unitals*. Com que durant el treball utilitzarem sempre anells commutatius i unitaris, no serà necessari diferenciar entre mòduls per l'esquerra i per la dreta i sempre inclourem el quart axioma de la definició.

Una observació important és que donat un anell R, aleshores, aquest sempre és un $R-$mòdul sobre si mateix, més endavant veurem que, en general, donat el producte R^n també és un R-mòdul. Aquesta observació es important, ja que, durant el treball, en moltes ocasions farem ús de mòduls que són anells considerats com a mòduls sobre si mateixos.

Observació 2.2. Si R és un cos K, aleshores, els axiomes per un mòdul coincideixen amb els d'un espai vectorial.

Passem a definir els submòduls d'un R-mòdul.

Definició 2.3. *Sigui R un anell i M un R-mòdul, definim un R-submòdul de M com un subgrup N de M que és tancat respecte a l'acció de r, és a dir $rn \in N$ per tot $r \in R$ i $n \in N$*

Veiem doncs que els submòduls són els subconjunts de M que són mòduls respecte a les operacions restringides, observem que si estem treballant amb mòduls sobre un cos la definició de submòdul coincideix amb la de subespai vectorial.

Un exemple important de mòdul és el que definirem a continuació

Definició 2.4. *Sigui R un anell i $n \in \mathbb{N}$. Aleshores sigui*

$$R^n = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in R, \forall i\}$$

el conjunt de n-tuples d'elements de R. Tenim que R^n és un R-mòdul amb les operacions

$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

$$r(a_1, ..., a_n) = (ra_1, ..., ra_n)$$

per tot $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in R^n$ i $r \in R$. Aquestes operacions estan ben definides, doncs, component a component són operacions sobre l'anell base. A aquest mòdul l'anomenarem el R-mòdul lliure de rang n sobre R.

Passem a continuació a definir els morfismes entre R-mòduls

Definició 2.5. *Sigui R un anell i M i N dos R-mòduls.*

1. *Un morfisme $\phi : M \to N$ és un homomorfisme de R-mòduls si*
   i) $\phi(m_1 + m_2) = \phi(m) + \phi(m_2)$ per tot $m_1, m_2 \in M$.
   ii) $\phi(rm) = r(\phi(m))$ per tot $r \in R, m \in M$.
2. *Donats M i N dos $R-$mòduls podem definir*

$$Hom_R(M, N) = \{\phi : M \to N \mid \phi \text{ morfisme de } R\text{-mòduls}\}$$

De la definició de submòdul i homomorfisme de mòduls s'obté que donat $\phi : M \to N$ un homomorfisme de R-mòduls, aleshores, $Im(\phi)$ i $ker(\phi)$ són submòduls de N i M respectivament. A continuació, veiem una proposició que ens permet donar estructura de mòdul a $Hom_R(M, N)$.

Proposició 2.6. *Siguin M, N i L R-mòduls amb R no necessàriament commutatiu. Siguin $\phi, \psi \in Hom_R(M, N)$, podem definir $\phi + \psi$ com $(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m)$ per tot $m \in M$. Aleshores tenim que $\phi + \psi \in Hom_R(M, N)$ i amb aquesta operació $Hom_R(M, N)$ és un grup abelià.*

Si a més R és commutatiu per tot r podem definir $r\phi$ com $(r\phi)(m) = r(\phi(m))$ per tot $m \in M$. Aleshores $r\phi \in Hom_R(M, N)$ i amb aquesta acció el el grup abelià $Hom_R(M, N)$ és un R-mòdul.

La següent pregunta que ens podem fer és la següent: Quan podem fer un quocient entre un R-mòdul M i un R-submòdul N de M? S'ha de tenir en compte que un R-mòdul és en primer lloc un grup abelià, per tant, per la definició de submòdul s'extreu que tot submòdul és automàticament un subgrup abelià. Amb la següent proposició, podem veure que per tot R-submòdul N de M podem fer el quocient M/N i la seva projecció natural $\pi : M \to M/N$ és un homomorfisme de R-mòduls amb $ker(\pi) = N$.

Proposició 2.7. *Sigui R un anell, sigui M un R-mòdul i N un submòdul de M. El grup quocient abelià M/N, es pot estendre a R-mòdul amb la següent acció.*
Donat $x = m + N \in M/N$

$$r(x) = r(m + N) = (rm) + N, \forall r \in R$$

2.2 Producte directe i suma de mòduls

Definició 2.8. *Sigui* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una família de grups abelians, definim la seva suma directa* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ *com el subconjunt del producte directe* $\prod_{i\in I} A_i$*, que consisteix en totes les famílies* $\{x_i\}_{i\in I}$ *amb* $x_i \in A_i$*, tal que* $x_i = 0$ *per tots menys un nombre finit d'índexs* i*.*

Sigui $\{M_i\}_{i\in I}$ una família de R-mòduls i considerem $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ la suma directa com a grups abelians. És fàcil comprovar que podem definir una estructura de R-mòdul sobre M de la següent manera. Sigui $x \in M$ amb $x = \sum_{i\in I} x_i$ tal que $x_i = 0$ menys per un nombre finit d'índexs, amb $x_i \in M_i$. Podem definir l'acció de R sobre M com $rx = \sum_{i\in I} rx_i$.

En el cas en que $\{N_i\}_{i\in I}$ sigui una família de R-submòduls de M un R-mòdul, si considerem $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ la suma directa com a grups abelians, tenim que aquesta suma queda caracteritzada per la següent proposició.

Proposició 2.9. *Siguin* $N_1, N_2, ..., N_k$ *submòduls d'un* R*-mòdul* M*. Aleshores són equivalents*

1. *El morfisme* $\pi : N_1 \times \cdots \times N_k \to N_1 + \cdots + N_k$ *definit per*

$$\pi(a_1, ..., a_k) = a_1 + \cdots + a_k$$

   és un isomorfisme de R*-mòduls, i.e* $N_1 \times \cdots \times N_k \cong N_1 + \cdots + N_k$*.*

2. $N_j \cap (N_1 + \cdots + \widehat{N_j} + \cdots + N_k) = 0$ *per tot* $j = 1, ..., k$

3. *Cada* $x \in N_1 + \cdots + N_k$ *pot ser escrit de forma única com* $x = a_1 + \cdots + a_k$ *amb* $a_i \in N_i$

Aleshores, si un R-mòdul és la suma de submòduls $M = N_1 + \cdots + N_k$ amb les propietats que acabem de descriure diem que M és la *suma directa interna* de $N_1, ..., N_k$ i els seus elements estan en suma directa respecte els elements de $N_1, ..., N_k$.

Aquesta proposició serà important més endavant en el treball. Quan parlem d'anells i mòduls graduats estarem considerant la suma directa, serà important saber quan els elements d'un anell graduat es poden descomposar de forma única en la suma de les seves components.

2.3 Mòduls lliures

Les resolucions de mòduls es fonamenten en el càlcul de relacions entre els generadors d'un mòdul, per tant, és important considerar bases de mòduls. Tot i que no tots els mòduls tenen perquè tenir una base en aquest treball estem interessats en els que sí la tenen. Veiem quins són.

Definició 2.10. *Sigui* M *un* R*-mòdul i* $\{x_i\}_{i\in I}$ *amb* $x_i \in M$ $\forall i \in I$*, direm que* $\{x_i\}_{i\in I}$ *és una base de* M *si és un conjunt no buit que genera* M *i és linealment independent. És a dir que per tot* $x \in M$ *existeixen* $\{r_i\}_{i\in I}$ *amb* $r_i \in R$ $\forall i \in I$ *tals que* $x = \sum_{i\in I} r_i x_i$ *i* $0 = \sum_{i\in I} r_i x_i$ *si i només si* $r_i = 0$ $\forall i \in I$*.*

Definició 2.11. *Sigui* M *un* R*-mòdul direm que és lliure si admet una base* $\{x_i\}_{i\in I}$*.*

Un exemple de la definició previa és el R-mòdul lliure de rang n sobre R que hem definit anteriorment.

Proposició 2.12. *Sigui M un R-mòdul aleshores M és lliure si i només si $M \cong R^{(I)}$ per algun I.*

Demostració. $\Leftarrow$) Si tenim $R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R_i$ on $R_i = R$, aleshores, $R^{(I)}$ és un R-mòdul lliure amb base la canònica, és a dir $e_i = (0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$. Suposem que M és lliure amb base $\{x_i\}_{i \in I}$, aleshores, tenim els següents isomorfismes $f_i' : R \longrightarrow Rx_i$ tal que $f_(' r) = r \cdot x_i$ per tant, al considerar l'aplicació $f_i' : R \longrightarrow M$ tal que $f(r) = r \cdot x_i$, per la propietat universal de la suma directa, existeix una única aplicació $f : \bigoplus_{i \in I} R_i \longrightarrow M$ on $R_i = R$ per tota i, de forma que $f \circ \delta_i = f_i$, és a dir, que $f(e_i) = (f \circ \delta_i)(1) = f_i(1) = x_i$. Com que aquest morfisme envia la base de $R^{(I)}$ a la base de M, és un isomorfisme. $\square$

Aquesta proposició ens diu que quan considerem mòduls lliures sobre un anell, essencialment estem considerant una suma directa de l'anell amb l'estructura de R-mòdul.

Teorema 2.13. *Sigui M un R-mòdul amb base $\{x_i\}_{i \in I}$ on I és un conjunt diferent del buit, sigui N un R-mòdul i $\{y_i\}_{i \in I}$ una família d'elements de N. Aleshores, existeix un únic homomorfisme $f : M \to N$ tal que $f(x_i) = y_i\ \forall i$. En el cas que $\{y_i\}_{i \in I}$ sigui una base de N, aleshores f és un isomorfisme*

Corołari 2.14. *Donats dos R-mòduls M i N amb bases $\{x_i\}_{i \in I}$ i $\{y_i\}_{i \in I}$ amb la mateixa cardinalitat. Aleshores, $M \cong N$.*

Aquest corol·lari surt directament del teorema anterior, al tenir un morfisme entre bases, aquest només podrà ser un isomorfisme si la cardinalitat de les bases és la mateixa. Sabem doncs que donats dos mòduls lliures amb bases de la mateixa cardinalitat, aleshores, els mòduls són isomorfs. A continuació ens podem preguntar: És cert el recíproc? La resposta és que no, només és cert si l'anell base és commutatiu. En el nostre cas:

Proposició 2.15. *Sigui M un R-mòdul lliure. Aleshores, totes les bases tenen el mateix cardinal, més concretament*

$$R^{(I)} \cong R^{(J)} \Leftrightarrow |I| = |J|$$

En conseqüència, al considerar mòduls lliures sobre un mateix anell, aquests queden únicament determinats tret d'isomorfisme per l'única cardinalitat de la seva base.

Donat un mòdul M i un submòdul N finitament generat existeixen molts conjunts de generadors diferents, per exemple N és generador de si mateix. Existeix un enter positiu d tal que és el mínim nombre de generadors necessaris per generar N, a aquest conjunt de generadors l'anomenarem el *conjunt de generadors minimal.*

2.4 Producte tensorial

El producte tensorial és una estructura de vital importancia en la teoria de mòduls. És una eina necessària en aquest treball ja que serà una eina essencial per, més endavant, poder donar una demostració del Teorema de les sizígies de Hilbert.

Suposem que tenim un anell commutatiu R i $S \subseteq R$ un subanell de R. Si M és un R-mòdul, aleshores també podem pensar M com un S-mòdul, ja que si M és un R-mòdul, restringint les propietats del mòdul a M a S tindrem que és un S-mòdul.

Més en general, si tenim un morfisme d'anells $f : S \to R$ tal que $f(1_S) = f(1_R)$. Observem que aquest morfisme pot ser, per exemple, la inclusió de S en R. Per tant, veiem que podem considerar M un S-mòdul amb $sm = f(s)m$ per tot $s \in S$ i $m \in M$. En aquesta situació, podem considerar R com una extensió de l'anell S i el S-mòdul resultant diem que és obtingut per M fent *restricció d'escalars.*

A continuació, ens podem plantejar si podem fer l'operació contrària, és a dir, suposem que tenim un anell commutatiu R i $S \subseteq R$ un subanell de R. Si M és un S-mòdul, aleshores volem saber si podem definir un $R-$mòdul que estengui l'acció de S en M a R. Per tant, el que estem intentant fer és una "extensió"dels escalars de S a R. En general aquesta construcció no es pot fer.

Observem que per exemple, si volem estendre els escalars de $\mathbb{Z}$ com a $\mathbb{Z}$-mòdul a un anell més gran, per exemple $\mathbb{Q}$, no podem, doncs sinó tindríem que $\frac{1}{3} \cdot 2 = z$ i clarament $z = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$. Tot i que mai podem fer aquesta extensió de $\mathbb{Z}$ com a $\mathbb{Z}$-mòdul a $\mathbb{Q}$, en canvi, tenim que $\mathbb{Z}$ està contingut en un $\mathbb{Q}$-mòdul, en concret a $\mathbb{Q}$. En general, tindrem que l'anell S sempre es pot incloure com a $S-$mòdul dins de R com a R-mòdul, això ho anomenarem un *embedding*.

Per tant, la pregunta que ens suggereix aquesta situació és la següent: Quan, donat M un S-mòdul qualsevol, podem fer un *embedding* com a S-submòdul d'un R-mòdul, equivalentment, quins morfismes de mòduls existeixen de M a R-mòduls?

Ara donat un S-mòdul M passarem a construir el R-mòdul més òptim a l'hora de fer un *embedding* de M.

Recordem que els axiomes per tenir un R-mòdul. Necessitem un grup abelià M i l'acció de $R \times M :\longrightarrow M$ que envia una parella (r, m) al que denotarem per rm. Per tant, té sentit que considerem el $\mathbb{Z}$-mòdul lliure sobre el conjunt $R \times M$, és a dir, la col·lecció de sumes de totes les parelles (r_i, n_i). Aquest conjunt és un grup abelià on no hi ha relacions entre parelles de la forma (r, n) i (r', n').

Per a que aquest mòdul que hem definit satisfaci els axiomes de R-mòdul, hem de prendre el quocient d'aquest grup abelià amb el subgrup H generat per tots els elements de la forma

$$(r_1 + r_2, m) - (r_1, m) - (r_2, m),$$
$$(r, m_1 + m_2) - (r, m_1) - (r_2, m_2),$$
$$(rs, m) - (r, sm)$$

per tot $r, r_1, r_2 \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$ i $s \in S$ on en sm ens referim a l'acció ja definida sobre M com a R-mòdul. El grup quocient resultant es denota per $R \underset{S}{\otimes} M$ i s'anomena el *producte tensorial* de R i M sobre S. Si $r \otimes m$ denota el subconjunt que conté (r, m) en $R \underset{S}{\otimes} M$, per la definició del quocient que hem definit, tenim les següents relacions

$$(r_1 + r_2) \otimes m = r_1 \otimes m + r_2 \otimes m$$
$$r \otimes (m_1 + m_2) = r \otimes m_1 + r \otimes m_2$$
$$rs \otimes m = r \otimes sm$$

Als elements de $R \underset{S}{\otimes} M$ els anomenem *tensors* i poden ser escrits de forma generalment no única com a suma finita de *tensors simples*, aquests tensors són els de la forma $r \otimes m$ amb $r \in R$ i $m \in M$.

L'avantatge d'aquesta construcció és que $R \underset{S}{\otimes} M$ és un R-mòdul amb l'acció definida per

$$r(\sum_{i\in I} r_i \otimes m_i) = \sum_{i\in I}(rr_i) \otimes m_i$$

on I és conjunt d'índexs finit.

El mòdul $R \underset{S}{\otimes} M$ l'anomenarem el R-mòdul obtingut per *extensió d'escalars* del S-mòdul M.

L'extensió d'escalars ens porta a definir el producte tensorial entre mòduls.

Suposem que M i N són R-mòduls. Aleshores, el quocient del $\mathbb{Z}$-mòdul lliure sobre el conjunt $M \times N$ respecte del subgrup generat pels elements de la forma

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n),$$
$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2),$$
$$(mr, n) - (m, rn)$$

per tot $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ i $r \in R$ és un grup abelià que denotarem per $M \underset{R}{\otimes} N$ i anomenarem el producte tensorial de M i N. Als elements de $M \underset{R}{\otimes} N$ els anomenem tensors i poden ser escrits de forma generalment no única com a suma finita de tensors simples. Igual que abans tenim les relacions

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$$
$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$
$$mr \otimes n = m \otimes rn$$

Es important recordar que els elements $m \otimes n$ són un subconjunt del grup quocient. Podem tenir que $m \otimes n = m' \otimes n'$ on $m \neq m'$ o $n \neq n'$, per tant, en general, $m \otimes n$ no queda únicament determinat per m i n. Això té una conseqüència important, a l'hora de definir morfismes entre el productes tensorial i un altre grup o mòdul, aquests no els podem definir en funció dels elements m i n a no ser que l'aplicació sigui independent de l'elecció del representant. A continuació definim els morfismes R-bilineals de mòduls.

Definició 2.16. *Siguin M,N i L tres R-mòduls, una aplicació* $\tau : M \times N \longrightarrow L$ *és R-bilineal si compleix*

1. *Per tot* $m \in M$ *aleshores* $\tau_m : N \longrightarrow L$ *tal que* $\tau_m(n) = \tau(m, n)$ *és R-lineal.*
2. *Per tot* $n \in N$ *aleshores* $\tau_n : M \longrightarrow L$ *tal que* $\tau_m(n) = \tau(m, n)$ *és R-lineal.*

Això equival a que per tot $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \times N$ i $r_1, s_1, r_2, s_2 \in R$ aleshores $\tau(r_1m_1+r_2m_2, s_1n_1+s_2n_2) = r_1s_1\tau(m_1, n_1)+r_2s_1\tau(m_2, n_1)+r_1s_2\tau(m_1, n_2)+r_2s_2\tau(m_2, n_2)$

A continuació veurem que les aplicacions R-bilineals caracterizen completament els morfismes de R-mòduls entre el producte tensorial i un mòdul qualsevol.

Teorema 2.17. *Siguin M i N dos R-mòduls i $M \underset{R}{\otimes} N$ el seu producte tensorial sobre R. Aleshores $M \underset{R}{\otimes} N$ és un R-mòdul amb*

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes = m \otimes rn$$

i l'aplicació $\tau : M \times N \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N$ amb $\tau(m,n) = m \otimes n$ és una aplicació R-bilineal.

Si L és un R-mòdul, aleshores, hi ha una bijecció entre el conjunt d'aplicacions $\phi : M \times N \longrightarrow$ R-bilineals i els R-mòdul morfismes $\psi : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow L$. Per tant, tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\phi"] & M \underset{R}{\otimes} N \arrow[d, "\psi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Aquesta construcció es pot estendre al producte tensorial de n mòduls.

Definició 2.18. *Siguin $M_1, M_2, ..., M_n$ i L R-mòduls, una aplicació $\tau : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow L$ és n-multilineal sobre R si compleix que és un morfisme de R-mòduls en cada component de $M_1 \times \cdots \times M_n$ al deixar les altres components constants, és a dir*

$$\tau(m_1, ..., m_{i-1}, r_1 m_{i,1} + r_2 m_{i,2}, m_{i+1}, ..., m_n) = r_1 \tau(m_1, ..., m_{i,1}, ..., m_n) + r_2 \tau(m_1, ..., m_{i,2}, ..., m_n)$$

Observem que aquesta definició és una generalització de la definició d'aplicació R-bilineal que hem fet prèviament.

Teorema 2.19. *Siguin $M_1, ..., M_n$ i L R-mòduls. Sigui i $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ el seu producte tensorial sobre R. Sigui l'aplicació $\tau : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ amb $\tau(m_1, ..., m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$. Aleshores*

1. *Per cada R-mòdul morfisme $\psi : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \longrightarrow L$ el morfisme $\phi = \psi \circ \tau$ és n-multilineal de $M_1 \times \cdots \times M_n$ a L.*
2. *Si $\phi : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow L$ és una aplicació n-multilineal aleshores existeix un únic morfisme de R-mòduls $\psi : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \longrightarrow L$ tal que $\psi = \phi \circ \tau$*

Per tant hi ha una bijecció entre el conjunt de morfismes n-multilineals sobre R, $\phi : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow L$ i el conjunt de morfismes de R-mòduls $\psi : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \longrightarrow L$

Per tant tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\phi"] & M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \arrow[d, "\psi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Proposició 2.20. *Siguin M,N i L R-mòduls, tenim les propietats següents*

1. $M \underset{R}{\otimes} N \cong N \underset{R}{\otimes} M$
2. $(M \underset{R}{\otimes} N) \underset{R}{\otimes} L \cong M \underset{R}{\otimes} (N \underset{R}{\otimes} L)$
3. $(M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L \cong (M \underset{R}{\otimes} L) \oplus (N \underset{R}{\otimes} L)$
4. $R \underset{R}{\otimes} M \cong M$

Una conseqüència de la proposició anterior és la següent.

Corołari 2.21. *Sigui R un anell i $S \subseteq R$ un subanell i S^n el mòdul lliure de rang n sobre S. Aleshores el mòdul obtingut per extensió d'escalars de S a R sobre S^n és R^n, és a dir*

$$R \underset{S}{\otimes} S^n \cong R^n$$

En aquesta secció s'han recollit les definicions i propietats més bàsiques que es necessitaran més endavant en el treball.

3 Anells i mòduls Noetherians

Les referències per aquesta secció son [4], [5] i [14]. Aquesta secció recull resultats tant importants com el Teorema de la base de Hilbert, tot i que aquests resultats són imprescindibles per seguir amb la construcció de les resolucions, algunes de les demostracions no estan incloses ja que s'allunyen de l'objectiu central del treball.

En un espai vectorial de dimensió finita, tot subespai vectorial té com a molt la dimensió de l'espai vectorial original. En canvi, quan treballem amb mòduls, aquesta pregunta no té sempre una resposta tan senzilla.

Per exemple, donat un anell R si el considerem com $R-$mòdul sobre si mateix, aleshores, clarament aquest mòdul està generat per 1_R i els seus submòduls coincideixen amb els ideals de R. Si tenim $I \subseteq R$ un ideal no finitament generat, el seu submòdul associat tampoc ho serà. Aquest és un exemple d'un mòdul finitament generat amb submòduls no finitament generats. Veurem que en l'anell de polinomis, tots els ideals són finitament generats.

Quan més endavant es defineixen les resolucions lliures, graduades, de mòduls, una de les preguntes naturals és la següent: Podem assegurar que les sizígies son finitament generades? Aquesta secció ens permetrà assegurar que sí.

Definició 3.1. *Sigui M un R-mòdul, diem que M es Noteherià si satisfà la condició de la cadena ascendent, és a dir que per tota cadena ascendent de submòduls de M*

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$$

existeix un nombre natural n tal que per tot $k \geq n$ es compleix $N_k = N_n$.

Un exemple on no es satisfan aquestes condicions és el següent. Sigui $K[x_n]_{n\geq 1}$ l'anell de polinomis en infinites variables. Al considerar els ideals $I_k = \langle x_1, ..., x_k \rangle$, aleshores es pot construir la següent cadena d'incusions estrictes

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \quad ... \quad \subsetneq I_k \subsetneq I_{k+1} \subsetneq ...$$

Fixem-nos que, ja que l'anell de polinomis és el d'infinites variables, aquesta cadena no té un element maximal, donat I_j sempre existeix I_{j+1} amb $I_j \subsetneq I_{j+1}$. Per tant, l'anell $K[x_n]_{n\geq 1}$ no és un mòdul Noetherià.

Teorema 3.2. *Sigui un R-mòdul M, aleshores són equivalents*

1. *M és Noetherià.*
2. *Tota col·lecció de submòduls de M conté un submòdul maximal respecte la inclusió.*
3. *Tot submòdul de M és finitament generat*

Definició 3.3. *Un complex de $R-$mòduls és un conjunt de $R-$mòduls amb aplicacions $f_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ tals que $im(f_{i+1}) \subseteq ker(f_i)$, per tant $f_i \circ f_{i+1} = 0$. Si a més es compleix que $im(f_{i+1}) = ker(f_i)$ per tot i, aleshores, direm que és una successió exacta.*
En el cas particular que el complex sigui de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

direm que és una successió curta.

Les succecions exactes seran un objecte molt important d'ara en endavant en el treball, de fet, les resolucions, un dels objectes centrals d'aquest treball, son un cas particular de succecions exactes.

Proposició 3.4. *Siguin M_1, M_2 i M_3 R-mòduls tals que la següent successió curta és exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

aleshores M_2 és Noetherià si, i només si M_1 i M_3 són Noetherians.

Corołari 3.5. *Siguin $M_1, ..., M_n$ R-mòduls, aleshores $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ és Noetherià si, i només si M_i es Noetherià per tot i.*

Demostració. Fent inducció sobre n. Si $n = 2$ tenim la següent successió exacta.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

aleshores si M_1 i M_2 Noetherians també ho és $M_1 \oplus M_2$. Suposem cert per n-1 i veiem que és cert per n. Tenim la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

Per tant $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ és Noetherià si i només si ho són M_n i $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ que ho són per hipòtesi i hipòtesi d'inducció respectivament. $\square$

Definició 3.6. *Sigui R un anell, direm que R és Noetherià si ho és com R-mòdul, és a dir si verifica les següents tres condicions equivalents*

1. *Compleix la condició de cadena ascendent per ideals.*
2. *Tota col·lecció S d'ideals de R conté un ideal maximal respecte la inclusió.*
3. *Tot ideal de R és finitament generat.*

Proposició 3.7. *Sigui R un anell Noetherià i M un R-mòdul finitament generat, aleshores M és un $R-$mòdul Noetherià.*

Demostració. Si M és un $R-$mòdul finitament generat, pel que hem vist a la Proposició 2.11 sabem que existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que la inclusió $i : R^n \longrightarrow M$ és exhaustiva. Tenim doncs la següent successió

$$0 \longrightarrow ker(i) \longrightarrow R^n \xrightarrow{i} M \longrightarrow 0$$

per construcció la successió és exacta i tenim doncs que com R^n és Notherià pel Corol·lari 3.5, aleshores, la proposició 3.4 implica que M és Noetherià. $\square$

Proposició 3.8. *Sigui R un anell Noetherià i $I \subseteq R$ un ideal. Aleshores R/I és un anell Noetherià.*

Demostració. La següent successió és exacta per construcció

$$0 \longrightarrow I = ker(\pi) \xrightarrow{\ i\ } R \xrightarrow{\ \pi\ } R/I \longrightarrow 0$$

Com que R com a R-mòdul és Noetherià aleshores la proposició 4.3 implica que R/I és Noetherià com a R-mòdul i per tant en concret com a R/I-mòdul. □

Passem a enunciar un teorema amb implicacions molt fortes.

Teorema 3.9. *(de la base de Hilbert)*
Sigui un R un anell Noetherià. Aleshores, $R[x]$ és un anell Noetherià.

Aquest resultat ha tingut una gran importancia en l'àlgebra, de fet, té una conseqüencia important en geometria algebraica. Les varietats afins sobre un cos es poden descriure com la intersecció d'arrels comunes d'un conjunt finit d'eqüacions polinomials. Es poden veure demostracions d'aquest teorema a [5] i [14], la demostració de [4] és en termes de Bases de Gröbner però es redueix al cas on R és un cos. Les Bases de Gröbner són les que després permeten calcular les bases dels ideals finitament generats de l'anell de polinomis.

El Teorema de la base de Hilbert es pot estendre a l'anell de polinomis en finites variables $R[x_1, ..., x_n]$ fent inducció sobre n

Corołari 3.10. *Sigui un R un anell Noetherià, aleshores $R[x_1, ..., x_n]$ és un anell Noetherià.*

4 Mòduls graduats i resolucions lliures graduades

Per dur a terme aquesta secció he consultat les referències [14] i [16]. També he consultat uns apunts de l'assignatura d'Àlgebra local del màster en Matemàtica Avançada de la Universitat de Barcelona que el Dr. Santiago Zarzuela va tenir l'amabilitat de deixar-me

Definició 4.1. *Sigui $f \in R[x_1, ..., x_n]$ un polinomi. Direm que f és homogeni de grau n si f és una suma de monomis de grau n, és a dir, monomis on la suma dels exponents en cada variable és igual a n.*

Per exemple, en $R[x, y, z]$ els polinomis $f = x^2 + xz + xy$ i $g = x^3 + xyz$ son polinomis homogènis de grau 2 i 3 respectivament, en canvi, $h = xy - x$ no és un polinomi homogeni.

4.1 Anells graduats

Definició 4.2. *Sigui R un anell. Diem que R és graduat, si existeix una descomposició de R, com a suma directa de grups abelians, de la forma*

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$$

compatible amb el producte en R, de manera que $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$ per tot n,m enters.

A cada component R_i de la suma directa l'anomenem la component homogènia de grau i de R i als seus elements els anomenem elements homogenis.

Sigui R un anell i $R[x_1, ..., x_n]$ l'anell de polinomis de n variables sobre R. Aleshores, $R[x_1, ..., x_n]$ és un anell graduat, on la graduació ve induïda per la dels monomis. Cada component homogènia R_i està generada com a subgrup de $R[x_1, ..., x_n]$ pels monomis de grau i, els elements homogenis de grau i són els polinomis homogenis de grau i.

Exemple 4.3. Si tenim R un anell i considerem $R[x, y]$ aleshores

$$R[x, y] = R \oplus (x, y) \oplus (x^2, y^2, xy) \oplus (x^3, y^3, x^2y, xy^2) \oplus \cdots$$

Observació 4.4. Per ser suma directa de grups abelians disjunts i per la propietat universal de la suma directa, la descomposició de qualsevol element de R en suma d'elements de R_n existeix i és única.

Definició 4.5. *Sigui $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ un anell graduat i $I \subseteq R$ un ideal de R. Diem que I es homogeni si:*

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I \cap R_n$$

Proposició 4.6. *Els següents són equivalents:*

i) I és homogeni

ii) Sigui $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \in R$. Aleshores $x \in I$ si i només si $x_n \in I$ per tot n.

Demostració. $i) \Rightarrow ii)$ Sigui $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \in R$ tenim que, com la descomposició d'un element de I en elements homogenis és única, $x_n \in R_n \Rightarrow x_n \in I_n \subseteq I$ per tot n, si suposem $x_n \in I_n$ com que I és un ideal, la suma d'elements també és de l'ideal i per tant $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \in I$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Si $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \in I$ on tenim que $x_n \in I_n$ per tot n per hipòtesi, per tant $x \in \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n \Rightarrow I \subseteq \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, com que l'altra inclusió sempre es compleix obtenim que, $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I \cap R_n \Rightarrow I$ és homogeni. $\square$

Aquesta proposició ens diu que els ideals homogenis són aquells que estan generats per elements homogenis.

Proposició 4.7. *La suma arbitraria d'una família d'ideals homogenis $\{I_j\}_{j\in J}$ és homogènia.*

Demostració.

$$I = \sum_{j\in J} I_j = \sum_{j\in J}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_j \cap R_n) = \sum_{j\in J}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(I_j \cap R_n) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in J}(I_j \cap R_n) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{j\in J} I_j \cap R_n) =$$

$$= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I \cap R_n.$$

Corołari 4.8. *Sigui $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ un anell graduat i sigui $\{f_i\}_{i\in I}$ una família arbitraria d'elements homogenis de R. Aleshores, l'ideal $(f_i)_{i\in I}$ és homogeni.*

Demostració. L'ideal $(f_i)_{i\in I}$ és la suma d'ideals $\{(f_i)\}_{i\in I}$ per tant el resultat s'extreu directament de la proposició anterior. $\square$

Proposició 4.9. *Sigui $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ un anell graduat i $I \subseteq R$ un ideal. Són equivalents:*

i) I és homogeni

ii) I pot ser generat per una família d'elements homogenis

Demostració. Ja hem vist que ii) $\Rightarrow$ i). Aleshores tenim:

$$I = (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{f_\alpha\}_{f_\alpha \in I_n})$$

Per tant veiem que I pot ser generat per una família d'elements homogenis. $\square$

Proposició 4.10. *Sigui $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ un anell graduat i $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n \subseteq R$ un ideal homogeni aleshores $R/I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n/I_n$ és un anell graduat amb components homogènies R_n/I_n.*

Sabem que com a grups abelians

$$R/I \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n/I_n$$

donat per l'isomorfisme següent

$$\overline{x} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x_n}$$

on $\overline{x_n} \in R_n/I_n$. A $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n/I_n$ li podem donar una estructura d'anell definint el producte de la següent manera, donat $\overline{x_n} \in R_n/I_n$ i $\overline{x_m} \in R_m/I_m$ aleshores $\overline{x_n} \cdot \overline{x_m} = \overline{x_n x_m} \in R_{n+m}$. Per tant, tenim que l'isomorfisme previ es pot estendre a un isomorfisme d'anells, en conseqüencia, R/I és un anell graduat amb components homogènies R_n/I_n.

Exemple 4.11. Sigui $K[x, y]$ l'anell de polinomis en dos variables i K un cos qualsevol i considerem l'anell homogeni $I = \langle y^2 \rangle$, aleshores tenim que $K[x, y]/\langle y^2 \rangle$ té les següents components homogènies com a espais vectorials sobre K.

1. $[K[x, y]/\langle y^2 \rangle]_0 = K$
2. $[K[x, y]/\langle y^2 \rangle]_1 = Kx + Ky$
3. $[K[x, y]/\langle y^2 \rangle]_2 = Kx^2 + Kxy$
4. $[K[x, y]/\langle y^2 \rangle]_3 = Kx^3 + Kx^2y$
5. Més en general, si $n \geq 2$ aleshores $[K[x, y]/\langle y^2 \rangle]_n = Kx^n + Kx^{n-1}y$

Passem a definir els morfismes entre anells graduats

Definició 4.12. *Siguin $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ i $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ dos anells graduats i $f : R \to S$ un morfisme d'anells. Diem que f és un morfisme graduat si $f(R_n) \subseteq S_n$ per tot $n \in \mathbb{Z}$.*

Per tant, per tenir un morfisme graduat necessitem un morfisme que preservi les components homogènies entre els dos anells graduats. Aquesta definició ens permet definir un subanell graduat.

Definició 4.13. *Siguin R i S anells graduat amb $R \subseteq S$. Diem que R és un subanell graduat de S si la inclusió $i : S \to R$ és un morfisme d'anells graduat.*

Proposició 4.14. *Sigui $f : R \to S$ un morfisme d'anells graduat. Aleshores, $ker(f)$ és un ideal homogeni de R.*

Demostració. Sabem que el ker de tot morfisme d'anells és un ideal, hem de veure que és graduat. Sigui $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \in ker(f)$, tenim que $f(x) = f(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) = 0$, aleshores tenim que $f(x_n) = 0$ per tot n, doncs en cas contrari contradiria el fet que la descomposició en elements homogenis és única. Per tant, $x_n \in ker(f)$ per tot n. Ara utilitzant el Corol·lari 3.7 tenim que com $ker(f)$ està generat per aquests elements homogenis i és un ideal, és homogeni. □

Aquests resultats ens diuen que si tenim un morfisme d'anells graduats $f : R \to S$, aleshores $f(R)$ i $R/ker(f)$ són també anells graduats i el morfisme donat pel primer teorema d'isomorfia $\widehat{f} : R/ker(f) \to f(R)$ és un isomorfisme graduat. Per tant tenim una versió graduada del primer teorema d'isomorfia.

Amb aquests resultats ja podem definir els mòduls graduats.

4.2 Mòduls graduats

Definició 4.15. *Sigui M un R-mòdul, diem que M és graduat si admet com a grup abelià una descomposició de la forma*

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

compatible amb la graduació de R, és a dir, per tot $f_n \in R_n$ i $x_m \in M_m$ tenim que $f_n x_m \in M_{n+m}$.

La definició de mòdul graduat ens permet assegurar que M_n és un R_0-mòdul per qualsevol n, aquestes components s'anomenen les components homogènies de grau n de M. Els seus elements són els elements homogènis de grau n. Per tant, tot element de M admet una descomposició única com a suma finita d'elements homogènis de M.

Donat un $R-$mòdul M i un submòdul N de M, podem considerar $N_n = M_n \cap N$ per cada n i el mòdul R-graduat

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$$

que és un R-submòdul de M.

Definició 4.16. *Sigui N un submòdul de M, diem que N és un submòdul graduat de M si*

$$N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$$

Clarament, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ és un submòdul de M graduat i està contingut en N per definició. Per tant, N és un submòdul graduat si es compleix l'altra inclusió. Si estem fent referència a una component de grau n i no queda clara pel context utilitzarem la notació $[N]_n$.

Proposició 4.17. *Donat un $R-$mòdul M, els següents són equivalents:*

i) N és un submòdul graduat de M.

ii) Per tot $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \in M$, aleshores: $y \in N$ si i només si $y_n \in N_n$ per tot $n \in \mathbb{Z}$.

La demostració és analoga al cas d'ideals. Per tant, els ideals homogenis són submòduls graduats de R.

Analogament al cas d'ideals, la suma arbitraria de R-submòduls graduats de M també és un submòdul graduat. Aquest submòdul, té com a components homogènies de grau n, la suma de les components homogènies de grau n dels submòduls de la suma arbitraria.

Definició 4.18. *Siguin M, N dos R-mòduls i $f : M \to N$ un morfisme de $R-$mòduls. Diem que f és un morfisme de R-mòduls graduat si $f(M_n) \subseteq N_n$ per tot $n \in \mathbb{Z}$*

Proposició 4.19. *Sigui f un morfisme de R-mòduls graduat, compleix que*

i) $ker(f)$ és un $R-$submòdul graduat de M.

ii) $f(M)$ és un $R-$submòdul graduat de N.

iii) $\widehat{f} : M/ker(f) \to f(M)$ és un isomorfisme graduat.

Demostració. Sigui $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ aleshores $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)$ amb cada $f(x_n) \in N_n$ per definició de morfisme graduat, per tant $f(x)$ és suma de components homogènies $\Rightarrow$ per la Proposició 4.17 $f(M)$ és un $R-$sumbòdul graduat de N. Sigui $x \in ker(f)$, $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ $\Rightarrow f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) = 0 \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}N_i}$, com que la descomposició en N és única per ser un mòdul graduat $\Rightarrow f(x_n) = 0$ per tot $n \Rightarrow f(x_n) \in ker(f) \Rightarrow$ per la Proposició 4.17 $ker(f)$ és un $R-$sumbòdul graduat de M. Ja hem vist que $f(M)$ i $ker(f)$ són submòduls graduats i per tant el seu quocient també, ja sabem que $\widehat{f}$ és un isomorfisme de $R-$mòduls pel Primer Teorema d'Isomorfia i tenim doncs que $M/ker(f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n/ker(f_n)$ amb $\widehat{f}(M_n/ker(f_n)) \subseteq f(M_n)$, per tant graduat. $\square$

4.3 Resolucions graduades lliures

Els resultats que hem vist fins ara ens permeten pensar en construir una resolució d'un mòdul graduat. Hem vist que el nucli d'una aplicació entre mòduls graduats és un submòdul graduat, per tant, en preserva l'estructura. Si volem calcular una resolució d'un mòdul graduat en termes de relacions i presentacions, ens apareix una dificultat, els morfismes graduats requereixen que es preservi el grau entre les diferents components homogènies dels mòduls. Això no sempre és possible de forma directa. Aquesta situació ens porta a definir els shiftings com una eina per resoldre aquest problema.

Definició 4.20. *Siguin $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ un anell graduat i $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un R-mòdul graduat. Donat un $k \in \mathbb{Z}$ definim el $k-$éssim shift de M com el $R-$mòdul graduat*

$$M(k) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M(k)_n$$

on $M(k)_n = M_{n+k}$ per tot $n \in \mathbb{Z}$

Veiem doncs que els shiftings ens permeten manipular la graduació dels R-mòduls de forma que, al fer un morfisme de mòduls es preservi el grau, per tant, aquests morfismes siguin graduats. Observem que essencialment el R-mòdul graduat segueix sent el mateix mòdul, únicament canvia la seva graduació.

Observació 4.21. Sigui M un $R-$mòdul, si li apliquem un shift $M(k)$ diferent de la identitat ($k \neq 0$), aleshores, el morfisme de $R-$mòduls identitat $i : M \to M(k)$ deixa de ser graduat.

Definició 4.22. *Un R-mòdul graduat lliure és un mòdul graduat de la forma*

$$F = \bigoplus_{i\in I} R(k_i)$$

on I és un conjunt d'índexs i $k_i \in \mathbb{Z}$ per tot i.

Queda clar de la definició que el mòdul graduat original és en concret un mòdul graduat lliure on tots els shifts són la identitat. Observem que $F_n = \bigoplus_{i\in I} R(k_{i+n})$.

Sigui M un R-mòdul generat per una família d'elements homogènis $\{x_i\}_{i\in I_0}$ amb $deg(x_i) = k_{0,i}$ per tot i. Considerem

$$F_0 = \bigoplus_{i\in I_0} R(-k_{0,i})$$

si denotem per e_j a l'element $e_j = (f_i)_{i\in I_0}$ on $f_j = 0$ si $i \neq j$ i $f_j = 1_{-k_{0,j}}$ si $i = j$, és a dir $e_j{=}(0,\ldots,\overset{j}{1_{-k_{0,j}}},\ldots,0)$. En aquest cas tenim que $deg(e_j) = k_{0j}$.

Això ens permet considerar el següent epimorfisme

$$f_0 = \pi_0 : F_0 = \bigoplus_{i\in I_0} R(-k_{0,i}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on $\pi_0(e_i) = x_i$. Els shifts ens han permès que el morfisme preservi els graus dels generadors i per tant sigui un morfisme graduat.

A aquesta construcció l'anomenem una *presentació graduada de M*. Observem que la presentació graduada depèn de l'elecció de la base triada.

Definició 4.23. *Sigui una presentació graduada amb la notació anterior, anomenarem mòdul de les primeres sizígies a* $K_1 = ker(\pi_o)$.

Observació 4.24. Els resultats previs de la secció ens diuen que $K_1 = ker(\pi_o)$ és un submòdul graduat.

Com que $K_1 = ker(\pi_o)$ torna a ser un mòdul graduat podem tornar a construir una presentació graduada de K_1 repetint la construcció que havíem fet per M. Obtenim

$$f_1 = \pi_0 : F_1 = \bigoplus_{i \in I_1} R(-k_{1,i}) \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

Composant π_0 amb la inclusió de K_1 en F_0 obtenim la següent cadena de morfismes

$$F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

on $Im(f_1) = ker(f_0)$. Veiem que un altre cop que $ker(f_1)$ torna a ser un mòdul graduat i podem repetir la construcció, en aquest cas notarem $K_2 = ker(f_1)$ i l'anomenarem mòdul de les segones sizígies de M. Aquest procés el podem anar repetint indefinidament fins obtenir la següent cadena de morfismes

$$\cdots \longrightarrow F_{r+1} \xrightarrow{f_{r+1}} F_r \xrightarrow{f_r} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

on $K_{r+1} = Im(f_{r+1}) = ker(f_r)$ per tot $r \geq 0$ i cada F_r és un mòdul graduat de la forma

$$F_r = \bigoplus_{i \in I_r} R(-k_{r,i})$$

A aquesta construcció l'anomenarem la *resolució lliure graduada* del R-mòdul M. Si per algun n tenim que $F_{n+1} = 0$ i $F_i \neq 0$ per tot $i \leq n$, aleshores, direm que és una resolució finita de llargada n. Els resultats vistos a la Secció 3 ens permeten assegurar que, al calcular sizígies, aquestes seran finitament generades.

4.4 Resolucions minimals

Utilitzarem la següent notació, $\mathfrak{m} = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ per referir-nos a l'ideal maximal en $R[x_1, ..., x_n]$.

En general, les resolucions lliures no són úniques. Per exemple, sempre podriem considerar la suma directa d'un complex F amb el complex trivial shiftat

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{Id} R \longrightarrow 0$$

per obtenir una nova resolució. Però si R és un anell graduat, en el nostre cas, l'anell de polinomis, aleshores existeix una resolució amb llargada mínima. A aquesta resolució l'anomenarem la *resolució minimal*. Les resolucions minimals tenen la següent propietat. Siguin F i G dues resolucions minimals de M, aleshores, existeix un isomorfisme graduat de complexos tal que $F_i \cong G_i$ per tot i que indueix la identitat en M.

Els dos exemples d'aquesta secció es poden trobar a [15].

Exemple 4.25. Sigui $K[x, y]$ i considerem $M = R/\langle x, y\rangle = K$. Passem a calcular la seva resolució lliure, tenim que $F_0 = R$. Primer veiem que $K_0 = ker(f_0)$, on $f_0 : F_0 \longrightarrow M$ i per tant $K_0 = \langle x, y\rangle$, observem que F_1 és un mòdul lliure de rang 2. Sigui el morfisme $f_1 : R^2(-1) \longrightarrow R$ definit per $f_1(a, b) = ax + by$, fixem-nos que és un morfisme de grau 0. $K_1 = ker(f_1) = \langle\langle y, -x\rangle\rangle$ està generat per un sol element i per tant F_2 té rang 1. Perquè f_2 sigui un morfisme de grau 0, $F_2 = R(-2)$ i $f_2 : 1 \mapsto (y, -x)$, aleshores f_2 és un morfisme injectiu i per tant, $K_3 = 0$, en conseqüencia, $F_3 = 0$ i la resolució té llargada dos.

$$0 \longrightarrow R(-2) \xrightarrow{\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}} R(-1)^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}} R \longrightarrow 0$$

En el nostre cas, que la resolució tingui llargada mínima ve determinada per la següent definició.

Definició 4.26. *Sigui F una resolució lliure graduada d'un $R-$mòdul. Aleshores, F és minimal si la imatge de cada $f_n : F_n \longrightarrow F_{n-1}$ està continguda en $\mathfrak{m}F_{n-1}$. Dit d'una altra manera, és minimal si tots els morfismes del complex $K \underset{R}{\otimes} F$ són 0.*

Exemple 4.27. Sigui $R = K[x, y]$ i $\mathfrak{m} = \langle x, y\rangle$ l'ideal maximal en R. Una resolució de $\mathfrak{m}^2 = \langle x^2, xy, y^2\rangle$ és la següent

$$0 \longrightarrow R(-3)^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}} R(-2)^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}} R \longrightarrow 0$$

Totes les entrades de les matrius que defineixen els morfismes f_0 i f_1 estan en $\mathfrak{m}$, en conseqüència, la resolució donada és minimal.

4.5 Teorema de les sizígies de Hilbert

Ja hem vist que donat un mòdul en l'anell de polinomis, si considerem la seva resolució lliure graduada, aleshores, podem assegurar que les respectives sizígies seran finitament generades. També hem vist que les resolucions, en general, no són úniques i que podem considerar-ne una de minimal. La següent pregunta que ens podem fer és: Són finites les resolucions? La resposta a aquesta pregunta és que en l'anell de polinomis sí són finites, això ens diu el Teorema de les sizígies de Hilbert que veurem al final d'aquesta secció.

Per dur a terme aquesta secció s'han d'introduir eines d'àlgebra homològica. En concret, els funtors derivats del Tor. La definició general de funtor és la següent. Un funtor és una aplicació entre dos categories que preserva els morfismes identitat i la composició de morfismes. En aquesta secció, per falta d'espai, no s'aprofundirà en les eines d'àlgebra homològica que es presenten. Recordem que l'objectiu es poder donar una demostració Teorema de les sizígies de Hilbert per veure que les resolucions lliures són finites en l'anell de polinomis.

En el nostre cas únicament estem interessats en els funtors derivats del Tor, és a dir, els funtors derivats del producte tensorial. Si tenim M i N dos R-mòduls. Aleshores, l'aplicació $T_M : N \longrightarrow M \otimes N$ és un funtor. Justificar que l'acció del producte tensorial sobre un mòdul és un funtor requereix molts resultats que en aquesta secció no estan inclosos, el lector interessat pot veure la secció 10.5 de [5] per veure una justificació detallada.

Tant la majoria de definicions i resultats com la demostració del Teorema de les sízigies es poden veure a l'últim capítol de [14].

Definició 4.28. *Sigui A un anell commutatiu i M, N A-mòduls, aleshores podem construir una família de A-mòduls que anomenarem*

$$\{Tor_n^A(M,N)\}_{n\geq 0}$$

amb les propietats següents

1. $\{Tor_0^A(M,N)\}_{n\geq 0} \cong M \underset{A}{\otimes} N$.
2. $\{Tor_0^A(M,N)\}_{n\geq 0} = 0$ *per tot* $n \geq 1$ *si* N *és projectiu.*
3. *Per tota successió exacta de A-mòduls*

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$$

existeix una successió llarga exacta de la forma

$$\cdots \xrightarrow{g_{n+1}} Tor_{n+1}^A(M,N_3) \xrightarrow{\sigma} Tor_n^A(M,N_1) \xrightarrow{f_n} Tor_n^A(M,N_2) \xrightarrow{g_n} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{g_n} Tor_n^A(M,N_3) \xrightarrow{\sigma} Tor_{n-1}^A(M,N_1) \xrightarrow{f_{n-1}} Tor_{n-1}^A(M,N_3) \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{g_1} Tor_1^A(M,N_3) \xrightarrow{\sigma} M \underset{A}{\otimes} N_1 \xrightarrow{f_0} M \underset{A}{\otimes} N_2 \xrightarrow{g_0} M \underset{A}{\otimes} N_3 \longrightarrow 0$$

on $f_0 = Id_M \otimes f$, $g_0 = Id_M \otimes g$.
Sabem que f_n *i* g_n *són morfismes coneguts i* σ *és el morfisme de connexió.*

4. *Aquestes successions exactes són naturals en el sentit que si existeixen morfismes que verifiquen el següent diagrama commutatiu*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 & \xrightarrow{g} & N_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle S_1} & & \downarrow{\scriptstyle S_2} & & \downarrow{\scriptstyle S_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{h} & L_2 & \xrightarrow{l} & L_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aleshores per tot n hi ha un diagrama commutatiu de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} Tor_{n+1}^A(M,N_3) & \xrightarrow{\sigma} & Tor_n^A(M,N_1) & \xrightarrow{f_n} & Tor_n^A(M,N_2) & \xrightarrow{g_n} & Tor_n^A(M,N_3) \\ \downarrow{\scriptstyle S_3^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle S_1^n} & & \downarrow{\scriptstyle S_2^n} & & \downarrow{\scriptstyle S_3^n} \\ Tor_{n+1}^A(M,L_3) & \xrightarrow{\sigma} & Tor_{n+1}^A(M,L_1) & \xrightarrow{h_n} & Tor_{n+1}^A(M,L_2) & \xrightarrow{l_n} & Tor_{n+1}^A(M,L_3) \end{array}$$

De les propietats anteriors es pot deduir

5. $Tor_n^A(M,N) \cong Tor_n^A(N,M)$ *per tot* n.

6. N *és pla* $\Leftrightarrow Tor_n^A(M,N) = 0$ *per tot* M *A-mòdul*
M *és pla* $\Leftrightarrow Tor_n^A(M,N) = 0$ *per tot* N *A-mòdul*

En concret les resolucions lliures són resolucions projectives.

La pregunta natural que ens podem fer a continuació és com calcular aquests Tors.

Sigui $P \longrightarrow R \longrightarrow 0$ una resolució projectiva de N aleshores tenim que

$$Tor_n^A(M,N) = H_n(M \underset{A}{\otimes} P)$$

és a dir que donada una resolució

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+2}} P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

si considerem la següent successió

$$\cdots \xrightarrow{Id_M \underset{A}{\otimes} f_{n+2}} M \underset{A}{\otimes} P_{n+1} \xrightarrow{Id_M \underset{A}{\otimes} f_{n+1}} M \underset{A}{\otimes} P_n \xrightarrow{Id_M \underset{A}{\otimes} f_n} M \underset{A}{\otimes} P_{n-1} \xrightarrow{Id_M \underset{A}{\otimes} f_{n-1}} \cdots$$

$$\text{aleshores } Tor_n^A(M,N) = {ker(Id_M \otimes f_n)}\Big/{Im(Id_M \otimes f_{n+1})}$$

Aquesta construcció té bones propietats.

1. L'homología és independent de la resolució projectiva triada.
2. Sabem que $Tor_n^A(M,N) \cong Tor_n^A(N,M)$, per tant, té sentit que al agafar una resolució projectiva de M i després tensorialitzar-la per N s'acaba obtenint la mateixa homología que acabem de definir.

Lema 4.29. *Sigui* N *un* A*-mòdul amb la següent resolució projectiva*

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Amb K_n *el n-èssim mòdul de les sizígies de* N.
Aleshores, per tot $n \geq 2$ *es verifica que per tot* $s \geq 1$

$$Tor_s^A(M,K_n) \cong Tor_{n+s}^A(M,N)$$

En particular,

$$Tor_1^A(M,K_n) \cong Tor_{n+1}^A(M,N)$$

Aquesta propietat s'anomena dimension shifting.

Sigui A un anell i siguin $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ una família d'elements, considerem A^n com el mòdul lliure de rang n amb base $\{a_1, ..., a_n\}$.

El nostre objectiu a continuació és construir una resolució lliure d'un mòdul lliure. La construcció que descriurem a continaució ens dona una manera sistemàtica de donar una resolució lliure. Considerem $K^r = \wedge^r A^n$ la r-éssima potencia exterior de A, aquesta és un A-mòdul lliure de rang $\binom{n}{k}$ i base $\{a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_r}\}_{i_1 < \cdots < i_r}$.

En aquesta situació existeix un complex d'$A-$mòduls

$$0 \longrightarrow K^n \xrightarrow{\lambda_n} K^{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\lambda_2} K^1 \xrightarrow{\lambda_1} K^0 \longrightarrow 0$$

de forma que per tot $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_r}$ es verifica que

$$\lambda_r(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} x_{i,j} (a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_r})$$

Fixem-nos que cada element de la imatge és divisible per algún x_i, per tant, per la definició que s'ha donat previament, aquesta resolució és minimal.

Aquest complex que acabem de definir l'anomenarem el *complex de Koszul* de A respecte de $\{a_1, ..., a_n\}$.

El complex de Koszul té la propietat que $K^0/Im(\lambda_1) = A/\langle x_1, ..., x_n\rangle$, ho denotarem per $K.(x_1, ..., x_n)$.

Teorema 4.30. *Sigui $R = K[x_1, ..., x_n]$ l'anell de polinomis, aleshores*

$$H_n(K.(x_1, ..., x_n)) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

En particular,

$$K.(x_1, ..., x_n) \longrightarrow A/\langle x_1, ..., x_n\rangle = K \longrightarrow 0$$

és una resolució lliure, i per tant projectiva de K com R-mòdul.

Tot i que no ho veurem en aquest treball, la resolució que acabem de descriure també té la propietat de ser graduada. Encara que en cap moment s'han considerat mòduls graduats, si la pensem sobre l'anell de polinomis, fent els shiftings adequats a cada pas de la resolució els morfismes esdevenen graduats. Aquesta resolució també té la propietat de ser lineal, de la linealitat de les resolucions en parlarem en detall a la següent secció.

El Teorema 4.30 té la següent conseqüència

$$Tor_r^R(K, N) = 0 \quad \forall r \geq n+1 \text{ i } \forall N \ R\text{-mòdul}$$

Teorema 4.31. *(graduat de les sizígies de Hilbert)*

Sigui $R = K[x_1, ..., x_n]$ l'anell de polinomis de n variables i sigui M un R-mòdul finitament generat. Aleshores, existeix una resolució lliure graduada de longitud $\leq n$ de la forma

$$0 \longrightarrow F^n \xrightarrow{\lambda_n} F^{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\lambda_2} F^1 \xrightarrow{\lambda_1} F^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

amb els F_i finitament generats i λ_i els corresponents morfismes graduats.

Demostració. L'existència d'una resolució lliure graduada, no necessàriament finita ja la coneixem, considerem-la fins la n-éssima sizígia

$$0 \longrightarrow K^n \xrightarrow{\lambda_n} F^{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\lambda_2} F^1 \xrightarrow{\lambda_1} F^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on K_n és el n-éssim mòdul de les sizígies de M, aleshores pel Lema 4.29 tenim que $0 = Tor_{n+1}^R(M, K) = Tor_1^R(K_n, K)$

Passem a provar que K_n és lliure utilitzant el següent resultat

Lema 4.32. *(de Nakayama graduat)*

Sigui $R = K[x_1, ..., x_n]$, N un R-mòdul graduat finitament generat i $I \subseteq (x_1, ..., x_n)$ un ideal homogeni. Aleshores, $N/IN = 0 \Rightarrow N = 0$

Demostració. Sigui $N = \langle n_1, ..., n_k \rangle$ un sistema minimal de generadors, amb cada n_i homogeni per ser-ho I. Suposem que $N = IN$ i sigui $n_r \neq 0$ un generador qualsevol. Aleshores,

$$n_r = \sum_{i=1}^{k} f_i n_i$$

amb $f_i \in I$.
Com que $deg(f_i) > 0$ per tot i ja que $I \subseteq (x_1, ..., x_n)$, en particular, tenim que $deg(f_r) > 0$ $\Rightarrow deg(f_r n_r) > deg(n_r) \Rightarrow f_r = 0$. Per tant,

$$n_r = \sum_{i=1, i \neq r}^{k} f_i n_i$$

Per tant, $\langle n_1, ..., \widehat{n_r}, ..., n_k \rangle$ és un sistema de generadors $\Rightarrow \langle n_1, ..., n_k \rangle$ no és un sistema minimal de generadors i obtenim una contradicció. Tenim doncs $N = 0$. $\square$

A continuació passem a provar la següent proposició

Proposició 4.33. *Sigui $R = K[x_1, ..., x_n]$ l'anell de polinomis, N un R-mòdul graduat finitament generat tal que $Tor_1^R(N, K) = 0$. Aleshores, N és lliure.*

Demostració. Sigui $N/(x_1, ..., x_n)N = N \underset{A}{\otimes} K$, és un $K-$espai vectorial de dimensió finita. Siguin $\{n_1, ..., n_r\} \subseteq N$ tals que $\{\overline{n_1}, ..., \overline{n_r}\}$ són base de $N \underset{A}{\otimes} K$.

Volem provar que també són un sistema de generadors de N. Sigui F lliure de rang r generat per la base $\{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$ si considerem la presentació graduada donada per

$$\pi : F \longrightarrow N$$

tal que $\pi(\sigma_i) = n_i$, aleshores el morfisme

$$\overline{\pi} : F \underset{R}{\otimes} K \longrightarrow N \underset{R}{\otimes} K$$

tal que $\overline{\pi}(\overline{\sigma_i}) = \overline{n_i}$ és un morfisme exhaustiu i per tant un isomorfisme.

Si considerem el complex

$$F \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

on $C = coker(\pi) = N/Im(\pi)$ és un $A-$mòdul graduat i finitament generat. Al considerar el complex tensorialitzat per K tenim

$$F \underset{R}{\otimes} K \xrightarrow{\overline{\pi}} N \underset{R}{\otimes} K \longrightarrow C \underset{R}{\otimes} K \longrightarrow 0$$

aleshores, com que $F \underset{R}{\otimes} K \cong N \underset{R}{\otimes} K$ obtenim que $C \underset{R}{\otimes} K = 0$ i aplicant el Lema de Nakayama $\Rightarrow C = 0$. En conseqüència, π és un epimorfisme i per tant $N = \langle n_1, ..., n_r \rangle$.

Siguin ara

$$L \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

on $L = ker(\pi)$ un $R-$mòdul graduat i finitament generat, tenim doncs

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^R(N,K) \longrightarrow L \underset{R}{\otimes} K \longrightarrow F \underset{R}{\otimes} K \xrightarrow{\overline{\pi}} N \underset{R}{\otimes} K \longrightarrow 0$$

Amb $Tor_1^R(N,K) = 0$ per hipòtesi, tenim també que $F \underset{R}{\otimes} K \cong N \underset{R}{\otimes} K$ i per tant $\overline{\pi}$ és un isomorfisme i $L \underset{R}{\otimes} K = 0$ pel Lema de Nakayama tenim que $L = ker(\pi) = 0$ i per tant π és un isomorfisme. □

Tenim doncs que les resolucions lliures graduades de R-mòduls són finites de llargada menor o igual a n en $R = K[x_1, ..., x_n]$.

4.6 Resolucions lineals

Hem vist doncs l'existència, la unicitat i la finitud de les resolucions minimals lliures graduades de R-mòduls quan $R = K[x_1, ..., x_n]$. Tal i com la llargada de les resolucions és un indicador de la seva complexitat. També podem considerar com són les relacions entre les sizígies pas a pas, quant més grans són els graus dels generadors de les sizígies, més complexes són les relacions entre els generadors d'aquestes.

Quan les relacions entre generadors són lineals a cada pas, direm que la resolució és lineal. Observem que les resolucions lineals són el tipus de resolució més senzilla, això és degut a que les relacions han de ser com a mínim lineals en cada sizígia. Hem vist anteriorment que en $K[x_1, .., x_n]$, al considerar una resolució lliure d'un mòdul, aquesta és minimal únicament si els generadors de les relacions de les sizígies son elements de l'ideal $\mathfrak{m} = \langle x_1, ..., x_n \rangle = K[x_1, .., x_n]/K$.

Suposem que I és un ideal homogeni en $R = K[x_1, ..., x_n]$, suposem que la resolució lliure minimal graduada de I és la següent

$$0 \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{l,j}(I)} \to \cdots \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{1,j}(I)} \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}(I)} \to I \to 0$$

amb $l \leq n$ and $\beta_{i,j}(I)$ l'anomenarem el $(i,j)-$èssim *nombre de Betti graduat* de I. Recordem que $R(-j)$ denota l'anell de polinomis amb un shift de grau j.

A continuació passem a definir alguns dels invariants que permeten mesurar la complexitat d'una resolució.

Definició 4.34. *Donat un ideal homogeni I generat en grau d en $K[x_1, .., x_n]$ amb la resolució descrita anteriorment. Aleshores I té una resolució lineal si $\beta_{i,i+j}(I) = 0$ per tot $j \neq d$*

La següent definició és més general.

Definició 4.35. *Donat un ideal homogeni I en $K[x_1, .., x_n]$ amb la resolució descrita anteriorment. Definim la regularitat de Castelnuovo-Mumford com*

$$reg(I) = max\{j - i | \beta_{i,j}(I) \neq 0\}$$

Veiem que aquests dos conceptes estan relacionats

Lema 4.36. *Sigui I un ideal homogeni generat en grau d.*
I té una resolució lineal si, i només si $reg(I) = d$.

Demostració. $\Rightarrow$) Si I té una resolució lineal $\Rightarrow \beta_{i,i+j}(I) = 0$ per tot $j \neq d \Rightarrow$ per tot $i \in \{1, ..., l\}$ només $\beta_{i,i+d}(I) \neq 0 \Rightarrow reg(I) = max\{j - i | \beta_{i,j}(I) \neq 0\} = (i + d) - i = d$.
$\Leftarrow$) Suposem que existeix un $\beta_{i,i+j}(I) \neq 0$ amb $j \neq d$, si $j > d$ aleshores $reg(I) \geq j > d \Rightarrow reg(I) \neq d$. Si $j < d \Rightarrow i + j < i + d$, això implica que hi ha una relació de grau 0 en aquest pas de la resolució, com la resolució és minimal, les relacions han de ser com a mínim de grau 1 i per tant tenim una contradicció. □

Durant aquesta secció, hem vist els resultats de mòduls que finalment ens han permès definir i donar les propietats essencials d'una resolució, lliure, graduada i minimal, un dels dos objectes que es consideren en el Teorema de Fröberg. Passem a veure l'altre objecte del teorema, els grafs cordals.

5 Grafs Cordals

Aquesta secció està dedicada a la definició i caracterització dels grafs cordals, una breu explicació d'un algoritme utilitzat per identificar-los i la demostració d'un lema previ al Teorema de Fröberg. Per veure la demostració original del Lema 5.10 que es veu més endavant veure [18].

Definició 5.1. *Direm que un graf G és simple si no té més d'una aresta adjacent als mateixos dos vèrtexs i no hi ha arestes que connectin un vèrtex amb si mateix.*

En aquesta secció treballarem en tot moment amb grafs simples i finits.

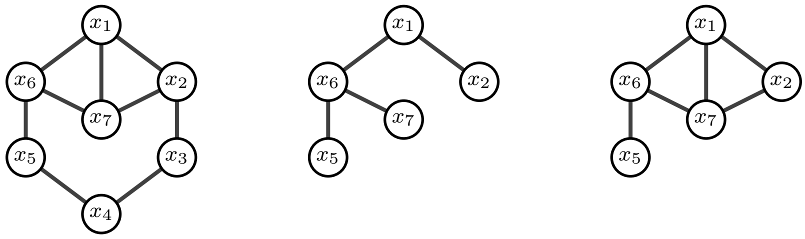
5.1 Definició i propietats

Definició 5.2. *Sigui $G = (V(G), E(G))$ i $H = (V(H), E(H))$ dos grafs, direm que H és un subgraf de G si $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Direm que G és el supergraf de H.*

Definició 5.3. *Donat H un subgraf de G direm que H és un subgraf induït de G si siguin $x, y \in V(H)$ i $\exists e \in E(G)$ tal que $e = \{x, y\}$ aleshores $e \in E(H)$.*

És a dir que els subgrafs induïts són aquells que preserven les arestes del supergraf associat.

Veiem un exemple, d'esquerra a dreta, sigui G el primer graf, G' el segon i G'' el tercer. Aleshores G' és un subgraf de G doncs tots els seus vèrtexs i arestes són de G però no és un subgraf induït doncs tenim que $x_1, x_7, x_2 \in V(G')$ però $\{x_1, x_7\}, \{x_1, x_2\} \in E(G)$ i $\{x_1, x_7\}, \{x_1, x_2\} \notin E(G')$. En canvi G'' és el subgraf induït de G pels vèrtexs $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$.



Definició 5.4. *1. Sigui G un graf. Un camí finit de longitud k és una seqüència d'arestes $P = (e_1, ..., e_k)$ tal que existeix una seqüència de vertexs $(x_1, ..., x_{k+1})$ amb $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ per tot $i \in \{1, ..., k\}$. Observem que podem denotar un camí tant pel conjunt de vèrtexs com pel conjunt d'arestes que el formen.*

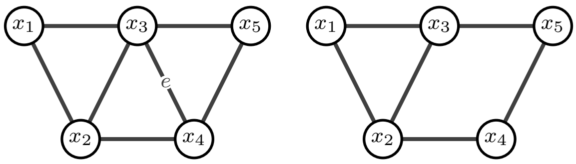
2. Si tenim un camí de longitud k amb seqüència d'arestes $(e_1, ..., e_k)$ i seqüència de vertexs $(x_1, ..., x_{k+1})$ amb $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ però $x_1 = x_{k+1}$, és a dir $(x_1, ..., x_{k+1}) = (x_1, ..., x_k, x_1)$ aleshores direm que és un cicle de longitud k i el denotarem com $C = (x_1, x_2, ..., x_k, x_1)$.

3. Sigui $C = (x_1, x_2, ...x_k, x_1)$ un cicle amb seqüencia d'arestes $(e_1, ..., e_k)$, sigui $e \in E(G)$ amb $e \notin (e_1, ..., e_k)$ i $e = \{x_i, x_j\}$ amb $x_i, x_j \in x_1, ..., x_k$ aleshores direm que e és una corda.

4. Direm que un cicle C és minimal si no té cordes.

5. Direm que un graf G és cordal si tots els seus cicles minimals tenen longitud 3.

Passem a veure alguns exemples de les definicions, d'esquerra a dreta, sigui G el primer graf i G' el segon. En G, $P = (x_1, x_3, x_5, x_4)$ és un camí de longitud 3 de x_1 a x_4. En G, $P = (x_3, x_5, x_4, x_2, x_3)$ és un cicle de longitud 4, observem que no és minimal doncs e és una corda del cicle. En G' si considerem el cicle $C = (x_3, x_5, x_4, x_2, x_3)$ de longitud 4 veiem que sí és minimal doncs no té cordes. Observem doncs que el graf G és cordal doncs no té cicles de longitud més gran que 3, en canvi G' no és cordal doncs $C = (x_3, x_5, x_4, x_2, x_3)$ és un cicle minimal de longitud 4 en G'.

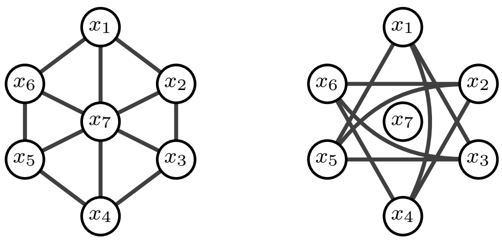


Els grafs cordals es poden reconèixer amb algoritmes de temps lineal que descriurem més endavant.

Definició 5.5. *Donat $G = (V(G), E(G))$ un graf, definim el graf complementari de G com $G^c = (V(G), E(G^c))$ on*

$$E(G^c) = \{\{x_i, x_j\} | \{x_i, x_j\} \notin E(G)\}$$

Els següents grafs són G i G^c respectivament.



Definició 5.6. *Sigui G un graf i $x \in V(G)$ definim els veïns de x com el conjunt*

$$N(x) = \{y | \{x, y\} \in E(G)\}$$

Els grafs que definirem a continuació junt amb el següent lema els utilitzarem per demostrar el Teorema de Fröberg.

Definició 5.7. *Sigui G un graf, fixat un $x \in V(G)$ i siguin $N(x) = \{x_1, ..., x_n\}$ definim*

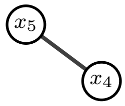
$$G_i = G \setminus (N(x) \cup N(x_i)) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

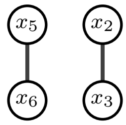
A continuació passem a definir un altre graf. $G_{(x)}$ on

$$E(G_{(x)}) = \{\{u, v\} \in E(G) | \{u, v\} \cap N(x) \neq \varnothing, u \neq x, v \neq x\}$$

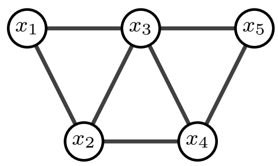
Les arestes d'aquest graf són les que connecten els vèrtexs de $N(x)$ entre ells i les que connecten els vertèxs de $N(x)$ amb els seus veïns que no pertanyen a $N(x)$ ni són x.

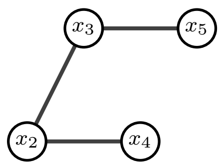
Exemple 5.8. Aquí tenim un exemple dels grafs que acabem de definir, agafant com a graf base $H = C_6$. El primer graf és H_2 agafant com a vèrtex fixe x_1. El segon graf és $H_{(x_1)}$.





Exemple 5.9. Aquí tenim un altre exemple dels grafs que acabem de definir, d'esquerra a dreta els grafs són: G i $G_{(x_1)}$. Observem que fixant el vèrtex x_3 aleshores G_2 és el graf buit.





Lema 5.10. *Sigui G un graf i $x \in V(G)$ tal que $G \setminus \{x\}$ no és un graf amb tots els vertexs aïllats. Aleshores els següents són equivalents*

1. *G^c és cordal*
2. *i) $(G \setminus \{x\})^c$ és cordal*
   ii) $G^c_{(x)}$ és cordal
   iii) G_i no té arestes

Demostració. 1. $\Rightarrow$ 2. Sigui $N(x) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Veiem primer que 1. $\Rightarrow$ *i*), tenim que $(G \setminus \{x\})^c = G^c \setminus \{x\}$ i clarament $G^c \setminus \{x\}$ és un subgraf induït de G^c. Passem a provar el següent lema.

Lema 5.11. *Sigui G un graf i H un subgraf induït de G aleshores, G cordal $\Rightarrow$ H cordal.*

Demostració. Sigui C un cicle minimal en H, com H és un subgraf induït de G aleshores C també és un cicle en G i per tant tenim dos casos:

i) C és minimal en G per tant de longitud 3 per ser G cordal.

ii) C no és minimal en G per tant té almenys una corda que connecta dos dels seus vèrtexs, però com H és subgraf induït aquesta corda també pertany a $H \Rightarrow C$ no és minimal en H i obtenim contradicció.

Per tant C ha de tenir longitud 3 $\Rightarrow$ H cordal. $\square$

Per tant $G^c \setminus \{x\}$ és cordal i 1. $\Rightarrow$ *i*). Passem a veure que 1. $\Rightarrow$ *iii*).
Suposem que existeix $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $G_i = G \setminus (N(x) \cup N(x_i))$ té una aresta $e = \{u, v\}$, si $e \in E(G_i) \Rightarrow u \neq N(x)$ i $v \neq N(x) \Rightarrow \{x, u\} \notin E(G)$ i $\{x, v\} \notin E(G)$.
També si $e \in E(G_i) \Rightarrow u \notin N(x_i)$ i $v \notin N(x_i) \Rightarrow \{x_i, u\} \notin E(G)$ i $\{x_i, v\} \notin E(G)$. Per tant com $\{x, u\} \notin E(G), \{x, v\} \notin E(G), \{x_i, u\} \notin E(G)$ i $\{x_i, v\} \notin E(G) \Rightarrow (xux_ivx)$ és un cicle de longitud 4 en G^c, com $\{x, x_i\} \in G, \{u, v\} \in G \Rightarrow \{x, x_i\} \neq G^c, \{u, v\} \neq G^c$ i per tant el cicle (xux_ivx) no té cordes i és minimal de longitud 4 contradient que G^c és

cordal, per tant G_i no té arestes.
Finalment veiem que 1. $\Rightarrow$ ii), suposem que $(z_1z_2\cdots z_dz_1)$ és un cicle minimal en $G^c_{(x)}$, volem veure $d=3$. Els vèrtexs de $G^c_{(x)}$ i $G_{(x)}$ són els mateixos:

$$V(G^c_{(x)}) = V(G_{(x)}) = N(x) \cup \{y | \{y, x_i\} \in E(G), x_i \in N(x), y \neq N(x)\} = N(x) \cup N'$$

La demostració es fa en quatre casos depenent del nombre de vèrtexs del cicle $(z_1z_2\cdots z_dz_1)$ que pertanyen a N'.

- Si $(z_1z_2\cdots z_dz_1) \subseteq N(x)$, és a dir no té vèrtexs en N', aleshores el graf induït pels vèrtexs $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ en G^c segueix sent un cicle i és cordal pel Lema 5.11 $\Rightarrow d=3$.
- Si només un dels vèrtexs $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ està en N' com que els vèrtexs de N' només estan connectats amb els de $N(x)$ en $G^c_{(x)}$, per tant el graf induït per $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ és un cicle en G^c i és cordal pel Lema 5.10 $\Rightarrow d=3$.
- Si hi ha exactament dos vèrtexs z_i i z_j de $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ que pertanyen a N', com z_i i z_j per definició no estan connectats en $G_{(x)}$ $\Rightarrow \{z_i, z_j\} \in E(G^c_{(x)})$, com que el cicle $\{z_1, z_2, ..., z_d\}$ és minimal i no té cordes $\Rightarrow \{z_i, z_j\}$ forma part del cicle i podem denotar l'aresta com $\{z_1, z_2\}$. En G^c el vèrtex x està connectat a z_1 i z_2 ja que estem suposant que $z_1, z_2 \in N'$ i $N' \cap N(x) = \varnothing$, però x no està connectat a cap vèrtex de $\{z_3, ..., z_d\}$ per hipòtesi $\Rightarrow \{z_1xz_2\cdots z_d\}$ és un cicle minimal en G^c.
  Passem a diferenciar dos casos.
  Si $\{z_1, z_2\} \in E(G)$ aleshores $\{z_1xz_2\cdots z_d\}$ és un cicle minimal de llargada $d+1$ en G^c. Com que G^c és cordal $\Rightarrow d+1=3 \Rightarrow d=2$, però $(z_1z_2z_1)$ no és un cicle i per tant s'obté una contradicció.
  Si $\{z_1, z_2\} \notin E(G)$ aleshores $\{z_1, z_2\}$ és una corda del cicle $\{z_1xz_2\cdots z_d\}$ en G^c $\Rightarrow$ $\{z_1z_2\cdots z_d\}$ és un cicle minimal en $G^c \Rightarrow d=3$.
- Si hi ha $k \geq 3$ vèrtexs del cicle $\{z_1z_2\cdots z_d\}$ en N', com els vèrtexs de N' no estan connectats entre ells en $G_{(x)}$ $\Rightarrow$ aquests vèrtexs formen una clique K_k en $G^c_{(x)}$ i un cicle minimal conté una clique K_k només si $k=3$.

Passem a veure que 2. $\Rightarrow$ 1. Per i) sabem que si G^c té un cicle de llargada ≥ 4 aleshores ha de passar pel vèrtex x, sigui $(xz_1z_2\cdots z_d)$ aquest cicle amb $d \geq 3$. Passem a veure dos casos.
Si $d \geq 4$ aleshores $\{x, z_2\}, ..., \{x, z_{d-1}\} \notin E(G^c)$ ja que, si no, serien cordes i el cicle no seria minimal, per tant tenim que $\{x, z_2\}, ..., \{x, z_{d-1}\} \in E(G) \Rightarrow \{z_2, ..., z_{d-1}\} \subseteq N(x)$. Com $\{x, z_1\}, \{x, z_d\} \in E(G^c) \Rightarrow \{x, z_1\}, \{x, z_d\} \notin E(G) \Rightarrow z_1, z_d \notin N(x)$, també $\{z_1, z_{d-1}\}, \{z_d, z_2\} \notin E(G^c) \Rightarrow \{z_1, z_{d-1}\}, \{z_d, z_2\} \in E(G) \Rightarrow z_1, z_2 \in N'$. Aleshores $\{z_1, z_d\} \notin E(G_{(x)}) \Rightarrow \{z_1, z_d\} \in E(G^c_{(x)})$ i per tant tenim el cicle minimal $(z_1z_2\cdots z_d)$ en $G^c_{(x)}$ amb $d \geq 4$ que contradiu ii).

Si $d=3$ suposem el cicle $(xz_1z_2z_3)$ és un cicle minimal de longitud 4 en G^c, aleshores $\{x, z_2\}$ i $\{z_1, z_3\}$ han de ser arestes G doncs, si no, serien cordes del cicle en G^c. Tenim que $z_1, z_3 \notin N(x)$, com $z_2 \in N(x)$ i $G \setminus (N(x) \cup N(z_2))$ no té arestes per iii) $\Rightarrow z_1 \in N(z_2)$ o $z_3 \in N(z_2)$. Si $z_1, z_3 \notin N(z_2)$ aleshores $\{z_1, z_3\}$ seria una aresta de $G \setminus (N(x) \cup N(z_2))$, per tant o bé $\{z_1, z_2\}$ o bé $\{z_2, z_3\}$ són arestes de G, però això contradiu el fet que $\{z_1, z_2\}$ i $\{z_2, z_3\}$ són arestes de G^c, per tant G^c no té cicles minimals de longitud $\geq 4 \Rightarrow G^c$ és cordal. $\square$

5.2 Identificació de grafs cordals

En aquesta secció explicarem com identificar grafs cordals mitjançant algoritmes de temps lineal.

La cordalitat no és únicament una propietat útil a l'hora de identificar edge ideals amb resolucions lineals. Tal i com hem comentat anteriorment, el coloring problem és un problema NP-hard, però resulta que el coloring problem esdevé un problema resoluble amb algoritmes de temps polinomial si el graf és cordal. Per veure més detalls consultar [13] i [17].

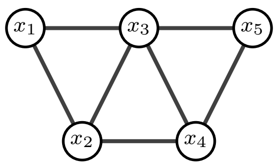
Les defincions que es veuen durant la secció es troben en [1] i [13]. La demostració de la Proposició 5.15 a [13].

Definició 5.12. *Sigui G un graf anomenem el clique number de G al nombre de vèrtexs del clique més gran inclòs en G, ho denotarem $\omega(G)$.*

Definició 5.13. *Sigui G un graf i $v \in V(G)$ direm que x es simplicial si el subgraf de de G induït per els vèrtexs $\{x\} \cup N(x)$ és un graf complet.*

Definició 5.14. *Sigui G un graf de n vèrtexs, diem que G té un perfect elimination ordering si existeix una ordenació $\{x_1, ..., x_n\}$ dels vèrtexs de G de manera que x_i és simplicial en el subgraf induït pels vèrtexs $\{x_1, ..., x_i\}$. Utilitzarem PEO per fer referència a perfect elimination ordering.*

Veiem a continuació un exemple de les definicions anteriors, podem observar que el x_3 no és simplicial ja que el graf induït per $\{x_3\} \cup N(x_3) = G$ i G clarament no és un graf complet. En canvi G té un PEO donat per la següent ordenació $\{x_3, x_4, x_5, x_2, x_1\}$. És important comentar que els PEO a vegades es donen en l'ordre contrari, és a dir, en aquest cas $\{x_1, x_2, x_5, x_4, x_3\}$, aquest és l'ordre en que s'han d'anar eliminant els vèrtexs per tenir un PEO.



En aquest exemple s'utilitza la notació G_i per referir-se al graf obtingut al pas i del PEO, no té cap relació amb la definició feta a la secció anterior.

Observem que G_1 que és el graf format pel vèrtex $\{x_3\}$ és simplicial, de fet un vèrtex aïllat sempre és simplicial. Si considerem G_2 el graf induït per $\{x_3, x_4\}$ aleshores $x_3 \cup N_{G_2}(x_3) = G_2$ que és complet. Si considerem G_3 el graf induït per $\{x_3, x_4, x_5\}$ aleshores $x_5 \cup N_{G_3}(x_5) = G_3$ que és complet. Si considerem G_4 el graf induït per $\{x_3, x_4, x_5, x_2\}$ aleshores $x_2 \cup N_{G_4}(x_2)$ és el K_3 induït per x_2, x_3 i x_4 en G_4, que és complet. Finalment $G_5 = G$ i tenim que x_1 és simplicial en G. Per tant hem vist que efectivament $\{x_3, x_4, x_5, x_2, x_1\}$ és un PEO en G.

Proposició 5.15. *Un graf G és cordal si i només si té un perfect elimination ordering.*

Demostració $\Leftarrow$) Suposem que G no és cordal, sigui G un graf amb PEO i un cicle sense cordes $(x_1 x_2 \cdots x_l x_1)$ amb $l \geq 4$, suposem que v_i és el primer vèrtex del cicle en el

PEO, aleshores els vèrtexs v_{i-1} i v_{i+1} són veïns de v_i que venen després en l'ordenació del PEO $\Rightarrow$ els vèrtexs v_{i-1} i v_{i+1} són adjacents en els seus respectius grafs induïts del PEO però aixo és una contradicció amb l'hipòtesi que el cicle no té cordes.

$\Rightarrow$) Sabem pel Lema 5.11 que si un graf G és cordal qualsevol subgraf induït de G també ho és, per tant només hem de veure que té un vèrtex x' simplicial. Posant x' primer en el elimination ordering i per inducció trobem un PEO del graf cordal obtingut al eliminar x' de G. Per veure això demostrarem una afirmació més forta.

Lema 5.16. *Si G és cordal aleshores o bé és complet o bé conté dos vèrtexs simplicials no adjacents.*

Demostració. Per inducció sobre els vèrtexs de G. Si $|G| = 1$ aleshores G és complet i no hi ha res a demostrar. Suposem que $|G| > 1$ i G no és complet, aleshores existeix un conjunt minimal de vèrtexs S tal que $G \setminus S$ té almenys dues components connectades. Volem veure que el subgraf induït S per és un subgraf complet, suposem que hi ha dos vertèxs $x, y \in S$ que no són veïns. Siguin G_1 i G_2 dues components de $G \setminus S$ aleshores x ha de tenir un veï en G_1 i en G_2, en cas contrari $G \setminus \{S \setminus x\}$ també té almenys dos components connectades i per tant S no és minimal, podem fer el raonament anàleg per y. Per tant hi ha un camí que denotarem P_1 que connecta x i y a través de vèrtexs de G_1 i un camí que denotarem P_2 que connecta x i y a través de vèrtexs de G_2, siguin P_1 i P_2 els camins més curts que compleixen les propietats anteriors aleshores $P_1 \cup P_2$ és un cicle sense cordes en G de longitud com a mínim 4, això entra en contradicció amb el fet que G és cordal $\Rightarrow$ S ha d'induir un subgraf complet en G. $\square$

Un cop vist el lema tenim que, sigui $G_{S,1}$ el subgraf induït en G per S i G_1, $G_{S,1}$ és cordal i té un nombre de vèrtexs menor a G, per tant, per inducció $G_{S,1}$ és o bé complet o bé té dos vèrtexs simplicials no adjacents. En qualsevol dels casos $G_{S,1}$ té un vèrtexs simplicial contingut en G_1 i aquest també és simplicial en G. Anàlogament amb $G_{S,2}$ el subgraf induït en G per S i G_2, aplicant inducció podem trobar un vèrtex simplicial en G_2. Això ens dona dos vèrtexs simplicials no adjacents en G i acaba la demostració. $\square$

El lector interessat trobarà en [17] que existeix doncs un algoritme anomenat Maximum Cardinality Search and Clique-Tree que ens permet trobar un PEO amb temps d'execució $\mathcal{O}(n + m)$ on $n = |V|$ i $m = |E|$. Per tant, tenim un algoritme per decidir si un graf és cordal en temps lineal.

6 Teorema de Fröberg

Finalment, ja només queda introduir una última eina per poder demostrar el Teorema de Fröberg. Com ja hem comentat anteriorment, la demostració del teorema es fa per inducció sobre el nombre de vèrtexs del graf, el Lema 5.11 ens permet determinar si un graf és cordal a partir de les propietats dels seus subgrafs. Ara busquem un resultat anàleg per l'objecte algebraic de l'enunciat, les resolucions. Els splittings monomials ens permetran construir resolucions d'un ideal a partir de les resolucions d'alguns dels seus ideals propis.

6.1 Splittings d'ideals monomials

Sigui I un ideal monomial i i $\mathcal{G}(I) = \{m_1, ..., m_r\}$ el conjunt minimal de monomis, generadors de I. Si fem una partició en dos subconjunts

$$\mathcal{G}(I) = \{m_1, ..., m_r\} = \{m_1, ..., m_s\} \cup \{m_{s+1}, ..., m_r\} = \mathcal{G}(I_1) \cup \mathcal{G}(I_2)$$

on $I_1 = \langle m_1, ..., m_s \rangle$ i $I_2 = \langle m_{s+1}, ..., m_r \rangle$, observem que $I = I_1 + I_2$.

En aquesta situació existeix una successió curta i exacta de la següent forma

$$0 \to I_1 \cap I_2 \to I_1 \oplus I_2 \to I_1 + I_2 = I \to 0$$

Passem a definir la *mapping cone construction* que ens permetrà construir una resolució de I a partir de les resolucions de I_1, I_2 i $I_1 \cap I_2$.

Si tenim unes resolucions lliures minimals graduades de I_1, I_2 i $I_1 \cap I_2$ de la següent forma

$$0 \to F_{l_1} \to F_{l_1-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to I_1 \cap I_2 \to 0$$
$$0 \to G_{l_2} \to G_{l_2-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to I_1 \to 0$$
$$0 \to H_{l_3} \to H_{l_3-1} \to \cdots \to H_1 \to H_0 \to I_2 \to 0$$

Aleshores la *mapping cone construction* ens diu que podem considerar la següent resolució graduada de I

$$\cdots \to G_2 \oplus H_2 \oplus F_1 \to G_1 \oplus H_1 \oplus F_0 \to G_0 \oplus H_0 \to I \to 0$$

Notem que hem simplificat la notació i tenim $F_i = \bigoplus_j R^{\beta_{i,j}(I_1 \cap I_2)}(-j)$, $G_i = \bigoplus_j R^{\beta_{i,j}(I_1)}(-j)$ i $H_i = \bigoplus_j R^{\beta_{i,j}(I_2)}(-j)$

Aquesta resolució que acabem de definir pot ser o no ser minimal. En general, es compleix que

$$\beta_{i,j}(I) \leq \beta_{i,j}(I_1) + \beta_{i,j}(I_2) + \beta_{i-1,j}(I_1 \cap I_2)$$

Volem saber quan es compleix la igualtat en l'equació de dalt, és a dir, quan la resolució donada per la mapping cone construction és minimal.

Definició 6.1. *Diem que $I = I_1 + I_2$ és un Betti splitting si*

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(I_1) + \beta_{i,j}(I_2) + \beta_{i-1,j}(I_1 \cap I_2) \text{ per tot } i, j \geq 0$$

La mapping cone construction és interessant ja que ens permeten calcular resolucions d'ideals a partir d'ideals amb menys generadors. En alguns casos això ens pot donar una resolució més senzilla. També ens assegura que si sabem les resolucions minimals de I_1, I_2 i $I_1 \cap I_2$, aleshores, podem construir una resolució de $I_1 + I_2$, tot i que no sabrem si aquesta és minimal.

Definició 6.2. *Un ideal monomial I és splittable si I és la suma de dos ideals monomials diferents de zero $I = I_1 + I_2$ tal que*

1. *$\mathcal{G}(I)$ és la unió disjunta de $\mathcal{G}(I_1)$ i $\mathcal{G}(I_2)$*
2. *Existeix una splitting function*

$$\tau : \mathcal{G}(I_1 \cap I_2) \longrightarrow \mathcal{G}(I_1) \times \mathcal{G}(I_2)$$

tal que $\tau(w) = (\phi(w), \psi(w))$ satisfà dues propietats.

- *per tot $w \in \mathcal{G}(I_1 \cap I_2)$, $w = lcm(\phi(w), \psi(w))$.*
- *per cada subconjunt $S \subseteq \mathcal{G}(I_1 \cap I_2)$, $lcm(\phi(S))$ i $lcm(\psi(S))$ divideixen $lcm(S)$*

El següent teorema, ens assegura que si tenim un ideal monomial *splittable* aleshores la resolució donada per la *mapping cone construction* serà minimal. La demostració es troba en [6].
Tot i que aquest resultat és essencial per trobar *Betti splittings*, la demostració no està inclosa doncs és complexe i requereix una construcció llarga.

Teorema 6.3. *Sigui I un ideal monomial splittable en $I_1 + I_2$, aleshores $\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(I_1) + \beta_{i,j}(I_2) + \beta_{i-1,j}(I_1 \cap I_2)$ per tot $i, j \geq 0$, és a dir, $I_1 + I_2$ és un Betti-splitting.*

Definició 6.4. *Sigui I un ideal monomial en $K[x_1, ..., x_n]$ amb conjunt de generadors $\mathcal{G}(I) = \{m_1, ..., m_r\}$ Sigui*

$$I_1 = \{m_j \in \{m_1, ..., m_r\} \mid x_i | m_j\}$$

$$I_2 = \{m_j \in \{m_1, ..., m_r\} \mid x_i \not| m_j\}$$

En aquest cas anomenem $I = I_1 + I_2$ una x_i-partició de I. En el cas que $I = I_1 + I_2$ també sigui un Betti splitting aleshores anomenem a $I = I_1 + I_2$ un x_i-splitting.

Definició 6.5. *Sigui G un graf i $x \in V(G)$, direm que x és un splitting vertex si $deg(x) = d > 0$ i $G \setminus \{x\}$ no és un graf de vèrtexs aïllats.*

Observem que si tenim $x \in V(G)$ un splitting vertex aleshores $G = N(x) \cup (G \setminus \{x\})$.

Teorema 6.6. *Sigui G un graf i $x \in V(G)$ un splitting vertex. Sigui $N(x) = \{x_1, ..., x_r\}$ amb $r > 0$ aleshores siguin $I_1 = \langle xx_1, ..., xx_r \rangle$ i $I_2 = I(G \setminus \{x\})$*

$$I(G) = \langle xx_1, ..., xx_r \rangle + I(G \setminus \{x\}$$

és un splitting de $I(G)$

Demostració. Està clar que $I = I_1 + I_2$ i $\mathcal{G}(I_1) \cap \mathcal{G}(I_2) = \varnothing$ ja que $x \mid \mathcal{G}(I_1)$ i $x \nmid \mathcal{G}(I_2)$ Ara considerem l'ideal

$$I_1 \cap I_2 = (\{lcm(m_1, m_2) \mid m_1 \in \{xx_1, ..., xx_r\}, m_2 \in \mathcal{G}(I_2)\}$$

tenim doncs que

$$\mathcal{G}(I_1 \cap I_2) = \{xx_ix_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)\} \cup \{xx_iy_j \mid \{x_i, y_j\} \in E(G)\} \cup$$
$$\cup \{xx_iy_jy_k \mid \{y_j, y_k\} \in E(G), \{x_i, y_j\} \notin E(G), \{x_i, y_k\} \notin E(G)\}$$

Els y_i denoten vèrtexs en $V(G) \setminus \{x_1, .., x_r\}$. Observem que aquests tres conjunts són disjunts. Definim una funció $\tau : \mathcal{G}(I_1 \cap I_2) \longrightarrow \mathcal{G}(I_1) \times \mathcal{G}(I_2)$ de la següent manera. Si $w \in \mathcal{G}(I_1 \cap I_2)$, aleshores definim $\phi : \mathcal{G}(I_1 \cap I_2) \longrightarrow \mathcal{G}(I_1)$ i $\psi : \mathcal{G}(I_1 \cap I_2) \longrightarrow \mathcal{G}(I_2)$ com

$$\phi(w) = \begin{cases} xx_i & \text{si } \ w = xx_ix_j \ \text{ i } \ i < j \\ xx_i & \text{si } \ w = xx_iy_j \\ xx_i & \text{si } \ w = xx_iy_jy_k \end{cases}$$

$$\psi(w) = \begin{cases} x_ix_j & \text{si } \ w = xx_ix_j \\ x_iy_j & \text{si } \ w = xx_iy_j \\ y_jy_k & \text{si } \ w = xx_iy_jy_k \end{cases}$$

Per construcció tenim que τ té la propietat que $w = lcm(\phi(w), \psi(w))$. Per tant, només queda verificar una última condició. Suposem que $S \subset \mathcal{G}(I_1 \cap I_2)$. Si S conté algun monomi divisible per alguna variable $y \notin \{x, x_1, ..., x_d\}$, aleshores, $lcm(\phi(S)) \mid lcm(S)$ ja que $y \nmid lcm(\phi(S))$. Alternativament, tenim que $S \subseteq \{xx_ix_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)\}$. En aquest cas, sigui f el màxim índex tal que x_f apareix en un monomi de S. Aleshores, per definició de ϕ, x_f no divideix $\phi(w)$ per tot $w \in S \Rightarrow x_f$ no divideix $lcm(\phi(S))$. Per tant $lcm(\phi(S))$ divideix $lcm(S)$. Per altra banda, està clar que $lcm(\psi(S))$ divideix $lcm(S)$ ja que x no divideix $lcm(\psi(S))$. Per tant, hem demostrat que $I(G) = I_1 + I_2$ és un *splitting*. □

Pel Teorema 7.3 per ser un *splitting* és un *Betti splitting*.

Per al següent corol·lari utilitzarem els grafs G_i i $G_{(x)}$ que hem definit a la secció de grafs cordals.

Corołari 6.7. *Sigui G un graf i $x \in V(G)$ un splitting vertex, si $N(x) = \{x_1, ..., x_r\}$, aleshores*

$$\langle xx_1, ..., xx_r \rangle \cap I(G \setminus \{x\}) = xI(G_{(x)}) + xx_1I(G_1) + \cdots + xx_rI(G_r)$$

Aquest corol·lari surt directament de les definicions dels grafs G_i i $G_{(x)}$ i de la partició dels generadors de $\langle xx_1, ..., xx_r \rangle \cap I(G \setminus \{x\})$ que s'ha fet prèviament a la demostració del Teorema 6.6.

Lema 6.8. *Sigui x una variable diferent de $x_1, ..., x_t$ en $K[x_1, ..., x_n]$ aleshores $\langle xx_1, ..., xx_t \rangle \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ té una resolució lineal per tot $t < n$.*

Això es deu que l'ideal $\langle xx_1, ..., xx_t \rangle = x\langle x_1, ..., x_t \rangle$ i de fet tenim que com x no és divisor de 0, aleshores $\langle xx_1, ..., xx_t \rangle \cong \langle x_1, ..., x_t \rangle$ com a mòduls graduats, per tant les seves resolucions seran les mateixes amb els mòduls lliures shiftats en 1 grau, això es deu a que els generadors de $\langle xx_1, ..., xx_t \rangle$ tenen un grau més que els de $\langle x_1, ..., x_t \rangle$. Observem que la resolució de l'ideal $\langle x_1, ..., x_t \rangle$ és la que ve donada pel complex de Koszul i per tant és lineal.

6.2 Demostració del Teorema de Fröberg

Finalment arribem al final del treball. Un cop construides totes les eines, ja podem passar a demostrar el Teorema de Fröberg. Recordem que la demostració original de Fröberg a [10] utilitza complexes simplicials. La demostració que es donarà a continuació es pot trobar a [18]. El lector interessat a [10] trobarà molts resultats interessants relacionats amb el que anem a veure.

Teorema 6.9. *(de Fröberg). Sigui G un graf. I(G) té una resolució lineal si, i només si el graf G^c és cordal.*

Demostració. Ho farem per inducció sobre $|V(G)|$.
Si $|V(G)| \leq 3$ simplement podem comprovar tots els grafs possibles. En aquesta situació tenim que tots els grafs són cordals, ja que, al tenir tres vèrtexs o menys, el graf no pot tenir cicles de llargada més gran que 3, no considerarem els grafs de vèrtexs aillats, ja que, en aquest cas el edge ideal és buit i no hi ha res a provar. Si $|V(G)| = 2$ només podem considerar el graf amb $V(G) = \{x_1, x_2\}$ i $E(G) = \{\{x_1, x_2\}\}$ per tant $I(G) = \langle x_1x_2 \rangle \subseteq K[x_1, x_2]$ i estem en un cas particular de l'ideal $\langle xx_1, \cdots xx_t \rangle$ que ja hem vist que té una resolució lineal.

Si $|V(G)| = 3$ amb $V(G) = \{x_1, x_2, x_3\}$, només hem de veure que la resolució és lineal sobre el nombre d'arestes, és a dir 1,2 o 3, ja que, si no, són isomorfs com a grafs i, per tant, els seus edge ideals també. Si $E(G) = \{\{x_1, x_2\}\}$ estem en el cas de $|V(G)| = 2$, si $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$ i $I(G) = \langle x_1x_2, x_2x_3 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3]$ aleshores tenim la següent resolució, que és lineal

$$0 \longrightarrow R(-3) \longrightarrow R^2(-2) \longrightarrow I(G) \longrightarrow 0$$

Finalment, l'últim cas que queda per veure és

$$E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_1\}\}, \qquad I(G) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 \rangle$$

Per fer aquest cas utilitzarem un *splitting*, tenim que $I(G) = I_1 + I_2$ on $I_1 = \langle x_1x_2, x_2x_3 \rangle$ i $I_2 = \langle x_3x_1 \rangle$, tenim que $I_1 \cap I_2 = \langle x_1x_2x_3 \rangle$. La resolució de I_1 és la que acabem de calcular. La resolució de I_2 és la següent

$$0 \longrightarrow R(-2) \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0$$

ja que I_2 és un mòdul lliure de rang 1 generat per un element de grau 2.

La resolució de $I_1 \cap I_2$ és

$$0 \longrightarrow R(-3) \longrightarrow I_1 \cap I_2 \longrightarrow 0$$

ja que $I_1 \cap I_2$ és un mòdul lliure de rang 1 generat per un element de grau 3.

Finalment utilitzant la *mapping cone construction* introduïda prèviament tenim la seguent resolució per I(G)

$$0 \longrightarrow R(-3) \oplus R(-3) \longrightarrow R(-2)^2 \oplus R(-2) \longrightarrow I(G) \longrightarrow 0$$
$$\equiv 0 \longrightarrow R(-3)^2 \longrightarrow R(-2)^3 \longrightarrow I(G) \longrightarrow 0$$

Aquesta resolució sabem que és minimal ja que hem fet el x_2-*splitting* de $I(G)$. Finalment només queda observar que és lineal.

Tenim doncs que un cop comprovats tots els casos, podem assegurar que el teorema és cert per $|V(G)| \leq 3$.

Si G és el graf amb $V(G) = \{x, x_1, ..., x_t\}$ i $E(G) = \{\{x, x_1\}, \{x, x_2\}, ..., \{x, x_t\}\}$ amb $r \geq 1$, aleshores. $I(G) = \langle xx_1, ..., x_t\rangle$ que ja hem vist que té una resolució lineal i G^c és cordal ja que en aquesta situació, $G^c = K_t \cup \{x\}$, és a dir, el graf complet de t vèrtexs i un vèrtex aïllat $\{x\}$.

Per tant podem suposar que $|V(G)| \geq 4$ i existeix un vèrtex $x \in V(G)$ tal que $G \setminus \{x\}$ no és un graf de vèrtexs aïllats, és a dir, un *splitting vertex*. Per tant tenim un *Betti splitting* de $I(G)$ de la següent forma

$$\beta_{i,j}(I(G)) = \beta_{i,j}((xx_1, ..., xx_t) + \beta_{i,j}(I(G \setminus \{x\}) + \beta_{i-1,j}(L)$$

on $L = xI(G_{(x)}) + xx_1I(G_1) + \cdots + xx_tI(G_r)$.

Suposem que $I(G)$ té una resolució lineal, volem veure que G^c és un graf cordal.

Com que $I(G)$ té una resolució lineal $\Rightarrow$ $(xx_1, ..., xx_t)$, $I(G\setminus\{x\})$ i L tenen una resolució lineal. Per inducció sobre el nombre de vèrtexs, tenim que, $(G\setminus\{x\})^c = G^c\setminus\{x\}$ és cordal. Com que L té una resolució lineal tenim que $L = xI(G_{(x)})$ ja que no pot tenir generadors de grau 4, si els tingués, tindríem que fent la *mapping cone construction* hi haurien generadors de grau 4 a la primera sizigia i això contradiu el fet que que la resolució de $I(G)$ és lineal.

Per tant, tenim que $I(G_i) = 0$ per tot i $\Rightarrow$ els grafs G_i no tenen vèrtexs per tot i. Finalment com que $L = xI(G_{(x)})$ té una resolució lineal també l'ha de tenir l'ideal $I(G_{(x)})$, doncs son isomòrfs com a mòduls graduats. Com que per definició el graf $G_{(x)}$ té menys vèrtexs que G, per inducció sobre el nombre de vèrtexs tenim que $G_{(x)^c}$ és cordal. Hem vist doncs que $(G \setminus \{x\})^c$ és cordal, $G^c_{(x)}$ és cordal i els grafs G_i no tenen vèrtexs, utilitzant el Lema 6.11 demostrat a la secció de grafs, tenim que, G^c és cordal, com volíem veure.

Suposem ara que G^c és cordal. Sabem que l'ideal $_1, ..., xx_t\rangle$ sempre té una resolució lineal, pel Lema 6.11 sabem que $(G\setminus\{x\})^c$ és cordal,per tant, per inducció sobre el nombre de vèrtexs $\Rightarrow$ $I(G\setminus\{x\})$ té una resolució lineal. Com que G^c és cordal pel Lema 6.11 tenim que els grafs G_i no tenen vèrtexs, per tant, $L = xI(G_{(x)})$, que sabem que té una resolució lineal, doncs el Lema 6.11 ens diu que $G^c_{(x)}$ és cordal i per tant per inducció sobre nombre de vèrtexs de G tenim que $I(G_{(x)})$ té una resolució lineal $\Rightarrow$ $L = xI(G_{(x)})$ també la té doncs son isomòrfs com a mòduls graduats. Per tant, com que hem fet un $x-$*splitting* tenim que al ser les tres resolucions lineals, també ho és la de $I(G)$ pel Teorema 6.6. $\square$

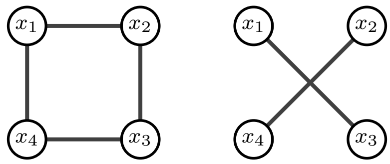
6.3 Exemples

Aquest resultat pot ser molt útil, doncs com ja hem vist, identificar grafs cordals és una tasca relativament fàcil, ho podem fer amb algoritmes de temps lineal. Passem a comentar algunes conseqüencies d'aquest resultat.

Exemple 6.10. Fixem-nos en les resolucions dels edge ideals dels cicles, recordem la definició. Sigui C_n un cicle de n vèrtexs.

$$V(C_n) = \{x_1, ..., x_n\}, \qquad E(C_n) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, ..., \{x_{n-1}, x_n\}\}$$

A continuació veiem C_4 i C_4^c

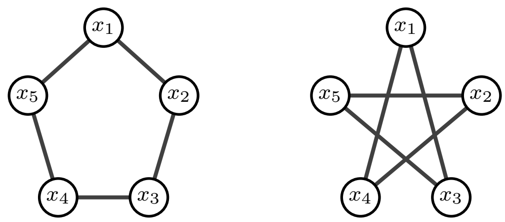


Observem que C_4^c és cordal doncs no té cicles i per tant la resolució de l'ideal

$$I(C_4) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\rangle$$

és lineal.

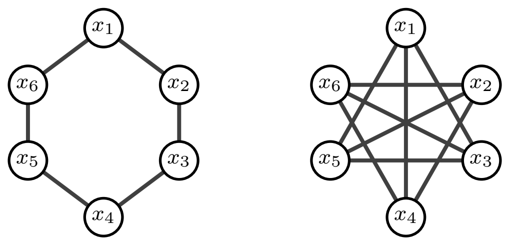
La següent pregunta que ens podem fer és: És lineal la resolució de $I(C_5)$? A continuació veiem C_5 i C_5^c



Observem que el cicle $(x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_1)$ en C_5^c no té cordes i té longitud 5. Per tant, C_5^c no és cordal i en conseqüència

$$I(C_5) = \langle x_1x_2, x_2x_2, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1\rangle$$

no té una resolució lineal. Veiem que passa en C_6. A continuació veiem C_6 i C_6^c



Fixem-nos que en aquest cas C_6^c no és cordal, doncs el cicle $(x_1, x_3, x_6, x_4, x_1)$ no té cordes i té longitud més gran que 3. Per tant, $I(C_6)$ tampoc té una resolució lineal.

Volem generalitzar aquest resultat per $n \geq 6$, sigui x_i un vèrtex qualsevol, fixem-nos que podem fer el cicle

$$C' = (x_i, x_{i+2}, x_{i-1}, x_{i+3}, x_i)$$

A partir d'ara considerem C_n amb $n \geq 6$. Agafem un vèrtex qualsevol amb l'ordenació dels vèrtexs del cicle en sentit horari (com en els exemples anteriors). Fixem la següent notació, a partir d'ara quan fem referència als índexs dels vèrtexs utilitzarem els índexs com elements de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, és a dir, $x_i = x_{i+n}$. Quan sumem en els índexs movem les posicions en sentit horari i quan restem les movem en sentit antihorari.

Amb el cicle que hem definit abans C'. Com que les arestes del cicle que hem definit no són de C_n ja que $n \geq 6$, sí són de C_n^c i per tant aquest cicle existeix. El cicle que hem descrit té longitud 4, si veiem que no té cordes tindrem que C_n^c no és cordal. Fixem-nos que x_{i+2} només està connectat a x_{i-1} i x_i en el C_n^c. x_i només està connectat a x_{i+2} i x_{i+3} en C_n^c. x_{i-1} només està connectat a x_{i+2} i x_{i+3} en C_n^c. Finalment, x_{i+3} només està connectat a x_i i x_{i-1} en C_n^c. Per tant, aquest cicle no té cordes i podem concloure que C_n^c no és cordal si $n \geq 6$.

Ja que en la demostració del Teorema de Fröberg i en aquests exemples hem vist que per $n \leq 4$ C_n^c té una resolució lineal. Ajuntant aquests resultats amb el que acabem de veure, obtenim aquest corol·lari.

Corol·lari 6.11. *$I(C_n)$ té una resolució lineal $\Leftrightarrow n \leq 4$.*

Un altre resultat que surt directament del Teorema de Fröberg és el següent. Com que els complementaris dels grafs complets són grafs de vèrtexs aïllats i aquests son cordals $\Rightarrow I(K_n)$ sempre té una resolució lineal.

És d'interès comentar que fa uns anys es va conjecturar el següent resultat més avançat. Sigui G un graf, anomenem el *edge ring* de G i denotem per $K[G]$ el següent objecte $K[G] = K[x_1, ..., x_n]/I(G)$. La conjectura ens diu que si $K[G]$ té una resolució 2-lineal, és a dir generada en grau 2 i lineal, exactament la mateixa situació que durant aquest treball. Aleshores, la dimensió projectiva, és a dir, la longitud mínima de la resolució lliure graduada, de $K[G]$ coincideix amb el grau màxim dels vèrtexs en G. Recordem que el grau d'un vèrtex és el nombre de veïns que té. Aquesta conjectura és falsa en general, però pot ser certa sota les hipòtesis descrites en termes d'anells de Stanley-Reisner que es troben en el següent preprint [9], just acabat de publicar per Fröberg, on també es pot trobar més informació sobre aquesta conjectura.

7 Conclusions

La relació entre l'àlgebra commutativa i la teoria de grafs és molt àmplia i una línia d'investigació que avui en dia encara és oberta, de fet, hem vist que tant Ralf Fröberg, l'autor del teorema central d'aquest treball, com molts altres matemàtics continuen fent publicacions sobre aquesta temàtica.

Mirant enrere, es veu com, a vegades, problemes aparentment més complicats o poc intuïtius, en considerar-los en termes algebraics o de grafs es converteixen en problemes més senzills o, fins i tot, problemes que ja tenen resposta. Més en general, les relacions entre les diferents branques de les matemàtiques han resultat d'una gran utilitat durant la història, en moltes ocasions matemàtics que eren aliens a la disciplina que englobava un pregunta sense resposta l'han resolt establint relacions entre la seva àrea de coneixement i la del problema. La construcció de les eines que porten a poder definir i caracteritzar les resolucions lliures ocupa bona part del treball, la teoria al darrere d'aquestes és molt extensa i en aquest treball només se'n veuen les seves propietats més essencials. També, de resultats relacionant les resolucions dels edge ideals amb les propietats dels seus grafs n'hi ha molts més i molt més avançats. Aquest treball ha volgut ser un resum i exemple d'algunes d'aquestes correspondències que hem descrit.

Tot i que l'objectiu, al principi d'aquest treball, era arribar a demostrar el Teorema de Fröberg i aquest s'ha assolit. Algunes possibles ampliacions podrien ser les següents.

1. Aplicar alguns dels algoritmes de grafs comentats durant el treball per veure casos particulars més complexos dels resultats generals.
2. Afegir una part computacional per resoldre resolucions lliures, per exemple, utilitzant el programa $Maculay$.
3. Estudiar el teorema de Fröberg per hipergrafs.
4. Estudiar els resultats de Fröberg a [9].

Referències

[1] Barlett, P. J. : Lecture 3: Chordal Graphs. *Mathcamp*, 2011

[2] Blyth, T. S. : Module theory, an approach to linear algebra, *Oxford University Press*, 1977.

[3] Chen. J.; Kou. L.; Cui. X.: An Approximation Algorithm for the Minimum Vertex Cover Problem, *Procedia Engineering, Volume 137*. 180-185, ISSN 1877-7058 2016

[4] Cox, D. A.; Little, J.; O'Shea, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms. Fourth Edition. *Springer-Verlag New York, Inc.*, 2015

[5] Dummit, D.S.; Foote, R.M.: Abstract Algebra. Third Edition. 2004

[6] Eliahou, S.; Kervaire, M.: Minimal resolutions of some monomial ideals. *J. Algebra*, 129 (1): 1-25, 1990. MR1037391

[7] Francisco, C. A.; Hà, H. T.; Van Tuyl, A.: Splitting of monomial ideals. *Proc. Amer. Math. Soc*, 137 (10): 3271-3282, 2009. MR2515396

[8] Francisco, C. A.; Hà, H. T.; Van Tuyl, A.: Colorings of hypergraphs, perfect graphs and associated primes of powers of monomial ideals. *J. Algebra*, 331 : 224-242, 2011.

[9] Fröberg, R: Solution to a conjecture on edge rings with 2-linear resolutions. *math.AC*, arXiv:2205.14436, 2022

[10] Fröberg, R.: On Stanley-Reisner rings. *Topics in Algebra*, Part 2, Warsaw, 1988. PWN, vol. 26 , *Banach Center Publ.* : 57-70, Warsaw, 1990.

[11] Hà, H. T.; Van Tuyl, A.: Splittable ideals and the resolutions of monomial ideals. *J. Algebra*, 309 (1): 405-425, 2007. MR2301246

[12] Hà, H. T.; Van Tuyl, A.: Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betty numbers. *J. Algebraic Combin*, 27 (2): 215-245, 2008. MR2375493

[13] Kumar, A: Lecture 2: Chordal Graphs, *CSL 851: Algorithmic Graph Theory*, 2013

[14] Lang, S.: Algebra. Revised Third Edition. *Springer-Verlag New York, Inc.*, 2002

[15] Loper, M.: On resolutions, minimal and virtual. *School of Mathemathics, University of Minnesota*, 2018

[16] Northcott, D. G.: Finite free resolutions, *Cambridge University Press*, 1976.

[17] Rose, D. J.; Tarjan, R. E.; Lueker, G. S.: Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM Journal on Computing*, 5 (2): 266–283, doi:10.1137/0205021.

[18] Van Tuyl, A.: A Beginner's Guide to Edge and Cover Ideals. In: Bigatti, A.; Gimenez, P.; Sáenz-de-Cabezón, E.: (eds) Monomial Ideals, Computations and Applications. *Lecture Notes in Mathematics, vol 2083. Springer*, Berlin, Heidelberg. 2013