Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

REPRESENTACIÓ DE GRUPS DE LIE COMPACTES I LA SEVA APLICACIÓ EN FÍSICA DE PARTICULES

Autor: Marc Miranda Riaza

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2022

Abstract

The main goal of this work is to introduce the notion of Lie groups and their representations.

We start with a reminder of the basic concepts of differential geometry. Immediately after we introduce the concept of a Lie group and some of its most important related notions, namely its Lie algebra, the adjoint representation and the exponential map.

Then the main results of representation theory are introduced, with a focus on the representations of compact Lie groups. Torus representations receive special consideration due to their later importance. We also present the notion of a representation of a Lie algebra, along with the weights and infinitesimal weights of a Lie group.

Finally, we introduce maximal tori of compact connected Lie groups, together with the corresponding Weyl group. We show without proof that the weights of the adjoint representation of a compact connected Lie group form a root system. These concepts are exemplified for the Lie group $SU(3)$ due to its importance in particle physics. This is the topic of the last section.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és introduir la noció de grup de Lie i les seves representacions.

Comencem amb un recordatori dels conceptes bàsics de geometria diferencial. Immediatament després introduïm el concepte de grup de Lie i algunes de les nocions relacionades més importants, principalment l'àlgebra de Lie, la representació adjunta i l'aplicació exponencial.

Llavors s'exposen els resultats principals de teoria de representacions, amb especial interès en els grups de Lie compactes. Les representacions de tors reben especial consideració degut a la posterior importància. També presentem les representacions d'una àlgebra de Lie, juntament amb els pesos i pesos infinitesimals d'un grup de Lie.

Finalment, introduïm els tors maximals d'un grup de Lie compacte i connex, juntament amb el grup de Weyl associat. Mostrem sense demostració que els pesos de la representació adjunta d'un grup de Lie compacte i connex formen un sistema d'arrels. Aquests conceptes s'exemplifiquen pel grup de Lie $SU(3)$, degut a la seva importància en física de partícules. Aquest és el contingut de l'última secció.

2020 Mathematics Subject Classification. 22E10, 22E70, 20C35, 20C99

Agraïments

Principalment vull agrair al Dr. Ignasi Mundet Riera acceptar tutoritzar-me el treball i tots els consells i discussions, tant del propi treball o altres qüestions. Estudiar la teoria de representacions de grups de Lie ha sigut fascinant i el Dr. Ignasi Mundet ha compartit amb mi el seu sincer entusiasme, sigui pels grups de Lie i la teoria de representacions, la física de partícules o la lingüística. Bardzo dziękuję!

Voldria també agrair al Dr. Roberto Rubio haver acceptat inicialment tutoritzar-me. Tot i que circumstàncies majors van impossibilitar la seva tutoria, les converses amb ell van ajudar a concretar el treball.

Donat que l'entrega del TFG representa el final d'una important etapa, m'agradaria agrair a tothom amb qui he pogut compartir-la i que ha fet que fos fantàstica. Moltes gràcies amics i família!

Índex

1 Introducció

El projecte

Una de les estructures fonamentals de la memòria és la d'un grup de Lie. Els grups apareixen sovint en Matemàtiques i en Física com a representants de les simetries d'un cert objecte. Un exemple típic seria el de n partícules indistingibles, situació en que hom podria aplicar qualsevol permutació entre elles i el sistema físic resultant romandria inalterat si realment són indistingibles. El conjunt d'aquestes permutacions té estructura de grup, l'anomenat grup simètric S_n. És aquest un cas en que les simetries del sistema són discretes. Però si llavors pensem en l'esfera S^2 dins l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ i les seves simetries de rotació, requerim certa noció de continuïtat i diferenciabilitat, que és la que ens subministrarà el concepte de grup de Lie. En Matemàtica Física apareixen molts grups de Lie importants. És el cas dels grups lineals generals $GL(n, \mathbb{C})$ i $GL(n, \mathbb{R})$, dels grups unitaris $U(n)$ i $SU(n)$, dels grups ortogonals $O(n)$ i $SO(n)$, del grup de Lorentz $O(1, 3)$ i tants altres.

Com a varietat diferenciable amb estructura de grup, un grup de Lie no és l'objecte matemàtic més simple. La teoria de representacions permet estudiar els grups de Lie utilitzant una estructura matemàtica més simple i estudiada extensivament: l'espai vectorial. Això permet l'ús de moltes eines pròpies de l'Àlgebra Lineal —com és la traça, les sumes directes o els productes tensorials— per estudiar els grups de Lie.

Els grups de Lie i les seves representacions són un dels pilars matemàtics de la Mecànica Quàntica i del model estàndard de la física de partícules. Per concloure el treball veurem com les representacions de $SU(3)$ van ser utilitzades per Murray Gell-Man i Yuval Ne'eman per posar llum en el camp de la física de partícules.

Si bé és apreciable que la principal motivació de l'autor és la comprensió d'una de les peces matemàtiques claus de la física moderna, la teoria de representacions de grups de Lie s'utilitza en diferents camps de les matemàtiques. Un exemple és l'anàlisi de Fourier que, a través del teorema de Peter i Weyl, pot entendre's en termes de descomposició de representacions en representacions irreductibles. Si bé no tractem aquí el teorema, el lector interessat pot adreçar-se a [2], capítol III. Aquest llibre de text, *Representation of Compact Lie Groups* és la principal font de referència d'aquest treball. Una gran quantitat dels resultats aquí exposats provenen d'aquest llibre.

Estructura de la Memòria

L'estructura del treball és la següent:

1. El capítol 2 comença amb un recordatori de geometria diferencial. Es presenta a continuació el grup de Lie i molts dels conceptes relacionats, principalment l'aplicació de translació per l'esquerra, l'àlgebra de Lie, el producte de Lie, la representació adjunta i l'aplicació exponencial. Aquesta última vincula un grup de Lie amb l'àlgebra de Lie que defineix. Al final del capítol es discuteixen exemples de grups de Lie, entre els quals apareixen els mencionats a la introducció.

2. El capítol 3 està dedicat a la teoria de representacions. Comencem introduint el concepte de representació complexa i de morfisme de representacions. Després de mostrar algunes representacions, veiem com utilitzar eines d'Àlgebra Lineal per construir noves representacions a partir d'altres. Centrant-nos en el cas de representacions de grups de Lie compactes, presentem resultats teòrics importants, com és el lema de Schur i la descomposició d'una representació com a suma directa de representacions irreductibles. A

continuació fem una exposició més detallada de les representacions de tors i d'àlgebres de Lie, principalment dels seus pesos i pesos infinitesimals.

3. En el capítol 4 es tracten grups de Lie compactes i connexos. En aquests hi distingim tors continguts en ells: els tors maximals. A partir del tor maximal podem definir el grup de Weyl i l'acció d'aquest sobre el tor. Com a exemple mostrem com són els tors maximals i els grups de Weyl de $U(n)$ i $SU(n)$. Seguidament exposem el concepte de sistema d'arrels i mostrem que els pesos de la representació adjunta formen un sistema d'arrels. Ens detenim en el cas particular de $SU(3)$ degut a la seva importància en física de partícules. Acabem exposant justament l'us del grup $SU(3)$ per Gell-Mann i Ne'eman per posar ordre entre la gran quantitat de partícules conegudes.

2 Grups de Lie

En gran mesura assumirem aquí certa familiaritat amb el camp de la geometria diferencial. Tot i això, després de definir formalment el grup de Lie en recordarem alguns conceptes fonamentals.

Definició 2.1. *Un **grup de Lie** és una varietat diferenciable G equipada amb una estructura de grup $(G, \cdot)$ complint que l'operació de grup*

$$\cdot : G \times G \to G$$

és una aplicació diferenciable.

L'últim requisit és una relació de compatibilitat entre les dues estructures — la de grup i la de varietat diferenciable—. Notem que pel teorema de la funció inversa, el requeriment de que l'operació de grup sigui diferenciable implica que l'aplicació que assigna a un element el seu invers $g \mapsto g^{-1}$ també és diferenciable. Definim llavors els tipus de morfismes que respecten l'estructura de grup de Lie:

Definició 2.2. *Siguin G i H grups de Lie. Una aplicació $f : G \to H$ és un **homomorfisme de grups de Lie** si és un homomorfisme de grups i una aplicació diferenciable.*

2.1 Varietats diferenciables

Fem aquí un breu repàs de conceptes de geometria diferencial que seran essencials al llarg de la memòria.

Definició 2.3. *Una **varietat topològica** de dimensió $n \in \mathbb{N}$ és un espai topològic M de Hausdorff que admet una base numerable d'oberts i tal que tot punt $p \in M$ admet un entorn obert U homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$. Una **carta local** de la varietat és un parell (U, ϕ) on U és un obert de la topologia i $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^2$ és un homeomorfisme. Una col·lecció de cartes locals $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ s'anomena un **atles** si $\cup_{i \in I} U_i = M$, és a dir, si les cartes locals recobreixen tota la varietat.*

La idea darrera del concepte de varietat topològica és la de generalitzar l'espai euclidià a objectes que, si bé globalment no es comporten com a tal, sí que ho fan de manera local. Aquest comportament local de la varietat com a espai euclidià ve donat pel requeriment de que cada punt admeti un entorn obert U homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$. A través d'aquest homeomorfisme podrem donar coordenades locals a la varietat topològica. En efecte, podem escriure l'homeomorfisme com $\phi = (x_1, ..., x_n)$ on les aplicacions $x_i : U \to \mathbb{R}$ s'anomenen **coordenades locals**. Els exemples més típics de varietats topològiques, exceptuant els propis espais euclidians $\mathbb{R}^n$, són les esferes S^n i els tors T^n. També un $\mathbb{R}$-espai vectorial V de dimensió finita és una varietat topològica. En efecte, una vegada seleccionada una base, $V \cong \mathbb{R}^n$. De manera similar, tot $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió finita pot interpretar-se com a varietat topològica.

En aquest moment no disposem encara del concepte de diferenciabilitat en varietats. Per això serà necessari equipar la varietat topològica d'estructura addicional. Notem que fins ara la única noció de diferenciabilitat la tenim definida entre oberts d'espais euclidians. No per casualitat, les varietats topològiques, a través de les cartes locals, es comporten localment com espais euclidians. I justament si prenem dues cartes, (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2), la composició $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_1 \to U_2$ és un homeomorfisme (anomenat **canvi de coordenades**) entre dos oberts de $\mathbb{R}^n$, possiblement buits. Aquest raonament justifica la següent definició:

Definició 2.4. *Diem que un atles és **diferenciable** si per tot parell de cartes locals* (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) *tals que* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ *l'aplicació de canvi de coordenades* $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_1 \to U_2$ *és diferenciable (en el sentit de* $\mathcal{C}^\infty$*). Direm que dos atles diferenciables són **equivalents** si la seva unió torna a ser un atles diferenciables.*

Ara ja podem donar a la varietat topològica, a través d'atles diferenciables, aquesta estructura addicional amb la noció de diferenciabilitat. Per fer-ho, notem que la relació definida entre atles diferenciables és una relació d'equivalència. I com que interessa no distingir entre estructures diferenciables que provinguin d'atles diferenciables equivalents, en la definició de varietat diferenciable emprem classes d'equivalències.

Definició 2.5. *Sigui* M *una varietat topològica de dimensió* n*. Una **estructura diferenciable** sobre* M *és una classe d'equivalència d'atles diferenciables. Una **varietat diferenciable** de dimensió* $n \in \mathbb{N}$ *és un parell* $(M, [\mathcal{U}])$ *on* M *és una varietat topològica de dimensió* n *i* $[\mathcal{U}]$ *és una estructura diferenciable sobre* M*. Sovint ens referirem a la varietat diferenciable únicament per* M*.*

A partir d'aquest moment treballarem exclusivament amb varietats diferenciables, de tal manera que a no ser que ens referim específicament a varietats topològiques, sovint anomenarem a les varietats diferenciables simplement com a varietats.

Podem generalitzar la noció de diferenciabilitat a aplicacions entre varietats diferenciables:

Definició 2.6. *Siguin* M *i* N *dues varietats diferenciables. Una aplicació* $f : M \to N$ *és **diferenciable en un punt*** $p \in M$ *si existeixen cartes locals* (U, ϕ) *a* M *amb* $p \in U$ *i* (V, ψ) *a* N *amb* $f(p) \in V$ *de tal manera que la composició* $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ *és diferenciable a* $\phi(p)$*. Diem que* f *és diferenciable si ho és en tot punt* $p \in U$*.*

Que la varietat sigui diferenciable, això és, que sigui una varietat topològica equipada amb una classe d'equivalència d'atles diferenciables, ens assegura que si l'aplicació f és diferenciable en un punt, per qualsevol tria de cartes locals amb $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ a M amb $p \in \tilde{U}$ i $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ a N amb $f(p) \in \tilde{V}$ la composició $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ és diferenciable a $\tilde{\phi}(p)$.

Serà de capital importància la noció d'espai tangent a una varietat diferenciable M en un punt $p \in M$. Notem que en cap moment ens estem imaginant la varietat *embedded* en un cert espai euclidià $\mathbb{R}^n$, així que hem de recórrer a una definició més abstracte d'espai tangent. Recordarem aquí les definicions oportunes de geometria diferencial, sense entrar a demostrar propietats importants que es suposen conegudes.

Definició 2.7. *Sigui* M *una varietat diferenciable. Denotem el conjunt de les aplicacions diferenciables* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *com* $\mathcal{F}(M)$*. Una **derivació** a* M *en un punt* $p \in M$ *és una aplicació* $\mathbb{R}$*-lineal* $D : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ *complint la típica llei de Leibniz de les derivacions, és a dir,* $D(\phi\theta) = D(\phi)\theta(p) + \phi(p)D(\theta) \quad \forall \phi, \theta \in \mathcal{F}(M)$*. Al conjunt de totes les derivacions en un punt* $p \in M$*, que té estructura d'espai vectorial amb les operacions típiques d'addició i multiplicació de funcions, l'anomenem **espai tangent** a* M *en el punt* p *i el denotem per* T_pM*.*

Com a exemple conegut de geometria diferencial, l'espai tangent T_pV en qualsevol punt $p \in V$ d'un espai vectorial real o complex de dimensió finita és isomorf al mateix espai, $T_pV \cong V$. També és conegut que en qualsevol punt d'una varietat, el seu espai tangent és un espai vectorial de la mateixa dimensió que la pròpia varietat. Si la varietat és de dimensió n, l'espai tangent a qualsevol punt $p \in M$ és de dimensió n, és a dir, $T_pM \cong \mathbb{R}^n$. Però justament degut a la definició de varietat topològica -i, en conseqüència, de varietat diferenciable- com a localment homeomorfa a un obert de $\mathcal{R}^n$ -i, conseqüentment, localment homeomorfa a tot

$\mathcal{R}^n$-, podem interpretar l'espai tangent T_pM com format pel conjunt de direccions i velocitats possibles des de les quals una partícula, situada a p, pot moure's dintre la pròpia varietat. L'espai tangent, doncs, representa en cert sentit els canvis dins la pròpia varietat.

Donades dues varietats diferenciables M i N, i una aplicació diferenciable entre elles $f : M \to N$, hom pot justament voler recuperar la noció de diferencial que disposem per funcions diferenciables d'espais euclidians. Com que la definició serà més abstracte, donem abans certa motivació en la línia del que acabem de comentar respecte l'espai tangent. Dèiem que l'espai tangent T_pM a una varietat M en un punt $p \in M$ representa el possible moviment, des del punt p, dintre la varietat. Si tenim llavors una aplicació diferenciable entre dues varietats $f : M \to N$, ens interessarà relacionar com canvis en la primera produiran canvis en la segona. Però justament estem dient que els canvis en les respectives varietats venen donats per vectors - les derivacions- dels respectius espais tangents. Havent fet aquest comentari, podem ja recórrer a la definició en si:

Definició 2.8. *Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats. Definim el* ***diferencial****, o* ***aplicació lineal tangent****, de f a un punt $p \in M$ com l'aplicació lineal $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida de tal manera que*

$$\forall \phi \in \mathcal{F}(N) \ \ \forall D \in T_pM \qquad T_pf(D)(\phi) = D(\phi \circ f)$$

L'assignació $f \mapsto T_pf$ enviant qualsevol aplicació diferenciable $f : M \to N$ al seu diferencial en un punt $p \in M$, $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$, té caràcter functorial (covariant), és a dir, envia la identitat a la identitat $T_pf(id) = id$ i preserva la composició de morfismes $T_qg \circ T_pf = T_p(g \circ q)$ per aplicacions $f : M \to N$ amb $f(p) = q$ i $g : N \to L$ amb $g(q) = r$. Donada la definició usual d'isomorfisme en teoria de categories, el caràcter functorial ens assegura que el diferencial d'aplicacions diferencials isomorfes -això és, de difeomorfismes- és ell mateix un isomorfisme d'espais vectorials.

Al llarg de la memòria farem ús de dos conceptes importants de geometria diferencial dels que, per limitació d'espai, donarem aquí només una idea vague. Vegi's, per exemple, Bröcker i Jänich [1], capítol 3, pàgina 30. Donada una varietat M, podem reunir els seus espais tangents a tots els punts en un objecte anomenat el **fibrat tangent** i denotat per TM.

$$TM = \bigcup_p T_pM$$

El propi fibrat tangent, com a exemple de **fibrat vectorial**, es composa de l'**espai total** TM, l'**espai base** M, les **fibres** T_pM i la projecció $\pi : TM \to M$ enviant $v \in T_pM$ a p. Si M és una varietat diferenciable de dimensió n, podem dotar el seu fibrat tangent TM d'una topologia i d'una estructura diferenciable amb el que el fibrat és ell mateix una varietat diferenciable de dimensió $2n$. És justament degut al fet que hem dotat el fibrat d'una estructura de varietat diferenciable que podem definir finalment el concepte d'espai vectorial diferenciable sobre una varietat.

Definició 2.9. *Sigui M una varietat diferenciable. Un* ***camp vectorial*** *diferenciable sobre M és una secció diferenciable del fibrat tangent, això és, una aplicació diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = id_M$.*

2.2 Grups de Lie

Arribats a aquest punt podríem seguir dos camins diferents. Podríem veure els exemples típics de grups de Lie (com per exemple, els grups lineals generals $GL(n, \mathbb{C})$ i $GL(n, \mathbb{R})$ i subgrups importants d'aquests com les matrius ortogonals $O(n)$ i les unitàries $U(n)$) o bé, tot deixant aquesta exposició per més endavant, podríem primer desenvolupar la teoria dels grups de Lie. Seguirem aquest últim camí. Recordem la definició de grup de Lie.

Definició 2.10. *Un **grup de Lie** és una varietat diferenciable G equipada amb una estructura de grup $(G, \cdot)$ complint que l'operació de grup*

$$\cdot : G \times G \to G$$

és una aplicació diferenciable.

Exemple 2.11. Hem comentat a (2.1) que totes les esferes S^n admeten estructura de varietat diferenciable. També admeten estructura de grup. És un fet remarcable que, en canvi, només S^0, S^1 i S^3 admeten estructura de grup de Lie. El lector interessat pot trobar una demostració utilitzant la cohomologia de De Rham a [8], p. 144-155. Això indica que l'estructura de grup de Lie és bastant més restrictiva que la de varietat diferenciable i la de grup per separat.

Observació 2.12. D'igual manera que podem dotar el producte de grups d'una estructura canònica de grup, i també el producte de varietats diferenciables és una varietat diferenciable, el producte de grups de Lie torna a ser un grup de Lie.

Comencem veient una primera diferència entre els grups de Lie i les varietat diferenciables en general. En geometria diferencial, hom acostuma a estar interessat en comparar vectors d'espais tangents diferents d'una mateixa varietat M, és a dir, corresponents a espais tangents de punts diferents. Donat que l'espai tangent és un element local a cada punt, a priori no es disposa d'una noció vàlida per fer aquesta comparació. És per això que s'introdueixen les connexions sobre les varietats, que permeten transportar vectors d'un punt a un altre, en el que es coneix com a transport paral·lel.

L'operació del grup de Lie, però, ens dona també un mètode per traslladar vectors d'un espai tangent a un altre:

Definició 2.13. *Sigui $g \in G$ un element d'un grup de Lie. L'aplicació $l_g : G \to G$ definida per $l_g(x) = g \cdot x$ s'anomena una **translació per l'esquerra**.*

Observem que aquesta aplicació és diferenciable, per ser-ho l'operació de grup, i que l'aplicació associada a g, l_g, té per aplicació inversa $l_{g^{-1}}$, és a dir, l_g és un isomorfisme. Prenent el diferencial d'una translació de l'esquerra en l'element identitat e obtenim un aplicació lineal entre els espais tangents a la identitat i al punt g, $T_e l_g : T_e M \to T_g M$. Per l'observació feta a (2.1) sobre el caràcter functorial de l'assignació $f \mapsto T_p f$, el fet que l_g sigui un isomorfisme implica que $T_e l_g$ ho és també. Així, acabem d'obtenir una manera de traslladar un vector a través dels diferents espais tangents. En particular, per tot punt g de la varietat tenim un isomorfisme canònic entre l'espai tangent a g i a la identitat, $T_e l_g$.

Definició 2.14. *Sigui G un grup de Lie amb identitat e. A l'espai tangent a la identitat $T_e G$ se l'anomena **àlgebra de Lie** i se'l denota per $\mathfrak{g} := T_e M$.*

El fet que $\mathfrak{g}$ admeti una estructura d'àlgebra de Lie ho veurem més endavant (per ara és només un espai vectorial). Però ja podem anar avançant que tot homomorfisme de grups de Lie $f : G \to H$ indueix, en considerar el diferencial a la identitat, un morfisme d'àlgebres de Lie $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, de nou de manera functorial. L'àlgebra de Lie serà un altre dels conceptes claus, que permetrà estudiar el propi grup de Lie considerant només l'espai tangent a la identitat.

L'operació de translació per l'esquerra també ens permet considerar tipus especials de camps vectorials que siguin invariants per aquestes operacions:

Definició 2.15. *Diem que un camp vectorial $X : G \to TG$ és* ***invariant per translació per l'esquerra*** *si el següent diagrama és commutatiu $\forall g \in G$*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_g"] \arrow[d, "X"'] & G \arrow[d, "X"] \\ TG \arrow[r, "Tl_g"] & TG \end{tikzcd}$$

Fixem-nos, doncs, que un camp vectorial invariant per l'esquerra queda determinat pel valor que prengui a la identitat, de tal manera que podem identificar l'àlgebra de Lie amb el conjunt de camps vectorials invariants per l'esquerra.

Passem ara a considerar les corbes integrals respecte un camp vectorial $X : G \to TG$. Sabem que un camí diferenciable $\alpha : I \to G$, defineix a cada punt $\alpha(t)$ una derivació, és a dir, un vector de l'espai tangent $T_{\alpha(t)}G$, definida de tal manera que compleix la següent propietat:

$$D(\phi) = \frac{d}{dt}\phi(\alpha(t)) \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(G)$$

Llavors hom pot qüestionar-se si, donat un camp vectorial X -que en el cas que ens ocupa, suposarem invariant per l'esquerra- sobre una varietat G, existeixen camins diferenciables sobre la varietat de manera que la derivació que defineixen a cada punt és la mateixa que dona el camp vectorial en el punt. Un camí que compleixi aquesta propietat s'anomena **corba integral** de X. L'existència i unicitat d'aquestes corbes al voltant de cada punt $x \in G$ ve assegurat per la teoria d'equacions diferencials, si bé a priori hom té el resultat de manera local [7]. Això és, la teoria d'equacions diferencials ens assegura que per tot $x \in G$ existeix una corba integral $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tal que $\alpha(0) = x$. Tanmateix, l'existència de l'aplicació de translació per l'esquerra ens assegura que, de fet, podem ampliar el domini de definició d'aquestes corbes integrals a tot $\mathbb{R}$. En efecte, si α és una corba integral, llavors $l_g \circ \alpha$ ho és per tot $g \in G$. Que $l_g \circ \alpha$ és un camí diferenciable és evident, doncs resulta de la composició d'aplicacions diferenciables. I que sigui una corba integral és conseqüència de que el camp vectorial és invariant per l'esquerra i que α és una corba integral d'aquest camp.

Aleshores, considerem $\alpha_e : (-\epsilon, \epsilon)$ la corba integral (definida, a priori, localment) complint que $\alpha_e(0) = e$. Llavors, traslladant α_e per tota la varietat amb totes les translacions per l'esquerra l_g veiem que, per unicitat de la solució maximal, el domini de definició de tota corba integral és, en el cas dels grups de Lie, tot $\mathbb{R}$. El flux global definit pel camp vectorial X és, doncs, $\Phi(t, g) = g\alpha^X(t)$, sent α^X la corba integral definida a tot $\mathbb{R}$ amb $\alpha^X(0) = e$ i $\dot{\alpha}^X(0) = X$.

El fet que el domini s'estengui a tot $\mathbb{R}$ motiva la següent definició:

Definició 2.16. *Sigui G un grup de Lie. Un* ***grup uniparamètric*** *de G és un homomorfisme de grups de Lie $\alpha : \mathbb{R} \to G$.*

Aquí considerem $\mathbb{R}$ com a grup additiu. Les corbes integrals de G per diferents $X \in \mathfrak{g}$ són grups uniparamètrics i tot grup uniparamètric de G és una corba integral. De fet, l'assignació enviant el grup paramètric $\alpha(t)$ a $\dot{\alpha}(0)$ és un bijecció entre el conjunt de grups uniparamètrics de G i l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ -que podem veure-la identificada amb el conjunt de corbes integrals complint $\alpha(0) = e$ i $\dot{\alpha}(0) = X$ per diferents $X \in \mathfrak{g}$-. Demostrem aquesta relació.

Sigui G un grup de Lie i $\alpha : \mathbb{R} \to G$ un grup uniparamètric. Com que α és un homomorfisme de grups de Lie és, en particular, un camí diferenciable. La derivació que defineix α en la identitat ($\alpha(0) = e$, en ser α un morfisme de grups) necessàriament és un element de l'àlgebra de Lie, $\mathfrak{g}$.

Ara, l'invers de l'assignació anterior és la que envia un element de l'àlgebra de Lie $X \in \mathfrak{g}$ a la corba integral del camp vectorial invariant per l'esquerra X (utilitzant la bijecció existent entre els vectors de l'àlgebra de Lie i els camps vectorials invariants per l'esquerra) complint $\alpha(0) = e$ i $\dot{\alpha}(0) = X$. Hem de veure que les corbes integrals obtingudes són efectivament grups uniparamètrics i que l'assignació enviant el grup uniparamètric α a $\dot{\alpha}(0)$ és realment una bijecció amb inversa la que acabem de donar. Considerem, doncs, la corba integral $\alpha^X(t)$ i vegem que és un grup uniparamètric. En ser una corba integral ja tenim que és diferenciable, així que ens falta veure únicament que és un morfisme de grups. Donat que prenem $\mathbb{R}$ com a grup additiu, hem de veure que $\alpha^X(s+t) = \alpha^X(s) \cdot \alpha^X(t)$. Recordem que el flux definit pel camp vectorial -invariant per l'esquerra- $X \in \mathfrak{g}$ és $\Phi(t, g) = g\alpha^X(t)$. Llavors

$$\alpha^X(s+t) = \Phi(s+t, e) = \Phi(t, \Phi(s, e)) = \Phi(s, e)\Phi(t, e) = \alpha^X(s)\alpha^X(t)$$

A la segona igualtat hem utilitzat que $\Phi(t, g)$ és un flux i a la tercera la forma concreta que adopta. Així doncs, hem vist ja que α^X és un grup uniparamètric. Demostrem finalment l'afirmació sobre la bijecció, veient que les composicions en ambdós sentits donen la identitat.

Partint d'un grup uniparamètric α, aquest defineix un vector de l'àlgebra $X = \dot{\alpha}(0)$ al qual li assignem posteriorment la corba integral -que acabem de veure és també un grup uniparamètric- α^X. Ara, el propi α defineix un flux donat per $\Phi(t, g) = g\alpha(t)$ satisfent que $\frac{\partial}{\partial t}\Big| = Tl_g(\dot{\alpha}(0))$. Però aquest és justament el flux definit pel camp invariant per l'esquerra $X \in \mathfrak{g}$. Així doncs, $\alpha^X = \alpha$ i la composició donada és la identitat. El sentit contrari és més senzill de veure. En efecte, $X \mapsto \alpha^X \mapsto \dot{\alpha}^X(0)$ és necessàriament la identitat per la definició d'α^X.

Així doncs, acabem de veure que les corbes integrals coincideixen amb els grups uniparamètrics, fet que justifica que d'ara en endavant s'utilitzi indistintament ambdós termes per referir-nos al mateix concepte.

2.3 L'àlgebra de Lie i la representació adjunta

Hem introduït anteriorment l'**àlgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ associada a un grup de Lie G com l'espai tangent a la identitat e. Com a espai vectorial, l'espai tangent té definides ja dues operacions: l'addició i el producte per un escalar d'un cos, que en aquest cas és $\mathbb{R}$ en tractar varietats diferenciables reals. Per tal de donar a $\mathfrak{g}$ l'estructura d'una $\mathbb{R}$-àlgebra de Lie necessitem encara una tercera operació. És important distingir el concepte general d'àlgebra de Lie com a estructura algebraica particular, i l'espai tangent a la identitat d'un grup de Lie, que no és sinó un exemple particular d'aquesta estructura. Recordem el concepte general:

Definició 2.17. *Una* ***àlgebra de Lie*** *sobre el cos* $\mathbb{K}$ *és una quaterna* $(A, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ *on* $(A, +, \cdot)$ *és un espai vectorial sobre el cos* $\mathbb{K}$, *i* $[\cdot, \cdot] : A \to A$ *compleix les propietats següents:*

1. *Bilinealitat:* $[aX + bY, cW + dZ] = ac[X, W] + ad[X, Z] + bc[Y, W] + bd[Y, Z]$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{K} \quad \forall X, Y, W, Z \in A$
2. $[X, X] = 0 \quad \forall X \in A$
3. *Identitat de Jacobi:* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Procedim, doncs, a equipar l'espai tangent $\mathfrak{g}$ a la identitat en un grup de Lie G amb aquesta tercera operació. Per això, recordem que l'espai tangent a una varietat en un punt és el conjunt de derivacions en aquest punt. En particular, si $X \in \mathfrak{g}$, X és una derivació a la identitat e, $X : \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$. Ara bé, l'aplicació de X sobre una aplicació diferenciable $\phi \in \mathcal{F}(G)$ defineix ella mateixa una aplicació diferenciable $X(\phi) : G \to \mathbb{R}$. Donat que hem de construir una operació binària sobre $\mathfrak{g}$, considerem un segon vector $Y \in \mathfrak{g}$. Com que $X(\phi) \in \mathcal{F}(G)$ és ella mateixa una aplicació diferenciable, podem llavors aplicar-li Y, obtenint $Y(X(\phi))$. Procedint en l'ordre invers, podem primer aplicar Y i després X.

Definim el **producte de Lie** de dues derivacions $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y]$ com la derivació que actua sobre tota aplicació diferenciable $\phi \in \mathcal{F}(G)$ com

$$[X, Y](\phi) = X(Y(\phi)) - Y(X(\phi))$$

La primera qüestió a comprovar és que efectivament aquest procediment ens porta a una derivació. Recordem que una derivació a una varietat G en un punt $p \in G$ és una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $D : \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ complint la regla de Leibniz. Doncs bé, la $\mathbb{R}$-linealitat queda assegurada per complir-la X i Y. Més interessant és la regla del producte. Vegem que la compleix:

$$\begin{aligned}
[X, Y](\phi\theta) &= X(Y(\phi\theta)) - Y(X(\phi\theta)) = X(Y(\phi)\theta + \phi Y(\theta)) - Y(X(\phi)\theta + \phi X(\theta)) \\
&= X(Y(\phi))\theta + Y(\phi)X(\theta) + X(\phi)Y(\theta) + \phi X(Y(\theta)) \\
&- Y(X(\phi))\theta - X(\phi)Y(\theta) - Y(\phi)X(\theta) - (X(\theta)) \\
&= X(Y(\phi))\theta + \phi X(Y(\theta)) - Y(X(\phi))\theta - \phi Y(X(\theta)) \\
&= [X, Y](\phi)\theta + \phi[X, Y](\theta)
\end{aligned}$$

Per la demostració hem utilitzat la $\mathbb{R}$-linealitat de X i Y, i que ambdós compleixen la regla de Leibniz. Notem que en el còmput de $X(Y(\phi\theta))$ i $Y(X(\phi\theta))$ ens hem trobat amb termes que, si bé ulteriorment s'han cancel·lat entre sí, ens asseguren que individualment no podíem definir una derivació partint únicament de $X(Y(\phi))$ o $Y(X(\phi))$. Havent demostrat que $[X, Y]$ és de nou una derivació, per veure que $(\mathfrak{g}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ és una àlgebra de Lie, faltaria comprovar les propietats (1), (2) i (3) de la definició de producte de Lie. Aquest és un fàcil exercici que no reproduirem aquí. Com a exemple, però, si $X \in \mathfrak{g}$, $[X, X] \in \mathfrak{g}$ és la derivació que envia tota aplicació diferenciable $\phi \in \mathcal{F}(G)$ a $[X, X](\phi) = X(X(\phi)) - X(X(\phi)) = 0$. És, per tant, el vector 0 de l'espai tangent.

Hem comentat a (2.1) com un $\mathbb{R}$-espai vectorial V admet estructura de varietat diferenciable. En particular, el conjunt dels endomorfismes $End(V)$, com a $\mathbb{R}$-espai vectorial és també una varietat diferenciable. Així mateix, el conjunt dels automorfismes $Aut(V)$, com a subconjunt obert de $End(V)$, és una varietat diferenciable. Veurem més endavant que V i $Aut(V)$ no són només varietats diferenciables, sinó que admeten estructura de grups de Lie, sent $End(V)$ l'àlgebra de Lie associada a $Aut(V)$. Quan arribi aquell moment, en mostrar alguns dels grups de Lie més rellevants, ens interessarà entendre l'estructura de les àlgebres de Lie associades. En particular, serà important entendre com actua el producte de Lie en elles. És per això que donem aquí una interpretació alternativa d'aquest producte.

Sigui G un grup de Lie i $\mathfrak{g}$ la seva àlgebra de Lie. Fixant un element $g \in G$, podem considerar l'**automorfisme intern** -o **automorfisme de conjugació-** que defineix:

$$\begin{aligned}
c(g) : G &\to G \\
x &\mapsto gxg^{-1}
\end{aligned}$$

Notem que $c(g)$ és un isomorfisme de grups de Lie i, en particular, envia la identitat a la identitat. Així, $c(g)$ indueix un isomorfisme d'àlgebres de Lie $T_e c(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Per tant, $T_e c(g) \in Aut(\mathfrak{g})$ i podem considerar l'assignació $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ enviant g a $T_e c(g)$. Com hem comentat anteriorment i demostrarem més endavant, $Aut(\mathfrak{g})$ és un grup de Lie amb àlgebra de Lie $\mathfrak{Aut}(\mathfrak{g}) = End(\mathfrak{g})$.

Amb l'estructura de varietat diferenciable amb que equipem $Aut(\mathfrak{g})$, l'aplicació Ad és diferenciable. I com a functor, $f \mapsto T_p f$ preserva la composició de morfismes $T_q g \circ T_p f = T_p(g \circ q)$ i Ad és també un morfisme de grups i és, doncs, un homomorfisme de grups de Lie. Quan estudiem la representació de grups de Lie veurem que $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ donarà lloc a una representació de singular rellevància, l'anomenada **representació adjunta**. Per ara, però, prendrem l'homomorfisme d'àlgebres de Lie que defineix, $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Aut}(\mathfrak{g}) = End(\mathfrak{g})$.

Proposició 2.18. *L'homomorfisme d'àlgebres $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ envia X a l'endomorfisme de $\mathfrak{g}$ enviant Y a $[X, Y]$.*

Demostració. Siguin $X, Y \in \mathfrak{g}$. Hem de veure que $[X, Y] = ad(X)Y$. La demostració que reproduirem és en essència la donada per [2]. Considerem les corbes integrals $\alpha^X(s)$ i $\alpha^Y(t)$. Comencem amb l'automorfisme de conjugació, prenent

$$a(s,t) = c(\alpha^X(s))\alpha^Y(t) = \alpha^X(s) \cdot \alpha^Y(t) \cdot (\alpha^X(s))^{-1} = \alpha^X(s) \cdot \alpha^Y(t) \cdot \alpha^X(-s)$$

Notem que, fixant s, $a(s,t)$ és un camí diferenciable a G, i com a tal podem considerar el vector tangent que defineix a cada punt. Com qualsevol camí diferenciable, el vector tangent $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{a(s,t)}$ és la derivació actuant sobre una funció diferenciable $\phi \in \mathcal{F}(G)$ com

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{a(s,t)} \phi = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{a(s,t)} \phi(a(s,t))$$

El primer pas és considerar l'aplicació lineal tangent de l'automorfisme de conjugació, $T_e c(g)$, així que prenem la derivació $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0$:

$$Ad(\alpha^X(s))Y = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 a(s,t)$$

Hem vist ja que un espai vectorial real és, com a espai euclidià, una varietat diferenciable, i que l'espai tangent a qualsevol punt és isomorf al propi espai vectorial. Que $\mathfrak{g}$, com a espai vectorial, sigui una varietat diferenciable, ens permet afirmar que $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 a(s,t)$, variant s, és un camí diferenciable a $\mathfrak{g}$. Com a tal, defineix a cada punt un vector tangent i, en particular, a $s = 0$ defineix el vector

$$ad(X)Y = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 a(s,t)$$

Notem que donat que $ad(X) \in End(\mathfrak{g})$, $ad(X)Y \in \mathfrak{g}$. I és que hem utilitzat que l'espai tangent a $\mathfrak{g}$ és isomorf al propi $\mathfrak{g}$ i, per tant, el vector tangent a $s = 0$ defineix una derivació que actua sobre una aplicació $\phi \in \mathcal{F}(G)$ com

$$(ad(X)Y)(\phi) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_0 \phi(a(s,t)) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s) \cdot \alpha^Y(t) \cdot \alpha^X(-s))$$

Volem veure que $ad(X)Y$ aplica sobre ϕ de la mateixa manera que $[X, Y]$. Per tant, calculem el membre de la dreta en l'anterior igualtat. Aplicant la regla de la cadena a la composició donada per

$$\begin{aligned} (s,t) &\mapsto (s,t,-s) \\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ &\quad (\sigma, t, \tau) \mapsto \phi(\alpha^X(\sigma) \cdot \alpha^Y(t) \cdot \alpha^X(\tau)) \end{aligned}$$

obtenim que podem escriure

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t)\cdot\alpha^X(-s)) &= \left.\frac{\partial^2}{\partial \sigma\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(\sigma)\cdot\alpha^Y(t)) - \left.\frac{\partial^2}{\partial \tau\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^Y(t)\cdot\alpha^X(\tau)) \\ &= \left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t)) - \left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^Y(t)\cdot\alpha^X(s))\end{aligned}$$

Per tant, hem de computar cada terme per separat.

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t))$$

Notem que si fixem s, $\alpha^X(s)$ és un element de G fixat i podem definir l'aplicació diferenciable

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : G &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \tilde{\phi}(g) := \phi(\alpha^X(s)\cdot g)\end{aligned}$$

Fent aquesta substitució,

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t)) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \tilde{\phi}(\alpha^Y(t))$$

Per tant, si primer fixem s i derivem respecte t, notem que justament per la definició de vector tangent induït per un camí diferenciable en un punt

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t)) &= \left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \tilde{\phi}(\alpha^Y(t)) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 Y\tilde{\phi}(e) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 Y\phi(\alpha^X(s)) \\ &= X(Y(\phi))(e)\end{aligned}$$

Per tant,

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^X(s)\cdot\alpha^Y(t)) = X(Y\phi)(e)$$

Anàlogament veuríem que

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_0 \phi(\alpha^Y(t)\cdot\alpha^Y(s)) = Y(X\phi)(e)$$

i, per tant, queda demostrat que

$$ad(X)Y = [X, Y]$$

□

2.4 L'aplicació exponencial

Fins ara hem introduït el concepte de grup de Lie G i la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada, definida com l'espai vectorial a la identitat equipada amb un producte intern que converteix l'espai vectorial en una $\mathbb{R}$-àlgebra de Lie. Hem vist ja certa relació entre ambdues estructures: podem identificar els camps vectorials sobre G invariants per l'esquerra amb els elements de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Veurem que la relació és encara més forta:

Teorema 2.19. *Sigui G un grup de Lie i $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie associada. L'aplicació $exp : \mathfrak{g} \to G$ definida per $exp(X) = \alpha^X(1)$, anomenada **aplicació exponencial**, és diferenciable i el seu diferencial a la unitat és la identitat.*

Demostració. La demostració és la donada per Bröcker i Dieck [2]. Comencem veient que l'aplicació és diferenciable. En efecte, considerem el flux en $G \times \mathfrak{g}$ associat al camp vectorial donat per $(g, X) \mapsto (X(g), 0)$:

$$\mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \to G \times \mathfrak{g} \qquad (t, g, X) \mapsto (g, \alpha^X(t), X)$$

En tant que és un flux és una aplicació diferenciable, però llavors ho serà també la restricció a $1 \times e \times \mathfrak{g}$, que és justament l'aplicació exponencial $(1, e, X) \mapsto \alpha^X(1)$.

Per veure que el diferencial a la unitat és la identitat, considerem les corbes integrals donades per $s \mapsto \alpha^{tX}(s)$ i $s \mapsto \alpha^X(ts)$. Evidentment el vector de l'àlgebra de Lie del primer és tX, però també ho és per la segona corba, ja que $\frac{d}{ds}\alpha^X(ts)\big|_0 = \frac{d\alpha^X}{ds}(0)\left.\frac{d(ts)}{ds}\right|_0 = tX$. Per tant, $exp(tX) = \alpha^X(t)$ i $\frac{d}{dt}exp(tX)\big|_0 = \frac{d}{dt}\alpha^X(t)\big|_0 = X$, però com que acabem de demostrar que l'aplicació exponencial és diferenciable, prenent l'aplicació lineal tangent a la identitat trobem que $\frac{d}{dt}exp(tX)\big|_0 = T_0 exp \frac{d}{dt} tX = T_0 exp(X)$ i, per tant $T_0 exp = id_{\mathfrak{g}}$. $\square$

Notem doncs que, pel teorema de la funció inversa, l'aplicació exponencial defineix un difeomorfisme local a l'origen de $\mathfrak{g}$ entre l'àlgebra de Lie i el grup de Lie. L'aplicació exponencial és un aplicació essencial que descriu la relació entre un grup de Lie i la seva àlgebra de Lie, on aquesta última determinarà en gran mesura les propietats del primer. La importància queda ressaltada pel fet que tot homomorfisme de grups de Lie $f : G \to H$ commuta amb l'homorfisme d'àlgebres que indueix $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "T_e f"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "exp"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

La commutativitat es compleix ja que $f \circ \alpha^X$ és una corba integral del camp $T_e f(X)$ amb vector inicial $T_e f(\frac{d}{dt}\alpha^X(t)\big|_0 = T_e f(X)$. Aquesta propietat, anomenada **naturalitat**, és una altre mostra de fins a quin punt l'àlgebra de Lie determina el grup de Lie del que parteix.

2.5 Exemples rellevants de grups de Lie

És ja el moment de mostrar els exemples més essencials de grups de Lie, i com es manifesten els conceptes que hem anat comentant.

2.5.1 Els espais vectorials reals de dimensió finita

Una vegada hom fixa una base, tot $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita és identificable a un cert espai euclidià $\mathbb{R}^n$. Com a tal, l'espai vectorial té estructura de varietat diferenciable, i prenent l'addició de l'estructura d'espai vectorial, també és un grup. Donat que la suma és diferenciable, tot espai vectorial real de dimensió finita admet una estructura de grup de Lie. Donat que tot $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió n es pot veure com un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió $2n$, el resultat també aplica per espais vectorials sobre els complexos.

Un dels primers conceptes importants que hem introduït és el d'espai tangent al grup de Lie en un punt. Com hem comentat a (2.1), en el cas d'un espai vectorial V resulta que per tot punt $p \in V$, l'espai tangent és isomorf a l'espai original $T_pV \cong V$. En concret, l'àlgebra de Lie $\mathfrak{v}$ d'un espai vectorial, vista com espai vectorial és isomorfa al propi espai $\mathfrak{v} \cong V$. Ara bé, a l'àlgebra tenim definida una tercera operació binària i per entendre l'estructura d'àlgebra de Lie necessitem entendre com actua aquest producte. Utilitzarem el còmput de $a(s,t)$ introduït en parlar de la representació adjunta per conèixer com actua el producte de Lie.

En el cas dels espais vectorials, la corba integral -grup uniparamètric- associada a un vector $v \in \mathfrak{v} \cong V$ és $\alpha^v(t) = tv$. Llavors, si considerem dos vectors $X, Y \in \mathfrak{v}$, tenim que

$$\alpha^X(s) = sX$$
$$\alpha^Y(t) = tY$$

I, per tant, $a(s,t) = \alpha^X(s) + \alpha^Y(t) + \alpha^X(-s) = sX + tY + (-sX) = tY$. Hem utilitzat que l'operació de V com a grup de Lie és l'addició com a espai vectorial. Però llavors derivant $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$ obtenim que

$$[X,Y] = ad(X)Y = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 a(s,t) = 0$$

És a dir, el producte intern en l'àlgebra de Lie associada a un espai vectorial és nul. Més en general, en qualsevol grup de Lie abelià el producte en l'àlgebra serà nul. En efecte, tot automorfisme de conjugació és en aquest cas la identitat, $c(g) = id_G \quad \forall g \in G$. Però llavors el morfisme d'àlgebres que indueix torna a ser la identitat i, conseqüentment, la representació adjunta $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ envia tot $g \in G$ a la identitat. Per tant, el diferencial d'Ad, $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$, és nul.

Però tornant al cas dels espais vectorials, considerem ara l'aplicació exponencial, $exp : \mathfrak{v} \cong V \to V$. Donat que $\alpha^v(t) = tv$, $exp(v) = \alpha^v(1) = v$. Per tant, utilitzant la identificació de l'espai tangent d'un espai vectorial amb ell mateix, l'aplicació exponencial és aquí la identitat.

2.5.2 Grup d'automorfismes

L'anterior cas és considerablement senzill en tant que l'àlgebra de Lie és, des del punt de vista de l'estructura d'espai vectorial, isomorfa al propi espai vectorial i en tant que el producte de Lie és nul. Veurem ara un cas no tant trivial.

Sigui V un espai vectorial de dimensió finita sobre el cos $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. El conjunt dels endomorfismes sobre aquest espai, $End(V)$, torna a ser un espai vectorial de dimensió finita sobre $\mathbb{R}$. Així, pel que acabem de discutir, $End(V)$ admet estructura de grup de Lie. Considerem, però, el subconjunt format pels automorfismes de V, $Aut(V) \subset End(V)$. Volem demostrar que també podem equipar $Aut(V)$ amb estructura de grup de Lie.

Per començar, el conjunt dels automorfismes $Aut(V)$ forma un grup amb la composició com a operació del grup. En efecte, una vegada hom tria una base de V, $End(V)$ és isomorf al conjunt de matrius quadrades $n \times n$ i $Aut(V)$ és el conjunt format per les matrius $n \times n$ amb determinant nul. Donat que el determinant d'un producte de matrius és el producte dels determinants de les matrius individuals, $det(AB) = det(A)det(B)$, i la composició d'endomorfismes correspon al producte de matrius, la composició d'automorfismes és de nou un automorfisme i l'operació de composició és interna al conjunt $Aut(V)$. Com que el producte de matrius és associatiu, ho és l'operació de composició. L'endomorfisme identitat és també un automorfisme que actua com a identitat respecte l'operació de composició. Finalment, si A i B representen un automorfisme i el seu invers, satisfan $AB = E$, de manera que prenent determinants obtenim $det(A)det(B) = 1$ així que necessàriament $det(B) \neq 0$ i B és també un automorfisme. Per tant, $Aut(V)$ admet estructura de grup.

Vegem ara que també és una varietat diferenciable. Donat que

$$Aut(V) = \{A \in End(V) | det(A) \neq 0\},$$

i el determinant és una funció contínua sobre $End(V)$, resulta que $Aut(V)$ és un obert de $End(V)$. Ara bé, com que $End(V)$ és, com ja hem argumentat, un grup de Lie, $Aut(V)$ és un obert d'una varietat diferenciable i, per tant, hereta també estructura de varietat diferenciable. Com que l'operació de composició és diferenciable a $End(V)$, en restringir-la a $Aut(V)$ continua sent-ho i, per tant, $Aut(V)$ és també un grup de Lie.

Aquest procediment ens aporta dues de les categories més importants de grups de Lie: els **grups lineals generals** sobre els reals i els complexos.

$$GL(n, \mathbb{R}) = Aut(\mathbb{R}^n)$$
$$GL(n, \mathbb{C}) = Aut(\mathbb{C}^n)$$

Ara, com que $\mathfrak{Aut}(V) = End(V)$, l'àlgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$ és $End(\mathbb{K}^n)$. És a dir, és el conjunt de matrius $n \times n$ sobre el cos $\mathbb{K}$. Vegem que aquí el producte de Lie no és trivial.

En introduir l'aplicació exponencial, vam veure que la corba integral $\alpha^X(t)$ es pot escriure com $\alpha^X(t) = exp(tX)$. Com que tX és, una vegada fixada una base, una matriu $n \times n$, seria temptador recórrer a l'exponencial d'una matriu. Tenim, doncs, dos conceptes als que ens referim pel mateix nom d'exponencial. Per una banda, en la teoria de grups i àlgebres de Lie l'aplicació exponencial dóna un vincle entre un grup de Lie i la seva àlgebra associada. Per altra banda, pel cas de les matrius existeix la noció de la matriu exponencial d'una matriu quadrada. Volem veure que, en el cas dels grups de Lie realitzats com a grups de matrius, els dos conceptes coincideixen.

Recordem primer el concepte de matriu exponencial i demostrem la igualtat entre els dos conceptes d'exponencial en el cas mencionat. Sigui X una matriu quadrada $n \times n$. L'exponencial de X és la matriu definida per

$$e^X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i$$

on s'entén que $X^0 = E$, sent E la matriu identitat. La matriu e^X està ben definida, en el sentit de que la sèrie anterior convergeix per tota matriu X quadrada. Tenim també que $e^{tX} : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ defineix un camí diferenciable amb $\frac{d}{dt} e^{tX} = e^{tX} X$ com a vector tangent al punt $t \in \mathbb{R}$. El lector pot trobar les demostracions d'aquestes afirmacions en Hall [4], capítol 2. En particular, la corba e^{tX} és un camí diferenciable complint $e^{tX}(0) = E$ i $\frac{d}{dt} e^{tX}(0) = X$, és a dir, e^{tX} coincideix amb la corba integral $exp(tX)$. Per tant, en el cas de grups de Lie matricials, l'aplicació exponencial $exp : \mathfrak{g} \to G$ coincideix amb el concepte de matriu exponencial una vegada hom veu $\mathfrak{g}$ i G com a conjunts de matrius.

Fins ara sabem ja que l'àlgebra de Lie del grup d'automorfismes de V és $End(V)$ i coneixem com actua l'exponencial. Vegem ara com actua el producte de Lie. Siguin $X \in \mathfrak{g}$ i $Y \in \mathfrak{g}$ vectors de l'àlgebra de Lie i $\alpha^X(s)$ i $\alpha^Y(t)$ les corbes integrals associades. Coneixent ja l'aplicació exponencial, tenim que aquestes corbes es poden escriure de la manera següent:

$$\alpha^X(s) = e^{sX}$$
$$\alpha^Y(t) = e^{tY}$$

Per tant, $a(s,t) = \alpha^X(s)\alpha^Y(t)\alpha^X(-s) = e^{sX} e^{tY} e^{-sX}$. Derivant respecte $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$ obtenim

$$[X, Y] = ad(X)Y = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 a(s,t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 e^{sX} Y e^{-sX} = XY - YX$$

Per tant, el producte de Lie dels grups lineals generals és el commutador de matrius.

2.5.3 Grups lineals especials

Teorema 2.20. *Tot subgrup tancat d'un grup de Lie admet una estructura canònica de grup de Lie.*

La demostració d'aquest teorema, que el lector pot trobar a [2], capítol 1, p. 28, teorema 3.11, ens assegura que a partir dels grups lineals generals podem obtenir un gran nombre de grups de Lie. Això motiva la definició següent.

Definició 2.21. *Un* ***grup de Lie matricial*** *és un subgrup tancat de* $GL(n, \mathbb{C})$.

El teorema anterior ens assegura que tot grup de Lie matricial és efectivament un grup de Lie. Si en la definició es recorre a $GL(n, \mathbb{C})$ i no $GL(n, \mathbb{R})$ és perquè $GL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C})$, sent $GL(n, \mathbb{R})$ tancat en $GL(n, \mathbb{C})$. Vegem ara un primer exemple d'un grup de Lie matricial diferent dels grups lineals generals.

Si el grups lineals generals estan formats per aquelles matrius -sobre els respectius cossos- amb determinants no nuls, sovint hom pot estar interessat en restringir l'atenció a les matrius amb determinant 1.

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) | det(A) = 1\}$$
$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | det(A) = 1\}$$

Vegem que aquests són grups de Lie matricials. Per començar, la fórmula $det(AB) = det(A)det(B)$ ens assegura que $SL(n, \mathbb{C})$ i $SL(n, \mathbb{R})$ són realment grups. Per altra banda, la continuïtat del determinant ens assegura que els anteriors conjunts son tancats (en el respectiu $GL(n, \mathbb{K})$). Per tant, aplicant el teorema anterior obtenim ja una nova classe de grups de Lie: els **grups lineals especials**.

Estudiem com és l'àlgebra de Lie d'aquests grups, denotada per $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. Els seus elements són els vectors de l'espai tangent a la identitat, que podem prendre com el conjunt de vectors tangents definits a la identitat per les corbes integrals -grups uniparamètrics-. Donat que $SL(n, \mathbb{K})$, sent una varietat diferenciable, compleix $SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$, sabem que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \subset End(\mathbb{K}^n)$. Suposem donat un grup uniparamètric $\alpha : \mathbb{R} \to SL(n, \mathbb{K})$, que podem identificar amb e^{tX} per algun $X \in \mathfrak{g}$. Per definició es compleix que $det(\alpha(t)) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Però per la fórmula de Jacobi [4] (capítol 2, p. 41, teorema 2.12),

$$det(e^{tX}) = e^{tr(tX)}$$

Així doncs, $e^{tr(tX)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, és a dir, $tr(tX) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Com que s'ha de complir per tot t, necessàriament X és una matriu amb traça nul·la. Amb aquest raonament hem demostrat que tot element de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ és una matriu amb traça nul·la. Demostrem la inclusió contrària: tota matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ amb traça nul·la és un element de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. En efecte, sigui $X \in M_n(\mathbb{K})$ amb $tr(X) = 0$. Sabem que e^{tX} és un camí diferenciable, i la fórmula de Jacobi ens assegura que és un camí diferenciable a $SL(n, \mathbb{K})$. Com que X és el vector tangent a e^{tX} a $t = 0$, tenim que $X \in \mathfrak{g}$.

Així doncs,

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | tr(A) = 0\}$$
$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$$

Com que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \subset End(\mathbb{K}^n)$, el producte de Lie a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ és la restricció del producte a $End(\mathbb{K}^n)$, és a dir, actua també a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ com $[X, Y] = XY - YX$ per $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. Faltaria veure com actua aquí l'aplicació exponencial. Però com que la inclusió $i : SL(n, \mathbb{K}) \to GL(n, \mathbb{K})$ és un homomorfisme de grups de Lie, la naturalitat de l'aplicació exponencial ens assegura que actua sobre $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ de la mateixa manera que ho fa interpretant $X \in End(\mathbb{K}^n)$, és a dir, actua com

$$e^X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i$$

El mateix argument és vàlid per tot grup de Lie matricial.

2.5.4 Els grups unitaris

Els grups unitaris $U(n)$ són un altre exemple de grups de Lie matricials, definits com

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) | A^\dagger A = E\},$$

on $A^\dagger$ denota el conjugat hermític d'A. La condició $A^\dagger A = E$ és equivalent a requerir que les columnes d'A siguin ortonormals respecte el producte escalar canònic a $\mathbb{C}^n$.

Anàlogament al cas dels grups lineals especials, volem veure que $U(n)$ és un subgrup tancat de $GL(n, \mathbb{C})$. Que és subgrup és senzill de demostrar. La identitat E clarament compleix $E^\dagger E = E$. Si prenem dues matrius $A, B \in U(n)$, aquestes compleixen $A^\dagger A = B^\dagger B = E$, i donat que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ obtenim $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB = B^\dagger EB = B^\dagger B = E$, i el producte AB és a $U(n)$. Finalment, si $A \in U(n)$, notem que el fet que $A^\dagger A = E$ ens diu que $A^{-1} = A^\dagger$, però llavors prenent l'operador $\dagger$ a l'anterior equació, obtenim que $E = E^\dagger = (A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^{-1}(A^{-1})^\dagger$. Tenim, doncs, que $A^{-1} \in U(n)$. Per tant, queda vist que $U(n)$ és subgrup de $GL(n, \mathbb{C})$.

Podríem veure que és tancat de diferents maneres, però és suficient notar que l'aplicació $F : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ definida per $F(A) = A^\dagger A$ és contínua, així que $U(n) = F^{-1}(E)$ és tancat en ser la preimatge d'un tancat per una funció contínua.

Havent demostrat que $U(n)$ és un grup de Lie hem llavors d'estudiar com és l'àlgebra de Lie associada, $\mathfrak{u}(n)$. Si prenem un grup uniparamètric $f : \mathbb{R} \to U(n)$ sabem que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t)^\dagger f(t) = E,$$

de manera que diferenciant l'anterior igualtat obtenim que

$$f'(t)^\dagger f(t) + f(t)^\dagger f'(t) = 0$$

Com que volem $f'(0)$, avaluem a $t = 0$ l'anterior igualtat i obtenim

$$0 = f'(0)^\dagger f(0) + f(0)^\dagger f'(0) = f'(0)^\dagger + f'(0)$$

$f'(0)$ és justament el vector tangent pertanyent a l'àlgebra de Lie de $U(n)$, $\mathfrak{u}(n)$. Per tant, acabem de veure que totes les matrius de $\mathfrak{u}(n)$ són antisimètriques. Faltaria veure que $\mathfrak{u}(n)$ està realment formada per totes les matrius antisimètriques. Per comprovar-ho, utilitzarem dues propietats demostrades a [4], capítol 2. La primera d'elles és que l'exponencial d'una matriu compleix $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$. La segona és que en el cas que dues matrius A i B commutin, llavors es verifica $e^{A+B} = e^A e^B$. Sigui doncs $X \in M_n(\mathbb{C})$ una matriu antisimètrica, $X^\dagger + X = 0$ i definim el camí diferenciable

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\to M_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto e^{tX} \end{aligned}$$

on e^{tX} representa la matriu exponencial de tX. Volem veure que α és realment un camí diferenciable a $U(n)$. Per tant, considerem

$$(e^{tX})^\dagger e^{tX} = e^{tX^\dagger} e^{tX} = e^{t(X^\dagger + X)} = e^{t(-X+X)} = E$$

a la segona igualtat hem utilitzat que tX i $tX^\dagger$ commuten. En efecte,

$$X^\dagger X = -X \cdot X = X \cdot (-X) = XX^\dagger$$

Per tant, α és un camí diferenciable a $U(n)$ amb $\alpha(0) = E$ i $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 \alpha = X$. Queda demostrat que $\mathfrak{u}(n)$ és el conjunt de matrius complexes $n \times n$ antisimètriques.

La caracterització de les matrius unitàries com aquelles complint $A^\dagger A = E$ restringeix els possibles valors que pot prendre el determinant. En efecte, com que $det(A^\dagger) = \overline{det(A)}$ -on $\overline{A}$ denota el conjugat complex d'A-, prenent determinants a la igualtat anterior obtenim que $|det(A)|^2 = \overline{det(A)}det(A) = 1$. Per tant, les matrius unitàries tenen necessàriament determinant de mòdul 1. Però igual que amb les matrius lineals generals, podem prendre el subconjunt de $U(n)$ format per les matrius amb determinat exactament 1. Obtenim llavors un altre grup de Lie, $SU(n)$, que té per àlgebra de Lie, $\mathfrak{su}(n)$, l'espai vectorial format per les matrius de $M_n(\mathbb{C})$ antisimètriques i amb traça nul·la.

2.5.5 Les matrius ortogonals

Anàlogament al cas de les matrius unitàries -definides sobre els complexos i requerint que les columnes de les matrius siguin ortonormals respecte el producte escalar típic de $\mathbb{C}^n$-, en el cas real trobem les matrius ortogonals $O(n)$ i les matrius ortogonals especials $SO(n)$. El primer conjunt està definit com les matrius de $M_n(\mathbb{R})$ amb columnes ortonormals respecte el producte escalar típic de $\mathbb{R}^n$ (que porta a la caracterització $A^tA = E$), i en el segon cas ens restringim a les que tenen determinant 1.

Amb raonaments anàlegs podríem demostrar que tant $O(n)$ com $SO(n)$ són grups de Lie, i que les seves àlgebres associades són

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^t + A = 0\}$$
$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{o}(n) | tr(A) = 0\}$$

Observació 2.22. De manera semblant a les matrius unitàries, prenent determinants a la caracterització $A^tA = E$ veiem que $det^2(A) = 1$, és a dir, $det(A) = \pm 1$.

És necessari fer un breu comentari sobre el significat dels grups ortogonals i unitaris. Hem comentat que tant $O(n)$ com $U(n)$ estan formats per les matrius quadrades -sobre els reals en el primer cas, sobre els complexos en el segon- complint $A^tA = E$ i $A^\dagger A = E$, respectivament. Ara bé, amb el producte escalar típic en ambdós casos, es compleixen les igualtats

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \; \forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \langle u, Av \rangle = \langle A^\dagger u, v \rangle$$
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \; \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \langle u, Av \rangle = \langle A^t u, v \rangle$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota els respectius productes escalar típics. Però llavors si interpretem A com a transformació de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, veiem que els grups ortogonals i unitaris estan formats per aquelles matrius que respecten el producte escalar típic, en el sentit següent. En el cas real, partint de $u, v \in \mathbb{R}^n$ i aplicant la transformació definida per $A \in M_n(\mathbb{R})$ obtenim els vectors $Au, Av \in \mathbb{R}^n$. El producte escalar d'aquest serà

$$\langle Au, Av \rangle = \langle A^t Au, v \rangle$$

Per tant, $O(n)$ està format pel conjunt de matrius reals que respecten el producte escalar usual a $\mathbb{R}^n$ i, de manera anàloga, $U(n)$ són les matrius complexes que respecten el producte escalar típic a $\mathbb{C}^n$. Notem, però, que les transformacions de $\mathbb{R}^n$ donades per multiplicació per una matriu i que respectin el producte escalar de $\mathbb{R}^n$ -és a dir, les distàncies i angles-, són les reflexions, les rotacions i les composició d'ambdós tipus (les translacions respecten el producte escalar, però no estan donades per aplicació d'una matriu a un vector $\mathbb{R}^n$). Sovint pot ser interessant restringir-se a aquelles matrius que no només preserven el producte escalar, sinó també la orientació dels eixos, això s'acompleix quedant-nos únicament amb les matrius de $O(n)$ amb determinant 1, és a dir, restringint-nos a $SO(n)$. Resumint, $SO(n)$ representen rotacions de l'espai euclidià de dimensió n i $O(n)$ està format per aquestes rotacions, reflexions i composicions d'ambdós tipus de transformacions.

Similarment, $U(n)$ està generada per rotacions i reflexions de $\mathbb{C}^n$, i $SU(n)$ són únicament les rotacions. A Mecànica Quàntica, on els estats d'un sistema físic s'escriuen en general com a combinació lineal -en coeficients complexos- d'una certa base d'un espai de Hilbert, apareixen sovint les matrius unitàries. Per exemple, la simetria de gauge del Model estàndard de física de partícules ve donada pel grup de Lie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

2.5.6 Forma bilineal

Acabem de veure dos casos de grups de Lie formats per matrius que respecten un cert producte escalar. La situació és generalitzable i ens aportarà una gran quantitat d'altres exemples de grups de Lie.

Proposició 2.23. *Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita, i H un altre espai vectorial real. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to H$ una forma bilineal. Llavors*

$$G = \{A \in Aut(V) | \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V\}$$

és un grup de Lie.

Demostració. Hem de demostrar que G és un subgrup tancat de $Aut(V)$. Per començar, és fàcil veure que és subgrup, de manera idèntica a com ho vam fer en el cas de les matrius unitàries. La identitat E trivialment és a G. Si prenem $A, B \in Aut(V)$ i considerem com aplica el producte AB sobre la forma bilineal:

$$\langle ABu, ABv \rangle = \langle A(Bu), A(Bv) \rangle = \langle Bu, Bv \rangle = \langle u, v \rangle$$

Per tant, $AB \in G$ i finalment, si $A \in G$ hem de veure que $A^{-1} \in G$. Ara,

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle &= \langle Eu, Ev \rangle = \langle (AA^{-1})u, (AA^{-1})v \rangle \\ &= \langle A(A^{-1}u), A(A^{-1}v) \rangle = \langle A^{-1}u, A^{-1}v \rangle \end{aligned}$$

És a dir, $\langle A^{-1}u, A^{-1}v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$. Per tant, $A^{-1} \in G$. Per veure que G és tancat en $Aut(V)$ considerem una successió $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dintre de G convergent a una matriu $A \in Aut(V)$. Siguin $u, v \in V$. Com que $A_n \in G \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\langle A_n u, A_n v \rangle = \langle u, v \rangle$, i donat que les A_n convergeixen a A, necessàriament $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$. Per tant, G és un subgrup tancat d'$Aut(V)$ i, pel teorema 2.20, és un grup de Lie. □

Com avançàvem, molts exemples importants de grups de Lie els podem obtenir aplicant aquesta proposició. Per començar, igual que a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ tenim els productes escalars típics -el producte euclidià i l'hermític, respectivament- si prenem els quaternions $\mathbb{H}^n$ amb el seu producte escalar típic -el simplèctic-, el conjunt de matrius que respecten aquest producte forma un grup de Lie anomenat **grup simplèctic**, $Sp(n)$. Un altre exemple rellevant són les **matrius ortogonals generalitzades** $O(n;k)$ obtingudes prenent una forma bilineal amb imatge a $\mathbb{R}$ i definida sobre $\mathbb{R}^{n+k}$ com $\langle u,v\rangle = u_0v_0 + ... + u_nv_n - u_{n+1}v_{n+1} - ... - u_{n+k}v_{n+k}$. En particular, l'anomenat **grup de Lorentz** $O(3,1)$ és molt important a Relativitat Especial, on el producte escalar definit en l'espaitemps de Minkowski distingeix el temps i l'espai assignant un $+$ en els termes de la forma bilineal referits a les coordenades espacials, i un - a la coordenada temporal. Per veure una llista més extensiva de grups de Lie obtinguts d'aquesta manera, recomanem el primer capítol de [4].

3 Teoria de representacions

Després d'una breu presentació dels grups de Lie, passem a donar una també breu presentació de la teoria de representacions de grups de Lie i, en especial, de grups de Lie compactes. La idea darrera de la teoria de representacions és molt maca i potent. Els grups de Lie, com a varietats diferenciables equipades amb estructura de grup, no són, certament, l'objecte matemàtic més senzill a estudiar. Seria interessant -i és justament el que fem- passar d'alguna manera del camp dels grups de Lie a alguna altra estructura matemàtica més senzilla i ben estudiada. Aquesta serà l'espai vectorial, i l'Àlgebra Lineal ens donarà moltes eines per tal d'estudiar els grups de Lie des d'aquest prisma. Presentarem a continuació la noció d'una representació complexa. El concepte és extensible a representacions sobre espais vectorials reals o quaterniònics i pel lector interessat recomanem [2], capítol II, secció 6, pp 93-101.

Definició 3.1. *Sigui G un grup de Lie i V un espai vectorial complex de dimensió finita. Una representació de G en l'espai vectorial V és una acció contínua de G sobre V*

$$\rho : G \times V \to V$$

*complint que la restricció a un element $g \in G$ fixat, $l_g : v \mapsto \rho(g, v)$, és una aplicació lineal. El parell (V, ρ) s'anomena una **representació complexa** i V l'**espai de representació**. La dimensió de la representació, dim V, és simplement la dimensió de V com a espai vectorial.*

Recordem que el concepte d'acció (per l'esquerra) implica que

$$\begin{aligned} \rho(e, v) &= v \\ \rho(gh, v) &= \rho(g, \rho(h, v)) \end{aligned}$$

Escrit en termes de les translacions l_g les igualtats anteriors esdevenen

$$\begin{aligned} l_e &= id_V \\ l_{gh} &= l_g \circ l_h \end{aligned}$$

Però notem llavors que les translacions l_g no són només aplicacions lineals, sinó que són totes automorfismes, on $l_{g^{-1}}$ és l'aplicació inversa de l_g. És per això que alguns autors defineixen directament una representació complexa de G com un homomorfisme de grups de Lie $G \to Aut(V)$, sent V un espai vectorial complex. Per exemple, vegi's [4], capítol 4, p. 77. Al llarg de la memòria adoptarem els dos punts de vista.

Observació 3.2. En la definició de representació hem demanat que l'acció fos contínua, no necessàriament diferenciable. Però pot demostrar-se que tot homomorfisme continu entre grups de Lie és diferenciable i, per tant, un homomorfisme de grups de Lie [2], capítol I, secció 3, Proposició 3.12, p 29. Això ens permet establir que l'homomorfisme

$$\begin{aligned} \rho : G &\to Aut(V) \\ g &\mapsto l_g \end{aligned}$$

és un homomorfisme de grups de Lie.

Notem ara que, donat que una vegada fixada una base de V, $Aut(V)$ queda identificat amb $GL(n, \mathbb{C})$, una representació es pot veure des d'un punt de vista més numèric com a homomorfisme de grups de Lie amb $G \to GL(n, \mathbb{C})$. Passar al camp de l'Àlgebra Lineal ens permet ara utilitzar totes les eines que ens proveeix aquesta, com per exemple la traça d'aplicacions lineals. Així, la funció $G \to \mathbb{C}$ definida per $g \mapsto Tr(l_g)$ és una funció especial anomenada **caràcter de G** que determina la representació tret d'isomorfisme. Tot i que per motius d'espai aquí no parlarem sobre els caràcters en teoria de representacions, es recomana al lector interessat referir-se a [2], capítol II, secció 4, pp 77-83.

Notació 1. *En comptes d'escriure l'acció d'una representació com $\rho(g, v)$ sovint escriurem $g \cdot v$ si s'entén pel context de quina acció es tracta. I inclús el propi $\cdot$ s'acostumarà a ometre.*

Després d'introduir un objecte matemàtic és costum presentar els morfismes que respecten l'estructura d'aquests objectes.

Definició 3.3. *Sigui G un grup de Lie. Un morfisme entre representacions (V, ρ_V) i (W, ρ_W) de G és una aplicació $f : V \to W$ lineal i equivariant, això és, complint $f \circ l_g = l_g \circ f \quad \forall g \in G$. Denotem per $Hom_G(V, W)$ el conjunt de morfismes entre les representacions (V, ρ_V) i (W, ρ_W). Diem que dues representacions (V, ρ_V) i (W, ρ_W) són isomorfes si existeix un morfisme $f : V \to W$ amb inversa.*

Notem que a la definició anterior, tot i denotar per l_g les dues translacions, en escriure $f \circ l_g = l_g \circ f$ el primer l_g és $l_g : V \to V$ i el segon és $l_g : W \to W$. Requerir que un morfisme f entre representacions sigui una aplicació lineal és comprensible en tant que f és una aplicació entre espais vectorials. Notem que la condició que sigui equivariant implica, en particular, que les òrbites de l'acció de G sobre V són enviades a òrbites de l'acció de G sobre W. En efecte, si prenem un vector $v \in V$ i la seva imatge $f(v) \in W$, un element de l'òrbita del primer, $l_g(v)$ per algun $g \in G$, és enviat a $f(l_g(v))$. Però com que f és equivariant, $f(l_g(v)) = l_g(f(v))$. És a dir, hem enviat $l_g(v)$, un element qualsevol de l'òrbita de v, a l'òrbita de $f(v)$. Resumidament, f respecta l'estructura de les òrbites.

3.1 Exemples de representacions

Abans de continuar desenvolupant la teoria de representacions de grups de Lie mostrarem alguns exemples de representacions importants.

Definició 3.4. *Sigui (V, ρ_V) una representació complexa. La representació es diu* ***trivial*** *si $l_g = id_V \quad \forall g \in G$.*

Donat que els elements de $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$ i $SU(n)$ són grups de Lie realitzats com a grups de matrius, podem fer-los actuar sobre $\mathbb{C}^n$ per la multiplicació matricial usual.

Definició 3.5. *Les representacions de $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$ i $SU(n)$ sobre $\mathbb{C}^n$ obtingudes per multiplicació matricial s'anomenen* ***representacions estàndards****.*

Recuperem aquí una representació que ja va aparèixer en presentar el producte de Lie a l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Com hem comentat, la idea de teoria de representacions és passar del camp dels grups de Lie al dels espais vectorials. Però donat un grup de Lie G, un primer espai vectorial que destaca és justament la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ -oblidant-se del producte de Lie-. Notem, però, que no és suficient identificar un espai vectorial en el que fer la representació, sinó que cal també definir com actua G sobre aquest espai. I ara recordarem el desenvolupament que vam fer per introduir la **representació adjunta**, per veure com actua G sobre $\mathfrak{g}$ en aquesta representació.

Considerant l'automorfisme de conjugació per un cert $g \in G$

$$\begin{aligned} c(g) : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

preníem el seu diferencial a la identitat, $T_e c(g)$. Llavors obteníem el morfisme enviant cada $g \in G$ al diferencial corresponent.

$$Ad : G \to Aut(\mathfrak{g}) \qquad\qquad g \mapsto T_e c(g)$$

Aquesta és la representació adjunta, que ara efectivament podem identificar com a representació. Vam continuar llavors prenent l'homomorfisme d'àlgebres de Lie que Ad induïa, $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$. Veurem més endavant que aquest és un exemple de **representació d'àlgebres de Lie**.

3.2 Construcció de noves representacions

Una vegada disposem d'algunes representacions, podem obtenir-ne de més operant amb els espais vectorials dels que comptem. Una primera opció és prendre la **suma directa** de dues representacions. Vegem com funciona. Suposem donades dues representacions del mateix grup G, (V, ρ_V) i (W, ρ_W). Una operació possible que ens proporciona l'Àlgebra Lineal és la de prendre la suma directa d'ambdós espais vectorials, $V \oplus W$. Podem definir una acció de G sobre la suma directa, definida per

$$\begin{aligned} \rho : G \times (V \oplus W) &\to V \oplus W \\ (g, v \oplus w) &\mapsto \rho_V(v) \oplus \rho_W(w) \end{aligned}$$

Notem que des de la perspectiva matricial, si l'acció de $g \in G$ sobre V ve donada per una matriu $A(g)$ i sobre W per una matriu $B(g)$, llavors l'acció de g sobre $V \oplus W$ ve donada per la matriu diagonal per blocs

$$\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Per tant, de dues representacions podem definir-ne una nova a partir de la suma directa $V \oplus W$. Veurem en el següent capítol que sovint ens interessarà descompondre una representació en sumes directes de representacions més senzilles.

Una altra possibilitat seria prendre el producte tensorial, $V \otimes W$. En la mateixa notació que anteriorment, l'acció de g sobre $v \otimes w$, ve donada per $\rho_V(v) \otimes \rho_W(w)$.

Un tercer mètode que volem comentar és la utilització de les aplicacions lineals. Sabem que si V i W són espais vectorials, el conjunt d'aplicacions lineals de V a W, denotat per $Hom(V, W)$, té també estructura d'espai vectorial. Però llavors, si tenim representacions a V i W podem definir-ne a $Hom(V, W)$ de manera que $g \in G$ actua sobre $f \in Hom(V, W)$ com

$$l_{g^{-1}} \circ f \circ l_g \tag{3.1}$$

Notem que aquí $l_g : V \to V$ i $l_{g^{-1}} : W \to W$. L'elecció d'utilitzar l_g o la seva inversa l_g^{-1} resulta de la necessitat de que l'acció de g sobre $Hom(V, W)$ sigui realment una acció per l'esquerra.

Un cas particular d'aquest últim procediment serà quan prenem $W = \mathbb{C}$, cas en el qual $V^* = Hom(V, \mathbb{C})$ és l'espai dual de V. Si, a més a més, prenem que l'acció de G sobre W sigui la representació trivial, llavors la representació obtinguda sobre V^* pel mètode anterior s'anomena la **representació dual**.

L'Àlgebra Lineal i Multilineal ens proporciona de més eines per tal de construir noves representacions a partir d'antigues: productes exteriors, productes simètrics, espai conjugat i més. Per veure aquests exemples, de nou recomanem [2], capítol II, secció 3, pp 74-76.

Finalment, considerem una representació (V, ρ) d'un grup de Lie G. Si $H \subset G$ és també un grup de Lie, obtenim una acció de H per restricció de ρ. Si $i : H \to G$ representa la inclusió d'H en G, l'acció està definida per

$$\begin{aligned} res_H^G \rho : H \times V &\to V \\ (h, v) &\mapsto \rho(i(h))(v) \end{aligned}$$

Per exemple, a partir d'una representació d'$U(n)$ podem obtenir una representació de $SU(n)$. En general, si $\alpha : H \to G$ és un homomorfisme de grups de Lie, podem definir un morfisme d'H en V prenent

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : H \times V &\to V \\ (h, v) &\mapsto \rho(\alpha(h))(v) \end{aligned}$$

3.3 Representacions unitàries, irreductibles i lema de Schur

Després d'haver vist exemples de representacions, continuem l'exposició teòrica. En un primer curs d'Àlgebra Lineal hom acostuma a dotar un espai vectorial de productes escalars, i aquí utilitzarem justament aquesta estructura.

Definició 3.6. *Sigui (V, ρ) una representació complexa del grup de Lie G. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ un producte escalar (hermític) sobre V. Diem que el producte escalar és* ***G-invariant*** *si $\langle l_g u, l_g v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall g \in G \ \ \forall u, v \in V$. Una* ***representació unitària*** *és una representació complexa equipada amb un producte escalar G-invariant.*

És necessari fer aquí un breu comentari sobre les representacions unitàries. Suposem donada una representació unitària (V, ρ). Si seleccionem una base ortonormal, podem veure la representació des del punt de vista matricial, resultant en un morfisme $\rho : G \mapsto GL(n, \mathbb{C})$. Ara bé,en aquest cas podem restringir $GL(n, \mathbb{C})$ a $U(n)$. En efecte, en les columnes de ρ s'hi troben les imatges de la base ortonormal escollida per l'aplicació de $\rho(g) = l_g$. Però com que el producte escalar és G-invariant i la base escollida és ortonormal, les columnes tornen a ser ortonormals entre elles i, per tant, $\rho(g) \in U(n)$. Al revés, si tenim donat un morfisme continu $G \mapsto U(n)$, la representació donada per aquest morfisme és unitària si escollim el producte escalar típic de $\mathbb{C}^n$.

Com hem comentat ja i veurem més clarament al final, els grups de Lie acostumen a representar simetries d'un sistema. La idea de teoria de representacions és traslladar-nos del camp dels grups de Lie al dels espais vectorials, enviant tot element de g a un element de $Aut(V)$. I una matriu d'$Aut(V)$ també pot interpretar-se com una simetria. Per donar un exemple, considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ i, fixat un eix z, el grup de rotacions entorn d'aquest eix, identificat amb $SO(2)$ com a subconjunt de $SO(3)$. En rotar $\mathbb{R}^3$ per un eix obtenim un automorfisme de $\mathbb{R}^3$ a ell mateix. Ara bé, l'acció definida per $SO(2)$ deixa tant el pla $z = 0$ com l'eix z fixos, de tal manera que el morfisme $G \to Aut(\mathbb{R}^3)$ podria ser restringit a morfisme $G \to Aut(\mathbb{R}^2)$ (el pla invariant) o $G \to Aut(\mathbb{R})$ (l'eix invariant). D'aquesta manera aconseguim descompondre la simetria global que pugui representar l'acció de G sobre $\mathbb{R}^3$ en dues accions, una sobre $\mathbb{R}^2$ i l'altra sobre $\mathbb{R}$. Aquestes idees queden ben definides amb el concepte de **subrepresentació**.

Definició 3.7. *Sigui G un grup de Lie i (V, ρ) una representació de G en V. Si un subespai $U \subset V$ és invariant per l'acció de G -això és, $l_g(u) \in U \quad \forall g \in G \ \ \forall u \in U$-, llavors diem que $(U, \rho_{|U})$ és una* ***subrepresentació*** *de V. Una* ***representació irreductible*** *és aquella que no admet subrepresentacions diferents de 0 i ella mateixa. En cas contrari, la representació es diu* ***reductible***.

Si pot interessar en una primera aproximació als grup de Lie restringir-se al cas de grups de Lie compactes és perquè disposem aquí d'eines molt potents que ens ajudaran a caracteritzar les seves representacions. Alguns dels grups de Lie més importants són compactes: els grups unitaris $U(n)$ i $SU(n)$, els grups ortogonals $O(n)$ i $SO(n)$ i els tors T^n són alguns exemples. En canvi, un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita no és compacte. Veurem a continuació que tota representació complexa d'un grup de Lie compacte es pot descompondre com a suma directa de subrepresentacions irreductibles. La demostració del següent teorema utilitza l'existència, per qualsevol representació V d'un grup de Lie compacte G, d'un producte escalar G-invariant. Alhora la demostració d'aquesta existència recau en el concepte de **mesura de Haar** i la possibilitat de definir sobre G una integral especial invariant per l'acció de G. Pel lector interessat, vegi's [2] capítol I, secció 5, pp 40-53, i capítol II, secció 1, teorema 1.7, p 68. Nosaltres donarem per assumit que tota representació V d'un grup de Lie compacte G admet un producte escalar G-invariant.

Teorema 3.8. *Sigui G un grup de Lie compacte i (V, ρ) una representació d'aquest sobre V. Sigui $U \subset V$ un subespai G-invariant i, per tant, una subrepresentació. Llavors existeix una subrepresentació $W \subset V$, complementària de U, complint que $V = U \oplus W$. En particular, V pot descompondre's com a suma directa de subrepresentacions irreductibles.*

Demostració. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ un producte escalar G-invariant. Llavors podem prendre el complement ortogonal, $U^\perp$, de U. Sabem ja que $V = U \oplus U^\perp$. Falta veure que $U^\perp$ defineixi una subrepresentació, és a dir, que $U^\perp$ sigui també G-invariant. Per això, considerem $g \in G$ i $\tilde{u} \in U^\perp$. Volem veure que $l_g(\tilde{u}) \in U^\perp$. Sigui, doncs, $u \in U$ un element qualsevol, llavors

$$\langle l_g(\tilde{u}), u \rangle = \langle l_{g^{-1}}(l_g(\tilde{u})), l_{g^{-1}}(u) \rangle = \langle \tilde{u}, l_{g^{-1}}(u), \rangle = 0$$

A la primera igualtat hem utilitzat que el producte escalar és G-invariant i podem, per tant, introduir $l_{g^{-1}}$. A la tercera igualtat hem utilitzat que $\tilde{u} \in U^\perp$ i que, com que $u \in U$ —sent U G-invariant—, $l_{g^{-1}}(u) \in U$. Però llavors iterant el procés fins arribar a subrepresentacions irreductibles, tenim que tota representació complexa d'un grup de Lie compacte es pot escriure com a suma directa de subrepresentacions irreductibles. □

És interessant veure com, en treure el requeriment de que G sigui compacte, el teorema anterior és fals. Considerem el grup de Lie següent

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}) | a \in \mathbb{C} \}$$

Que G és un grup de Lie és fàcil de veure, demostrant que és un subgrup tancat de $GL(n, \mathbb{C})$. Considerem la representació de G sobre $\mathbb{C}^2$ definida per multiplicació matricial. Aquesta representació és reductible, doncs si prenem el subespai U generat per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, aquest és efectivament G-invariant i, per tant, defineix una subrepresentació de $\mathbb{C}^2$. Ara bé, qualsevol subespai V complint $\mathbb{C}^2 = U \oplus V$ es pot escriure com el subespai generat per $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ per un cert $b \in \mathbb{C}$. Però cap d'aquests subespais és invariant per l'acció de G, és a dir, no defineixen una subrepresentació. Per tant, si bé la representació de G sobre $\mathbb{C}^2$ anterior és reductible, no pot descompondre's com a suma directa de subrepresentacions irreductibles.

Després d'haver introduït les representacions irreductibles, presentem un teorema de vital importància en la teoria de representacions: el conegut com a **lema de Schur**

Teorema 3.9. *Sigui G un grup de Lie. Siguin V i W representacions irreductibles de G. Llavors*

1. *Un morfisme (de representacions) $f : V \to W$ és, o bé zero, o bé un isomorfisme.*

2. *Tot morfisme $f : V \to V$ és un múltiple de la identitat.*

3. $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(V, W) = 1$ *si* $V \cong W$
   $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(V, W) = 0$ *si* $V \ncong W$

Demostració. Comencem demostrant la primera afirmació. En les condicions de l'enunciat, considerem el subespai $ker(f) \subset V$. Aquest és un subespai G-invariant. En efecte, sigui $u \in ker(f)$ i considerem $l_g(u)$ per un $g \in G$ qualsevol. Com que f és un morfisme de representacions, és equivariant i commuta amb l'acció de G, això és, $l_g \circ f = f \circ l_g$. Però llavors $f(l_g(u)) = l_g(f(u)) = l_g(0) = 0$. A la penúltima igualtat hem utilitzat que $u \in ker(f)$, mentre que a la última hem utilitzat que l_g és una aplicació lineal. Així, $l_g(u) \in ker(f)$ i queda demostrat que el nucli de f és G-invariant, és a dir, defineix una subrepresentació de V. Però com que V és irreductible, tenim únicament dues possibilitats: o bé $ker(f) = V$ i f és el morfisme zero, o bé $ker(f) = \{0\}$ i f és injectiu.

De manera semblant demostraríem que la imatge $Im(f) \in W$ és G-invariant, això és, una subrepresentació de W. Però com que W és també irreductible, retrobem de nou dues opcions: o bé $Im(f) = 0$ i f és el morfisme zero, o bé $Im(f) = W$ i f és exhaustiu. Per tant, queda demostrat que f pot o bé ser el morfisme zero o bé un isomorfisme.

Passem a demostrar la segona afirmació. Per això, considerem el morfisme $f : V \to V$ amb V irreductible i suposem que no és el morfisme zero. Com que V és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$, sabem que f admet vectors i valors propis (algun no nul). Sigui u_0 un vector propi de f de valor propi $\lambda \neq 0$, això és, $f(u_0) = \lambda u_0$. Considerem el subconjunt de vectors propis amb aquest valor propi

$$U = \{u \in V | f(u) = \lambda u\}$$

També U és G-invariant: si apliquem l_g a la igualtat $f(u) = \lambda u$ obtenim que $f(l_g(u)) = l_g(f(u)) = l_g(\lambda u) = \lambda l_g(u)$. Però com que V és irreductible i $U \neq \{0\}$, necessàriament $U = V$, això és, $f(v) = \lambda v \quad \forall v \in V$. Per tant, $f = \lambda id_V$.

La tercera afirmació és resultat de les dues anteriors. □

Vegem un important corol·lari del lema de Schur:

Proposició 3.10. *Les representacions irreductibles de grups de Lie abelians compactes són uni-dimensionals.*

Demostració. S'entén que s'està excloent el cas de la representació trivial en un espai vectorial zero-dimensional. La demostració és senzilla una vegada disposem del lema de Schur. El que ens aporta el fet que el grup de Lie, G, sigui abelià és que les translacions que defineix una representació (V, ρ) - les l_g per diferents $g \in G$ - són de fet morfismes de representacions. En efecte, per la definició de representació, $l_g : V \to V$ ja és una aplicació lineal. Per tal que l_g fos un morfisme de representacions faltaria que fos equivariant, i justament l'abelianitat ens ho assegura. Efectivament, si prenem $\tilde{g} \in G$ i considerem $l_{\tilde{g}}$, llavors tenim

$$l_{\tilde{g}} \circ l_g = l_{\tilde{g}g} = l_{g\tilde{g}} = l_g \circ l_{\tilde{g}},$$

on a la primera i última igualtat hem utilitzat que ρ és una acció i a la segona l'abelianitat de G. I justament que $l_{\tilde{g}} \circ l_g = l_g \circ l_{\tilde{g}} \quad \forall \tilde{g} \in G$ és la definició de que l_g sigui equivariant. Per tant, $l_g : V \to V$ és un morfisme de representacions. Però llavors pel lema de Schur tenim que $l_g = \lambda(g) id_V$. Això ens assegura que qualsevol subespai de V és G-invariant. Però com que estem suposant que la representació és irreductible, necessàriament obtenim que la representació ha de ser unidimensional, per tal de no tenir cap subespai de dimensió 1 que, pel que hem vist, seria immediatament G-invariant. □

3.4 Descomposició canònica

Hem demostrat ja que tota representació complexa de dimensió finita V es pot descompondre com a suma directa de representacions irreductibles. I tot i que la descomposició no és única, existeix una descomposició especial: la **descomposició canònica**.

Sigui G un grup de Lie i considerem un conjunt complet de representacions irreductibles complexes de G sense incloure dues representacions isomorfes, $Irr(G, \mathbb{C})$. Ens interessa trobar una descomposició d'una representació finita V de G. Diem que una representació irreductible U està **continguda** a V si U és isomorfa a una subrepresentació de V.

Observació 3.11. Notem que, a l'hora de descompondre V com a suma directa de representacions irreductibles, no ens interessa distingir entre representacions irreductibles isomorfes. Això és així perquè el prendre la suma directa preserva l'isomorfisme. Si $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1 \cong V_1'$ i $V_2 \cong V_2'$, llavors $V = V_1 \oplus V_2 \cong V_1' \oplus V_2'$.

Ara, U pot estar continguda a V múltiples vegades, i per fer la descomposició ens interessa saber aquesta multiplicitat.

Definició 3.12. *Sigui U una representació irreductible continguda en V. Definim la* ***multiplicitat de U en V*** *com la dimensió $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U, V)$.*

Hem de veure que la multiplicitat així definida es correspon efectivament amb una noció de quantes còpies de U trobem a V. Ara, sabem que V es pot descompondre com a suma directa de representacions irreductibles

$$V = \bigoplus_i V_i$$

Llavors, podem descompondre també $Hom_G(U, V)$ com

$$Hom_G(U, V) = \bigoplus_i Hom_G(U, V_i)$$

Però $Hom_G(U, V_i)$ involucra únicament les representacions irreductibles U i V_i, i el lema de Schur ens assegura que $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U, V_i)$ és 1 si $U \cong V_i$ o 0 en cas contrari. Però llavors, com que

$$dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U, V) = \sum_i dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U, V_i),$$

tenim que $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U, V)$ és el nombre de representacions irreductibles V_i que són isomorfes a U. Això justifica la definició d'aquest valor com a multiplicitat d'U en V. Ara, donada una representació irreductible $U \in Irr(G, \mathbb{C})$ podem considerar l'aplicació

$$\begin{aligned} d_U : Hom_G(U, V) \otimes_{\mathbb{C}} U &\to V \\ f \otimes u &\mapsto f(u) \end{aligned}$$

Podem fer actuar G sobre $Hom_G(U, V) \otimes_{\mathbb{C}} U$ de tal manera que $g \cdot (f \otimes u) = f \otimes g \cdot u$. I equipant el domini de sortida amb aquesta acció, el morfisme d_U és equivariant. En efecte,

$$d_U(g \cdot (f \otimes u)) = d_U(f \otimes g \cdot u) = f(g \cdot u) = g \cdot f(u) = g \cdot d_U(f \otimes u),$$

on hem utilitzat que f és G-equivariant. Però si prenem totes les representacions U de $Irr(G,\mathbb{C})$ podem reunir les aplicacions d_U en una de sola

$$d : \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V) \otimes_{\mathbb{C}} U \to V$$

Volem veure que d és un isomorfisme de representacions, amb el que ja hauríem aconseguit descompondre V com a suma directa de representacions irreductibles d'un cert conjunt complet $Irr(G,\mathbb{C})$.

Proposició 3.13. *L'aplicació d és un isomorfisme de representacions.*

Demostració. Per començar, definida l'acció de G sobre cada $Hom_G(U,V) \otimes_{\mathbb{C}} U$ com abans, G actua també sobre $\bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V) \otimes_{\mathbb{C}} U$ en la manera usual de definir l'acció en sumes directes. I, de nou, aquesta acció sobre el domini de sortida fa de d una aplicació G-equivariant.

Hem de veure que d és un isomorfisme. Notem que és suficient veure-ho pel cas $V \in Irr(G,\mathbb{C})$ ja que tant la suma directa com un isomorfisme de representacions manté la veracitat del teorema. Per exemple, suposem que $V = V_1 \oplus V_2$ i el teorema és cert per V_1 i V_2, és a dir, els morfismes

$$d_1 : \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V_1) \otimes_{\mathbb{C}} U \to V_1$$
$$d_2 : \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V_2) \otimes_{\mathbb{C}} U \to V_2$$

són isomorfismes. Però com que $V = V_1 \oplus V_2$,

$$Hom_G(U,V) = Hom_G(U,V_1) \oplus Hom_G(U,V_2)$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} V =& V_1 \oplus V_2 \cong \left(\bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V_1) \otimes_{\mathbb{C}} U \right) \oplus \left(\bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V_2) \otimes_{\mathbb{C}} U \right) \\ \cong& \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} Hom_G(U,V) \otimes_{\mathbb{C}} U \end{aligned}$$

i d és també un isomorfisme. Anàlogament pel cas en que $V_1 \cong V_2$. Per tant, és suficient que demostrem la proposició pel cas $V \in Irr(G,\mathbb{C})$. Però llavors és trivial, ja que en ser $Irr(G,\mathbb{C})$ un conjunt complet de representacions irreductibles no hi ha cap parell de representacions isomorfes, és a dir, per tot $U \in Irr(G,\mathbb{C})$ diferent de V, $V \ncong U$ i en aquest cas el lema de Schur ens assegura que $Hom_G(U,V) = 0$. Del domini de d roman únicament $Hom_G(V,V) \otimes_{\mathbb{C}} V$, però el lema de Schur també afirma que $Hom_G(V,V) \cong \mathbb{C}$, així que d és llavors

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} V &\to V \\ a \otimes v &\mapsto av \end{aligned}$$

i d és un isomorfisme. □

Definició 3.14. *La imatge de U per d_U s'anomena el* ***sumand W-isotípic*** *de V, i es denota per $V(U)$. La multiplicitat de $V(U)$ és la dimensió $dim_{\mathbb{C}} Hom_G(U,V)$*

Com que d és un isomorfisme, i aquest preserva la suma directa, hem vist que donat un conjunt complet de representacions irreductibles $Irr(G, \mathbb{C})$, podem descompondre V com a suma directa dels corresponents sumands isotípics:

$$V = \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} V(U)$$

Aquesta descomposició s'anomena la **descomposició canònica**. Volem veure que satisfà certa noció d'unitat, en el sentit següent: si $W_1 \cong W_2$, llavors $V(W_1) = V(W_2)$. Així, si haguéssim escollit un altre conjunt complet de representacions irreductibles no dues d'elles isomorfes, la descomposició canònica seria la mateixa. Vegem doncs que $V(W_1) = V(W_2)$ per $W_1 \cong W_2$.

Proposició 3.15. *Siguin $W_1 \cong W_2$ dues representacions irreductibles d'un grup de Lie G, i sigui V una representació (no necessàriament irreductible) de G. Llavors $V(W_1) = V(W_2)$.*

Demostració. Sigui $\phi : W_1 \to W_2$ un isomorfisme. Aquest indueix un isomorfisme entre $Hom_G(W_1, V)$ i $Hom_G(W_2, V)$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : Hom_G(W_1, V) &\to Hom_G(W_2, V) \\ f &\mapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Alhora, aquests dos isomorfismes indueixen un isomorfisme entre $Hom_G(W_1, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_1$ i $Hom_G(W_2, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_2$:

$$\begin{aligned} \Phi : Hom_G(W_1, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_1 &\to Hom_G(W_2, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_2 \\ f \otimes w_1 &\mapsto f \circ \phi^{-1} \otimes \phi(w_1) \end{aligned}$$

Volem veure que $d_{W_1} = d_{W_2} \circ \Phi$, i per fer-ho ens és suficient veure-ho que la igualtat es compleix en actuar sobre elements de $Hom_G(W_1, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_1$ de la forma $f \otimes_{\mathbb{C}} w_1$, ja que aquests generen tot l'espai $Hom_G(W_1, V) \otimes_{\mathbb{C}} W_1$. Però efectivament,

$$d_{W_2}(\Phi(f \otimes_{\mathbb{C}} w_1)) = d_{W_2}(f \circ \phi^{-1} \otimes \phi(w_1)) = (f \circ \phi^{-1})(\phi(w_1)) = f(w_1) = d_{W_1}(f \otimes_{\mathbb{C}} w_1)$$

Així doncs, $d_{W_1} = d_{W_2} \circ \Phi$, i això ja ens assegura que $V(W_1) = V(W_2)$. □

Així doncs, si en compte de $Irr(G, \mathbb{C})$ haguéssim escollit un altre conjunt complet de representacions irreductibles no dues d'elles isomorfes, $Irr(G, \mathbb{C})'$, la descomposició canònica resultant d'aquesta última tria continuaria sent la mateixa. És en aquest sentit que diem que la descomposició canònica és única.

3.5 Representacions dels tors

Com a exemple que serà de gran importància més endavant, estudiarem aquí les representacions dels tors $T^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n} \cong (\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}})^n \cong (S^1)^n$. El següent teorema està extret de [2], capítol II, secció 8, p 107.

Proposició 3.16. *Les representacions irreductibles del tor T^n són de la forma*

$$\begin{aligned} \Theta : T^n &\to S^1 \\ [x] &\mapsto exp(2\pi i \alpha(x)) \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

on $\alpha(x) = \langle a, x \rangle = \sum_\nu a_\nu x_\nu$ amb $a \in \mathbb{Z}^n$.

Demostració. Comencem notant que T^n és un grup de Lie compacte abelià, de tal manera que per la proposició (3.10) les seves representacions irreductibles són unidimensionals. Per tant, ja sabem que les representacions irreductibles són de la forma

$$\Theta : T^n \to GL(1, \mathbb{C}) \cong C^*$$

Ara bé, com que T^n és compacte, tota representació admet un producte escalar T^n-invariant, i escollint una base ortonormal respecte aquest producte escalar podem prendre la representació com

$$\Theta : T^n \to U(1) \cong S^1$$

L'àlgebra de Lie del tor T^n és $\mathfrak{t}^n = \mathbb{R}^n$ i, en particular, la de S^1 és $\mathbb{R}$. Ara, una representació irreductible $\Theta : T^n \to S^1$ indueix una aplicació entre les àlgebres de Lie $T_e\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que fa commutatiu el diagrama següent

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T_e\Theta"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "exp"] \arrow[d, "T_e\Theta"] & T^n \arrow[d, "\Theta"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & \mathbb{R} \arrow[r, "exp"] & S^1 \end{tikzcd}$$

□

Tota representació de dimensió finita del tor T^n es pot escriure com a suma directa de representacions irreductibles, així que l'anterior proposició ja ens proporciona totes les representacions de dimensió finita de T^n.

En tractar les representacions de tors, apareix un concepte similar al de vectors propis en Àlgebra Lineal.

Definició 3.17. *Sigui T un tor i (V, ρ) una representació complexa de T. Un morfisme de grups de Lie $\theta : T \to S^1$ s'anomena un* ***pes*** *de T si el subespai*

$$V(\theta) = \{v \in V | \rho(t)(v) = \theta(t) \cdot v \quad \forall t \in T\}$$

és no nul. En aquest cas, $V(\theta)$ s'anomena ***espai de pesos*** *de θ i un element no nul de $V(\theta)$ s'anomena un* ***vector de pes*** *θ.*

És necessari aclarir la notació usada en la definició de $V(\theta)$. Un $t \in T$ donat actua sobre V com l'automorfisme $\rho(t)$, de manera que l'acció de t envia el vector v a $\rho(t)(v)$, que és el terme de l'esquerra. Però per altra banda, podem entendre $\theta(t) \in S^1$ com un escalar de $\mathbb{C}$, i com que V és un espai vectorial complex, tenim definit el producte per escalar, aconseguint $\theta(t) \cdot v$.

Com dèiem, la noció de pes i vector de pes generalitza la noció de valor propi i de vector propi. Podem interpretar θ com un funcional sobre T de tal manera que $V(\theta)$ està format per tots els vectors de V que són simultàniament vectors propis de l'acció de $\theta(t)$ per tot $t \in T$.

El concepte de pes, però, no és sinó la particularització de la noció de representació irreductible en el cas dels tors. En efecte, sabem que una representació complexa (V, ρ) de dimensió n d'un tor T es pot descompondre com a suma directa de representacions irreductibles.

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$$

on l'acció de ρ sobre V es pot escriure com

$$\rho(v) = \rho_1(v_1) + ... + \rho_n(v_n)$$

Ara, com que el tor T és abelià, aquestes representacions irreductibles (V_i, ρ_i) són unidimensionals. Una vegada fixada una base de cada V_i, la representació —que prenem, sense pèrdua de generalitat, unitària— és un morfisme $T \to S^1$. Però com tota representació, una vegada fixada una base, ρ_i actua sobre V_i per multiplicació matricial. I com que la matriu resultat és 1×1, la multiplicació matricial coincideix amb el producte per un escalar. Així, si prenem un vector $v_i \in V_i$ no nul de cada V_i, el conjunt $(v_1, ..., v_n)$ forma una base de V, i donat que ρ actua sobre un v com

$$\rho(v) = \rho_1(v_1) + ... + \rho_n(v_n),$$

V_i és justament el conjunt

$$V_i = \{v \in V | \rho(v) = \rho_i \cdot v\}$$

És a dir, els pesos de V són en realitat les subrepresentacions irreductibles de V. En el cas de subrepresentacions amb certa multiplicitat, podríem descompondre arbitràriament la subrepresentació en suma directa de subrepresentacions irreductibles unidimensionals.

Fins aquí hem estat treballant únicament amb $\mathbb{R}$-àlgebres de Lie, doncs aquestes apareixien com espais tangents a varietats diferenciables reals. Veurem, però, que pot resultar interessant passar a una $\mathbb{C}$-àlgebra de Lie. La definició d'aquesta és idèntica a la de $\mathbb{R}$-àlgebra de Lie, excepte en el canvi del cos sobre el que està definida. Hi ha diferents maneres de definir la $\mathbb{C}$-àlgebra de Lie associada a una $\mathbb{R}$-àlgebra de Lie. Nosaltres seguim a Hall [4], capítol 3, secció 6, p 65.

Definició 3.18. *Sigui V un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita. La* ***complexificació*** *de V, denotada per $V_{\mathbb{C}}$, és l'espai vectorial per les combinacions lineals formals*

$$v_1 + iv_2$$

amb $v_1, v_2 \in V$. Aquest és directament un $\mathbb{R}$-espai vectorial, i si definim el producte per la unitat imaginària com

$$i \cdot (v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1$$

és també un $\mathbb{C}$-espai vectorial.

Observació 3.19. Si V és un R-espai vectorial, podem prendre la seva complexificació com el producte tensorial $V_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.

Si $\mathfrak{g}$ és una $\mathbb{R}$-àlgebra de dimensió finita, podem complexificar l'espai vectorial associat i el producte de Lie associat s'estén de manera única a la complexificació $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Per una demostració vegi's [4], capítol 3, secció 6, proposició 3.37, p 65.

Exemple 3.20. Sabem que l'àlgebra de Lie del grup unitari $U(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, està formada per les matrius $n \times n$ antisimètriques. La seva complexificació és $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$, però

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) &\to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \\ c \otimes A &\mapsto cA \end{aligned}$$

defineix un isomorfisme. Així doncs, la complexificació de $\mathfrak{u}(n)$ és $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Anàlogament, l'àlgebra de Lie de $SU(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, està formada per les matrius $n \times n$ antisimètriques i amb traça nul·la. Però llavors, tenim l'isomorfisme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(n) &\to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \\ c \otimes A &\mapsto cA \end{aligned}$$

Per tant, la complexificació de $\mathfrak{su}(n)$ és $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$.

Quan hom discuteix les representacions del tor, freqüentment es recorre a representacions sobre $\mathbb{R}$-espais vectorials. La definició d'una representació real és idèntica a la d'una representació complexa, excepte en que l'espai de representació és un $\mathbb{R}$-espai vectorial, no un $\mathbb{C}$-espai vectorial. Per un lector interessat en les representacions reals i quaternièniques, i les relacions entre els diferents tipus de representacions, es recomana [2], capítol II, secció 6, pp 93-101.

En el cas de representacions reals, disposem d'un concepte anàleg de pes i de vector de pes, tot i que recorrent a la complexificació.

Definició 3.21. *Sigui T un tor i (V, ρ) una representació real de T. Un* ***pes*** *de V és un pes de la complexificació $V_{\mathbb{C}}$.*

3.6 Representacions d'àlgebres de Lie i pesos infinitesimals

Existeix per les àlgebres de Lie una noció anàloga a la de representació donada pels grups de Lie.

Definició 3.22. *Sigui $\mathfrak{g}$ una àlgebra de Lie i V un espai vectorial. Una representació de $\mathfrak{g}$ en V és una forma bilineal*

$$\begin{aligned} L \times V &\to V \\ (X, v) &\mapsto Xv \end{aligned}$$

satisfent $X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v$.

Igual que en el cas de les representacions de grups de Lie, podríem haver donat una definició equivalent de representació d'àlgebra de Lie com un morfisme d'àlgebres de Lie $L \to End(V)$. El requeriment de que la representació compleixi $X(Yv) - Y(Xv) = [X, Y]v$ és simplement per tal de que es preservi el producte de Lie de les àlgebres L i $End(V)$.

Veurem ara com una representació d'un grup de Lie G indueix una representació de la seva àlgebra de Lie associada, $\mathfrak{g}$. Sigui $\rho : G \times V \to V$ una representació complexa. Com que l'aplicació exponencial ens relaciona G i $\mathfrak{g}$, podem utilitzar-la per definir l'acció de $\mathfrak{g}$ sobre V. En efecte, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g} \times V \to V \\ &(X, v) \mapsto L_x v := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(tX)(v) - v) \end{aligned}$$

on notem que hem utilitzat que $exp(tX)$ és un element de G i per tant actua a través de la representació $\rho : G \times V \to V$. Vegem que $\mathfrak{g} \times V \to V$ així donada és una representació d'àlgebres de Lie.

Per començar, l'aplicació és lineal tant en X com en v.

$$\begin{aligned} L_{aX}v &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(taX))(v) - v) = \lim_{\tilde{t} \to 0} \frac{a}{\tilde{t}}(exp(\tilde{t}X))(v) - v) = aL_X v \\ L_{X+Y}v &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(t(X+Y)))(v) - v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((exp(tX) \cdot exp(tY))(v) - v) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((exp(tX) \cdot exp(tY))(v) - exp(tY)v + exp(tY)v - v) = L_X v + L_Y v \\ L_X(av + bu) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(tX)(av + bu) - (av + bu)) \\ &= a \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(tX)(v) - v) + b \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(exp(tX)(u) - u) \\ &= aL_X v + bL_X u \end{aligned}$$

A les anteriors igualtats hem utilitzat que el camí diferenciable $\alpha(t) = exp(tX) \cdot exp(tY)$ té per vector tangent a la identitat $X + Y$, la continuïtat de l'acció de ρ en V i que l'acció de $exp(tX)$ per un $t \in \mathbb{R}$ fixat és una aplicació lineal. Notem que donat que $\rho : G \to Aut(V)$ és un homomorfisme de grups de Lie, el seu diferencial $T_e\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ és un morfisme d'àlgebres de Lie. De fet, $T_e\rho(X)$ és justament l'endomorfisme que envia v a $L_X v$. I com que $T_e\rho$ és un morfisme d'àlgebres de Lie, preserva el producte de Lie, de tal manera que $T_e\rho([X,Y]) = [T_e\rho(X), T_e\rho(Y)]$. Queda demostrat, doncs, que $\mathfrak{g} \times V \to V$ definida per $(X, v) \mapsto L_x v$ és una representació d'àlgebres de Lie. La naturalitat de l'aplicació exponencial ens assegura que el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "T_e\rho"] \arrow[d, "exp"'] & End(V) \arrow[d, "exp"] \\
G \arrow[r, "\rho"] & Aut(V)
\end{tikzcd}$$

Donat que $exp : End(V) \to Aut(V)$ coincideix amb l'exponencial de matrius, la commutativitat del diagrama ens assegura que, per un vector $X \in \mathfrak{g}$, e^X actua sobre V com e^{L_X} on L_X és l'automorfisme $L_X = T_e\rho(X)$.

Hem vist que tota representació d'un grup de Lie G indueix una representació de la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tot i que en general l'àlgebra de Lie no determini el grup de Lie del que parteix, en el cas de grups de Lie simplement connexos, tot homomorfisme $\tau : \mathfrak{g} \to End(V)$ determina unívocament una representació de G en V. Vegi's [4], capítol 5, secció 7, teorema 5.6, p 119.

Una vegada introduïdes les representacions de les àlgebres de Lie, continuem aquí la discussió sobre les representacions dels tors.

Recordem que si T és un tor i (V, ρ) és una representació complexa de T, un pes de V és un homomorfisme $\theta : T \to U(1)$ tal que el subespai

$$V(\theta) = \{v \in V | \rho(t)(v) = \theta(t) \cdot v \quad \forall t \in T\}$$

és no buit. Com a representació, θ indueix una representació d'àlgebres de Lie que denotarem $\Theta : \mathfrak{t} \to \mathfrak{u}(1)$. Havent vist a (2.5.4) com és $\mathfrak{u}(n)$ per un n general, tenim que $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$. El diferencial dóna lloc a una noció infinitesimal de pes:

Definició 3.23. *Una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\Theta : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$ és un* ***pes infinitesimal*** *de V si el subespai*

$$V(\Theta) = \{v \in V | L_X v = \Theta(X) \cdot v \quad \forall X \in \mathfrak{t}\}$$

conté elements no nuls. En aquest cas, $V(\Theta)$ s'anomena ***espai de pesos*** *i v un* ***vector de pes****.*

Pel cas de representacions complexes, tenim tant una noció global de pes, $\theta : T \to U(1)$, com una d'infinitesimal, $\Theta : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$. Vegem que existeix una bijecció entre aquestes nocions.

Teorema 3.24. *Sigui T un tor i (V, ρ) una representació complexa. L'assignació $\theta \mapsto T_e\theta$ és una bijecció entre pesos i pesos infinitesimals de V. No només això, sinó que per tot pes θ tenim $V(\theta) = V(T_e\theta)$.*

Demostració. Sigui θ un pes de V. Com tal, $\theta : T \to U(1)$ és un homomorfisme de grups de Lie. Prenem el morfisme d'àlgebres de Lie que indueix, $T_e\theta : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$. Volem veure que $T_e\theta$ és un pes infinitesimal, és a dir, que $V(T_e\theta)$ és diferent de $\{0\}$.

Ara, prenent $v \in V(\theta)$ un vector de pes θ, aquest compleix que

$$\rho(t)(v) = \theta(t) \cdot v \quad \forall t \in T$$

En particular, si prenem $X \in \mathfrak{t}$ i considerem el grup uniparamètric $exp(tX)$, tenim que

$$\rho(exp(tX))(v) = \theta(exp(tX))) \cdot v \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Diferenciant la igualtat anterior obtenim

$$L_X v = T_e\theta(X) \cdot v$$

Per tant, $v \in V(T_e\theta)$, és a dir, $V(\theta) \subset V(T_e\theta)$ i, en particular, $V(T_e\theta) \neq \{0\}$ és un espai de pesos i $T_e\theta$ un pes infinitesimal. Demostrem ara la inclusió contrària. Sigui $\Theta : \mathfrak{g} \to i\mathbb{R}$ un pes infinitesimal de V i sigui $v \in V(\Theta)$ un vector no nul. Llavors v compleix

$$L_X v = \Theta(X) \cdot v \quad \forall X \in \mathfrak{t}$$

Així, L_X és l'endomorfisme de $End(V)$ actuant per multiplicació per $\Theta(X)$. Ara, vam veure que $exp(X)$ actua sobre V com e^{L_X}. Però pel que acabem de veure, $e^{L_X} = e^{\Theta(X)}$. Així doncs, $exp(X)(v) = e^{\Theta(X)} \cdot v$. Però donat que l'aplicació exponencial d'un tor $exp : \mathfrak{t} \to T$ és exhaustiva ([4], capítol 11, secció 11.1, a la demostració del teorema 11.2), podem factoritzar l'aplicació $\mathfrak{t} \to U(1)$ enviant $X \mapsto e^{\Theta(X)}$, a través de l'exponencial, obtenint llavors una aplicació $\theta_\Theta : T \to U(1)$ que justament per la última igualtat vista, és un pes de V. Així doncs, $\{0\} \neq V(\Theta) \subset V(\theta_\Theta)$. Per acabar la demostració falta veure que $\theta_{T_e\theta} = \theta$ i $T_e(\theta_\Theta) = \Theta$, és a dir, que les aplicacions enviant $\Theta \mapsto \theta_\Theta$ i $\theta \mapsto T_e\theta$ són inverses una de l'altre.

Vegem per exemple que $\theta_{T_e\theta} = \theta$. Començant pel pes $\theta : T \to U(1)$, si prenem el seu diferencial a la identitat obtenim $T_e\theta : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$. Però llavors $\theta_{T_e\theta}$ és l'aplicació $T \to U(1)$ enviant $exp(\mathfrak{t}) \mapsto e^{T_e\theta}$, i justament aquesta aplicació és θ. Per tant, $\theta_{T_e\theta} = \theta$. Anàlogament veuríem que $L(\theta_\Theta) = \Theta$. □

Donat que $U(1) \cong S^1$, podríem haver parametritzat l'àlgebra de $U(1)$ com $\mathbb{R}$ en comptes de $i\mathbb{R}$. Així, definim el concepte relacionat de pes infinitesimal real:

Definició 3.25. *Una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ és un **pes infinitesimal real** de V si l'espai de pesos*

$$V(\alpha) = \{v \in V | L_X v = 2\pi i\alpha(X) \cdot v \quad \forall X \in \mathfrak{t}\}$$

*conté elements no nuls. De nou, els elements no nuls de $V(\alpha)$ s'anomenen **vectors de pes** α.*

Una conseqüència de l'anterior teorema i del fet que tota representació complexa es pot descompondre com a suma directa dels espais de pesos corresponents a pesos globals, és que de la mateixa manera podem descompondre la representació com a suma directa dels espais de pesos corresponents als pesos infinitesimals.

El fet que la definició de pes infinitesimal sigui com a aplicació $\mathbb{R}$-lineal no s'ha de confondre amb que la pròpia representació del grup de Lie estigui feta sobre un espai vectorial complex. Això és resultat de que fins aquí hem tractat únicament grups de Lie i àlgebres reals. Però donat que en la representació adjunta l'espai de representació és un $\mathbb{R}$-espai vectorial, necessitem una noció de pes per representacions reals.

Definició 3.26. *Sigui T un tor i V una representació real de T. Els **pesos** reals, també anomenats infinitesimals, de T són els pesos infinitesimals de la complexificació de V, $V_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$*

4 Tor maximal, grup de Weyl i diagrama de pesos

4.1 Tor maximal i grup de Weyl

Hem vist que les representacions irreductibles dels tor T^n es poden ordenar fàcilment amb $\mathbb{Z}^n$. És per això que en tractar les representacions d'altres grups de Lie ens interessa recuperar les representacions dels tors. En endavant, G serà un grup compacte connex. Pel lector interessat en tractar el cas en que G no sigui connex es recomana [2], capítol IV, secció 4, pp 176-182.

Definició 4.1. *Sigui G un grup de Lie. Un tor maximal T de G és un subgrup $T \subset G$ isomorf a un tor $T \cong \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ i tal que no existeix un altre tor $T' \subset G$ amb $T \subsetneq T'$.*

El primer que hem de fer és veure que tot grup de Lie G compacte i connex admet un tor maximal. Com que els tors són compactes i connexos, si tenim dos tors $T \subsetneq T'$, llavors $dim\ T < dim\ T'$. Però com que e és un tor i la dimensió de G és finita, la dimensió dels possibles tors està acotada, el que prova que existeix un tor maximal.

En general, en un grup de Lie G compacte i connex no existirà un únic tor maximal. El següent teorema ens assegura, però, que tots els tors maximals són conjugats. El lector pot trobar una demostració a [2], capítol IV, secció 1, teorema 1.6, p 159.

Teorema 4.2. *Dos tors maximals en un grup de Lie G compacte i connex són conjugats, i tot element de G es troba en un tor maximal.*

El fet que tot tor maximal sigui conjugat ens assegura que tots tenen la mateixa dimensió. En efecte, siguin T i T' dos tors maximals de G. Pel teorema, existeix un automorfisme de conjugació $c(g)$ de tal manera que $T' = c(g)(T)$. Però justament com que $c(g)$ és un automorfisme, T i T' tenen la mateixa dimensió. Això justifica la següent definició.

Definició 4.3. *El **rang de G**, denotat per $rang(G)$, és la dimensió d'un tor maximal de G.*

Una altre corol·lari important de l'anterior teorema és el següent:

Corol·lari 4.4. *L'aplicació exponencial d'un grup de Lie compacte i connex és exhaustiva.*

Demostració. L'aplicació exponencial d'un tor és exhaustiva. El lector pot trobar una demostració a [4], capítol 11, secció 11.1, a la demostració del teorema 11.2. Prenem doncs $x \in G$ i considerem un tor maximal T que contingui x. Com que l'aplicació exponencial d'un tor és exhaustiva, x pertany a la imatge $exp : \mathfrak{t} \to T$. Ara bé, donat que la inclusió $T \to G$ és un homomorfisme de grups de Lie, indueix un homomorfisme d'àlgebres de Lie $\mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$. I la naturalitat de l'aplicació exponencial ens assegura que x també es troba a la imatge de $exp : \mathfrak{g} \to G$. $\square$

Un altre resultat pel qual no aportarem demostració és el fet que un tor maximal T de G és un conjunt abelià maximal, és a dir, no existeix un subgrup abelià S amb $T \subsetneq S$. Per una demostració el lector pot adreçar-se a [2], capítol IV, secció 2, teorema 2.3, p 165.

Ara, fixat un tor maximal T de G, podem considerar el normalitzador de T

$$N(T) = \{g \in G | c(g)(T) = T\}$$

Clarament $T \subset N(T)$ i, de fet, T és un subgrup normal de $N(T)$ per la pròpia definició de normalitzador. Així doncs, podem considerar el grup quocient $N(T)/T$

Definició 4.5. *Sigui T un tor maximal de G. El grup $W = \frac{N(T)}{T}$ s'anomena* ***grup de Weyl*** *de G*

El grup de Weyl dependrà de la tria de tor maximal. Però de nou el teorema (4.2) ens assegura que tots els grups de Weyl de G són isomorfs. En efecte, el teorema ens diu que dos tors T i T' són isomorfs per un cert automorfisme de conjugació $c(g)$. Però llavors $c(g)$ també ens dona un isomorfisme entre els normalitzadors $N(T)$ i $N(T')$, així que en prendre els quocients obtenim un isomorfisme entre els grups de Weyl W i W'.

Per la pròpia definició del normalitzador $N(T)$ podem definir una acció per conjugació de $N(T)$ sobre el tor T.

$$\begin{aligned} N(T) \times T &\to T \\ (n, t) &\mapsto ntn^{-1} \end{aligned}$$

I com que tots els elements de T actuen de manera trivial, aquesta acció pot ser portada a una acció del grup de Weyl sobre el tor.

$$\begin{aligned} W \times T &\to T \\ (nT, t) &\mapsto ntn^{-1} \end{aligned}$$

Per estudiar el grup de Weyl de $U(n)$ i $SU(n)$ necessitarem la següent definició i teorema:

Definició 4.6. *Sigui T un tor. Diem que $t \in T$ és un generador de T si el conjunt*

$$\{t^k \in T | k \in \mathbb{Z}\}$$

és dens en T.

Teorema 4.7. ***Teorema de Kronecker*** *Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ representa un generador de T^n si i només si 1 i els components $v_1, ..., v_n$ de v són linealment independents sobre els racionals. Per tant, quasi tot element de T és un generador i els generadors formen un subconjunt dens en el tor.*

El lector pot trobar una demostració del teorema a [2], capítol I, secció 4, teorema 4.13, p 38.

4.2 Tors maximals i grups de Weyl de $U(n)$ i $SU(n)$

Com a exemple que serà rellevant més endavant, prenem els grups unitaris $U(n)$ i unitaris especials $SU(n)$ per il·lustrar el que s'ha exposat respecte els tors maximals i el grup de Weyl. Considerem a $U(n)$ el subconjunt format per les matrius diagonals

$$\Delta(n) = \{ \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) | d_i \in S^1 \}$$

Com que una matriu unitària ha de complir $A^\dagger A = E$, una matriu diagonal unitària ha de complir que les seves entrades diagonals siguin a $S^1 = U(1)$. Veure que $\Delta(n)$ és un tor és senzill si considerem un tor T^n com $(S^1)^n$. Més interessant és veure que és de fet un tor maximal.

Suposem que existís un altre tor T contenint estrictament $\Delta(n)$. Donat que $\Delta(n)$ està format per totes les matrius diagonals contingudes a $U(n)$, com que $\Delta(n) \subsetneq T$, existeix a T una matriu $A \in U(n)$ amb algun element fora de la diagonal no nul. Donat que A no commuta amb tota matriu diagonal de $\Delta(n)$, T no és abelià. Hem arribat doncs a una contradicció, ja que havíem suposat que T era un tor però tot tor és abelià. Així doncs, queda vist que $\Delta(n)$ és un tor maximal de $U(n)$ i, per tant, $U(n)$ és un grup de rang n.

Falta veure com és el grup de Weyl de $U(n)$. Per això, representem els elements de $\Delta(n)$ com $D = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ amb $\theta_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $d_i = e^{2\pi i\theta_i}$. Pel teorema de Kronecker (4.7) un element $D = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ és un generador de T si $1, \theta_1, ..., \theta_n$ són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$. Considerem un generador $D = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ i l'acció d'un element del grup de Weyl $w \in W$ en D. Com que el grup de Weyl actua sobre el tor per conjugació, i la conjugació no modifica els valors propis d'una matriu, $w \cdot D \in \Delta(n)$ és una matriu de $\Delta(n)$ tenint els mateixos valors propis que D. Per tant, el màxim que pot fer l'acció d'un element de W sobre D és permutar els elements de la diagonal. I donat que D és un generador de T, queda determinada l'acció de W sobre tot T. Per tant, un element del grup de Weyl de $U(n)$ es pot identificar amb una permutació de $S(n)$. Vegem que de fet el grup de Weyl W és tot el grup simètric $S(n)$. En efecte, com que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

sent $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U(2)$ amb $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, per tota transposició σ de $S(n)$ existeixen al normalitzador $N(\Delta(n))$ i, per tant, al grup de Weyl W, elements que actuen sobre $\Delta(n)$ transposant les entrades de la diagonal com σ. Com que tota permutació es pot escriure com a producte de transposicions, queda demostrat que el grup de Weyl W de $U(n)$ és el grup simètric $S(n)$. Òbviament el raonament anterior no aplica a $n = 1$, però en aquest cas, $U(1) \cong S^1$ és directament un tor.

Estudiem ara el cas de $SU(n)$. Vegem que $S\Delta(n) = S \cap \Delta(n)$ és un tor maximal de $SU(n)$. Notem que

$$S\Delta(n) = \{ \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) | d_i \in S^1 \wedge d_1 \cdot ... \cdot d_n = 1 \}$$

Per una tria de $d_1, ..., d_{n-1}$ sempre podem escollir d_n de tal manera $d_1 \cdot ... \cdot d_n = 1$. Per tant, $S\Delta(n)$ és un tor de dimensió $n-1$. Per un raonament idèntic al fet en el cas de $U(n)$ obtenim que $S\Delta(n)$ és un tor maximal de $SU(n)$. $SU(n)$ és, doncs, un grup de rang $n-1$. Amb els mateixos arguments fets en el cas de $U(n)$ i la consideració de que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ té determinant 1, retrobem que el grup de Weyl de $SU(n)$ és també el grup simètric $S(n)$.

4.3 Sistema d'arrels

A la següent secció veurem que el sistema de pesos de la representació adjunta d'un grup de Lie forma un sistema d'arrels. És necessari, per tant, introduir abans el concepte abstracte d'un sistema d'arrels. L'exposició està basada en [4], capítol 8.

Definició 4.8. *Un **sistema d'arrels** és un parell (E, V) on E és un espai euclidià equipat amb un producte escalar i V és un subconjunt finit de vectors d'E no nuls complint el següent:*

1. *Els vectors de V generen E.*

2. *Si $\alpha, \beta \in V$ són proporcionals, llavors $\alpha = \beta$ o $\alpha = -\beta$.*

3. Per tot $\alpha, \beta \in V$, $s_\alpha(\beta) \in V$, on

$$s_\alpha(v) = v - 2\frac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$$

4. Per tot $\alpha, \beta \in V$, $2\frac{\langle \alpha,\beta\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$

*S'anomena **rang** del sistema d'arrels a la dimensió d'E, i **arrels** als elements de V.*

Alguns autors defineixen un sistema d'arrels sense la propietat 2. En aquest cas, un sistema d'arrels complint aquesta propietat s'anomenaria un sistema d'arrels reduït. Com que els sistemes d'arrels que ens trobarem seran reduïts, per nosaltres no és important la distinció. És important observar que s_α és la reflexió respecte l'hiperplà ortogonal a l'arrel α. En particular, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ i, per tant, per la propietat 3, si $\alpha \in V$, també $-\alpha \in V$. La propietat 4 ens assegura que si $\alpha, \beta \in V$, la diferència entre $s_\alpha(\beta)$ i β és un un múltiple enter d'α.

Notem que donat un sistema d'arrels (E, V) podríem aplicar una homotècia i obtindríem un altre sistema d'arrels que, tot i ser quasi idèntic al mateix, no manté els productes escalars entre les seves arrels. Com que ens interessa distingir els sistemes d'arrels realment diferents, definim una noció d'equivalència entre sistemes d'arrels.

Definició 4.9. *Diem que dos sistemes d'arrels, (E, V) i (F, U), són isomorfs si existeix una aplicació lineal bijectiva $\phi : E \to F$, induint una bijecció $\phi|_V : V \to U$ i complint*

$$\phi(s_\alpha(\beta)) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))$$

La última condició ens assegura que el morfisme preserva l'estructura de reflexions del sistema d'arrels. Les reflexions són un dels objectes importants en un sistema d'arrels:

Definició 4.10. *Sigui (E, V) un sistema d'arrels. El **grup de Weyl** del sistema, denotat per W, és el subgrup del grup ortogonal $O(E)$ generat per les reflexions s_α amb $\alpha \in V$.*

Notem que, donat que els vectors de V generen tot E, una transformació lineal de E queda determinada per l'acció d'aquesta sobre V. I com que la imatge de V per qualsevol reflexió s_α és a V, sent aquest un conjunt finit, el propi grup de Weyl W és un conjunt finit. Sabem que tota reflexió s_α és un element del grup ortogonal $O(E)$ amb determinant -1 així que, en particular, tota reflexió estableix una bijecció entre les arrels, això és, un element del grup simètric corresponent.

4.4 El sistema d'arrels d'un grup de Lie i la representació adjunta

En el cas concret de la representació adjunta, als pesos de la representació els hem anomenat arrels. En aquesta secció veurem que les arrels reals d'un grup de Lie G formen un sistema d'arrels com hem definit a la secció anterior. Recordem què és un pes real:

Definició 4.11. *Sigui T un tor i V una representació real de T. Els **pesos** reals, també anomenats infinitesimals, de T són els pesos infinitesimals de la complexificació de V, $V_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$*

Donat que $\mathfrak{t}$ és un espai vectorial real, en tractar la representació adjunta hem de recórrer a la complexificació $\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{t}$. Sigui G un grup de Lie compacte i connex, i T un tor maximal de G. Una arrel real de G és un pes real de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, és a dir, és una aplicació lineal $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ complint que l'espai de pesos

$$V(\alpha) = \{X \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} | [H, X] = 2\pi i \alpha(H) \cdot X \quad \forall H \in \mathfrak{t}\}$$

és no nul. Aquí α és un element del dual $\mathfrak{t}^*$, però si disposéssim d'un producte escalar sobre $\mathfrak{t}$ podríem identificar $\mathfrak{t}^*$ amb $\mathfrak{t}$. Per això, considerem la **forma de Killing**:

Definició 4.12. *Sigui G un grup de Lie i $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie associada. La **forma de Killing** ψ de $\mathfrak{g}$ és la forma bilineal i simètrica definida per*

$$\psi(X, Y) = Tr(adX \circ adY) \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

Recordem que si $X \in \mathfrak{g}$, la representació adjunta ad envia X a l'endomorfisme de $\mathfrak{g}$ definit per $Y \mapsto [X, Y]$. Així doncs, la forma de Killing resulta de prendre la traça del producte de dos endomorfismes. Donat que $Tr(AB) = Tr(BA)$, la forma de Killing efectivament és simètrica. Ara bé, ψ no és un producte escalar, doncs no és definida positiva. Vegem-ho.

Sigui G un grup de Lie compacte i connex, i sigui X un element de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Com que tot element de G es troba en algun tor maximal, podem triar un tor maximal T amb $X \in \mathfrak{t}$. Podem descompondre $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ com a suma directe dels seus espais de pesos. Si denotem per R el conjunt de pesos reals de G, la descomposició és

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in R} V(\alpha)$$

Si prenem com a base una base de vectors de pes $\{v_\alpha\}$, llavors adX és una matriu diagonal. En efecte, $ad(X)(v_\alpha) = [X, v_\alpha]$ però com que v_α és un vector de pes α,

$$ad(X)(v_\alpha) = [X, v_\alpha] = 2\pi i \alpha(X) \cdot v_\alpha$$

Així doncs, en aquesta base $ad(X)$ és una matriu diagonal, sent els elements de la diagonal $2\pi i \alpha(X)$. Però llavors $ad(X) \circ ad(X)$ és una matriu diagonal en que els elements de la diagonal són $-(2\pi)^2 \alpha(X)^2$. Per tant,

$$\psi(X, X) = Tr(ad(X) \circ ad(X)) = -(2\pi)^2 \sum_{\alpha \in R} \alpha(X)^2$$

Per tant, si no existeix cap vector $X \in \mathfrak{t}$ no nul satisfent $\alpha(X) = 0 \quad \forall \alpha \in R$, és a dir, si $\cap_{\alpha \in R} ker(\alpha) = \{0\}$, llavors la forma de Killing ψ és definida negativa. En aquest cas, podem definir un producte escalar $\langle X, Y \rangle$ a $\mathfrak{t}$ prenent

$$\langle X, Y \rangle = -\psi(X, Y)$$

Hem vist que un grup de Lie compacte i connex complint $\cap_{\alpha \in R} ker(\alpha) = \{0\}$ sembla ser important. Diem que un grup de Lie és **semisimple** si no conté cap subgrup normal connex i abelià diferent de la identitat $\{e\}$. La demostració de que un grup de Lie compacte i connex complint $\cap_{\alpha \in R} ker(\alpha) = \{0\}$ és semisimple és més avançada de l'exposició d'aquest text i requeriria del desenvolupament de representacions reals. Pel lector interessat recomanem [2]. Elements claus per la demostració són la relació entre representacions complexes i representacions reals (capítol II, secció 6, pp 93-101), el fet que el centre d'un grup de Lie compacte i connex és la intersecció dels seus tors maximals (capítol IV, secció 2, teorema 2.3, p 165) i que $\cap_{\alpha \in R} ker(\alpha)$ és el centre de G (capítol V, secció 2, proposició 2.3, p 189).

Els grups de Lie compactes, connexos i semisimples ens seran rellevants degut a que ens permeten donar estructura de sistemes d'arrels a les arrels del grup.

Teorema 4.13. *Sigui G un grup de Lie compacte i connex amb tor maximal T i sigui $V \subset \mathfrak{t}^*$ el subespai generat pel conjunt R d'arrel reals de G. Llavors R és un sistema d'arrels a V i el grup de Weyl de G, vist com a subgrup d'$Aut(V)$ és el mateix que el grup de Weyl del sistema d'arrels definit a l'anterior secció.*

La demostració del teorema es pot trobar a [2], capítol V, secció 3, teorema 3.12, p 200. És necessari fer un seguit d'observacions.

Per començar, el teorema no és únicament per grups semisimples. En cas que G no sigui semisimple, però, hom ha de tractar amb el centre no nul de G. Per altra banda, el producte escalar derivat de la forma de Killing l'hem definit a $\mathfrak{t}$, no al seu dual $\mathfrak{t}^*$. Ara bé, justament a través del dual obtenim un isomorfisme entre $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{t}^*$

$$\begin{aligned}\kappa : \mathfrak{t} &\to \mathfrak{t}^* \\ X &\mapsto \langle X, \cdot \rangle\end{aligned}$$

Així, les arrels de G, tot i pròpiament ser aplicacions lineal de $\mathfrak{t}$ a $\mathbb{R}$, les podem identificar amb elements de $\mathfrak{t}$.

Finalment, vegem que no és estrany que el grup de Weyl de G, definit com a quocient $\frac{N(T)}{T}$ a partir d'un tor maximal T, actuï sobre les arrels de G. En efecte, suposem fixat un tor maximal T i sigui $\mathfrak{t}$ la seva àlgebra de Lie. Sigui $\rho : \mathfrak{t} \to End(V)$ una representació de $\mathfrak{t}$ i $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ una arrel de V. Sigui $g \in N(T)$ un element del normalitzador de T. Llavors $c(g)(T) = T$ i podem prendre $c(g) : T \to T$. Prenent el diferencial a la unitat $T_e c(g) : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}$ obtenim un automorfisme de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{t}$. L'aplicació enviant α a $\alpha \circ T_e^{-1}$ indueix llavors una bijecció de les arrels reals de G.

4.5 Representacions de SU(3)

Veurem aquí com s'organitzen geomètricament les arrels de $SU(3)$, i utilitzarem aquest coneixement per investigar l'estructura de pesos d'altres representacions, no necessàriament la representació adjunta. El tor maximal de $SU(3)$ és

$$S\Delta(3) = \{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) | d_i \in S^1 \wedge d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = 1 \}$$

$T \coloneqq S\Delta(3)$ és un tor de dimensió 2, així que la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{t}$ és una àlgebra de dimensió 2, $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^2$. Notem que identificant $d_i = e^{2\pi i \theta_i}$ amb θ_i, podem interpretar $S\Delta(3)$ com

$$S\Delta(3) \cong \{ 2\pi i \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) | \theta_i \in \mathbb{R} \wedge \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \}$$

Així vista, una base de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{t}$ és

$$H_1 = 2\pi i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = 2\pi i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donat que $\mathfrak{t}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial, les arrels infinitesimals de $SU(3)$ són arrels infinitesimals de la complexificació, és a dir, són aplicacions lineals $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ no nul·les satisfent que existeix una matriu $X \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(3) \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $X \neq 0$ satisfent

$$[H, X] = HX - XH = 2\pi i \alpha(H) \cdot X$$

El subespai dels elements de la diagonal és justament l'espai generat per $2\pi i H_1$ i $2\pi i H_2$, i donat que aquests commuten entre ells, si prenguéssim $X \in \mathfrak{t}$ no nul, tindríem $0 = [H, X] = 2\pi i \alpha(H) \cdot X$, és a dir, $\alpha(H) = 0 \;\; \forall H \in \mathfrak{t}$. És a dir, hem de prendre $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \backslash \mathfrak{t}$. Considerem $E_{\mu\nu} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ la matriu amb un únic 1 a la posició (μ, ν), amb $\mu \neq \nu$. Llavors,

$$\begin{aligned}
[H_1, E_{01}] &= 2\pi i E_{01} & [H_2, E_{01}] &= 2\pi i E_{01} \\
[H_1, E_{02}] &= 2\pi i E_{02} & [H_2, E_{02}] &= 2\pi i E_{02} \\
[H_1, E_{10}] &= -2\pi i E_{10} & [H_2, E_{10}] &= 0 \\
[H_1, E_{12}] &= -2\pi i E_{12} & [H_2, E_{10}] &= 0 \\
[H_1, E_{20}] &= 0 & [H_2, E_{20}] &= -2\pi i E_{20} \\
[H_1, E_{21}] &= 0 & [H_2, E_{21}] &= -2\pi i E_{21}
\end{aligned}$$

Com que $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ és una aplicació lineal, el producte de Lie és bilineal i $\{2\pi i H_1, 2\pi i H_2\}$ és una base de $\mathfrak{t}$, α queda determinat pels valors que pren a $2\pi i H_1$ i $2\pi i H_2$. Podem denotar una arrel per $(\alpha(2\pi i H_1), \alpha(2\pi i H_2))$. De les anterior igualtats, i en la notació $(\alpha(2\pi i H_1), \alpha(2\pi i H_2))$, veiem que les formes $(1, 1)$, $(-1, 0)$ i $(0, -1)$ són arrels reals. Donat que si α és una arrel, també ho és $-\alpha$, tenim que les arrels de $SU(3)$ són $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (0, -1)$ i $(-1, -1)$. La disposició geomètrica d'aquestes arrels és el sistema d'arrels conegut com A2, representat a continuació.

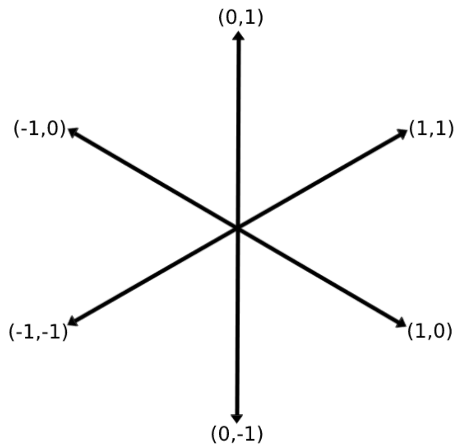

Figura 1: Sistema d'arrels A2

Si bé no tenim espai per detallar extensivament com s'organitzen geomètricament els pesos de representacions diferents de la representació adjunta, sí que farem la següent observació. Sigui (ρ, V) una representació de $SU(3)$. Sabem que podem descompondre V com a suma directe dels seus espais de pesos:

$$V = \bigoplus_{\alpha \in R} V_\alpha$$

on R denota els pesos reals de V. Sigui $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ un pes real de V. Llavors es compleix que existeix un $X_\alpha \in V$ no nul amb

$$\rho(H)(X_\alpha) = 2\pi i \alpha(H) \cdot X_\alpha$$

per tot $H \in \mathfrak{t}$. Considerem una arrel $\beta : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$. Aquesta compleix que existeix un $X_\beta \in \mathfrak{t}$ no nul satisfent

$$[H, X_\beta] = 2\pi i \beta(H) \cdot X_\beta$$

Per simplificar la notació tot distingint l'acció de $\rho(H)$ sobre X_α del producte per un escalar, utilitzarem la notació $H(X_\alpha) = \rho(H)(X_\alpha)$. En aquesta notació, $H(X_\alpha) = 2\pi i \alpha(H) \cdot X_\alpha$. Demostrem que $X_\beta(X_\alpha)$ és també un pes de V:

$$\begin{aligned} H(X_\beta(X_\alpha)) &= X_\beta(H(X_\alpha)) + [H, X_\beta](X_\alpha) = X_\beta(2\pi i \alpha(H) \cdot X_\alpha) + (2\pi i \beta(H) \cdot X_\beta)(X_\alpha) \\ &= 2\pi i(\alpha(H) + \beta(H)) \cdot X_\beta(X_\alpha) \end{aligned}$$

Per tant, $X_\beta(X_\alpha)$ és un pes de V amb pes $\alpha(H) + \beta(H)$. Escrivint els pesos i arrels com $(\alpha(2\pi i H_1), \alpha(2\pi i H_2))$, tenim que $X_\beta(X_\alpha)$ és un pes amb $(\alpha(2\pi i H_1) + \beta(2\pi i H_1), \alpha(2\pi i H_2) + \beta(2\pi i H_2))$. Així doncs, si tenim un pes d'una representació qualsevol, podem obtenir nous pesos fent ús de les arrels de la representació adjunta. De la mateixa manera que les arrels es disposen geomètricament com un sistema d'arrels, en general els pesos també mostren disposicions geomètriques especials. A la següent secció veurem exemples de sistemes d'arrels de $SU(3)$ representant grups de partícules

4.6 The eightfold way

Per acabar el treball mostrarem aquí la importància que va tenir —i continua tenint— la teoria de representacions de grups de Lie en Física. Ho farem a través de l'exemple de l'ús del grup de Lie $SU(3)$ en física de partícules.

El 1969 el físic nord-americà Murray Gell-Mann rebé el premi Nobel en física "per les seves contribucions i descobriments relacionades amb la classificació de les partícules elementals i les seves interaccions" [9]. Gell-Mann i, independentment el físic israelià, Yuval Ne'eman, havien utilitzat la simetria $SU(3)$ per posar ordre a la gran quantitat de partícules descobertes fins al moment. Per posar alguns exemples, el 1949 es descobrí el kaó neutre (K), quatre anys després es descobriren els kaons carregats (K^+ i K^-) i el 1950 la partícula lambda Λ. No només s'havien descobert una gran quantitat de partícules, sinó que moltes d'elles semblaven estar organitzades en grups de partícules que, si ve es diferenciaven per algunes propietats, tenien una massa molt semblant. Un exemple patent és el del protó i el neutró, que tot i tenir una càrrega elèctrica diferent, tenen masses quasi idèntiques. La utilització per part de Gell-Mann i Ne'eman el 1961 de $SU(3)$ per posar ordre al "zoo de partícules" és el que en última instància va conduir a la formulació de la teoria dels quarks. Nosaltres, però, no seguirem el desenvolupament històric, sinó que mostrarem com el grup $SU(3)$ apareix en física de partícules des del coneixement de la teoria dels quarks.

Sabem actualment que el protó i el neutró no són partícules elementals, sinó que estan formats per partícules fonamentals anomenades quarks. El protó està constituït per dos quarks up i un quark down (uud), mentre que el neutró està format per un quark up i dos quarks down (udd). Existeixen un total de 6 quarks, que es mostren a la figura següent.

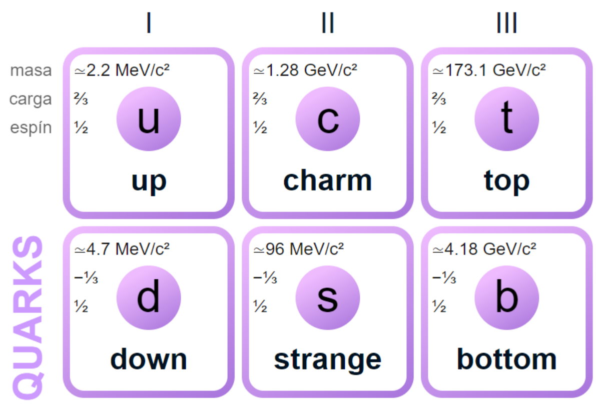

Figura 2: Els 6 quarks del model estàndard, ordenats en les tres generacions de fermions. La massa de les partícules està expressada en MeV/c^2. Imatge de Fabsanhvasq - Treball propi, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=114975485

Els quarks up i down tenen una massa relativament semblant. Així doncs, no és estrany que protó i neutró —que es diferencien en un quark up o down— tinguin masses tan properes. Però els quarks up i down tenen unes càrregues elèctriques de $2/3$ i $-1/3$, respectivament. És per això que el protó té una càrrega elèctrica de 1 i el neutró càrrega nul·la. Existeix també un quartet de partícules, els barions delta (Δ), amb masses molt semblants però càrregues elèctriques diferents. El seu contingut en quarks és el següent $\Delta^{++}(uuu), \Delta^{+}(uud), \Delta^{0}(udd)$ i $\Delta^{-}(ddd)$. Semblaria, doncs, que si ignoréssim la diferència de massa entre els quarks up i down, i l'existència de la càrrega elèctrica —i d'altres propietats—, els barions Δ no es diferenciarien entre ells, com tampoc es diferenciarien els protons i els neutrons.

La massa del quark strange és suficientment semblant a la dels quarks up i down com per participar d'aquesta simetria. Així, el neutró i el protó en veritat formen part de l'anomenat octet $J = 1/2$ de barions, representat a la figura següent.

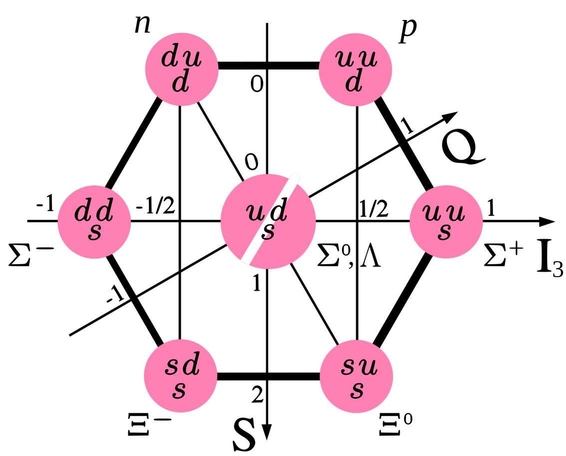

Figura 3: Octet de barions amb moment angular total $J = 1/2$. Q representa la càrrega elèctrica, S l'estranyesa i I_3 el tercer component de l'isospín.

En aquest octet, les partícules Σ i Λ tenen un quark strange i els barions Ξ tenen dos quarks strange, sent la resta de quarks o bé up o down. Totes aquestes partícules estan formades per tres quarks. De nou, semblaria que si menyspreéssim la diferència en massa dels quarks up, down i strange, i l'existència de càrrega elèctrica —i altres forces—, tots els elements d'aquest octet serien indistingibles. Tenim, doncs, una simetria aproximada. La disposició d'aquest grup de partícules en un octet és el que va originar la denominació d'*eightfold way*, terme pres del budisme.

La disposició geomètrica de les partícules de l'octet de barions $J = 1/2$ i altres agrupacions evoquen la geometria dels sistemes d'arrels de les representacions de $SU(3)$. Vegem per què. El primer postulat de la Mecànica Quàntica és que a tot sistema físic li correspon un espai de Hilbert i que l'estat del sistema ve descrit per un vector de l'espai. Suposem donada una partícula X i considerem l'espai de Hilbert V generat per tots els possibles tipus de partícula que X podria ser. Per exemple, la partícula X podria ser un protó $X = |p\rangle$ o un neutró $X = |n\rangle$. L'espai V és un espai vectorial complex, i la partícula X es podria trobar en el que s'anomena una superposició dels estats protó i neutró. Per exemple, X podria ser $X = \frac{1}{\sqrt{2}}|p\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|n\rangle$. Els quarks $|u\rangle$, $|d\rangle$ i $|s\rangle$ també son vectors de l'espai V.

Podem llavors considerar l'acció sobre V resultant de permutar els quarks up i down. $|u\rangle$ passaria a ser $|d\rangle$ i viceversa. Però al mateix temps, el protó $|p\rangle$ passaria a ser un neutró $|n\rangle$, i el neutró passaria a ser un neutró. En canvi, el quark strange romandria inalterat. Donat que estem afirmant que la simetria correspon als quarks up, down i strange, també podríem considerar una permutació entre els quarks up i strange. En aquest cas, el protó $|p\rangle$ es convertiria en una partícula Ξ, $|\Xi^-\rangle$. En general, però, com que un estat general de V es pot escriure com una combinació lineal —recordem, amb coeficients a $\mathbb{C}$—, totes les possibles simetries entre els quarks up, down i strange corresponen a totes les rotacions de $\mathbb{C}^3$, és a dir, el grup de simetria és $SU(3)$.

Tenim, doncs, un $\mathbb{C}$-espai vectorial V i el grup de Lie $SU(3)$ actuant sobre V, és a dir, tenim una representació de $SU(3)$. I aquest és un dels casos on es veu clarament la idoneïtat de considerar la descomposició d'una representació en suma directa de representacions irreductibles. La partícula Ω_c^0 (partícula omega encantada) té un contingut en quarks de dos quarks strange i un quark charm. Considerant l'acció de $SU(3)$ —la simetria aproximada entre quarks up, down i strange— sobre Ω_c^0 —és a dir, l'òrbita de $|\Omega_c^0\rangle$ — podem canviar els quarks strange per combinacions lineals de quarks up, down i strange. Però en l'òrbita de $|\Omega_c^0\rangle$ no s'hi troba, per exemple, cap partícula contenint un quark bottom. Hem mencionat al principi que s'havien trobat grups de partícules amb masses molt similars. Arribem al resultat de que aquells grups corresponen a subrepresentacions irreductibles de (ρ, V). Per tant, en considerar la descomposició de V com a suma directe de representacions irreductibles estem tractant grups de partícules que, si no fos perquè la simetria no és exacta, serien indistingibles. Però el que la simetria sigui una bona aproximació ens garanteix que, a part de tenir propietats com l'spin idèntiques, tenen una massa molt semblant. Vegem alguns d'aquests grups de partícules —algunes subrepresentacions irreductibles—. Per començar tenim la subrepresentació generada pels quarks up, down i strange. Un exemple més interessant és el de l'octet de barions amb moment angular total $J = 1/2$, que inclou el protó i el neutró. La seva representació geomètrica és la de la figura 3. En aquests diagrames s'està utilitzant els nombres quàntics de la tercera component de l'isospín (I_3), l'estranyesa (S) i la càrrega elèctrica (Q) com a eixos. Per més informació sobre aquests recomanem [3], capítol 11, pp 166-177. Un altre grup de partícules és el decuplet de barions amb $J = 3/2$. La seva disposició geomètrica és la següent.

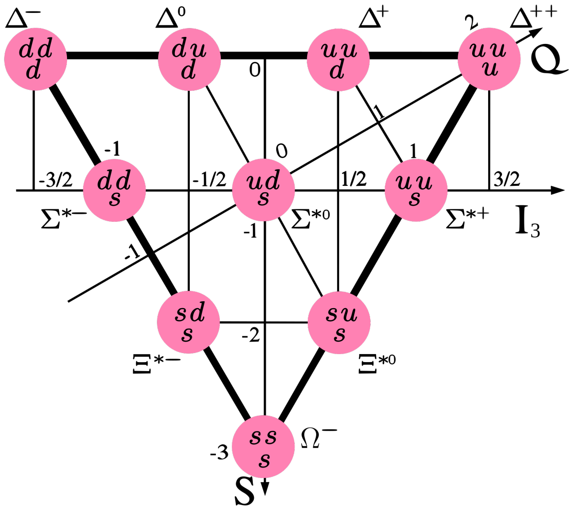

Figura 4: Decuplet de barions amb moment angular total $J = 3/2$. Q representa la càrrega elèctrica, S l'estranyesa i I_3 el tercer component de l'isospín.

Ara bé, el barió Ω^- no s'havia encara descobert el 1961. Gell-Mann, havent-se donat compte que els grups de partícules s'organitzaven com el sistema de pesos de representacions irreductibles de $SU(3)$ va teoritzar-ne l'existència predient que la partícula havia de tenir una estranyesa de -3, càrrega elèctrica de -1 i una massa propera als 1680 MeV$/c^2$. El barió Ω^- va ser descobert el 1964, i Murray Gell-Mann rebé el premi Nobel en Física el 1969.

5 Conclusions

Aquest treball ha servit a l'autor per introduir-se en el camp dels grups de Lie i les seves representacions. Per l'autor, però, ha representat una introducció que desitja portar endavant. Possibles desenvolupaments posteriors podrien incloure l'estudi de les característiques dels grups de Lie, de les funcions representatives i del teorema de Peter i Weyl, i endinsar-se més profundament en els sistemes d'arrels i pesos, i la classificació de les representacions en termes dels diagrames de Dynkin. El lector interessat podrà trobar aquestes qüestions a [2], que ha sigut el text principal en l'elaboració d'aquest treball. També es podria hom decantar per posar el focus en les àlgebres de Lie. Allà, per exemple, trobaríem les subàlgebres de Cartan com a anàleg al tor maximal en un grup de Lie. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* [5], de Humphreys, probablement sigui el text més adequat en aquest camí. Per una lectura més avançada tindríem *Lie Groups Beyond an Introduction* [6], de Knapp.

Hi ha una gran quantitat de fonts per estudiar la utilització de grups i àlgebres de Lie en la Matemàtica Física. Algunes d'elles serien *Lie Algebras in Particle Physics* [3] de Georgi, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* [10] de Weyl o *Quantum Theory, Groups and Representations* [11] de Woit.

Referències

[1] Thedor Bröcker i Klaus Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.

[2] Theodor Bröcker i Tammo tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer Berlin, 1985.

[3] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories.* Vol. 54. Frontiers in Physics, 1982.

[4] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Vol. 222. Graduate Texts in Mathematics, 2015.

[5] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer New York, 1972.

[6] Anthony W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1996.

[7] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer New York, 1993.

[8] Hans Samelson. "Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten." A: *Commentarii Mathematici Helvetici* 13 (1940), pàg. 144.

[9] *The Nobel Prize in Physics 1969*. `https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1969/summary/`. Accedit: 12/06/2022.

[10] Herman Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover publications, 1931.

[11] Peter Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*. Springer International Publishing, 2017.