Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

GESTIÓ DE CARTERES. MODEL DE MARKOWITZ I CAPM

Autor: Cristian Real Martínez

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

This final degree project is intended to provide an introduction to portfolio management with the aim of understanding, from an economic and mathematic point of view, its basic fundamentals.

We will show the Markowitz model, with the necessary concepts to understand it, such as the minimum variance curve, efficient frontier among others... and the *Capital Asset Pricing Model* (CAPM): we will explain which are the hypotheses, we will state and prove its theorem.

Finally, we will relate the theoretical study with a practical one, where we will calculate the efficient frontier of the Markowitz method with real situations of two companies.

Resum

En aquest treball de final de grau, es pretén fer una introducció a la gestió de carteres amb l'objectiu d'entendre, des de l'àmbit econòmic i matemàtic, els seus fonaments bàsics.

Mostrarem el model de Markowitz, amb conceptes necessaris per poder-lo entendre com són la corba de mínima variància, frontera eficient entre d'altres ... I el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM): explicarem quines són les hipòtesi, i enunciarem i demostrarem el seu gran teorema.

Finalment, relacionem l'estudi teòric amb un pràctic on calculem la frontera eficient del model de Markowitz amb situacions i dades reals de dues companyies conegudes.

Agraïments

En primer lloc vull agraïr en Josep Vives pel seu esforç i dedicació, i també a tots els professors que he tingut al llarg d'aquest camí. Gràcies en especial a la Mar, en Joan, i en Luis per ensenyar-me, fer-me gaudir i sorprendre'm amb les matemàtiques.

Gràcies a la meva família per la paciència, per ser el matemàtic de la casa, encara que sigui per escoltar "muchas matemáticas, pero de X ni idea" (on X serveix per qualsevol cosa que hagi fet). Al meu pare, pels consells infinits "estudia tete estudia, hay tiempo para todo". Al meu germà, que sap que "m'agaga" molt estudiar, gairebé tant com a ell li agrada el futbol. A la meva àvia, pels seus inocents "diga! Hay que ver..."

I finalment a la persona més important en la meva vida, aquella que ha estat al meu costat en tot moment, m'ha recolzat en els moments més durs i sempre ha tingut forces per poder ajudar-me: al meu amor, la meva infermera preferida Alba.

Gràcies.

Índex

1 Introducció

Invertir, del llatí *invertire*, es compon del prefix *in* i de la paraula *vertire*. El que originalment significava 'vestir', es va transformar en 'assignar a algú alguna responsabilitat financera' a principis del segle XIV a Itàlia i a Anglaterra a principis del segle XVII. Finalment, el que es coneix avui dia com 'col·locar capitals en', va aparèixer per primera vegada al diccionari francès Larousse a l'any 1922.

És probable que el primer pensament que tenim al cap quan escoltem la paraula invertir, és el de les 'noves' formes com són les criptomonedes: el famós Bitcoin o d'altres com Cardano o Ethereumn. També, un altre exemple d'invertir és el que es tracta a [1].

Segons explica Núria Bajo Davo al llibre *Diccionario de Finanzas* (veure [2]), una inversió és un actiu o algun tipus de bé que es compra amb l'esperança que generi uns ingressos o que es revalori en el futur.

En tot acte d'invertir intervenen els següents elements: subjecte que inverteix, aquesta pot ser una persona física o jurídica; cost que suposa la renúncia a una satisfacció en el present i esperança d'una recompensa en el futur. Existeixen tres visions a l'hora de considerar una inversió: la jurídica, l'econòmica i la financera. Des del punt de vista jurídic, una inversió és l'adquisició de tot aquell que pugui ser objecte d'un dret de propietat i ser susceptible de formar part del patrimoni d'una persona física o jurídica; pel que fa el punt de vista econòmic, una inversió és la compra d'un bé que no es consumeix avui, sinó que s'utilitzarà en el futur per a aconseguir riquesa; i finalment des del punt de vista financer, una inversió és la compra d'un actiu monetari que es fa amb la intenció de que proporcioni uns ingressos en el futur, o que s'apreciï també en el futur i que pugui ser venut a un preu major del que s'ha pagat per ell en el present.

Una cartera d'inversió és un conjunt d'actius financers (accions, bons, participacions en fons...) en els que inverteix una persona o una empresa i que es construeix ajustant una proporció de cada actiu d'acord amb la tolerància al risc i les expectatives de retorn de la inversió prèviament determinades.

La major o menor tolerància al risc s'acota mitjançant la diversificació de les inversions (cartera d'inversions), donat que l'expectativa del risc d'una cartera completa serà menor que la suma ponderada de les seves parts. Existeixen dos models de valorització de carteres:

- Models que es basen en els fonaments de les inversions front al risc. Destaquen el model de selecció de carteres amb criteri d'elecció de mitjana-variança, desenvolupat per l'economista nord-americà Harry Markowitz i el model de valoració de títols *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), que es una extensió de l'anterior, introduint la taxa de lliure risc, desenvolupat per William Sharpe en 1964.

- Models de rendiment amb arguments d'arbitratge.

En el nostre treball ens centrarem en el primer model.

Per tal d'entendre la selecció de carteres, les posteriors evolucions i models que tractarem, és necessari entendre i contextualitzar alguns conceptes previs:

En el context de la teoria de carteres, si suposem que existeix un mateix tipus d'interès sense risc per prestar i demanar prestat, amb el que es pot demanar prestat sense limitacions, on els individus coincideixen en les seves previsions sobre els rendiments mitjans i els riscs que tenen les diferents carteres i que el mercat ha arribat a l'equilibri, tots els individus repartiran la seva inversió entre una cartera òptima amb risc, ho denotarem per R^* i títols sense risc (que també poden tenir en negatiu: és el cas de demanar-ho en préstec).
En aquestes condicions, R^* és la cartera de mercat, per tant haurà de contenir tots els títols amb risc i en les proporcions que està el mercat: si un títol no està en R^*, ningú el comprarà i tots compraran en les proporcions de R^*.

La cartera de mercat sovint s'aproxima amb un índex borsari, i seguint la teoria, són molts els inversors que inverteixen en carteres basades en aquests índexs, amb el que els permeten una correcta diversificació.

D'altra banda, una cartera eficient és aquella que compleix dues condicions:

1. Pel seu nivell de rendiment esperat, no hi ha cap altra cartera que tingui un risc més baix.

2. Pel risc que comporta, no hi ha cap altra oportunitat d'inversió que permeti obtenir un rendiment esperat més gran, és a dir, proporciona la màxima rendibilitat esperada possible per al nivell de risc.

2 Model de Markowitz

En aquest segon bloc, explicarem el model de Markowitz: unes definicions prèvies, de què tracta, quines són les hipòtesis i objectius.

Seguint la teoria de Karl Sigman [3] i l'article original del model de Markowitz [8], la finalitat serà introduir conceptes, definicions i aspectes a tenir en compte per poder entendre el model de Markowitz.

Estudiarem l'acció d'invertir un capital X_0, amb X_0 distribuïda en diversos actius diferents. Calcularem la mitjana i la variància per veure el rendiment de cada actiu, també veurem que el risc es pot reduir diversificant el capital en els diferents actius. Finalment, acabarem parlant del *Capital Market Line* i de frontera eficient.

2.1 Model bàsic

Suposem que volem invertir un capital inicial $X_0 > 0$ a l'instant inicial $t = 0$ en una cartera amb n actius diferents ($n \geqslant 2$). Sigui X_1 el pagament en $t = 1$. En principi, no sabem com distribuir el capital inicial entre els n actius diferents, per tal d'obtenir el màxim rendiment possible. Si X_{0i} es la quantitat a invertir en l'actiu i, per $1 \leqslant i \leqslant n$, X_0 serà la suma de tots els X_{0i}, és a dir, $X_0 = X_{01} + \cdots + X_{0n}$, i el seu pagament està definit per $X_1 = X_{11} + \cdots + X_{1n}$, on X_{1i} es el pagament d'invertir X_{0i} en l'actiu i.

Definim $R_i = \dfrac{X_{1i}}{X_{0i}}$ com el rendiment total de l'invertit en l'actiu i, definim també la taxa de retorn com:

$$r_i := R_i - 1 = \frac{X_{1i} - X_{0i}}{X_{0i}}.$$

Fàcilment es pot veure que

$$X_{1i} = X_{0i} + r_i X_{0i} = (1 + r_i)X_{0i}.$$

La mitjana ve definida per l'esperança de la taxa de retorn i la denotem per

$$z = (z_1, \dots, z_n),$$

on $z_i = E(r_i)$.
Com que X_{0i} és determinista, l'esperança del pagament d'invertir X_{0i} en l'actiu i és:

$$E(X_{1i}) = E((1 + r_i)X_{0i}) = (1 + E(r_i))X_{0i} = (1 + z_i)X_{0i}.$$

Un altre concepte important que cal definir són les proporcions (també denominat pesos). Definim $p = (p_1, \dots, p_n)$ com el vector de les proporcions, on $p_i = \dfrac{X_{0i}}{X_0}$, és la proporció o el pes del recursos invertits en l'actiu i. Tenim que la suma de totes les proporcions és 1, és a dir, $1 = p_1 + \cdots + p_n$.

Finalment, podem calcular l'esperança de la taxa de retorn total de la cartera:

$$r = r_1 p_1 + \cdots + r_n p_n$$
$$E(r) = E(r_1 p_1 + \cdots + r_n p_n) = E(r_1)p_1 + \cdots + E(r_n)p_n = z_1 p_1 + \cdots + z_n p_n.$$

La variància i la covariància venen donades per les expressions:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = Var(r_i) = E(r_i^2) - z_i^2,$$
$$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = E(r_i, r_j) - z_i z_j.$$

Definim la variància total de la nostra cartera com

$$\sigma^2 = Var(r) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_i p_j \sigma_{ij}.$$

Definició 2.1. *Definim*

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

la matriu de covariàncies, quadrada de dimensió n, invertible i simètrica.

Fins aquí, una possible idea seria prendre σ^2 com el mínim de les σ_i^2 per i = 1, ..., n; invertint tot el capital X_0 en l'actiu amb la variància més petita, ja que sigui quin sigui X_0, els valors r, z, σ^2 són iguals quan les proporcions són les mateixes. Però és interessant veure com invertint en més d'un actiu, la variància pot reduir-se encara més.

Teorema 2.2. *El retorn esperat $z = E(r)$ i la variància $\sigma_p^2 = Var(r_i)$ d'una cartera amb pesos p, venen donats per:*

$$z = p^t z$$
$$\sigma_p^2 = p^t C p$$

Demostració: Per la primera equació fem servir la linealitat de l'esperança matemàtica, per la segona utilitzem la bilinealitat de la covariància:

$$z = E(r) = E\left(\sum_{i=1}^{n} p_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(r_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i = p^t z.$$
$$\sigma_p^2 = Var(r) = Cov(r, r) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} p_i r_i, \sum_{j=1}^{n} p_j r_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j \sigma_{ij} = p^t C p.$$

$\square$

2.2 Cartera amb mínima variància

Seguint la teoria de [4], en aquesta secció donarem la fórmula dels pesos de la cartera amb mínima variància. Abans, però, hem d'introduir una notació i un lema.

Notació: Denotem $u = (1, \ldots, 1)$ el vector de dimensió n on cada component és igual a 1.

Lema 2.3. *Tenim les següents fórmules pels gradients calculats respecte p.*

$$\nabla(p^t z) = z$$
$$\nabla(p^t u) = u$$
$$\nabla(p^t Cp) = 2Cp$$

A més, $H(p^t Cp) = 2C$*, on* $H(x)$ *és el Hessià de* x*.*

Demostració: Com que

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(p^t z) = \frac{\partial}{\partial p_i}(p_1 z_1 + \cdots + p_n z_n) = z_i.$$

Provem la primera fórmula:

$$\nabla(p^t z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}(p^t z) \\ \frac{\partial}{\partial p_2}(p^t z) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n}(p^t z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z.$$

Per la segona fórmula:

$$\nabla(p^t u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}(p^t u) \\ \frac{\partial}{\partial p_2}(p^t u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n}(p^t u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u.$$

Finalment, per demostrar la tercera fórmula, tenim

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(p^t Cp) = \frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_j p_k \sigma_{jk}.$$

La derivada de cada terme només pot ser diferent de zero quan $k = i$ o $j = i$, amb el que tenim

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_j p_k \sigma_{jk} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_i p_i \sigma_{ii} + \sum_{j=i}\sum_{k\neq i} p_j p_k \sigma_{jk} + \sum_{j\neq i}\sum_{k=i} p_j p_k \sigma_{jk} \right)$$
$$= 2p_i\sigma_{ii} + \sum_{k\neq i} p_k \sigma_{ik} + \sum_{j\neq i} p_j \sigma_{ji} = 2\sum_{k=1}^{n} p_k \sigma_{ik} = 2(Cp)_i$$

on $(Cp)_i$ és la component i-èsima del vector Cp. Combinant les derivades parcials en totes les components, provem la tercera i equació.

Per últim, demostrem que el Hessià de p^{t}Cp és $2C$:

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_i}(p^tCp) = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(2\sum_{k=1}^{n} p_k\sigma_{ik}\right) = 2\sigma_{ij} = 2\sigma_{ji}.$$

Finalment, tenim

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}(p^tCp)\right)_{i,j\leqslant n} = (2\sigma_{ij})_{i,j\leqslant n} = 2C$$

que és el Hessià de p^tCp.

□

A partir d'aquí, som capaços de derivar la fórmula pels pesos de mínima variància de la cartera.

Teorema 2.4. *La cartera amb la mínima variància té com a pes mínim*

$$p_{min} = \frac{C^{-1}u}{u^tC^{-1}u}. \tag{2.1}$$

Demostració: Volem trobar el mínim p^tCp que compleixi $p^tu = 1$. Per fer-ho, utilitzarem el mètode dels multiplicadors de Lagrange:

$$L(p) = \nabla(p^tCp) - \nabla(\lambda(u^tp - 1)) = 2Cp - \lambda u = 0.$$

Amb el que trobem

$$p = \frac{\lambda C^{-1}u}{2}.$$

De l'inici de la demostració, $p^tu = 1$, substituint ens queda:

$$p^tu = u^tp = u^t\frac{\lambda C^{-1}u}{2} = 1.$$

Aïllant λ, tenim:

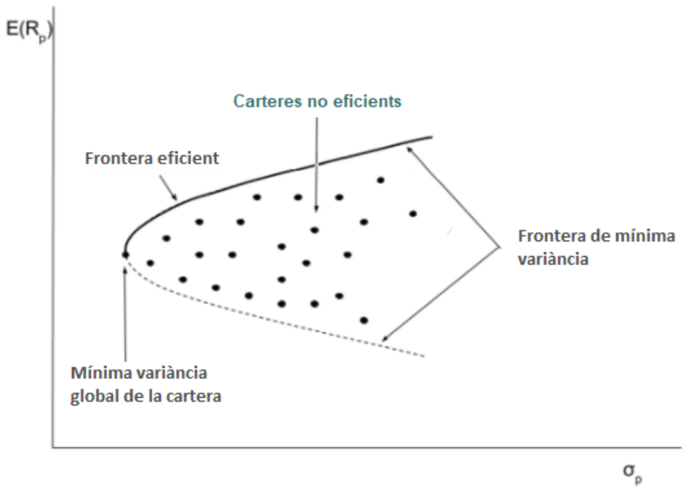
$$\lambda = \frac{2}{u^tC^{-1}u}.$$

Ara, substiuim aquesta λ on hem aïllat p i ens queda:

$$p = \frac{\lambda C^{-1}u}{2} = \frac{C^{-1}u}{u^tC^{-1}u}.$$

Hem vist que el p_{min} de l'enunciat del teorema és l'únic candidat d'extrem local. Sabem que $H(p^tCp) = 2C$, pel Lema 2.3 i al ser semidefinida positiva, tenim finalment que p_{min} és un mínim global.

□



2.3 Corba de mínima variància

En aquesta secció veurem la definició de corba de mínima variància i com es pot construir aquesta corba a partir d'alguns corol·laris importants

Definició 2.5. *Diem que una cartera A domina a una cartera B, si per un actiu qualsevol amb risc σ, A té un rendiment major que B.*

Per tal de trobar la frontera eficient de la nostra cartera, haurem d'identificar i treure les carteres dominades. Per fer-ho, fixem m, que serà la mínima rendibilitat que espera treure l'inversor.
Haurem de:

$$\begin{aligned} \text{minimitzar } & p^t C p, \\ \text{tenint en compte: } & p^t z = m, \\ & p^t u = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Corol·lari 2.6. *Existeixen dos vectors v_1, v_2 (depenen només de z i de la matriu C), tals que per qualsevol m real, la solució del problema (2.2) és:*

$$p = m v_1 + v_2$$

Demostració: Sigui M la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} z^t C^{-1} z & z^t C^{-1} u \\ z^t C^{-1} u & u^t C^{-1} u \end{pmatrix}$$

Com que M i C són matrius invertibles, tenim que la solució al problema (2.2) és de la forma:

$$p = \frac{C^{-1}\Big(det(M_1) z + det(M_2) u\Big)}{det(M)},$$

on

$$M_1 = \begin{pmatrix} m & z^tC^{-1}u \\ 1 & u^tC^{-1}u \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} z^tC^{-1}z & m \\ z^tC^{-1}u & 1 \end{pmatrix}.$$

Els determinants:

$$\begin{aligned} det(M) &= (z^tC^{-1}z)(u^tC^{-1}u) - (z^tC^{-1}u)(z^tC^{-1}u), \\ det(M_1) &= mu^tC^{-1}u - z^tC^{-1}u, \\ det(M_2) &= z^tC^{-1}z - mz^tC^{-1}u. \end{aligned}$$

Reescribim p substituint els determinants corresponents:

$$p = \frac{C^{-1}\Big((mu^tC^{-1}u - z^tC^{-1}u)z + (z^tC^{-1}z - mz^tC^{-1}u)u\Big)}{det(M)}.$$

Traient factor comú de m i arreglant, arribem a:

$$\begin{aligned} p &= \frac{C^{-1}\Bigg(m\Big((u^tC^{-1}u)z - (z^tC^{-1}u)u\Big) + \Big((z^tC^{-1}z)u - (z^tC^{-1}u)z\Big)\Bigg)}{det(M)} \\ &= \frac{C^{-1}\Bigg(m\Big((u^tC^{-1}u)z - (z^tC^{-1}u)u\Big)\Bigg)}{det(M)} + \frac{C^{-1}\Big((z^tC^{-1}z)u - (z^tC^{-1}u)z\Big)}{det(M)} \end{aligned}$$

Observem que $p = mv_1 + v_2$ on:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{C^{-1}}{det(M)}((u^tC^{-1}u)z - (z^tC^{-1}u)u), \\ v_2 &= \frac{C^{-1}}{det(M)}((z^tC^{-1}z)u - (z^tC^{-1}u)z). \end{aligned}$$

□

En els propers punts veurem com a partir de dos carteres es pot construir tota la recta de mínima variància.

Corol·lari 2.7. *Suposem dues carteres p_1, p_2 amb unes rendibilitats z_{p_1}, z_{p_2} respectivament, amb $z_{p_1} \neq z_{p_2}$. Això implica que qualsevol cartera p que viu en la corba de mínima variància es pot obtenir a partir de z_{p_1} i z_{p_2}, de la forma $p = \alpha p_1 + p_2(1-\alpha)$, per algun $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demostració: Trobem α tal que compleix

$$z_p = \alpha z_{p_1} + z_{p_2}(1-\alpha).$$

Com que $z_{p_1} \neq z_{p_2}$, podem aïllar α:

$$\begin{aligned} z_p &= \alpha z_{p_1} + z_{p_2}(1-\alpha) \\ z_p &= \alpha z_{p_1} + z_{p_2} - \alpha z_{p_2} \\ \alpha z_{p_1} - \alpha z_{p_2} &= z_p - z_{p_2} \\ \alpha &= \frac{z_p - z_{p_2}}{z_{p_1} - z_{p_2}}. \end{aligned}$$

Si p_1 i p_2 viuen en la corba de mínima variància, compleixen:

$$\begin{aligned} p_1 &= z_{p_1} v_1 + v_2, \\ p_2 &= z_{p_2} v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Amb el que tenim:

$$\alpha p_1 + p_2(1-\alpha) = (\alpha z_{p_1} + z_{p_2}(1-\alpha))v_1 + v_2 = z_p v_1 + v_2,$$

Com que p viu a la corba de mínima variància, tenim que $z_p v_1 + v_2 = p$.

□

Donat aquest corol·lari, veurem un resultat encara més fort. A partir d'hipòtesis similars, obtenim que la corba de mínima variància és una hipèrbola. Abans hem d'introduïr unes definicions i teoremes previs:

Definició 2.8. *Definim coeficient de correlació com:* $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

Introduim ara un teorema on la cartera està formada per dos actius, que serà de gran utilitat per probar el teorema final.

Teorema 2.9. *Si* $z_{p1} \neq z_{p2}, -1 < \rho_{12} < 1$*, llavors tenim una hipèrbola centrada en l'eix vertical*

Demostració: L'equació d'una hipèrbola es defineix:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{2.3}$$

on els vèrtex són: $(h \pm a, k)$ i els focus són: $(h \pm c, k)$

Per tant, el nostre objectiu es arribar a escriure-ho d'aquesta forma.

Sigui:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sigma_1^2 p^2 + \sigma_2^2 (1-p)^2 + 2\sigma_{12} p(1-p) \\ y &= p z_{p1} + z_{p2}(1-p) \end{aligned}$$

Resolem aquest sistema. Per fer-ho, simplificarem els càlculs: de la segona equació aïllem p:

$$p = \frac{y - z_{p2}}{z_{p1} - z_{p2}}.$$

Com que $z_{p1} \neq z_{p2}$, tenim el denominador no s'anul·la. Substituim p a la primera equació. Ens queda:

$$x^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{y - z_{p2}}{z_{p1} - z_{p2}}\right)^2 + \sigma_2^2 \left(\frac{z_{p1} - y}{z_{p1} - z_{p2}}\right)^2 + 2\sigma_{12} \left(\frac{y - z_{p2}}{z_{p1} - z_{p2}}\right) \left(\frac{z_{p1} - y}{z_{p1} - z_{p2}}\right)$$

$$x^2 = \alpha(\beta y^2 - 2\gamma y + \delta), \tag{2.4}$$

on:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{(z_{p1} - z_{p2})^2} > 0, \\
\beta &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}, \\
\gamma &= \sigma_1^2 z_{p2} + \sigma_2^2 z_{p1} - \sigma_{12}(z_{p1} + z_{p2}), \\
\delta &= \sigma_1^2 z_{p2}^2 + \sigma_2^2 z_{p1}^2 - 2\sigma_{12} z_{p1} z_{p2}.
\end{aligned}$$

Seguim amb l'equació (2.4), traiem factor comú de β.
Com que $\rho_{12} < 1$, tenim doncs que $\beta > 0$, ja que $\beta = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \geqslant 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
x^2 &= \alpha\beta \left(y^2 - 2y\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}\right) \\
&= \alpha\beta \left[\left(y - \frac{\gamma}{\beta}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} + \frac{\delta}{\beta}\right] \\
&= \alpha \left(\beta(y - k)^2 + c\right),
\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\gamma}{\beta}, \\
c &= \frac{\beta\delta - \gamma^2}{\beta},
\end{aligned}$$

amb $c > 0$, ja que $\rho_{12} \in (-1, 1)$; $\beta > 0$; $\alpha > 0$, per tant,

$$c = \frac{\beta\delta - \gamma^2}{\beta} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \sigma_{12}^2)}{\alpha\beta} > 0.$$

Finalment, fent uns petits canvis en l'última expressió de x^2, arribem a:

$$\frac{x^2}{\alpha c} - \frac{(y - k)^2}{\frac{c}{\beta}} = 1,$$

que es de la forma de (2.3), amb $h = 0$, és a dir, tenim una hipèrbola centrada a l'eix vertical.

$\square$

Teorema 2.10. *Suposem que existeixen dues carteres p_1 i p_2, que viuen en la corba de mínima variància. Suposem també que les rendibilitats són z_{p_1}, z_{p_2} respectivament, amb $z_{p_1} \neq z_{p_2}$. Per tant la corba de mínima variància és una hipèrbola centrada en l'eix vertical.*

Demostració: Siguin p_1, p_2 les carteres i r_1, r_2 les respectives rendibilitats, pel corol·lari 2.7 tenim:

$$p = \alpha p_1 + p_2(1-\alpha),$$

amb rendibilitat:

$$r = \alpha r_1 + r_2(1-\alpha).$$

Sabem que

$$\begin{aligned} z &= \alpha z_{p1} + z_{p2}(1-\alpha) \\ \sigma^2 &= \alpha^2 \sigma_{p1}^2 + \sigma_{p1}^2(1-\alpha) + 2\alpha Cov(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Per hipòtesi $z_{p_1} \neq z_{p_2}$, apliquem el teorema 2.9 i tenim el que volíem.

$\square$

A continuació veurem una definició important per seguir en la nostra construcció de cartera eficient com és el *Capital Market Line*, però abans és necessari introduir un teorema.

Teorema 2.11. *La cartera de mercat ve donada per l'expressió*

$$m = \frac{C^{-1}(z - Ru)}{u^t C^{-1}(z - Ru)},$$

en el cas que la rendibilitat esperada de la cartera de mínima variància sigui major que la rendibilitat lliure de risc, R.

Demostració: En el teorema anterior hem vist que la corba de mínima variància és una hipèrbola, amb el centre a l'eix vertical. Considerem el punt (0,R) com a centre de l'hipèrbola, tenim una recta que passa per (0,R) i és tangent a un punt de la corba de mínima variància. Agafem la recta que maximitza el pendent. El pendent és de la forma:

$$\frac{z_p - R}{\sigma_p} = \frac{p^t z - R}{\sqrt{p^t C p}},$$

on R és el retorn sense risc i p el pes de la cartera. El lagrangià de p és zero quan el pendent és màxim:

$$\begin{aligned} L(p) &= \nabla\left(\frac{p^t z - R}{\sqrt{p^t C p}}\right) - \lambda\nabla(p^t u - 1) \\ &= \frac{z\sqrt{p^tCp} - \frac{p^tz-R}{2\sqrt{p^tCp}}2Cp}{p^tCp} - \lambda u = 0. \end{aligned}$$

Amb el que tenim:

$$z\sigma_p - (z_p - R)\frac{Cp}{\sigma_p} - \lambda\sigma_p^2 u = 0.$$

Dividim tot per σ per simplificar i com que $p^t u = 1$, multipliquem tot per p^t:

$$\frac{z_p - R}{\sigma_p^2} p^t C p = z_p - \lambda\sigma_p.$$

Denotem $\lambda = \frac{R}{\sigma_p}$ i $\zeta = \frac{z_p - R}{\sigma_p^2}$ i arribem a

$$\zeta C p = z - Ru,$$

i per tant

$$\zeta p = C^{-1}(z - Ru). \tag{2.5}$$

Multipliquem per u^t en totes dues bandes i obtenim

$$\zeta = u^t C^{-1}(z - Ru).$$

Finalment, substituint ζ a (2.5) tenim el que volíem.

□

Definició 2.12. *Definim actiu lliure de risc com aquell actiu on es coneix la rendibilitat amb anterioritat i no presenta risc.*

Definició 2.13. *En anglès, el Capital Market Line, d'ara en endevant CML, és la recta tangent traçada des del punt de l'actiu lliure de risc, fins la regió factible pels actius amb risc. Té com equació:*

$$z = R + \frac{z_k - R}{\sigma_k}\sigma.$$

En altres paraules, el CML és la combinació de la cartera de mercat (σ_k, z_k) i l'actiu lliure de risc (0,R).

Amb el que hem vist fins ara, obtenim una parametrització de totes les carteres de mercat (σ_p, z_p) que viuen en la corba de mínima variància:

$$\zeta_p = \alpha z_{p_{min}} + z_k(1-\alpha),$$
$$\sigma_p^2 = \alpha^2\sigma_{p_{min}}^2 + \sigma_k^2(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{p_{min}}^2.$$

Suposem una situació natural on les rendibilitats dels actius són diferents. Fem un cas finit per trobar la frontera eficient:
Siguin $(0, R_1)$, $(0, R_2)$ els actius lliures de risc, (σ_{k_1}, z_{k_1}) i (σ_{k_2}, z_{k_2}) els actius que viuen en la corba de mínima variància. Per qualsevol cartera p, el pla de solucions (σ, z) queda:

- Cas $\alpha \in (-\infty, 0]$:

$$z = \alpha R_2 + z_p(1-\alpha),$$
$$\sigma = (1-\alpha)\sigma_p.$$

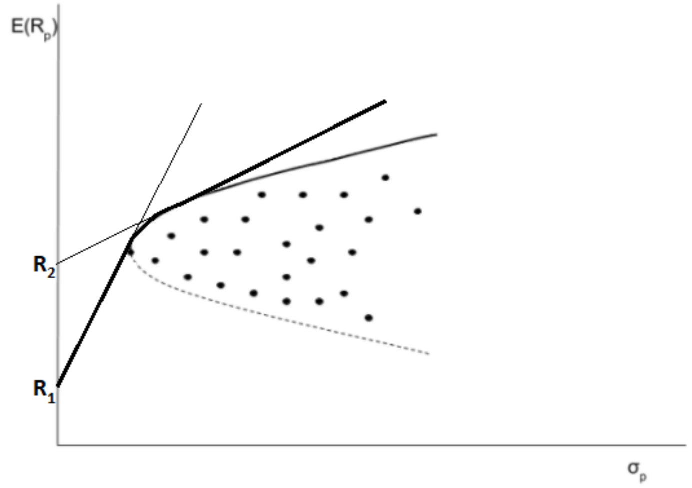
- Cas $\alpha \in (0, 1]$:

$$z = \alpha R_1 + z_p(1-\alpha),$$
$$\sigma = (1-\alpha)\sigma_p.$$

- Cas $\alpha \in (1, +\infty)$:

$$z = \alpha R_1 + z_p(1-\alpha),$$
$$\sigma = (\alpha-1)\sigma_p.$$

La frontera eficient resulta ser el segment que uneix $(0, R_1)$ amb (σ_{k_1}, z_{k_1}), unió $(0, R_2)$ amb (σ_{k_2}, z_{k_2}) com mostra la següent figura:



3 *Capital Asset Pricing Model*

En aquest segon bloc analitzarem el model CAPM, de l'anglès *Capital Asset Pricing Model*, donarem les principals hipòtesi i unes definicions que es requereixen per entendre aquest model com poden ser: els coeficients beta, la línia de mercats de valors (més conegut com *Security Market Line* (SML)) o la *Security Charasteristic Line* (SCL)).

Sabem que la cartera de mercats existeix quan la rendibilitat de la cartera de mínima variància supera la rendibilitat sense risc.
El CAPM dóna una relació lineal entre el retorn esperat en la cartera de mercat i el de qualsevol actiu amb risc. El nexe entre tots dos és el que denominarem com a coeficients betes (β).

En aquest bloc analitzarem aquesta relació i veurem com la fórmula de CAPM pot ajudar a prendre decisions d'inversions i introduir mesures per al rendiment de la cartera.

3.1 CAPM

El model CAPM és un model de valoració d'actius financers desenvolupat per William Sharpe [9], que permet estimar la rendibilitat esperada en funció del risc sistemàtic beta.

Les principals hipòtesi d'aquest model són:

- Tots els inversors són eficients des del punt de vista de Markowitz
- Els inversors poden invertir o finançar-se a un tipus d'interès anomenat 'tipus d'interès lliure de risc'
- Tots els inversors tenen expectatives homogènies sobre el futur, és a dir, tots tenen la mateixa informació
- Tots els inversors tenen el mateix horitzó d'inversió
- Les inversions són infinitament divisibles
- No hi ha impostos ni costos de transacció
- No hi ha inflació o està totalment descomptada en el tipus d'interès vigent
- Els mercats estan en equilibri: totes les inversions estan correctament valorades d'acord al seu nivell de risc

Entre les diferents mesures de risc utilitzades tenim els coeficients beta:

Definició 3.1. *Anotem el factor beta i-èsim com*

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r)}{\sigma^2}.$$

Es defineix com el risc d'un actiu respecte a tot el mercat. Es deriva del Single Index Model de Sharpe

Teorema 3.2. ***(CAPM)***
Suposem que la rendibilitat lliure de risc R és inferior al retorn esperat de la cartera de mínima variància. Tenim doncs, per cada $i \leqslant n$, el retorn esperat z_i de l'actiu i-èsim de la cartera ve donat per la fórmula

$$z_i = R + \beta_i(z - R).$$

Demostració: Pel bloc anterior, sabem que el CML és tangent a la corba de mínima variància. Considerem totes les carteres construïdes per la mitjana de la cartera de mercat. Totes elles formen una hipèrbola tangent al CML.

A continuació construïm la recta tangent a la hipèrbola al punt (σ, z), i notem que el pendent del CML és el mateix que el pendent de la hipèrbola al punt (σ, z). Sigui Λ la cartera formada per els guanys invertits en l'actiu i (ho denotarem per λ) i l'invertit en la cartera de mercat (ho indicarem per $1 - \lambda$). Així doncs, la cartera queda definida com: Λ = (λ, 1 - λ).
El risc i la rendibilitat les expressarem amb un $\sim$ a sobre de cada variable per diferenciar-ho de les altres. Són:

$$\begin{aligned}
&\tilde{z} = \lambda z_i + (1 - \lambda)z, \\
&\tilde{\sigma} = \sqrt{\lambda^2\sigma_i^2 + (1 - \lambda)^2\sigma^2 + 2\lambda(1 - \lambda)Cov(r_i, r)}.
\end{aligned}$$

Calculem les parcials respecte λ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\lambda} = z_i - z, \\
&\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\lambda} = \frac{\sigma^2(\lambda - 1) + \sigma_i^2\lambda - 2\lambda Cov(r_i, r) + Cov(r_i, r)}{\sqrt{\sigma^2(1 - \lambda)^2 + \lambda(\sigma_i^2\lambda + 2(1 - \lambda)Cov(r_i, r))}}.
\end{aligned}$$

Evaluat en $\lambda = 0$ ens queda:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} &= z_i - z, \\
\left.\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \frac{Cov(r_i, r) - \sigma^2}{\sigma}.
\end{aligned}$$

Com que el pendent del punt que acabem de trobar i el pendent del CML són iguals, podem resoldre el sistema dividint una per l'altre i ens queda

$$\frac{z_i - z}{\frac{Cov(r_i,r)-\sigma^2}{\sigma}} = \frac{z - R}{\sigma}.$$

Aïllem z_i:

$$z_i = R + \frac{Cov(r_i, r)}{\sigma^2}(z - R) = R + \beta_i(z - R).$$

□

3.2 *Security Market Line*

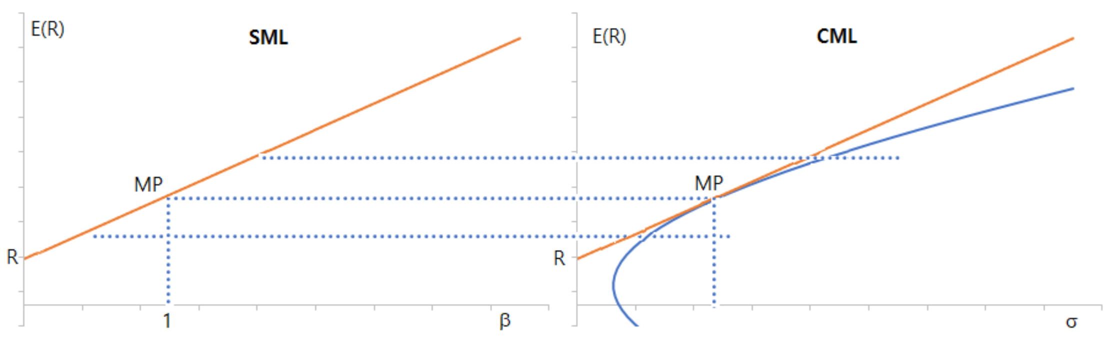
La rendibilitat d'un actiu es pot expressar com la rendibilitat de l'actiu lliure de risc i una prima de risc que depèn de la correlació d'aquest actiu amb el mercat.

La gràfica de la funció

$$\bar{z} = R + \bar{\beta}(z - R)$$

en el pla $(\bar{\beta}, \bar{z})$ es coneix com *Security Market Line*, d'ara en endavant SML.

En la següent il·lustració es pot apreciar el SML, a més, el CML està també graficat per poder-los comparar.



Una pregunta natural que un es pot fer és veure quines diferències podem trobar entre SML i CML.

3.2.1 SML vs CML

- **Definició**: El SML ajuda un inversor a determinar el risc de mercat de la seva inversió. D'altra banda, CML permet a un inversor determinar una taxa mitjana de guanys o pèrdues en la quota de mercat.
- **Objectiu**: L'objectiu de SML és poder analitzar tots els factor, mentres que el CML descriu només les carteres de mercat i les inversions sense risc.
- **Carteres**: Mentres que amb el SML es pot veure les carteres eficients i no eficients, amb el CML només es poden veure les carteres eficients.
- **Eficient**: El CML és més eficient que el SML.
- **Mesura del risc**: Aquí apareix un factor diferenciador entre totes dues rectes: el coeficient beta. Aquest coeficient β s'utilitza per al SML, mentre que la mesura del risc al CML és la desviació estàndar.
- **Gràfica**: Com podem veure en la anterior il·lustració, l'eix vertical coincideixen tots dos, en canvi l'eix horitzontal tenim mesures diferents: En SML tenim els coeficients β, mentre que en CML tenim els σ.

  Com a comentari global, destacar que no podem decantar-nos per un dels dos, tots dos són molt potents i útils alhora d'ajudar a l'inversor a obtenir informació sobre el rendiment i el risc. Per tant, cal tenir en compte aquestes dues eines per prendre una decisió informada sobre la inversió a realitzar.

3.3 Preus dels actius

Un cop calculada la taxa de rendibilitat esperada $E(R_i)$ mitjançant CAPM, podem comparar aquesta taxa amb la taxa de rendibilitat estimada de l'actiu durant un horitzó d'inversió específic per determinar si seria una inversió adequada.

Un actiu té un preu correcte quan el seu preu estimat és el mateix que el valor actual dels fluxos d'efectiu futurs de l'actiu, descomptat a la taxa suggerida per CAPM. Si el preu estimat és superior a la valoració CAPM, aleshores diem que l'actiu està sobrevalorat, pel contrari, diem que l'actiu està infravalorat quan el preu estimat és inferior a la valoració CAPM.

Sigui P_t el preu de l'actiu P a l'instant t, quan l'actiu no pertany al SML, pot ser un indicador que el preu és incorrecte. Com que el rendiment esperat de l'actiu en l'instant t val

$$E(R_t) = \frac{E(P_{t+1}) - P_t}{P_t}, \tag{3.1}$$

un rendiment esperat superior al que recomana el CAPM, indica que el preu de l'actiu P a l'instant t és massa baix, és a dir, l'actiu està infravalorat, suposant que en el moment $t + 1$ l'actiu torna al preu recomanat del CAPM.

De manera equivalent a (3.1) tenim

$$P_t = \frac{E(P_{t+1})}{1 + E(R_t)}.$$

Apliquem l'equació de CAPM i arribem a

$$P_t = \frac{E(P_{t+1})}{1 + R + \beta_t(z - R)}. \tag{3.2}$$

Es coneix com la versió de preus de la fórmula de CAPM.

Considerem $t = 0$. Podem reescriure de nou la fórmula anterior.
Sigui

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0}.$$

La covariància de r i r_M (on r_M denota el rendiment del mercat) és

$$\begin{aligned} Cov(r, r_M) &= Cov(\frac{P_1 - P_0}{P_0}, r_M) \\ &= Cov(\frac{P_1}{P_0} - 1, r_M) \\ &= Cov(\frac{P_1}{P_0}, r_M) \\ &= \frac{Cov(P_1, r_M)}{P_0}, \end{aligned}$$

amb el que tenim

$$\beta = \frac{Cov(P_1, r_M)}{P\sigma^2}.$$

Substituim β a (3.2).
Recordem que ara $\beta_t = \beta$, obtenim

$$P = \frac{E(P_1)}{1 + R + \frac{Cov(P_1, r_M)}{P\sigma^2}(z - R)}.$$

De forma equivalent

$$P = \frac{E(P_1) - \frac{Cov(P_1, r_M)}{\sigma^2}\frac{z-R}{\sigma^2}}{1 + R}.$$

Una altra manera d'analitzar el rendiment, és la comparació del preu del risc de mercat d'una cartera amb un punt de referència acordat. Per una determinada cartera, el preu de mercat del risc es defineix com l'excés de rendibilitat per unitat de risc.
Aquesta quantitat es defineix de la següent manera.

Definició 3.3. *Diem raó de Sharpe o ratio de Sharpe a*

$$MPR = \frac{z - R}{\sigma}.$$

3.4 *Security Characteristic Line*

Considerem les variables aleatòries:

$$r_p = R + \beta_p(r - R) + e_p, \tag{3.3}$$

on l'error ho denotem com e_p.
De la fórmula de CAPM, tenim:

$$E(e_p) = z_p - R - \beta_p(z - R) = 0.$$

És interesant veure com el principi de minimització d'errors implica la forma dels coeficients beta.

Proposició 3.4. *Sigui $e_p = r_p - R - \beta(r - R)$, per algun β.*
La variància de e_p és mínima per $\beta = \frac{Cov(r_p,r)}{Var(r)}$.

Demostració: La variància de e_p és

$$\begin{aligned} Var(e_w) &= Var(r_p - R - \beta(r - R)) \\ &= Var(r_p - \beta r) + Var(\beta R - R) \\ &= Var(r_p - \beta r) + 0 \\ &= Var(r_p) + Var(-\beta r) + 2Cov(r_p, -\beta r_p) \\ &= Var(r_p) + \beta^2 Var(r) - 2\beta Cov(r_p, r). \end{aligned}$$

Tenim una funció de segon grau respecte β, amb $Var(r)$ positiu.
És trivial veure que el mínim d'aquesta funció es troba quan

$$2\beta Var(r) - 2Cov(r_p, r) = 0,$$

amb el que concloem

$$\beta = \frac{Cov(r_p, r)}{Var(r)}.$$

□

La relació entre (3.3) i la minimització de la variància de l'error, ens dóna un mètode per trobar el coeficient β a partir de dades històriques.
El rendiment d'una cartera en particular respecte la de la cartera del mercat en cada moment, es coneix com SCL, de l'anglès *Security Characteristic Line.*

Finalitzem veient com el coeficient beta quantifica el risc no diversificable. Per fer-ho, calcularem la variància de r_p.

Proposició 3.5. *La variància de la rendibilitat d'una cartera es pot expressar com*

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma^2 + Var(e_p).$$

Demostració: Calculem la covariància entre r i e_p, on e_p està definit a la proposició 3.4.

$$\begin{aligned} Cov(r, e_v) &= Cov(r, r_p - R - \beta_p(r - R)) \\ &= Cov(r, r_p) - \beta Cov(r_p, r) = 0. \end{aligned}$$

Ara som capaços de calcular la variància de r_p:

$$\begin{aligned} Var(r_p) &= Var(R + \beta_p(r - R) + e_p) \\ &= Var(\beta_p r + e_p) \\ &= \beta_p^2 Var(r) + Var(e_p) + 2\beta Cov(r, e_p) \\ &= \beta_p^2 Var(r) + Var(e_p). \end{aligned}$$

La fórmula de la proposició 3.5 aporta més informació entre els dos tipus de risc. El primer terme representa el risc sistemàtic que no es pot evitar afegint més valors a la cartera (es mesura per la beta). Pel que fa el segon terme, aquesta és la part diversificable del risc.

Observem que si prenem

$$e = r - R - \beta(r - R).$$

Al ser $\beta = 1$, tenim que la variància de e_p es pot descartar si invertim en una cartera prou diversificada per a que es pugui dur a terme a la pràctica com a substitut.

4 Cas pràctic

En aquesta secció, farem un cas pràctic del càlcul de la frontera eficient de Markowitz utilitzant les eines de Microsoft Excel. Les dades s'han extret de [6] i [7]. Les taules es poden consultar a l'anex. També l'arxiu Excel a [10].

L'objectiu d'aquest cas pràctic, es veure com es comporten dues companyies en conjunt, calcular quina serà la mínima variància global de la cartera diversificant els actius i construir una frontera eficient de Markowitz.

Considerem els actius de dues companyies catalanes: Banc Sabadell i Audax Renovables. Prenem els preus diaris a data 01/01/2021 fins el 31/12/2021. De tota la informació disponible, ens interessa les columnes: *Date* (data) i *Adj Close* (preu ajustat del tancament).

Un primer pas és calcular el rendiment de manera discreta de cada companyia, ho denotem HPR, simplement es calcula fent el valor actual menys el valor anterior, tot dividit pel valor anterior.

En segon lloc, haurem de calcular:

1. Valor esperat (μ): directament amb la funció *PROMEDIO* que té incorporada Excel
2. La desviació estàndar (σ): amb la funció *DESVEST.P*
3. La variància (σ^2): amb la funció *VAR.P*
4. La covariància (σ_{12}): amb *COVARIANCE.P*
5. El coeficient de correlació (ρ_{12}): finalment amb la funció *COEF.DE.CORRE*

La figura següent mostra els resultats dels càlculs:

BANC SABADELL	
μ	0.24%
σ	2.65%
σ^2	0.07%

AUDAX	
μ	-0.1451%
σ	2.3483%
σ^2	0.0551%

σ_{12}	7.76542E-05
ρ_{12}	0.124819256

A continuació calculem la nostra cartera, per fer-ho, necessitem els pesos de les dues companyies. Ara podem donar qualsevol valor, ja que després optimitzarem aquests pesos. Per exemple 50% per Banc Sabadell i 50% per Audax. La cartera és la suma de la ponderació de la cartera pels rendiments. Per cada actiu i, la nostra

cartera és el pes que hem definit de Banc Sabadell, pel rendiment a data i, més el pes que hem definit d'Audax, pel rendiment a data i.
Un cop fet tot això, podem calcular μ, σ i σ^2 de la nostra cartera, però en aquest cas es calcula d'una manera diferent de la que havíem fet abans:

1. μ és la suma de la cartera
2. σ és l'arrel de la variància
3. σ^2 és la variància i la calculem com la definició

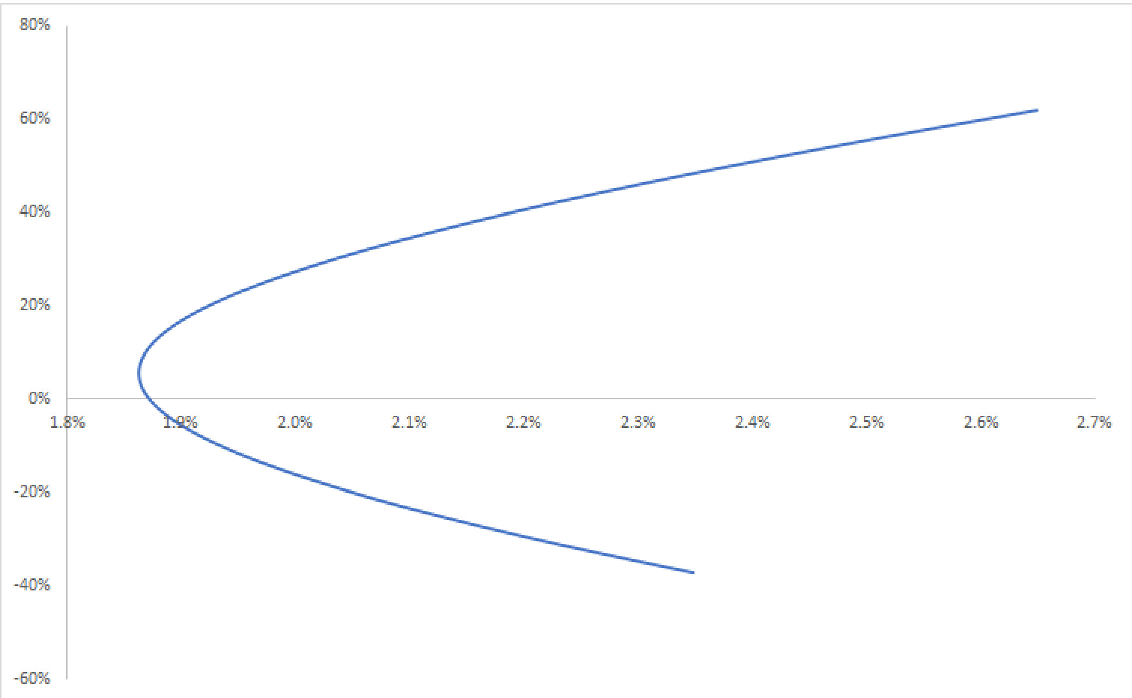
Amb aquests pesos, els resultats són:

CARTERA	
μ	12.56%
σ	1.88%
σ^2	0.04%

Clarament, el nostre objectiu és trobar el mínim risc possible que faci que la rendibilitat sigui màxima. És aquí quan apareix una eina molt potent d'Excel: *Solver*. Establim l'objectiu que la cel·la de la variància sigui mínima canviant la cel·la dels pesos, subjecte a les condicions que els pesos no poden ser majors que 1, i també que existeix la no negativitat. Per tant, tenim que si volem el mínim risc, haurem d'invertir un 43% a Banc Sabadell i un 57% a Audax i la nostra cartera amb aquests pesos queda:

CARTERA	
μ	5.77%
σ	1.86%
σ^2	0.03%

Finalment, construïm la frontera eficient de Markowitz. Per fer-ho, prenem files equidistants del 2% per fer el gràfic més precís. Prenem σ i μ per columnes, i els corresponents valors de la taula anterior. Ara, per emplenar tota la taula, en la finestra de dades fem clic allà on diu "anàlisi d'hipòtesi". Un cop emplenada la taula, procedim a dibuixar la frontera eficient amb un gràfic de dispersió amb línies suavitzades.


80%
60%
40%
20%
0%
-20%
-40%
-60%
1.8%
1.9%
2.0%
2.1%
2.2%
2.3%
2.4%
2.5%
2.6%
2.7%

5 Anex

BANC SABADELL

Date	Adj Close	HPR
04/01/2021	0.33478	
05/01/2021	0.34710	3.68%
06/01/2021	0.36924	6.38%
07/01/2021	0.39254	6.31%
08/01/2021	0.38089	-2.97%
11/01/2021	0.38012	-0.20%
12/01/2021	0.39851	4.84%
13/01/2021	0.38243	-4.03%
14/01/2021	0.38811	1.48%
15/01/2021	0.36703	-5.43%
18/01/2021	0.37560	2.33%
19/01/2021	0.36732	-2.20%
20/01/2021	0.36703	-0.08%
21/01/2021	0.37021	0.87%
22/01/2021	0.35173	-4.99%
25/01/2021	0.34268	-2.57%
26/01/2021	0.35471	3.51%
27/01/2021	0.34826	-1.82%
28/01/2021	0.35904	3.10%
29/01/2021	0.34826	-3.00%
01/02/2021	0.34364	-1.33%
02/02/2021	0.36819	7.14%
03/02/2021	0.36607	-0.58%
04/02/2021	0.38089	4.05%
05/02/2021	0.38368	0.73%
08/02/2021	0.37743	-1.63%
09/02/2021	0.38051	0.82%
10/02/2021	0.37531	-1.37%
11/02/2021	0.36924	-1.62%
12/02/2021	0.37021	0.26%
15/02/2021	0.38262	3.35%
16/02/2021	0.37743	-1.36%
17/02/2021	0.37848	0.28%
18/02/2021	0.37030	-2.16%
19/02/2021	0.37589	1.51%
22/02/2021	0.38455	2.30%
23/02/2021	0.39360	2.35%
24/02/2021	0.39928	1.44%
25/02/2021	0.41487	3.91%
26/02/2021	0.40101	-3.34%
01/03/2021	0.41323	3.05%
02/03/2021	0.40650	-1.63%
03/03/2021	0.41853	2.96%
04/03/2021	0.41468	-0.92%
05/03/2021	0.43008	3.71%
08/03/2021	0.46011	6.98%
09/03/2021	0.44885	-2.45%
10/03/2021	0.44548	-0.75%
11/03/2021	0.43518	-2.31%
12/03/2021	0.45010	3.43%
15/03/2021	0.44741	-0.60%
16/03/2021	0.45520	1.74%
17/03/2021	0.46290	1.69%
18/03/2021	0.47628	2.89%
19/03/2021	0.45203	-5.09%
22/03/2021	0.43508	-3.75%
23/03/2021	0.43152	-0.82%
24/03/2021	0.44317	2.70%
25/03/2021	0.43008	-2.95%
26/03/2021	0.43123	0.27%
29/03/2021	0.43306	0.42%
30/03/2021	0.45665	5.45%
31/03/2021	0.43893	-3.88%
01/04/2021	0.43826	-0.15%
06/04/2021	0.44818	2.26%
07/04/2021	0.44981	0.37%
08/04/2021	0.44346	-1.41%
09/04/2021	0.44278	-0.15%
12/04/2021	0.45241	2.17%
13/04/2021	0.45212	-0.06%
14/04/2021	0.45424	0.47%
15/04/2021	0.44105	-2.90%
16/04/2021	0.44789	1.55%
19/04/2021	0.45886	2.45%
20/04/2021	0.43990	-4.13%
21/04/2021	0.44067	0.18%
22/04/2021	0.44086	0.04%
23/04/2021	0.44201	0.26%
26/04/2021	0.45395	2.70%
27/04/2021	0.45790	0.87%
28/04/2021	0.47359	3.43%
29/04/2021	0.46685	-1.42%
30/04/2021	0.50766	8.74%
03/05/2021	0.53038	4.47%
04/05/2021	0.54694	3.12%
05/05/2021	0.56003	2.39%
06/05/2021	0.57832	3.27%
07/05/2021	0.58871	1.80%
10/05/2021	0.63819	8.40%
11/05/2021	0.63703	-0.18%
12/05/2021	0.64242	0.85%
13/05/2021	0.64262	0.03%
14/05/2021	0.65551	2.01%
17/05/2021	0.63145	-3.67%
18/05/2021	0.61528	-2.56%
19/05/2021	0.60816	-1.16%
20/05/2021	0.61335	0.85%
21/05/2021	0.62798	2.39%
24/05/2021	0.61047	-2.79%
25/05/2021	0.62664	2.65%
26/05/2021	0.62895	0.37%
27/05/2021	0.65012	3.37%
28/05/2021	0.60758	-6.54%
31/05/2021	0.60334	-0.70%
01/06/2021	0.61874	2.55%
02/06/2021	0.61682	-0.31%
03/06/2021	0.63241	2.53%
04/06/2021	0.61104	-3.38%
07/06/2021	0.62529	2.33%
08/06/2021	0.62086	-0.71%
09/06/2021	0.61181	-1.46%
10/06/2021	0.61951	1.26%
11/06/2021	0.61605	-0.56%
14/06/2021	0.61643	0.06%
15/06/2021	0.61335	-0.50%
16/06/2021	0.58679	-4.33%
17/06/2021	0.57966	-1.21%
18/06/2021	0.56657	-2.26%
21/06/2021	0.56888	0.41%
22/06/2021	0.57235	0.61%
23/06/2021	0.57004	-0.40%
24/06/2021	0.57485	0.84%
25/06/2021	0.57870	0.67%
28/06/2021	0.55541	-4.03%
29/06/2021	0.55271	-0.49%
30/06/2021	0.55271	0.00%
02/07/2021	0.54347	-2.72%
05/07/2021	0.56099	3.22%
01/07/2021	0.55868	1.08%
06/07/2021	0.52999	-5.53%
07/07/2021	0.53943	1.78%
08/07/2021	0.52114	-3.39%
09/07/2021	0.54636	4.84%
12/07/2021	0.54944	0.56%
13/07/2021	0.52480	-4.48%
14/07/2021	0.52634	0.29%
15/07/2021	0.52884	0.48%
16/07/2021	0.50747	-4.04%
19/07/2021	0.48764	-3.91%
20/07/2021	0.49342	1.18%
21/07/2021	0.51402	4.17%
22/07/2021	0.50304	-2.13%
23/07/2021	0.51517	2.41%
26/07/2021	0.53635	4.11%
27/07/2021	0.53789	0.29%
28/07/2021	0.53923	0.25%
29/07/2021	0.55618	3.14%
30/07/2021	0.56445	1.49%
02/08/2021	0.56503	0.10%
03/08/2021	0.57196	1.23%
04/08/2021	0.56561	-1.11%
05/08/2021	0.57658	1.94%
06/08/2021	0.59314	2.87%
09/08/2021	0.59333	0.03%
10/08/2021	0.58775	-0.94%
11/08/2021	0.59506	1.24%
12/08/2021	0.59198	-0.52%
13/08/2021	0.59006	-0.33%
16/08/2021	0.58063	-1.60%
17/08/2021	0.56311	-3.02%
18/08/2021	0.57909	2.84%
19/08/2021	0.56542	-2.36%
20/08/2021	0.56118	-0.75%
23/08/2021	0.56811	1.24%
24/08/2021	0.56773	-0.07%
25/08/2021	0.59064	4.04%
26/08/2021	0.58621	-0.75%
27/08/2021	0.59006	0.66%
30/08/2021	0.58140	-1.47%
31/08/2021	0.58332	0.33%
01/09/2021	0.59583	2.15%
02/09/2021	0.58967	-1.03%
03/09/2021	0.57620	-2.29%
06/09/2021	0.57851	0.40%
07/09/2021	0.58197	0.60%
08/09/2021	0.56272	-3.31%
09/09/2021	0.56676	0.72%
10/09/2021	0.56099	-1.02%
13/09/2021	0.57832	3.09%
14/09/2021	0.57350	-0.83%
15/09/2021	0.58159	1.41%
16/09/2021	0.59680	2.61%
17/09/2021	0.61489	3.03%
20/09/2021	0.59237	-3.66%
21/09/2021	0.59314	0.13%
22/09/2021	0.62587	5.52%
23/09/2021	0.63684	1.75%
24/09/2021	0.64050	0.57%
27/09/2021	0.68824	7.45%
28/09/2021	0.67477	-1.96%
29/09/2021	0.69941	3.65%
30/09/2021	0.69844	-0.14%
01/10/2021	0.68285	-2.23%
04/10/2021	0.68131	-0.23%
05/10/2021	0.70037	2.80%
06/10/2021	0.69421	-0.88%
07/10/2021	0.69209	-0.31%
08/10/2021	0.69267	0.08%
11/10/2021	0.68035	-1.78%
12/10/2021	0.69036	1.47%
13/10/2021	0.64165	-7.06%
14/10/2021	0.64570	0.63%
15/10/2021	0.64762	0.30%
18/10/2021	0.64435	-0.51%
19/10/2021	0.64416	-0.03%
20/10/2021	0.64435	0.03%
21/10/2021	0.62221	-3.44%
22/10/2021	0.62952	1.18%
25/10/2021	0.64685	2.75%
26/10/2021	0.64204	-0.74%
27/10/2021	0.63029	-1.83%
28/10/2021	0.65840	4.46%
29/10/2021	0.67034	1.81%
01/11/2021	0.67284	0.37%
02/11/2021	0.66167	-1.66%
03/11/2021	0.66360	0.29%
04/11/2021	0.64454	-2.87%
05/11/2021	0.64820	0.57%
08/11/2021	0.64435	-0.59%
09/11/2021	0.64512	0.12%
10/11/2021	0.65532	1.58%
11/11/2021	0.65532	0.00%
12/11/2021	0.65397	-0.21%
15/11/2021	0.66129	1.12%
16/11/2021	0.62856	-4.95%
17/11/2021	0.62009	-1.35%
18/11/2021	0.61047	-1.55%
19/11/2021	0.58621	-3.97%
22/11/2021	0.60238	2.76%
23/11/2021	0.61239	1.66%
24/11/2021	0.60777	-0.75%
25/11/2021	0.60373	-0.67%
26/11/2021	0.56696	-6.09%
29/11/2021	0.57081	0.68%
30/11/2021	0.57408	0.57%
01/12/2021	0.57851	0.77%
02/12/2021	0.57601	-0.43%
03/12/2021	0.55926	-2.91%
06/12/2021	0.58101	3.89%
07/12/2021	0.58043	-0.10%
08/12/2021	0.57215	-1.43%
09/12/2021	0.57466	0.44%
10/12/2021	0.56734	-1.27%
13/12/2021	0.55695	-1.83%
14/12/2021	0.57196	2.70%
15/12/2021	0.55926	-2.22%
16/12/2021	0.56619	1.24%
17/12/2021	0.53981	-4.66%
20/12/2021	0.53250	-1.36%
21/12/2021	0.55059	3.40%
22/12/2021	0.55695	1.15%
23/12/2021	0.56696	1.80%
27/12/2021	0.57138	0.78%
28/12/2021	0.57138	0.00%
29/12/2021	0.57138	0.00%
30/12/2021	0.56965	-0.30%

AUDAX		
Date	Adj Close	HPR
04/01/2021	1.958784	
05/01/2021	2.085285	6.46%
06/01/2021	2.114934	1.42%
07/01/2021	2.282942	7.94%
08/01/2021	2.258235	-1.08%
11/01/2021	2.332357	3.28%
12/01/2021	2.282942	-2.12%
13/01/2021	2.287884	0.22%
14/01/2021	2.268118	-0.86%
15/01/2021	2.198938	-3.05%
18/01/2021	2.189055	-0.45%
19/01/2021	2.198938	0.45%
20/01/2021	2.134699	-2.92%
21/01/2021	2.149523	0.69%
22/01/2021	2.149523	0.00%
25/01/2021	2.129758	-0.92%
26/01/2021	2.179172	2.32%
27/01/2021	2.065519	-5.22%
28/01/2021	2.114934	2.39%
29/01/2021	2.065519	-2.34%
01/02/2021	2.050695	-0.72%
02/02/2021	2.065519	0.72%
03/02/2021	2.105051	1.91%
04/02/2021	2.100109	-0.23%
05/02/2021	2.090226	-0.47%
08/02/2021	2.129758	1.89%
09/02/2021	2.045753	-3.94%
10/02/2021	2.021046	-1.21%
11/02/2021	2.025988	0.24%
12/02/2021	2.006222	-0.98%
15/02/2021	2.055636	2.46%
16/02/2021	2.080343	1.20%
17/02/2021	2.021046	-2.85%
18/02/2021	1.991398	-1.47%
19/02/2021	2.006222	0.74%
22/02/2021	1.968667	-1.87%
23/02/2021	1.944948	-1.20%
24/02/2021	1.893557	-2.64%
25/02/2021	1.913323	1.04%
26/02/2021	1.942972	1.55%
01/03/2021	2.021046	4.02%
02/03/2021	2.016105	-0.24%
03/03/2021	1.976573	-1.96%
04/03/2021	1.919253	-2.90%
05/03/2021	1.907393	-0.62%
08/03/2021	1.939019	1.66%
09/03/2021	2.001281	3.21%
10/03/2021	1.986456	-0.74%
11/03/2021	2.001281	0.75%
12/03/2021	2.021046	0.99%
15/03/2021	2.006222	-0.73%
16/03/2021	2.134699	6.40%
17/03/2021	2.050695	-3.94%
18/03/2021	2.030929	-0.96%
19/03/2021	2.060578	1.46%
22/03/2021	2.095168	1.68%
23/03/2021	2.080343	-0.71%
24/03/2021	2.055636	-1.19%
25/03/2021	1.996339	-2.88%
26/03/2021	2.016105	0.99%
29/03/2021	2.040812	1.23%
30/03/2021	2.016105	-1.21%
31/03/2021	2.070461	2.70%
01/04/2021	2.170278	4.82%
06/04/2021	2.055636	-5.28%
07/04/2021	2.0418	-0.67%
08/04/2021	2.095168	2.61%
09/04/2021	2.045753	-2.36%
12/04/2021	2.006222	-1.93%
13/04/2021	2.043777	1.87%
14/04/2021	2.037847	-0.29%
15/04/2021	2.039824	0.10%
16/04/2021	2.022035	-0.87%
19/04/2021	2.016105	-0.29%
20/04/2021	1.956808	-2.94%
21/04/2021	1.936054	-1.06%
22/04/2021	2.004246	3.52%
23/04/2021	1.951866	-2.61%
26/04/2021	1.982503	1.57%
27/04/2021	1.982503	0.00%
28/04/2021	1.961749	-1.05%
29/04/2021	1.934077	-1.41%
30/04/2021	1.940995	0.36%
03/05/2021	1.93803	-0.15%
04/05/2021	1.90937	-1.48%
05/05/2021	1.922218	0.67%
06/05/2021	1.885651	-1.90%
07/05/2021	1.936054	2.67%
10/05/2021	1.907393	-1.48%
11/05/2021	1.858967	-2.54%
12/05/2021	1.867862	0.48%
13/05/2021	1.922218	2.91%
14/05/2021	1.996339	3.86%
17/05/2021	1.927159	-3.47%
18/05/2021	1.957796	1.59%
19/05/2021	1.97855	1.06%
20/05/2021	2.016105	1.90%
21/05/2021	2.010175	-0.29%
24/05/2021	2.025988	0.79%
25/05/2021	1.986456	-1.95%
26/05/2021	2.014128	1.39%
27/05/2021	2.0418	1.37%
28/05/2021	2.004246	-1.84%
31/05/2021	1.996339	-0.39%
01/06/2021	2.004246	0.40%
02/06/2021	2.004246	0.00%
03/06/2021	2.008199	0.20%
04/06/2021	2.027964	0.98%
07/06/2021	2.029941	0.10%
08/06/2021	2.033894	0.19%
09/06/2021	2.035871	0.10%
10/06/2021	2.025988	-0.49%
11/06/2021	2.025988	0.00%
14/06/2021	2.049706	1.17%
15/06/2021	2.016105	-1.64%
16/06/2021	2.095168	3.92%
17/06/2021	2.029941	-3.11%
18/06/2021	2.000292	-1.46%
21/06/2021	2.025988	1.28%
22/06/2021	1.990409	-1.76%
23/06/2021	1.946925	-2.18%
24/06/2021	1.960761	0.71%
25/06/2021	1.956808	-0.20%
28/06/2021	1.942972	-0.71%
29/06/2021	1.956808	0.71%
30/06/2021	1.934077	-1.16%
01/07/2021	1.926171	-0.41%
02/07/2021	1.905417	-1.08%
05/07/2021	1.953843	2.54%
06/07/2021	1.937042	-0.86%
07/07/2021	1.923206	-0.71%
08/07/2021	1.907393	-0.82%
09/07/2021	1.900475	-0.36%
12/07/2021	1.940007	2.08%
13/07/2021	1.916288	-1.22%
14/07/2021	1.926	0.51%
15/07/2021	1.866	-3.12%
16/07/2021	1.887	1.13%
19/07/2021	1.872	-0.79%
20/07/2021	1.83	-2.24%
21/07/2021	1.868	2.08%
22/07/2021	1.92	2.78%
23/07/2021	1.905	-0.78%
26/07/2021	1.923	0.94%
27/07/2021	1.882	-2.13%
28/07/2021	1.902	1.06%
29/07/2021	1.92	0.95%
30/07/2021	1.914	-0.31%
02/08/2021	1.911	-0.16%
03/08/2021	1.916	0.26%
04/08/2021	1.888	-1.46%
05/08/2021	1.904	0.85%
06/08/2021	1.901	-0.16%
09/08/2021	1.899	-0.11%
10/08/2021	1.905	0.32%
11/08/2021	1.91	0.26%
12/08/2021	1.906	-0.21%
13/08/2021	1.872	-1.78%
16/08/2021	1.894	1.18%
17/08/2021	1.899	0.26%
18/08/2021	1.935	1.90%
19/08/2021	1.92	-0.78%
20/08/2021	1.93	0.52%
23/08/2021	1.923	-0.36%
24/08/2021	1.937	0.73%
25/08/2021	1.95	0.67%
26/08/2021	1.92	-1.54%
27/08/2021	1.948	1.46%
30/08/2021	1.95	0.10%
31/08/2021	1.92	-1.54%
01/09/2021	1.897	-1.20%
02/09/2021	1.9	0.16%
03/09/2021	1.89	-0.53%
06/09/2021	1.896	0.32%
07/09/2021	1.875	-1.11%
08/09/2021	1.896	1.12%
09/09/2021	1.883	-0.69%
10/09/2021	1.85	-1.75%
13/09/2021	1.853	0.16%
14/09/2021	1.835	-0.97%
15/09/2021	1.797	-2.07%
16/09/2021	1.744	-2.95%
17/09/2021	1.79	2.64%
20/09/2021	1.744	-2.57%
21/09/2021	1.753	0.52%
22/09/2021	1.72	-1.88%
23/09/2021	1.75	1.74%
24/09/2021	1.728	-1.26%
27/09/2021	1.762	1.97%
28/09/2021	1.725	-2.10%
29/09/2021	1.733	0.46%
30/09/2021	1.503	-13.27%
01/10/2021	1.418	-5.66%
04/10/2021	1.376	-2.96%
05/10/2021	1.373	-0.22%
06/10/2021	1.364	-0.66%
07/10/2021	1.377	0.95%
08/10/2021	1.391	1.02%
11/10/2021	1.373	-1.29%
12/10/2021	1.42	3.42%
13/10/2021	1.43	0.70%
14/10/2021	1.456	1.82%
15/10/2021	1.487	2.13%
18/10/2021	1.445	-2.82%
19/10/2021	1.455	0.69%
20/10/2021	1.464	0.62%
21/10/2021	1.512	3.28%
22/10/2021	1.52	0.53%
25/10/2021	1.398	-8.03%
26/10/2021	1.4	0.14%
27/10/2021	1.393	-0.50%
28/10/2021	1.42	1.94%
29/10/2021	1.393	-1.90%
01/11/2021	1.443	3.59%
02/11/2021	1.4	-2.98%
03/11/2021	1.391	-0.64%
04/11/2021	1.391	0.00%
05/11/2021	1.36	-2.23%
08/11/2021	1.364	0.29%
09/11/2021	1.369	0.37%
10/11/2021	1.37	0.07%
11/11/2021	1.339	-2.26%
12/11/2021	1.328	-0.82%
15/11/2021	1.296	-2.41%
16/11/2021	1.426	10.03%
17/11/2021	1.38	-3.23%
18/11/2021	1.339	-2.97%
19/11/2021	1.33	-0.67%
22/11/2021	1.3	-2.26%
23/11/2021	1.287	-1.00%
24/11/2021	1.279	-0.62%
25/11/2021	1.324	3.52%
26/11/2021	1.26	-4.83%
29/11/2021	1.26	0.00%
30/11/2021	1.268	0.63%
01/12/2021	1.308	3.15%
02/12/2021	1.24	-5.20%
03/12/2021	1.224	-1.29%
06/12/2021	1.26	2.94%
07/12/2021	1.234	-2.06%
08/12/2021	1.239	0.41%
09/12/2021	1.265	2.10%
10/12/2021	1.22	-3.56%
13/12/2021	1.219	-0.08%
14/12/2021	1.234	1.23%
15/12/2021	1.193	-3.32%
16/12/2021	1.238	3.77%
17/12/2021	1.244	0.48%
20/12/2021	1.215	-2.33%
21/12/2021	1.223	0.66%
22/12/2021	1.274	4.17%
23/12/2021	1.296	1.73%
27/12/2021	1.334	2.93%
28/12/2021	1.297	-2.77%
29/12/2021	1.26	-2.85%
30/12/2021	1.26	0.00%

6 Conclusions

Un cop finalitzat el treball, són moltes les conclusions que podem treure. Com a aspecte a destacar en tot anàlisi previ, comentar que cal tenir en compte un factor molt important alhora d'invertir en actius: el temps present, és a dir, l'actualitat d'avui dia. El mercat és molt inestable i els valors dels actius actuals poden variar molt en qüestions de minuts, o inclús de segons, ja sigui per la mala gestió d'un pais, o fins i tot per accions de personatges públics (com el que va passar a l'Eurocopa de 2020, on el futbolista Cristiano Ronaldo pel simple fet d'apartar una ampolla de Coca-Cola, va provocar una caiguda del 1.6% en borsa, el que equival a unes pèrdues per la companyia per un valor de 4.000 milions de dòlars).

Per una banda, el model de Markowitz no presenta una gran complexitat, el que provoca que pugui arribar a més públic. En aquest model actua un factor important i és l'actitud de l'inversor en front al risc: hi hauran inversors que adoptaran una actitud més conservadora i d'altres que no.
La rendibilitat d'una cartera ve definida per l'esperança matemàtica. Pel que fa el risc d'una cartera, aquest es mesura a través de la volatilitat (la desviació tipíca, quan prenem el risc total de la cartera). Destaquem que l'inversor prefereix una cartera amb la major rendibilitat al menor risc possible.

Per d'altra banda, en el model CAPM i com passava a Markowitz, determina el conjunt de carteres eficients, el que porta a determinar la cartera òptima, però en canvi en CAPM determinar l'actitud de l'inversor en front al risc no serà el més important. Si que coincideixen tots dos models en que l'inversor prefereix la cartera amb major rendibilitat i menor risc.
La principal diferència i el fet més característic de CAPM són les β. I es que en aquest model, la rendibilitat d'una cartera ve donada per la seva beta.

Per finalitzar, comentar que tots aquests models i eines que presentem són realment útils i aplicables a la vida quotidiana, que es poden complementar amb altres eines dins la gestió de carteres.

Referències

[1] ALVARADO MORALES, Ofelia, Javier Francisco RUEDA GALVIS y Ramón MARTÍNEZ HUERTA. Modelo del portafolio eficiente para la toma de decisiones en la producción agrícola. *I+D Revista de Investigaciones*. 2021, 16(2), 69-83.

[2] DURÁN HERRERA, Juan José. Diccionario de Finanzas. 2011. ISBN 978-84-96877-47-4.

[3] Columbia University in the City of New York [en línia]. [sense data] [consultat el 04 de gener de 2022]. Disponible en: http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-portfolio-I.pdf

[4] CAPINSKI, Maciej J. y Ekkehard KOPP. *Portfolio Theory and Risk Management*. Cambridge, 2014. ISBN 978-0-521-17714-6.

[5] Concept 65: Minimum-Variance and Efficient Frontiers [en línia]. [sense data] [consultat el 19 de gener de 2022]. Disponible en: https://ift.world/concept1/concept-65-minimum-variance-efficient-frontiers/

[6] Banco de Sabadell, S.A. (SAB.MC) Precio de acción, noticias, cotización e historial - Yahoo Finanzas. *Yahoo Finanzas: Bolsa de valores en directo, cotizaciones, noticias empresariales y financieras* [en línia]. [sense data] [consultat el 01 de maig de 2022]. Disponible en: https://es.finance.yahoo.com/quote/SAB.MC?p=SAB.MC

[7] Audax Renovables, S.A. (ADX.MC) Precio de acción, noticias, cotización e historial - Yahoo Finanzas. *Yahoo Finanzas: Bolsa de valores en directo, cotizaciones, noticias empresariales y financieras* [en línia]. [sense data] [consultat el 01 de maig de 2022]. Disponible en:
https://es.finance.yahoo.com/quote/ADX.MC/?p=ADX.MC

[8] MARKOWITZ, H.M. "Portfolio selection". *Journal of finance*. 1952, vol. 7, pàg 77-91.

[9] SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of finance*. 1964, vol. 17 pàg 425-442.

[10] Frontera_eficient_Markowitz_TFG.xlsx. *Google Docs* [en línia]. [sense data] [consultat el 12 de maig de 2022]. Disponible en:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1dygtXt6WnQL-DzaQAfFA8RgRo0aNqrgJ/edit?rtpof=trueamp;sd=truegid=667207996

Nota: Tots els gràfics que apareixen en aquest treball són pròpis.