



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

OUTERPLANAR PARTIAL CUBES

Autor: Bernat Rovira Segú

Director: Dr. Kolja Knauer

Realitzat a: Departament de matemàtiques

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

The class of outerplanar graphs is minor-closed and can be characterized by two excluded minors: K_4 and $K_{2,3}$. Partial cubes are a class of graphs with good metric properties and have two defined operations that transform a partial cube into a PC-minor. We will study the outerplanar partial cubes, which is a PC-minor-closed class. The main result is the characterization of the set of obstructions of the class of outerplanar partial cubes.

Resum

Els grafs outerplanars són una classe de grafs tancada per menors de la qual les seves obstruccions són K_4 i $K_{2,3}$. Els partial cubes són una classe de grafs amb bones propietats mètriques i que tenen definides dues operacions que transformen un partial cube en un PC-menor. En aquest treball estudiarem els partial cubes outerplanars, que és una classe tancada per PC-menors. El resultat principal del treball és la caracterització del conjunt d'obstruccions de la classe dels partial cubes outerplanars.

Agraïments

Vull agrair a en Kolja Knauer, tutor del treball, per totes les facilitats que m'ha donat durant el semestre. També agraeixo que m'hagi proposat fer el treball de fi de grau sobre el tema dels outerplanar partial cubes, ja que és un tema que he disfrutat molt i he trobat molt interessant. He gaudit també de la demostració principal del treball i això és en certa mesura gràcies a ell, perquè m'ha ajudat en moments en què em trobava encallat.

També vull agrair a qualsevol persona que s'hagi interessat pel meu treball i hagi parat a escoltar què hi ha darrere dels partial cubes outerplanars.

Índex

1	Introducció	1
2	Conceptes bàsics	3
3	Grafs outerplanars	9
4	Partial cubes	14
5	Partial cubes no outerplanars minimal	18
6	Resultats previs	22
7	Demostració final	24
8	Altres línies d'investigació	40

1 Introducció

La teoria de grafs és una de les principals branques de la matemàtica discreta. Va començar el 1736 amb el famós problema dels ponts de Königsberg d'Euler i amb altres problemes de 'pathfinding' com el problema del cavall d'escacs. Gràcies al plantejament de tots aquests problemes van anar apareixent els conceptes més importants de la teoria de grafs com són els camins, els arbres, els cicles, la connectivitat, la planaritat, etc.

Durant tots aquests anys han sorgit molts problemes relacionats amb la teoria de grafs dels quals molts d'ells tenen relació també amb la computació. Un dels problemes resolts més famosos de les matemàtiques és el teorema dels 4 colors, que afirma que en qualsevol graf planar es pot pintar el conjunt de vèrtexs fent servir com a molt 4 colors de tal manera que dos vèrtexs adjacents no poden tenir el mateix color. El teorema va ser plantejat com a problema a meitat del segle XIX i no va ser resolt fins 120 anys després, el 1970, amb l'ajuda dels ordinadors. La importància del teorema dels 4 colors justifica la importància dels grafs planars, que seran l'objecte d'estudi d'aquest treball. Més en concret, en aquest treball estudiarem una classe de grafs dins de la classe dels grafs planars: els grafs outerplanars.

La classe dels grafs planars és una classe tancada per menors. Això vol dir que si un graf G és planar aleshores grafs més simples obtinguts a partir de G eliminant vèrtexs, eliminant arestes o contraient arestes seran també planars. Llavors existeixen una sèrie de grafs que no són planars però que qualsevol menor sí que ho és. Aquests grafs s'anomenen obstruccions minimalis i són els grafs K_5 i $K_{3,3}$. El teorema de Kuratowski dona una caracterització dels grafs planars afirmant que un graf és planar si, i només si, no conté cap obstrucció.

Els grafs outerplanars van ser estudiats per primer cop per Chartrand i Harary el 1967 [2] quan estudiaven un altre tipus de grafs planars: els grafs planars permutació. La classe dels grafs outerplanars també és una classe tancada per menors i el teorema de Chartrand-Harary [2] és l'equivalent al teorema de Kuratowski per a grafs outerplanars. En la classe de grafs outerplanars les obstruccions són els grafs K_4 i $K_{2,3}$.

Les classes de grafs tancades per menors són molt diverses i compten amb el famós teorema de Robertson i Seymour [9], que diu que tota classe de grafs tancada per menors es pot caracteritzar pel seu conjunt finit d'obstruccions. A part dels grafs planars i outerplanars, algunes d'aquestes classes tancades per menors són els grafs k -outerplanars, apex-outerplanars, boscos (forests), els grafs cactus, els grafs toroïdals... No obstant això, la demostració del teorema de Robertson i Seymour no és constructivista i hi ha moltes classes de grafs tals que sabem que tenen un conjunt finit d'obstruccions però desconeixem aquest conjunt, per exemple, els grafs k -outerplanars per $k \geq 2$.

L'altre tipus de grafs que estudiarem són els partial cubes, que van ser introduïts per Graham i Pollak [7] en l'estudi de xarxes d'interconnexió i s'hi han seguit trobat moltes aplicacions, com per exemple en la teoria química de grafs [6]. Els partial cubes són una de les classes més importants de la teoria mètrica de grafs, que és la branca de la teoria de grafs que estudia les distàncies entre vèrtexs i els camins entre altres coses. A més a més, els partial cubes formen una generalització d'altres classes importants de grafs i és per aquest motiu que tenen moltes aplicacions en diferents àrees de les matemàtiques. Una de les aplicacions és en la teoria de la computació [1], article realitzat per el tutor d'aquest treball, en Kolja Knauer.

Els partial cubes tenen una partició canònica de les seves arestes que permet defi-

nir dues operacions tancades dins la classe dels partial cubes: la contracció i restricció. Aquestes operacions generen la noció de PC-menors [3], una noció per al partial cubes equivalent a la de menors d'un graf.

Llavors el conjunt dels partial cubes d'una classe de grafs tancada per menors és una classe de partial cubes tancada per PC-menors. Aleshores té sentit estudiar quines són les obstruccions d'aquestes classes de partial cubes tancades per PC-menors. En aquest cas el conjunt d'obstruccions no és en general finit. Algunes de classes de partial cubes tals que coneixem el seu conjunt finit de PC-menors prohibits són els arbres (Q_2 n'és l'única obstrucció), els hipercubs, els cactus bipartits, els grafs hipercel·lulars [3]...

La motivació per a estudiar els partial cubes outerplanars ve de l'article [4] d'en Kolja Knauer en què dóna una caracterització dels partial cubes planars a partir d'expansions i fa un comentari sobre les obstruccions dels partial cubes planars, que són un conjunt infinit. En aquest treball donarem la caracterització de les obstruccions per PC-menors dels partial cubes outerplanars.

2 Conceptes bàsics

Definició 2.1. Un **graf** G és una tripleta ordenada que consisteix en un conjunt de **vèrtexs** $V(G)$, un conjunt d'**arestes** $E(G)$ i una relació que associa cada aresta amb dos vèrtexs. Diem que G és un graf **finít** si $V(G)$ i $E(G)$ són conjunts finits.

Definició 2.2. Un **loop** és una aresta que comença i acaba al mateix vèrtex. Dues arestes són **múltiples** si uneixen els mateixos vèrtexs.

Un graf sovint es representa com un dibuix en el pla \mathbb{R}^2 .

Exemple 2.3. Considerem el graf finít G format per $V(G) = \{u, v, w, z\}$, $E(G) = \{a, b, c, d, e\}$ i les relacions donades pel dibuix següent:

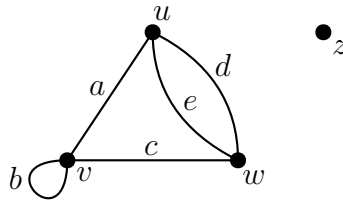


Figura 1: Exemple de graf amb loops i arestes múltiples.

En aquest graf, b és un loop i d, e són arestes múltiples.

Definició 2.4. Un **graf simple** és un graf sense arestes múltiples ni loops.

Les arestes d'un graf simple es poden expressar com a parelles no ordenades de vèrtexs i les denotarem com \overline{uv} . Llavors direm que u i v són els **extrems** de l'aresta. D'aquesta manera, ens podem oblidar de la relació que associa cada aresta amb dos vèrtexs i podem expressar un graf simple G com una parella ordenada $G = (V(G), E(G))$ tal que $E(G)$ és un conjunt de parelles no ordenades de vèrtexs.

Durant tot aquest treball només parlarem de grafs simples finits. Per a no carregar la redacció, anomenarem graf a un graf simple finít.

Definició 2.5. Diem que dos vèrtexs són **adjacents** si existeix una aresta que els uneix. Diem que la aresta és **incident** en els vèrtexs. Diem que dues arestes són **adjacents** si són incidents al mateix vèrtex.

Definició 2.6. El **grau** d'un vèrtex u és el nombre d'arestes incidents en u i el denotem com $Deg_G(u)$.

Exemple 2.7. Sigui $G = (V(G), E(G))$ un graf en què $V(G) = \{u, v, w, z\}$ i $E(G) = \{uv, uw, vw, wz\}$.

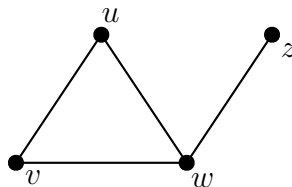


Figura 2: Exemple de graf simple

Els vèrtexs u i v són adjacents. w és adjacent a tots els altres vèrtexs. $Deg(u) = 2 = Deg(v)$, $Deg(w) = 3$ i $Deg(z) = 1$.

Definició 2.8. Diem que H és **subgraf** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. En tal cas, diem que G **conté** H com a subgraf.

Exemple 2.9. H és subgraf de G .

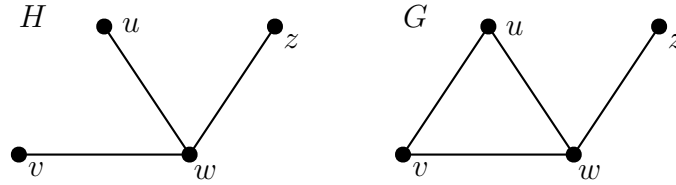


Figura 3: Exemple de subgraf.

Donat un graf G , sovint denotarem un subraf de G amb estructura coneguda pels seus vèrtexs. En l'exemple de la figura 3, podem dir que G conté un K_3 (definició 2.15) format pels vèrtexs u, v, w com a subgraf.

Definició 2.10. Dos grafs G i H són **isomorfs** si existeix $f : V(G) \rightarrow V(H)$ bijectiva de tal manera que si dos vèrtexs $v, w \in V(G)$ són adjacents, aleshores les seves correspondències $f(v), f(w) \in V(H)$ són també adjacents, i viceversa.

Exemple 2.11. Els següents grafs són isomorfs.

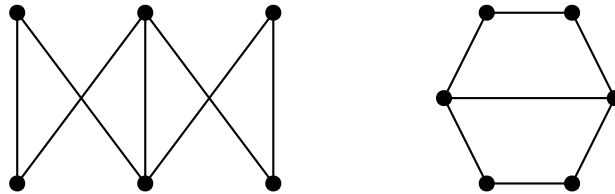


Figura 4: Exemple de grafs isomorfs.

La isomorfia entre grafs es pot entendre com dues maneres de dibuixar un mateix graf. Aquesta idea serveix per entendre que, sovint, el més important dels grafs és el dibuix i no pas les assignacions dels vèrtexs i les arestes. La isomorfia de grafs preserva la gran majoria de les propietats que tenen els grafs. En el cas d'aquest treball, tractarem dos grafs isomorfs com el mateix graf. D'ara endavant, sovint definirem un graf directament a partir del seu dibuix.

Definició 2.12. Un graf G és **bipartit** si podem expressar el conjunt de vèrtexs com a unió disjunta $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ de tal manera que totes les arestes uneixen un vèrtex de V_1 i un de V_2 .

Exemple 2.13. El graf de la figura 4 és bipartit. El dibuix de l'esquerra permet veure-ho fàcilment.

Definició 2.14. Un **camí** P de **longitud** n és un graf simple de $n + 1$ vèrtexs i n arestes tal que es pot definir una successió de vèrtexs (v_0, \dots, v_n) en què dos vèrtexs són adjacents en P si, i només si, són consecutius en la successió. Els vèrtexs v_0 i v_n diem que són els **extrems** del camí P o que P és un camí entre v_1 i v_n . Diem que P passa per la resta de vèrtexs o que la resta de vèrtexs són **punts interiors** de P . La longitud de P es denota com $Long(P)$.

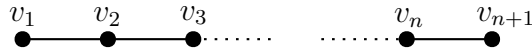


Figura 5: Camí de longitud n .

Un **camí curt** entre dos vèrtexs és un camí de longitud mínima. Aquesta longitud és la **distància** entre els dos vèrtexs i es denota com $d_G(u, v)$. Un camí **tancat** és un camí que comença i acaba al mateix vèrtex. Un **cicle** és un camí tancat en què no hi ha cap vèrtex repetit.

Els conceptes de camí, camí curt i cicle són molt importants en aquest treball i per això és important aclarir-ne la notació. Moltes vegades aquests grafs són pensats com a subgrafs d'un graf G i sovint els definirem sense conèixer tota la informació sobre aquests. Per exemple, si tenim dos vèrtexs $u, v \in G$ denotarem un camí P que té com a extrems els vèrtexs u, v com $P = \widetilde{uv}$. Si sabem que P passa per algun vèrtex $w \in G$ aleshores escriurem $P = \widetilde{uwv}$. Si coneixem P en la seva totalitat aleshores escriurem $P = (v_0, \dots, v_n)$. Si tenim un cicle Z que sabem que conté els vèrtexs u, v aleshores denotarem $Z = \widetilde{uvu} = \widetilde{vuv}$, és a dir, escriurem un dels vèrtexs a l'inici i al final. Sovint només voldrem posar èmfasi a quins vèrtexs conté el cicle o a la seva longitud i no pas a quin és el primer vèrtex del cicle.

Definició 2.15. El **graf complet** K_n és el graf de n vèrtexs en què per cada parella de vèrtexs $u, v \in V(K_n)$, $\overline{uv} \in E(K_n)$. El **graf complet bipartit** $K_{m,n}$ és el graf de $m + n$ vèrtexs bipartit tal que dos vèrtexs són adjacents si, i només si, no pertanyen al mateix conjunt de la bipartició.

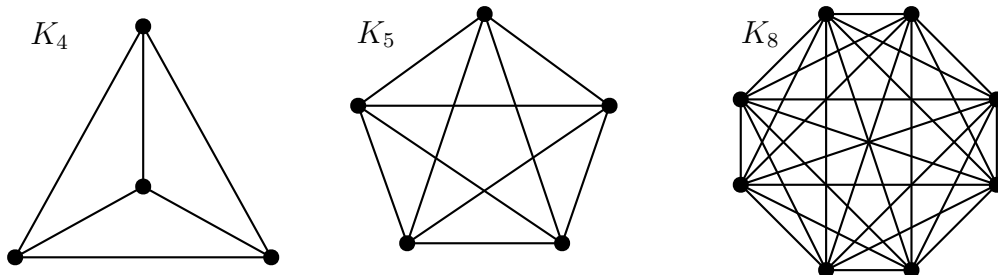


Figura 6: La família infinita dels grafs complets K_n és molt important en la teoria de grafs.

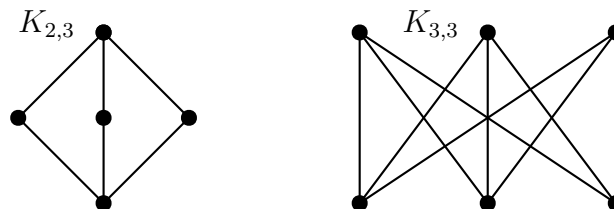


Figura 7: En un graf bipartit tot cicle és de longitud parell.

Ara anem a definir una sèrie d'operacions sobre els grafs que transformen un graf en un altre graf més simple i en alguns casos en un subgraf.

Definició 2.16. Sigui G un graf. Definim l'operació **eliminar un vèrtex** v del graf, que vol dir eliminar el vèrtex de $V(G)$ i totes les arestes incidents a v de $E(G)$. L'operació

es denota com $G \setminus \{v\}$. Donada una aresta $e \in E(G)$, definim l'operació **eliminar una aresta** que consisteix simplement en treure l'aresta del conjunt d'arestes i que denotem per $G \setminus \{e\}$. Definim l'operació **contraure l'aresta** $e = \overline{uv}$ que consisteix en identificar els vèrtexs $u = v$ i també totes les arestes $\overline{uw} = \overline{vw}$. L'aresta e desapareix del graf. La contracció es denota com $G/\{e\}$. Qualsevol graf obtingut a partir d'alguna d'aquestes operacions s'anomena **menor** de G .

Exemple 2.17. Les dues operacions d'eliminar un vèrtex o una aresta transformen G en un subgraf. La contracció no sempre transforma G en un subgraf però sí que deixa un graf amb menys vèrtexs i menys arestes.

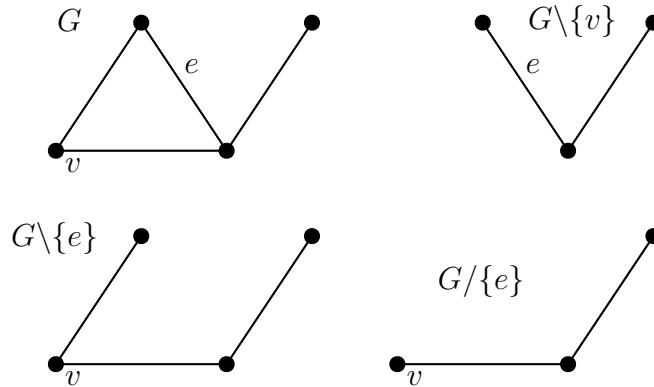


Figura 8: En aquest exemple $G/\{e\}$ és un subgraf de G .

Observació 2.18. Les tres operacions que generen menors són commutatives, és a dir, si $v_1, v_2 \in V(G)$, $e_1, e_2 \in E(G)$ aleshores

- $(G \setminus \{v_1\}) \setminus \{v_2\} = G \setminus \{v_1, v_2\} = (G \setminus \{v_2\}) \setminus \{v_1\}$.
- $(G \setminus \{e_1\}) \setminus \{e_2\} = G \setminus \{e_1, e_2\} = (G \setminus \{e_2\}) \setminus \{e_1\}$.
- $(G/\{e_1\})/\{e_2\} = G/\{e_1, e_2\} = (G/\{e_2\})/\{e_1\}$.

Llavors té sentit parlar d'eliminar un conjunt de vèrtexs, eliminar un conjunt d'arestes o contraure un conjunt d'arestes. Les operacions estan ben definides.

Definició 2.19. Un graf és **connex** si tots els vèrtexs estan units per algun camí. En cas contrari diem que és **inconnex**. Donat un graf inconnex, els subgrafs maximals connexos s'anomenen les **components connexes**.

Definició 2.20. Una **articulació** és un vèrtex tal que si l'eliminem, augmenta el nombre de components connexes.

Definició 2.21. Un graf amb més de dos vèrtexs és **2-connex** si és connex i no té cap articulació.

Definició 2.22. Un **bloc** d'un graf G és un subgraf maximal connex que no té articulacions. Si G mateix és connex i no té articulacions, aleshores G és un bloc.

Observació 2.23. Un bloc sempre serà K_1 , K_2 o un graf 2-connex. Si H és un bloc de G , aleshores H com a graf no té cap articulació, però H pot contenir alguna articulació de G .

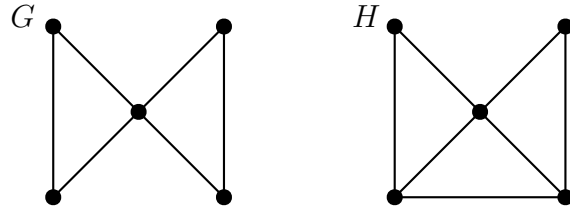


Figura 9: G és connex però no 2-connex ja que té una articulació. H és 2-connex.

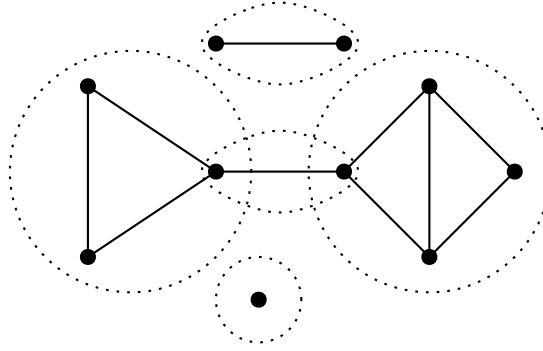


Figura 10: Aquest graf té 5 blocs dels quals només dos són blocs 2-connexos.

Proposició 2.24. *Dos blocs d'un graf tenen com a molt un vèrtex en comú.*

Demostració: [10]

Sigui G un graf i $B_1, B_2 \subseteq G$ dos blocs. Suposem que tenen com a mínim dos vèrtexs en comú $u, v \in B_1 \cap B_2$. Anem a veure que B_1 i B_2 no són grafs 2-connexos maximals. Si eliminem un vèrtex de B_i , el que queda és connex. Si eliminem un vèrtex de la intersecció, u per exemple, aleshores qualsevol camí entre dos vèrtexs de diferents blocs pot passar per v , és a dir, $(B_1 \cup B_2) \setminus \{u\}$ és connex. Llavors $B_1 \cup B_2$ és 2-connex i per tant és un bloc més gran que conté B_1 i B_2 . Tenim una contradicció amb el fet que els blocs B_1, B_2 són grafs 2-connexos maximals. \square

Definició 2.25. *Siguin G i H dos grafs. Definim la **0-suma** de G i H com la unió disjunta dels dos grafs. Definim la **1-suma** de G i H com el graf que s'obté a l'identificar un vèrtex de G i un de H .*

Exemple 2.26. Fem la 1-suma dels grafs següents identificant el vèrtex vermell de la figura 18.

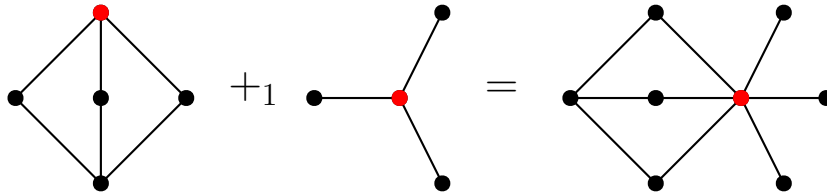


Figura 11: El vèrtex vermell passa a ser una articulació de la 1-suma.

Aquestes dues operacions són útils perquè permeten descomposar un graf en grafs més petits i amb millors propietats de connexió.

Observació 2.27. Un graf inconnex es pot expressar com la 0-suma de les seves components connexes. Un graf connex es pot expressar com la 1-suma dels seus blocs.

Definició 2.28. Una **subdivisió** d'un graf és un graf obtingut a partir d'aquest canviant arestes per parelles d'arestes unides per un nou vèrtex de grau 2.

El concepte de subdivisió és molt important en aquest treball. El farem servir especialment en la secció de la demostració final, en què parlarem de que G conté una subdivisió de K_4 o $K_{2,3}$.

Suposem que tenim un K_4 de vèrtexs $\{A, B, C, D\}$ i un graf H que és una subdivisió de K_4 i que és subgraf d'un altre graf G . Els vèrtexs A, B, C, D els anomenarem **vèrtexs originals** de H . Els camins de H que sorgeixen de subdividir una aresta del K_4 els anomenarem **camins originals**. Si un camí original és de longitud 1, és a dir, és una aresta aleshores direm que és una **aresta original**. Els vèrtexs de H que no són vèrtexs originals els anomenarem **vèrtexs subdivisió**. Si u, v són dos vèrtexs subdivisió, aleshores l'aresta $\overline{uv} \in G$ s'anomena **aresta subdivisió**. Notem que \overline{uv} no necessàriament ha de ser una aresta de H .

Sigui $u \in \{A, B, C, D\}$ i $v \in V(H) \setminus \{A, B, C, D\}$ tal que v no pertany a cap camí original incident en u . Aleshores l'aresta $\overline{uv} \notin E(H)$ diem que és una **aresta mixta**.

Ara suposem que tenim un $K_{2,3}$ amb la bipartició $\{A, E\} \cup \{B, C, D\}$ i un graf F que és subdivisió de $K_{2,3}$ i subgraf de G . Tots els conceptes definits per a la subdivisió de K_4 valen també en aquest cas. Adicionalment, els camins $\widetilde{ABE}, \widetilde{ACE}, \widetilde{ADE} \subseteq F$ els anomenarem **camins principals** de F .

Exemple 2.29. Subdivisions de $K_{2,3}$ i de K_4 .

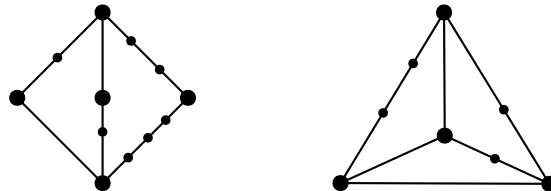


Figura 12: La subdivisió de $K_{2,3}$ té 7 vèrtexs subdivisió i una aresta original. La subdivisió de K_4 té 4 vèrtexs subdivisió i dues arestes originals.

3 Grafs outerplanars

En aquesta secció parlarem dels grafs outerplanars i, de la mateixa manera que el teorema de Kuratowski dóna una caracterització de les obstruccions per als grafs planars, el teorema de Chartrand-Harary ens donarà una caracterització de quins són els grafs no outerplanars més petits.

Definició 3.1. *Un graf és **planar** si es pot dibuixar en el pla \mathbb{R}^2 sense que les arestes es creuin.*

Exemple 3.2. K_4 és planar però K_5 no ho és.

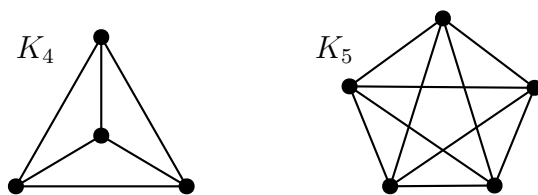


Figura 13

Veure que un graf és planar és senzill, n'hi ha prou amb un dibuix sense encreuaments en el pla. En canvi, demostrar que un graf no és planar és més difícil ja que resulta impossible fer una demostració per exhaustió en tots els dibuixos possibles.

Observació 3.3. La classe dels grafs planars és tancada per menors, és a dir, qualsevol menor d'un graf planar és també planar. En canvi, en un graf no planar podem tenir menors planars i no planars.

La pregunta que ens plantegem ara és evident: Existeixen els grafs no planars tals que qualsevol menor és planar? Quins són? Són finits? La resposta a la primera pregunta és afirmativa. Aquests grafs s'anomenen **obstruccions**.

Com veurem més endavant en aquest treball, la classe dels grafs planars no és l'única classe tancada per menors. Aquestes classes tancades per menors són un objecte d'estudi important en teoria de grafs. És un resultat històric de Robertson i Seymour [9] que totes les classes \mathcal{C} de grafs tancades per menors es poden caracteritzar pel seu conjunt finit d'obstruccions, és a dir, grafs que no pertanyen a \mathcal{C} minimalment per menors.

En el cas de la classe dels grafs planars, tenim dues obstruccions.

Teorema 3.4 (Kuratowski). [8] *Un graf és planar si, i només si, no conté una subdivisió de K_5 o de $K_{3,3}$.*

La demostració del teorema de Kuratowski és complicada i s'escapa de l'objectiu d'aquest treball. El teorema de Kuratowski permet saber fàcilment quan un graf no és planar: només cal trobar una subdivisió de K_5 o $K_{3,3}$.

Definició 3.5. *Si G és un graf planar dibuixat en el pla \mathbb{R}^2 sense encreuaments. Definim les **cares** de G com les regions maximals del pla que queden separades per les arestes del graf. Les cares no acotades s'anomenen **cara exterior** i les cares acotades s'anomenen **cares interiors**.*

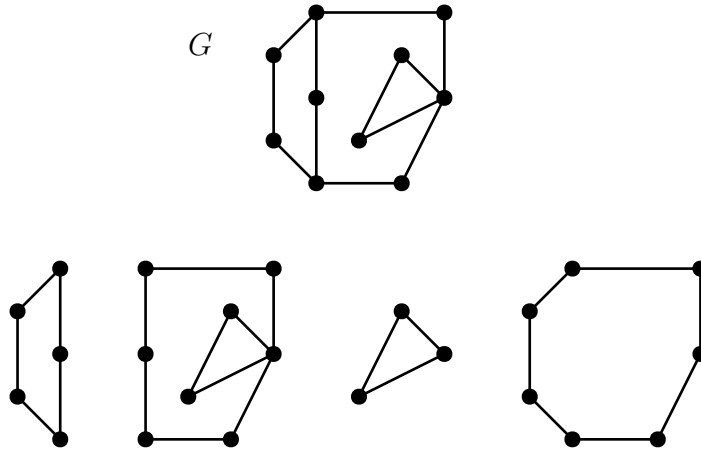


Figura 14: Un graf G i les seves cares pensades com a grafs. L'últim graf és la cara exterior de G

Les cares són oberts de la topologia euclidiana en \mathbb{R}^2 . En aquest treball considerarem una cara com el graf contingut en la frontera del conjunt obert.

Observem que les cares poden canviar segons com dibuixem el graf planar. Si en el graf G de la figura 14 dibuixem el bloc K_3 que doni a la cara exterior, aleshores aquestes canvien i són grafs diferents. Per tant quan parlem de cares d'un graf planar haurem d'aclarir de quin dibuix estem parlant.

Observació 3.6. Fent un argument topològic basat en la projecció estereogràfica de S^2 es pot tornar a dibuixar un graf planar de tal manera que les cares siguin iguals com a graf però que la cara exterior sigui una altra.

Observació 3.7. Les cares d'un graf planar 2-connex són cicles.

Ara anem a definir una classe de grafs dins dels grafs planars que seran un dels objectes d'estudi d'aquest treball: els grafs outerplanars.

Definició 3.8. Un graf és **outerplanar** si es pot dibuixar en \mathbb{R}^2 sense encreuaments de tal manera que tots els vèrtexs formen part de la cara exterior del graf.

Exemple 3.9. El graf següent és outerplanar ja que es pot dibuixar de tal manera que tots els vèrtexs donin a la cara exterior.

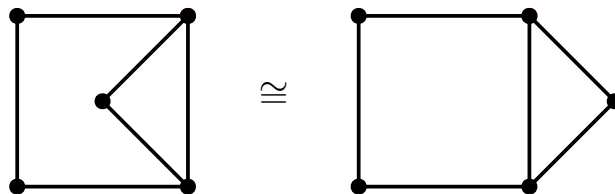


Figura 15

Observació 3.10. Gràcies a l'observació 3.6, podem redefinir un graf outerplanar com un graf que es pot dibuixar sense encreuaments i que tots els vèrtexs pertanyen a una de les cares. El graf de la figura 15 ja podríem haver dit que és outerplanar només amb el dibuix de l'esquerra ja que hi ha una cara que conté tots els vèrtexs.

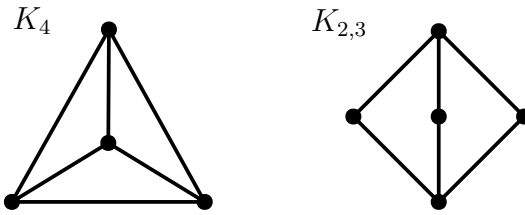


Figura 16: Qualsevol dibuix planar de K_4 o $K_{2,3}$ té un vèrtex que no pertany a la cara exterior.

Proposició 3.11. K_4 i $K_{2,3}$ no són outerplanars.

Demostració: [10]

Si $K_{2,3}$ fos outerplanar, tindria un cicle que passa per els seus 5 vèrtexs, però això no pot ser ja que en un graf bipartit tot cicle ha de ser d'ordre parell.

En K_4 , sí que existeix un cicle que passa pels quatre vèrtexs, però les dues parelles de vèrtexs oposats en el cicle estan connectades per una aresta cadascuna. Si dibuixem les dues arestes a la mateixa cara, llavors es creuen. Si en dibuixem una a la cara interior i l'altra no, llavors un vèrtex no dóna a la cara exterior. \square

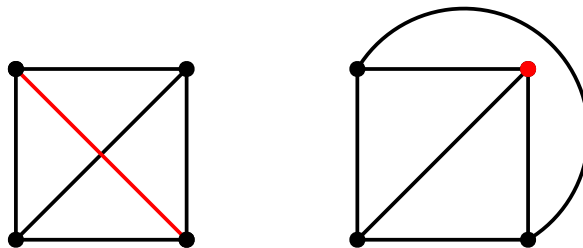


Figura 17: l'aresta en vermell provoca un encreuament. El vèrtex en vermell no pertany a la cara exterior.

Observació 3.12. La classe dels grafs outerplanars és tancada per menors. Si eliminem un vèrtex, eliminem una aresta o contraïem una aresta d'un graf outerplanar obtenim un menor outerplanar.

Com que la classe de grafs outerplanars és tancada per menors, aleshores gràcies al teorema de Robertson i Seymour [9] podem caracteritzar els grafs outerplanars pel conjunt de les seves obstruccions, que és finit. El teorema de Chartrand-Harary [2] afirma que les obstruccions dels grafs outerplanars són K_4 i $K_{2,3}$. Abans d'enunciar i demostrar el teorema, introduïm un lema que farem servir en la demostració.

Observació 3.13. La 0-suma de grafs outerplanars és un graf outerplanar. La 1-suma de grafs outerplanars també és outerplanar (veure figura 18).

Lema 3.14. Qualsevol graf no outerplanar conté un bloc 2-connex no outerplanar.

Demostració:

Fem un raonament d'inducció completa sobre el nombre de vèrtexs. Si un graf té un sol vèrtex, és clarament outerplanar. Sigui $n > 1$, suposem que tot graf no outerplanar amb menys de n vèrtexs conté un bloc 2-connex no outerplanar. Sigui G un graf no outerplanar

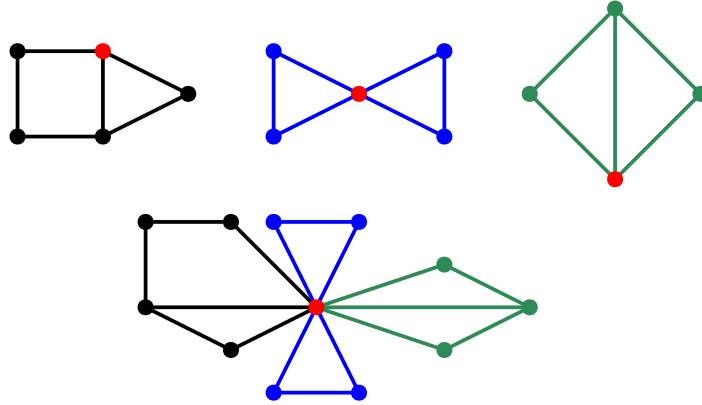


Figura 18: Exemple de 1-suma de tres grafos outerplanars. La 1-suma és outerplanar

de n vèrtexs, podem dividir el problema en tres casos: si G és 2-connex, si G és inconnex o si G és connex però no 2-connex.

Si G és 2-connex, aleshores G ja és un bloc 2-connex no outerplanar.

Si G és inconnex, aleshores G és la 0-suma de les seves components connexes i, per la observació 3.13, ha de contenir una component connexa no outerplanar amb menys de n vèrtexs. Llavors per hipòtesi d'inducció aquesta component connexa conté un bloc no outerplanar, que també és un bloc de G .

Finalment, en l'últim cas, suposem que G és connex però no 2-connex. Llavors G té una articulació i és la 1-suma de dos grafos connexos amb menys de n vèrtexs. Per la observació 3.13, tenim que una de les components de la suma és no outerplanar i, per inducció, conté un bloc no outerplanar. \square

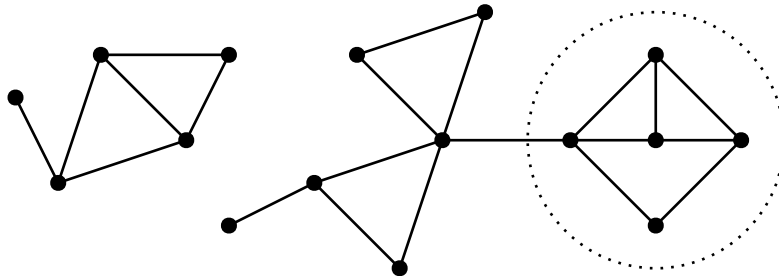


Figura 19: Exemple d'un graf no outerplanar inconnex que conté una component connexa no outerplanar. Aquesta component no és 2-connexa i conté un bloc 2-connex no outerplanar.

Teorema 3.15 (Chartrand-Harary). *Un graf és outerplanar si, i només si, no conté cap subdivisió de K_4 o $K_{2,3}$.*

Demostració: [2]

És evident que G no és outerplanar si conté una subdivisió de K_4 o $K_{2,3}$. Recíprocament, suposem que G és un graf no outerplanar. Aleshores, pel lema anterior, conté un bloc 2-connex no outerplanar. Sigui H aquest bloc 2-connex no outerplanar. Dibuiem H sobre el pla sense encreuaments de tal manera que a la cara exterior tenim un cicle Z amb el nombre màxim de vèrtexs. Com que H no és outerplanar, existeix algun vèrtex que no dóna a la cara exterior, és a dir, que no pertany a Z . Sigui u un vèrtex interior adjacent a un vèrtex $v_1 \in Z$. A més, sabem que $d_H(u) \geq 2$ ja que H és 2-connex. Llavors

ha d'existir un camí P que comença per v_1 , passa per u i acaba en un altre vèrtex $v_2 \in Z$. Notem que $v_1 \neq v_2$ ja que, en cas de ser iguals i de no existir cap altre camí que passi per un vèrtex interior, tindríem que v_1 és una articulació. Distingim dos casos: v_1 i v_2 són consecutius en el cicle i v_1 i v_2 no són consecutius en el cicle.

Suposem que v_1, v_2 són consecutius en el cicle (figura 20 esquerra). Observem que si tots els vèrtexs interiors de P tenen grau 2, arribem a una contradicció amb el fet que Z sigui un camí maximal en el nombre de vèrtexs. Sigui w un vèrtex interior de P de grau 3 (pot passar que $w = u$). Llavors existeix un camí Q que connecta w amb un tercer vèrtex $v_3 \in Z$. Llavors H conté una subdivisió de K_4 , agafant com a vèrtexs originals a v_1, v_2, v_3, w .

En el segon cas (figura 20 dreta), si v_1 i v_2 no són consecutius, existeixen $v_3, v_4 \in Z$ que separen v_1 i v_2 en el cicle i per tant H conté una subdivisió de $K_{2,3}$, agafant com a vèrtexs originals a v_1, v_2, v_3, v_4, u .

En tots dos casos hem obtingut que H (i per tant G també) conté una subdivisió de K_4 o $K_{2,3}$. \square

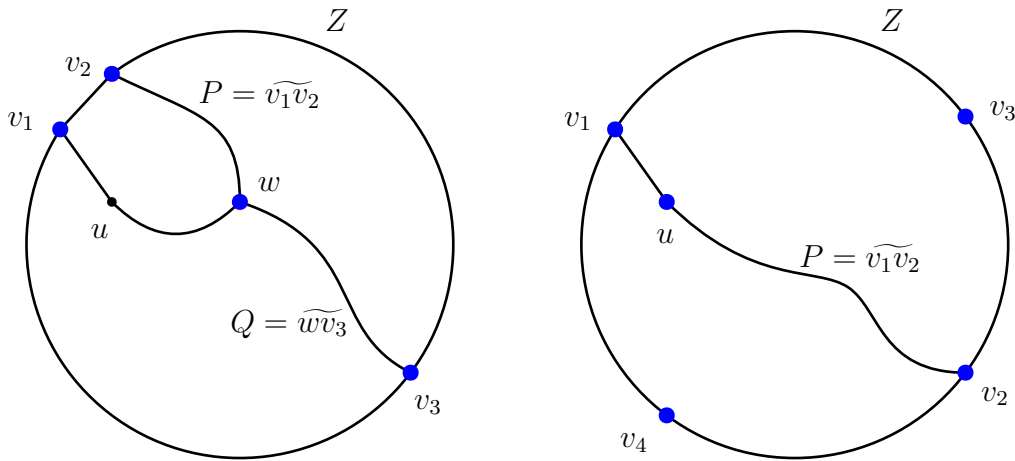


Figura 20: En blau els vèrtexs originals de les subdivisions de K_4 i $K_{2,3}$ respectivament.

4 Partial cubes

En aquesta secció parlarem dels partial cubes, una classe de grafs amb bones propietats mètriques i una partició canònica de les seves arestes, que permet fer operacions tancades dins el conjunt de partial cubes.

Definició 4.1. *El graf hiper cub Q_n és el graf que s'obté a partir dels vèrtexs i arestes d'un hiper cub de dimensió n . Formalment, es defineix com: $V(Q_n) = \{(a_i)_{i=1}^n \mid a_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n$ i $E(Q_n) = \{(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n), (a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, a_n) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dit de manera senzilla, dos vèrtexs estan units per una arista si, i només si, totes les seves coordenades dins de $\{0, 1\}^n$ són iguals excepte una. El dibuix de Q_n és l'hipercub de dimensió n .*

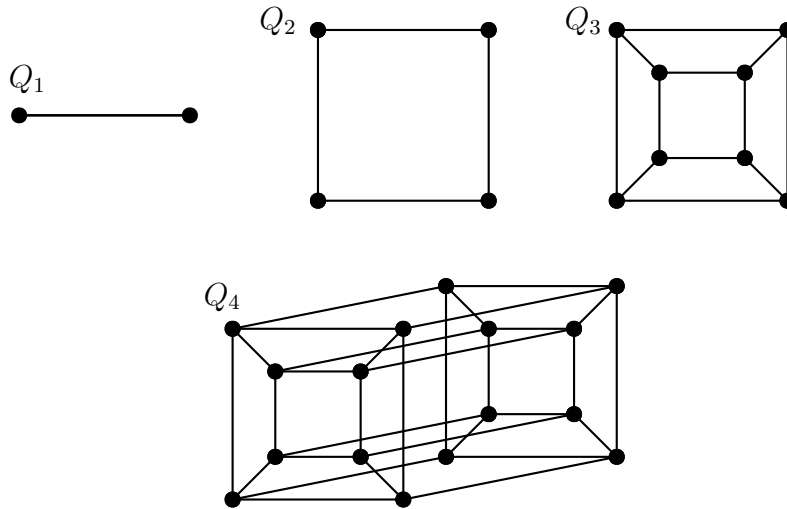


Figura 21: Exemples de Q_n en dimensions baixes

Observació 4.2. $\#V(Q_n) = 2^n$ i $\#E(Q_n) = n2^{n-1}$

Observació 4.3. Q_n és bipartit i qualsevol subgraf de Q_n també ho és. Això implica que qualsevol camí tancat o cicle dins de Q_n és de longitud parell.

Observació 4.4. La distància entre dos vèrtexs de Q_n és el nombre de coordenades que tenen diferents. Dit d'una altra manera, la distància és el nombre de dimensions que hem de creuar per anar d'un vèrtex a l'altre. Per tota parella de vèrtexs $u, v \in V(G)$, $d_{Q_n}(u, v) \leq n$.

Definició 4.5. *Donat un hiper cub Q_n , podem definir una relació en $E(Q_n)$ de la següent forma: siguin $A, B \in E(Q_n)$, tals que*

$$A = \{(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n), (a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, a_n)\}, B = \{(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n), (b_1, \dots, 1 - b_j, \dots, b_n)\}$$

llavors

$$A \sim B \iff i = j.$$

És a dir, dues arestes estan relacionades si creuen la mateixa dimensió. És senzill veure que \sim és una relació d'equivalència. Una classe d'equivalència és el conjunt de totes les arestes que creuen la mateixa dimensió.

Definició 4.6. Les classes d'equivalència de la relació \sim les anomenem **colors**. Sigui $e \in E(Q_n)$, denotem el color de e com $\Gamma(e)$.

Anomenem colors a les classes d'equivalència per a més comoditat a l'hora de treballar-hi. També ens permet representar l'hipercub i els partial cubes (que introduïrem més endavant) de manera visual.

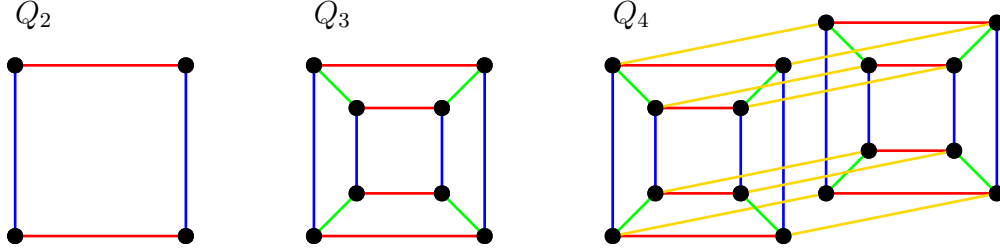


Figura 22: La coloració de l'hipercub és única tret de l'ordre.

Observació 4.7. Els colors són un aparellament (matching), és a dir, no existeix cap parella d'arestes d'un mateix color incidents a un mateix vèrtex.

Observació 4.8. La coloració de Q_n induïx una coloració canònica en qualsevol subgraf de Q_n .

Sovint denotarem un camí pels colors de les seves arestes. És a dir, si $P = (e_1, \dots, e_r)$, sovint ens interessarà remarcar quins són els colors de les arestes de P i denotarem $\Gamma(P) = (\Gamma(e_1), \dots, \Gamma(e_r))$.

Observació 4.9. Qualsevol camí curt no conté dues arestes del mateix color. Siguin $u, v \in Q_n$ i un camí curt P tal que $\Gamma(P) = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$ entre u i v , aleshores qualsevol altre camí curt Q entre u i v és de la forma $\Gamma(Q) = (\Gamma_{\sigma(1)}, \dots, \Gamma_{\sigma(r)})$ en què σ és una permutació de $\{1, \dots, r\}$.

Definició 4.10. Un **subgraf isomètric** de Q_n és un subgraf H tal que per qualsevol parella de vèrtexs $u, v \in V(H)$, $d_H(u, v) = d_{Q_n}(u, v)$.

La noció de subgraf isomètric ens és útil per a definir el concepte més important d'aquesta secció: els partial cubes.

Definició 4.11. Un graf G és un **partial cube** si és isomorf a un subgraf isomètric de Q_n , és a dir, si existeix una aplicació injectiva $\phi : G \rightarrow Q_n$ tal que per qualsevol parella de vèrtexs $u, v \in V(G)$, $d_G(u, v) = d_{Q_n}(\phi(u), \phi(v))$.

En altres paraules, G és un partial cube si existeix una manera d'encaixar G dins de Q_n de tal manera que la distància entre dos vèrtexs qualssevol és la mateixa que en l'hipercub.

Com que la isomorfia de grafs és una relació d'equivalència, si un partial cube G és isomorf a dos subgrafs isomètrics H_1, H_2 aleshores aquests són isomorfs. Com que qualsevol subgraf de Q_n té una coloració induïda per la coloració de Q_n , llavors la coloració de H_1 i H_2 és la mateixa tret de l'ordre i tenen el mateix nombre de colors. Aleshores la coloració d'un partial cube està induïda de manera única (tret de l'ordre) per la coloració dels subgrafs isomètrics dels quals n'és isomorf G . El nombre de colors n d'un partial cube està ben definit. Llavors diem que G és un partial cube de **dimensió** n o que G té n colors.

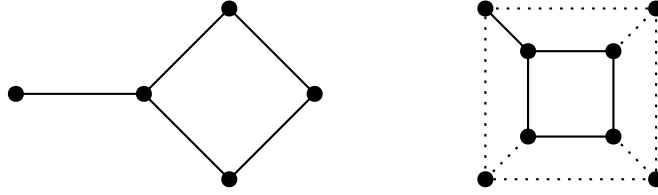


Figura 23: Exemple d'un partial cube de dimensió 3.

Exemple 4.12. El camí P de 3 arestes (figura 24) és isomorf a un subgraf de Q_2 però aquest no és un subgraf isomètric ja que $d_G(u, v) = 3$ però $d_{Q_2}(u, v) = 1$. En canvi, sí que és isomorf a un subgraf isomètric de Q_3 , tal com mostra el dibuix de la dreta de la figura 24. És a dir, no es pot encaixar P en Q_2 però sí en Q_3 .

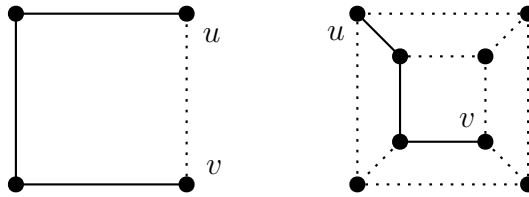


Figura 24: $d_G(u, v) = 3 = d_{Q_3}(u, v)$.

En general és senzill veure si un graf és un partial cube, especialment en dimensions baixes. No obstant això hi ha alguns grafs que no és tant fàcil veure si és un partial cube o no.

Exemple 4.13. Sigui G el subgraf induït de Q_4 de la figura 25. El terme induït fa referència a que totes les parelles de vèrtexs de G que són adjacents en Q_4 són adjacents també en G . Anem a descriure la coloració de G en tres passos.

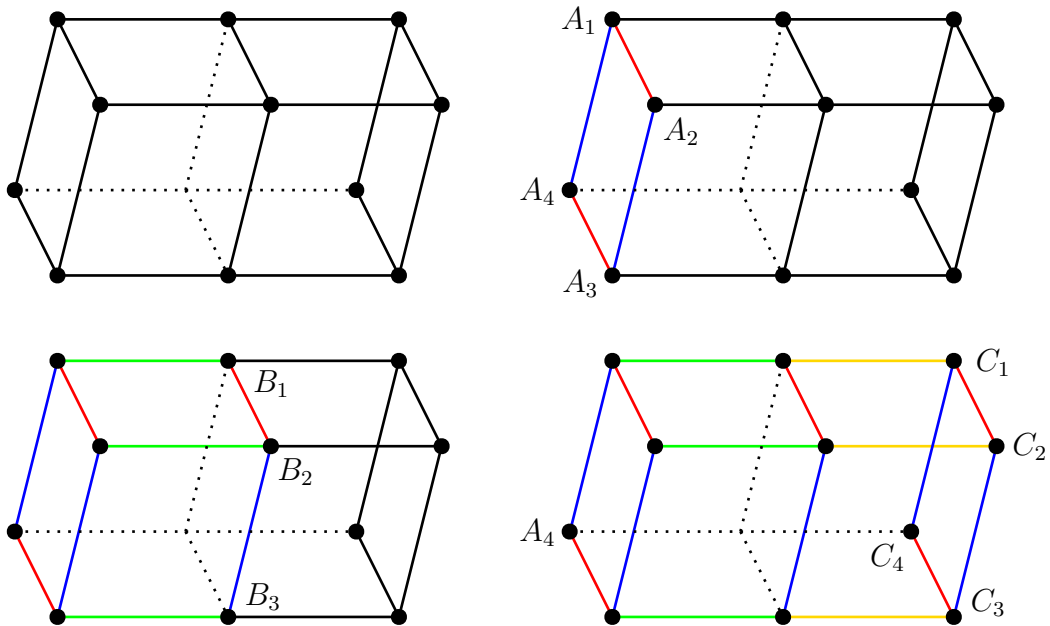


Figura 25: Representem M_1 en blau, M_2 en vermell, M_3 en verd i M_4 en groc.

(i): Com que $Deg(A_4) = 2$ aleshores assignem dos colors $M_1 = \Gamma(\overline{A_1A_4})$ i $M_2 = \Gamma(\overline{A_3A_4})$.

Per completar el cicle $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_1)$, forçosament hem de tenir $M_1 = \Gamma(\overline{A_2A_3})$ i $M_2 = \Gamma(\overline{A_1A_2})$.

(ii): Com que $\text{Deg}(A_2) = 3$ aleshores tenim un tercer color $M_3 = \Gamma(\overline{A_2B_2})$. Per completar els quadrats, hem de tenir $M_1 = \Gamma(\overline{B_2B_3})$, $M_2 = \Gamma(\overline{B_1B_2})$ i $M_3 = \Gamma(\overline{A_1B_1}) = \Gamma(\overline{A_3B_3})$.

(iii): Com que $\text{Deg}(B_2) = 4$, necessitem un quart color $M_4 = \Gamma(\overline{B_2C_2})$. Completant quadrats ja podem acabar de pintar el graf: $M_4 = \Gamma(\overline{B_1C_1}) = \Gamma(\overline{B_3C_3})$, $M_1 = \Gamma(\overline{C_1C_4}) = \Gamma(\overline{C_2C_3})$ i $M_2 = \Gamma(\overline{C_1C_2}) = \Gamma(\overline{C_3C_4})$.

Notem que la coloració ha estat determinada de manera única. Ara, la distància entre A_4 i C_4 és 4 i només hi ha dos camins curts en G que són $(A_4, A_1, B_1, C_1, C_4)$ i $(A_4, A_3, B_3, C_3, A_4)$. Els camins repeteixen el color M_1 i M_2 , respectivament i per tant no són camins curts en Q_4 . Això ens implica que G no pot ser un partial cube, ja que es pot veure clarament que $d_{Q_4}(A_4, C_4) = 2 \neq 4 = d_G(A_4, C_4)$.

Fent un raonament igual que el de l'exemple anterior podem determinar quins subgrafs de Q_n són partial cubes. Simplement es tracta d'assignar colors a les arestes de tal manera que es satisfaci la propietat d'isometria.

Anem a definir ara dues operacions que generaran la noció de menors en partial cubes.

Definició 4.14. *Si G un partial cube. La **contracció** d'un color M consisteix en contraure totes les arestes d'un mateix color i es denota per G/M . La **restricció** d'un color consisteix en eliminar totes les arestes d'un mateix color i quedar-se amb una de les dues components connexes i es denota per $G \setminus M$. Les dues operacions estan ben definides perquè ja hem vist que contraure o eliminar arestes són operacions commutatives.*

Exemple 4.15. A Q_n si hi apliquem qualsevol de les dues operacions obtenim Q_{n-1} . Si $d_{Q_n}(u, v) = r \leq n$, aleshores $d_{Q_{n-1}}(u, v) = r - 1$ o bé $d_{Q_{n-1}}(u, v) = r$, depenent de si el color sobre el qual hem fet l'operació pertany als camins curts o no.

Proposició 4.16. *Les dues operacions que acabem de definir són tancades per a partial cubes, és a dir, si G és un partial cube i M un color aleshores G/M i $G \setminus M$ són partial cubes.*

Demotració:

Signin $u, v \in V(G)$ i sigui $P = \widetilde{uv}$ un camí curt de longitud $r \leq n$ tal que $\Gamma(P) = (M_1, \dots, M_r)$. Si $M \notin P$, aleshores el camí P és el mateix després de contraure G/M o restringir $G \setminus M$.

En el cas de la restricció ja tenim demostrat que $G \setminus M$ és un partial cube. En el cas de la contracció, suposem que $M \in P$. Aleshores el camí P' tal que $\Gamma(P') = (M_1, \dots, \hat{M}, \dots, M_r)$ és un camí de longitud $r - 1$ perquè no repeteix cap color. P' és un camí curt ja que qualsevol camí curt en Q_n/M és de longitud $r - 1$ com a mínim. Llavors G/M és un partial cube. \square

Definició 4.17. *Qualsevol graf obtingut a partir d'una restricció o contracció d'un color en un partial cube l'anomenem **PC-menor**.*

Observació 4.18. Un PC-menor és també un menor.

Tenim que la classe dels partial cubes outerplanars és una classe tancada per PC-menors i per tant la podem caracteritzar en funció de les seves obstruccions. Ara bé, el conjunt d'aquestes obstruccions no és finit tal com veurem més endavant. Determinar aquest conjunt és l'objectiu d'aquest treball.

5 Partial cubes no outerplanars minimal

En aquest treball ens preguntem quines són les obstruccions de la classe dels partial cubes outerplanars, és a dir, quins són els partial cubes no outerplanars tals que si apliquem qualsevol contracció o restricció sobre el graf, obtenim un partial cube outerplanar. Definim així el conjunt Ω :

$$\Omega := \{\text{partial cubes no outerplanars minimal per PC-menors}\}$$

L'objectiu és caracteritzar el conjunt Ω . Donat un partial cube G qualsevol, veure si G és una obstrucció és senzill. El que no ho és tant és trobar totes les obstruccions i demostrar que no n'hi ha més. La proposta d'obstruccions és el conjunt

$$\{L, Q_3, G_n, n \geq 3\}$$

en què L és el **graf llibre** (book graph)

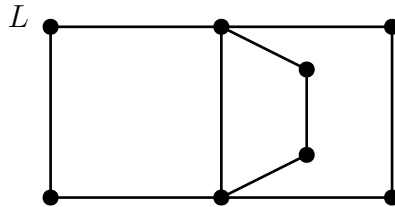


Figura 26: El llibre té dos vèrtexs de grau 4 i la resta de grau 2.

i per cada $n \geq 3$, G_n és el **graf engranatge** (gear graph), que és el graf de $2n + 1$ vèrtexs format per un **cicle exterior** de $2n$ vèrtexs i un vèrtex central o **centre** que és adjacent a la meitat dels vèrtexs del cicle, un sí, un no, successivament. Observem que la distància màxima entre dos vèrtexs de G_n és 4 ja que tots els vèrtexs estan com a molt a distància 2 del centre.

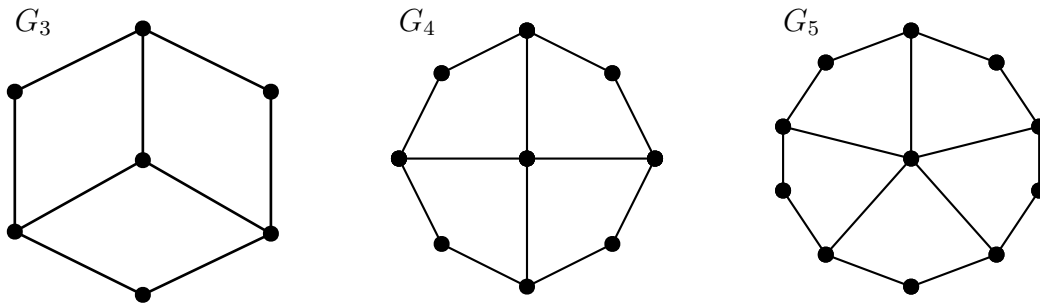


Figura 27: Els tres primers membres de la família infinita d'engranatges

El resultat final d'aquest treball és el següent.

Teorema. *El conjunt Ω de partial cubes no outerplanars minimal per PC-menors és $\Omega = \{L, Q_3, G_n, n \geq 3\}$.*

La demostració d'aquest resultat és llarga i es divideix en diversos passos, que seran lemes que aniran poc a poc caracteritzant un graf del conjunt Ω , fins a veure que ha de ser el llibre, Q_3 o un engranatge. En aquesta secció veurem la inclusió senzilla.

Lema 5.1. $\{L, Q_3, G_n, n \geq 3\} \subseteq \Omega$.

Demostració:

Primer veiem que aquests grafs són partial cubes. N'hi ha prou amb donar una coloració de les arestes de tal manera que qualsevol camí curt entre dos vèrtexs no passi dos cops per un mateix color. Q_3 ja sabem que és un partial cube. En el cas del llibre, la coloració de la figura 28 satisfà que tot camí curt no passa per dues arestes d'un mateix color i per tant és un partial cube.

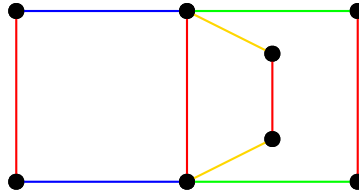


Figura 28: L és un partial cube de dimensió 4.

Mirem ara el cas de G_n . Per cada $n \geq 3$, per a la coloració de G_n necessitem n colors i cada color té únicament tres arestes. Una d'elles és una aresta que uneix el vèrtex central amb un altre vèrtex v del cicle exterior. Les altres dues arestes d'aquell color són les que estan en segona posició si recorrem el cicle exterior des del vèrtex v en els dos sentits (veure figura 29). D'aquesta forma, al vèrtex central hi incideix una aresta de cada color. Per a que quedi més clara la coloració de G_n , veure la figura 30.

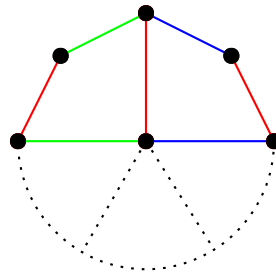


Figura 29: Les tres arestes de color vermell en G_n

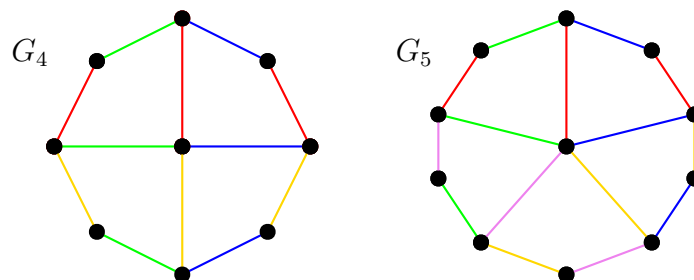


Figura 30: Coloració de G_4 i G_5

Siguin $u, v \in V(G_n)$ i sigui A el vèrtex central. N'hi ha prou amb veure que tot camí curt no passa dos cops pel mateix color. Sabem que $d(u, v) \leq 4$. Si $d(u, v) \leq 2$, qualsevol camí curt té una o dues arestes i no hi ha dues arestes adjacents del mateix color. Si $d(u, v) = 3$, aleshores u, v són del cicle exterior i $Deg(u) = 2$ i $Deg(v) = 3$. Llavors existeix un camí P de longitud 3 entre u i v que passa pel centre i no repeteix color, ja que si P repetís color, aleshores $d(u, v) = 1$. Qualsevol altre camí curt entre u i v passa pels mateixos colors que P . Si $d(u, v) = 4$ aleshores u, v pertanyen al cicle exterior i

$Deg(u) = 2 = Deg(v)$. El camí $P = \widetilde{uA} \cup \widetilde{Av}$ té longitud 4 i per tant és un camí curt. Si repetís color aleshores $d(u, v) = 2$, que és una contradicció. Tots els altres camins curts tenen els mateixos colors.

Ara anem a veure que són grafs no outerplanars. És suficient amb veure que contenen una subdivisió de K_4 o $K_{2,3}$. Dibuixem en vermell els vèrtexs i arestes de K_4 o $K_{2,3}$.

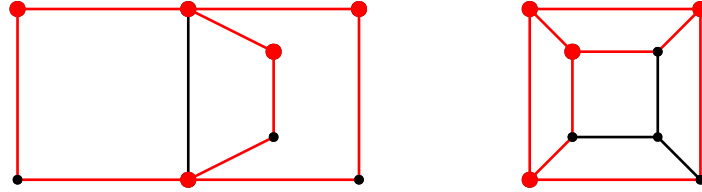


Figura 31: L conté una subdivisió de $K_{2,3}$ i Q_3 conté una subdivisió de K_4 .

Com que $n \geq 3$, G_n té almenys tres arestes incidents al vèrtex del centre i per tant conté una subdivisió de K_4 , en què una de les arestes dóna tota la volta al cicle exterior.

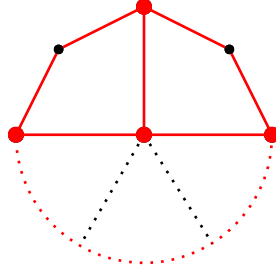


Figura 32: Una possible subdivisió de K_4 dins de G_n

Finalment falta veure que qualsevol PC-menor d'aquest conjunt de grafs és outerplanar. Primer ho veiem pel llibre L . D'acord amb la coloració de la figura 28, els colors vermell, blau, verd i groc els anomenem M_1, M_2, M_3, M_4 respectivament. Notem que M_2, M_3, M_4 són simètrics i per tant només cal considerar els grafs $G \setminus M_1, G/M_1, G \setminus M_2$ i G/M_2 .

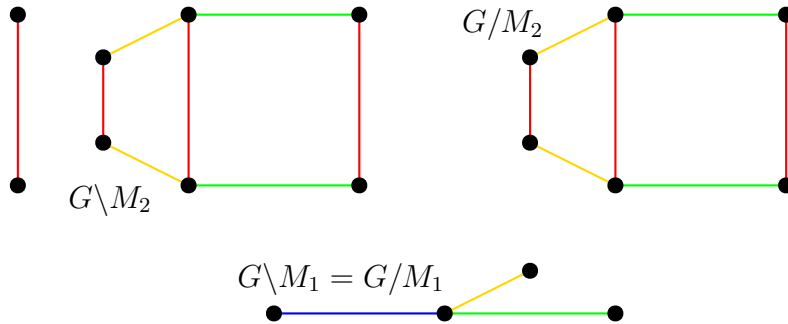


Figura 33: Tots els PC-menors de L són outerplanars.

Pel que fa a Q_3 , ja hem vist a l'exemple 4.15 que en aplicar qualsevol restricció o contracció obtenim Q_2 , que és outerplanar.

Només queda el cas de l'engranatge G_n , $n \geq 3$. Com que tenim simetria en tots els colors, només cal demostrar que per un color qualsevol M , $G \setminus M$ i G/M són outerplanars. En efecte, podem veure a la figura 34 que són outerplanars.

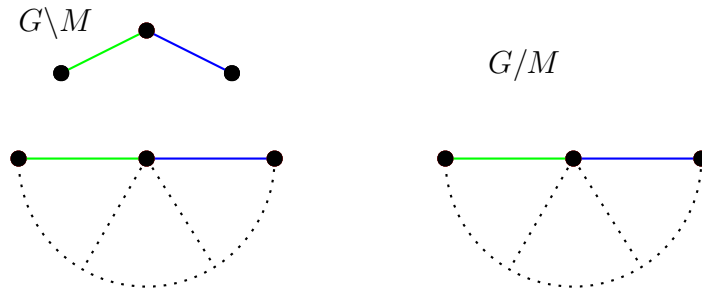


Figura 34: Representem M amb el color vermell d'acord amb la figura 29.

Acabem de veure que el llibre, el cub i la família d'engranatges són partial cubes no outerplanars tals que qualsevol restricció o contracció transforma els grafs en outerplanars, és a dir, $\{L, Q_3, G_n, n \geq 3\} \subseteq \Omega$. \square

Un cop vista la inclusió senzilla, ja ho tenim tot per encarar la part final d'aquest treball, que és demostrar que les obstruccions de la classe dels partial cubes outerplanars són els grafs que hem descrit en aquesta secció.

6 Resultats previs

Abans d'entrar de ple en la demostració final, necessitarem un parell de lemes que enunciaré i demostrarem en aquesta secció.

Definició 6.1. *Sigui G un partial cube de dimensió n . Definim l'expansió $G \square K_2$ com el graf que obtenim si agafem G i una còpia seva G' i aparellem els vèrtexs $v \in V(G)$ i $v' \in V(G')$. El graf obtingut és un partial cube de dimensió $n + 1$, en què el nou color és el conjunt format per les arestes vv' .*

La notació $G \square K_2$ ve del producte cartesià entre dos grafs, de la qual no en parlarem en aquest treball. D'una manera no gaire rigorosa, podem dir que $G = (G/M) \square M$, és a dir, si contraïem un color i després expandim els vèrtexs que acabem de contraure aleshores tornem a tenir el graf G .

Lema 6.2. *Si $G \in \Omega$ és un partial cube minimal per PC-menors aleshores G és planar.*

Demostració:

Sigui M un color de G . Si contraïem M obtenim un graf outerplanar. Sigui $G' = (G/M) \square K_2$, observem que G és subgraf de G' ja que $G = (G/M) \square M \subseteq (G/M) \square K_2 = G'$. És a dir, desfer la contracció del color M és fer una expansió sobre un subconjunt de vèrtexs mentre que l'expansió de K_2 es fa sobre tots els vèrtexs. Com que G/M és outerplanar, podem dibuixar sobre el pla les dues còpies de G/M , $(G/M)^+$ i $(G/M)^-$ de la següent forma (figura 35): dibuixem $(G/M)^+$ sense encreuaments de tal manera que tots els vèrtexs pertanyen a una cara interior i dins d'aquesta cara interior hi dibuixem $(G/M)^-$ sense encreuaments de tal manera que tots els vèrtexs pertanyen a la cara exterior. Llavors només queda aparellar els vèrtexs corresponents i tenim dibuixat $(G/M) \square K_2$ sense encreuaments. \square

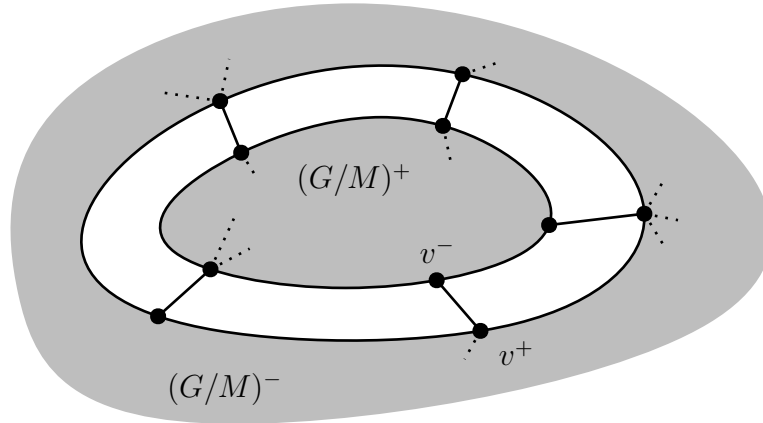


Figura 35: Les components $(G/M)^+$ i $(G/M)^-$ estan contingudes en les respectives regions ombrejades.

Definició 6.3. *Sigui G un graf que conté una subdivisió H d'un cert graf K . Aleshores diem que un conjunt d'arestes $M \subset E(G)$ **destrueix** K si G/M no conté cap subdivisió de K . També diem que M és un **conjunt destructor** de K . Si M és un conjunt format per una sola arista aleshores direm que és una **arista destructora**. Un **conjunt destructor minimal** és un conjunt d'arestes destructor M tal que $M \setminus \{e\}$ no és destructor per cada $e \in M$.*

Observació 6.4. En un partial cube $G \in \Omega$ tots els colors són conjunts destructors de K_4 i $K_{2,3}$.

Lema 6.5. *Sigui G un partial cube que conté una subdivisió H d'un cert graf K . Sigui N un color i $M \subseteq N$. Si M un conjunt destructor de K minimal aleshores per cada $e = \overline{uv} \in M$ tenim que $u, v \in V(H)$, és a dir, totes les arestes de M tenen els dos extrems en la subdivisió H .*

Demostració:

Sigui $M = \{e_1, \dots, e_r\}$ un conjunt destructor de K minimal format per arestes del mateix color N . Sabem que G/M no conté cap subdivisió de K però per cada $1 \leq i \leq r$, el graf $G_i = G/(M \setminus \{e_i\})$ conté una subdivisió H_i de K . Com que $G/M = G_i/\{e_i\}$, aleshores $e_i = \overline{u_i v_i} \in E(G_i)$ és una aresta destructora de K en G_i i per tant $u_i, v_i \in H_i$. Volem veure que $u_i, v_i \in V(H)$. Com que $u_i, v_i \in \widetilde{H_i}$, aleshores existeixen dos vèrtexs $u'_i, v'_i \in V(H)$ tals que existeixen dos camins $P = \widetilde{u_i u'_i}, Q = \widetilde{v_i v'_i} \subseteq G$ de manera que a l'haver fet la contracció $G/(M \setminus \{e_i\})$ identifiquem els vèrtexs $u_i = u'_i \in V(H_i)$ i $v_i = v'_i \in V(H_i)$. Llavors els camins P i Q estan formats per arestes de color N i juntament amb l'aresta $e_i = \overline{u_i v_i}$ constitueixen un camí $R = \widetilde{u'_i u_i v_i v'_i}$ completament format per arestes del color N . Llavors R ha de ser un camí de longitud 1 ja que G és un partial cube i per tant tenim que $u_i = u'_i \in V(H)$ i que $v_i = v'_i \in V(H)$. \square

El lema anterior ens serà útil en la demostració final tant en el cas $K = K_{2,3}$ com en el cas $K = K_4$.

7 Demostració final

La demostració final és un llarg argument que té diversos passos i fa servir tots els resultats previs que hem vist fins ara.

Teorema. *Si $G \in \Omega$ és un partial cube no outerplanar tal que qualsevol contracció o restricció d'un color converteix el graf en outerplanar, aleshores $G \in \{L, Q_3, G_3, n \geq 3\}$.*

Demostració:

Comencem suposant que G és un partial cube no outerplanar tal que qualsevol restricció o contracció d'un color converteix el graf en outerplanar. Pel teorema de Chartrand-Harary (teorema 3.15), G conté una subdivisió de $K_{2,3}$ o de K_4 . Per a la demostració distingirem tres casos:

- G té tres colors.
- G té més de tres colors i conté una subdivisió de $K_{2,3}$ però no de K_4
- G té més de tres colors i conté una subdivisió de K_4 .

Primer cas: G té 3 colors.

Aquest és el cas més senzill ja que si G té tres colors aleshores G és un partial cube de Q_3 . El nombre de partial cubes de Q_3 és finit i podem resoldre aquest cas per exhaustió. Com que $G \subseteq Q_3$ i per tot color M , $Q_3 \setminus M = Q_3/M = Q_2$, aleshores $G \setminus M, G/M \subseteq Q_2$. Per tant, qualsevol contracció o restricció deixa un graf outerplanar. Només cal mirar quins són els partial cubes no outerplanars de dimensió 3. És senzill veure que els partial cubes de Q_3 són 6:

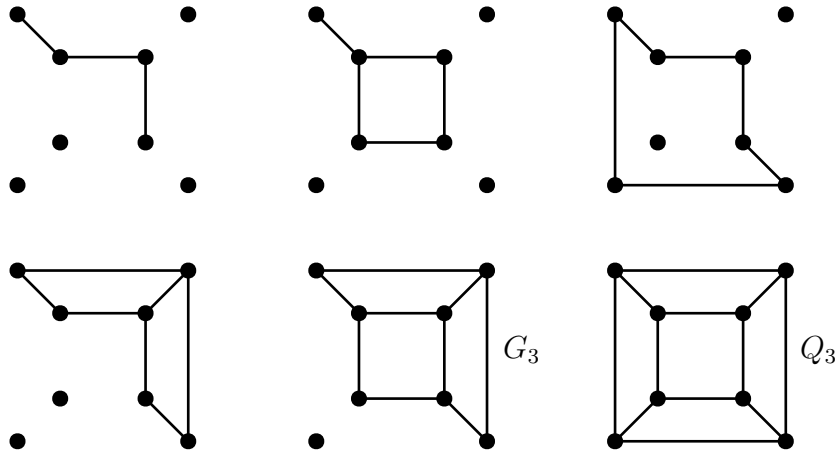


Figura 36: Qualsevol altre partial cube és simètric a algun d'aquests sis.

De tots aquests grafs, els únics que no són outerplanars són G_3 i Q_3 . Llavors $G = G_3$ o $G = Q_3$. Donem per finalitzat el primer cas.

Segon cas: G té 4 o més colors i conté una subdivisió de $K_{2,3}$ però no de K_4 .

De totes les subdivisions de $K_{2,3}$ que conté G , n'escollim una subdivisió F de $K_{2,3}$ continguda en G amb el nombre mínim de vèrtexs i amb A, B, C, D, E com a vèrtexs originals, en què A i E són els vèrtexs originals de grau 3. El graf F consisteix en tres

camins principals disjunts que van des de A fins a E i que anomenarem \widetilde{ABE} , \widetilde{ACE} i \widetilde{ADE} respectivament. Cadascun dels tres camins principals té almenys dues arestes i, consegüentment, almenys dos colors. Podem suposar que, en els tres camins principals, B, C i D són el primer vèrtex de cada camí respectivament, és a dir, que $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \in E(F)$.

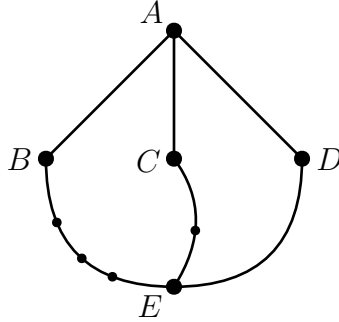


Figura 37: Dibuix de la subdivisió F sota les hipòtesis inicials.

El primer que veurem és que no podem tenir arestes entre vèrtexs del mateix camí principal tret de les de F .

Afirmació 7.1. Siguin $u, v \in \widetilde{ABE}$, $u, v \neq A, E$. Si $\overline{Au} \notin E(F)$ aleshores $\overline{Au} \notin E(G)$. Si $\overline{Eu} \notin E(F)$ aleshores $\overline{Eu} \notin E(G)$. Si $\overline{uv} \notin E(F)$ aleshores $\overline{uv} \notin E(G)$.

Demostració:

Per reducció a l'absurd. Suposem que $\overline{Au} \notin E(F)$ i $\overline{Au} \in E(G)$. Aleshores podem considerar el camí \widetilde{AuE} . Aquest camí satisfà que $2 \leq \text{Long}(\widetilde{AuE}) < \text{Long}(\widetilde{ABE})$ ja que $B \notin \widetilde{AuE}$ i qualsevol vèrtex de \widetilde{AuE} també pertany a \widetilde{ABE} . Llavors podem considerar una nova subdivisió F' de $K_{2,3}$ amb vèrtexs originals A, u, C, D, E i aquesta subdivisió té estrictament menys vèrtexs que F , cosa que contradiu el fet que hem suposat que F conté un nombre mínim de vèrtexs (figura 38 esquerra).

El mateix raonament es pot fer per veure que si $\overline{Au} \notin E(F)$ aleshores $\overline{Au} \notin E(G)$ (figura 38 centre) i que si $\overline{uv} \notin E(F)$ aleshores $\overline{uv} \notin E(G)$ (figura 38 dreta). \square

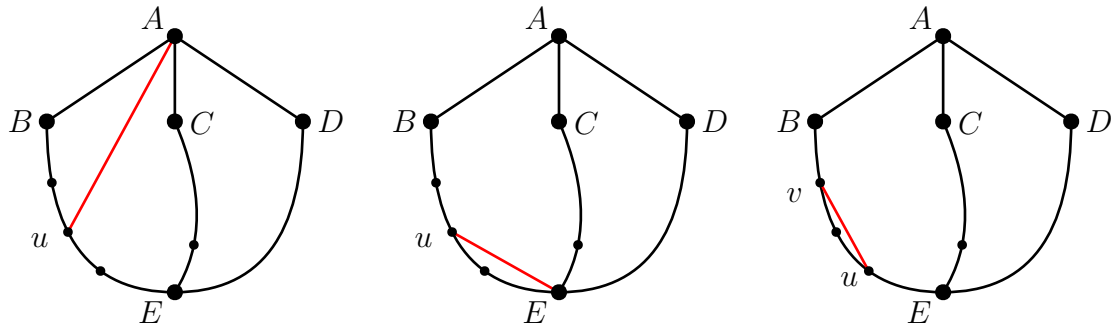


Figura 38: En vermell les arestes que no poden existir

Com que tenim simetria en els tres camins principals, l'afirmació anterior val també si $u, v \in \widetilde{ACE}$ o $u, v \in \widetilde{ADE}$. Llavors el que hem obtingut és que G no conté arestes entre dos vèrtexs del mateix camí principal tret de les que ja tenim en F . Ara veurem que tampoc hi poden haver arestes entre vèrtexs de diferents camins principals. Per simetria

en els tres camins principals, n'hi ha prou amb veure que no existeix cap aresta entre els camins \widetilde{ABE} i \widetilde{ACE} .

Afirmació 7.2. Siguin $u \in \widetilde{ABE}$ i $v \in \widetilde{ACE}$ tals que $u, v \neq A, E$. Aleshores $\overline{uv} \notin E(G)$.

Demostració:

Per reducció a l'absurd. Suposem que $\overline{uv} \in E(G)$. Aleshores tenim una subdivisió de K_4 amb vèrtexs originals A, u, v, E (figura 39 esquerra). Llavors tenim una contradicció, ja que en aquest cas estem suposant que G no conté cap subdivisió de K_4 . \square

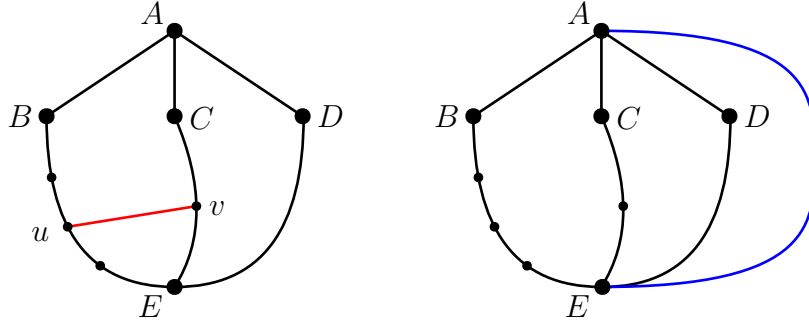


Figura 39: L'aresta en vermell no pot existir. L'aresta en blau és l'única aresta que pot existir entre dos vèrtexs de F .

Les dues afirmacions anteriors ens impliquen que, si existeix una aresta $e = \overline{uv} \notin E(F)$ tal que $u, v \in V(F)$, aleshores $e = \overline{AE}$ (figura 39 dreta). És a dir, l'aresta \overline{AE} (en cas d'existir ja que encara no hem demostrat que existeix) és l'única aresta que no és de F però que uneix dos vèrtexs de F . Aquesta conclusió és útil per a la següent afirmació.

Afirmació 7.3. Sigui M un color de G i $N \subseteq M$ un conjunt destructor minimal de $K_{2,3}$. Si $N \not\subseteq E(F)$ aleshores $N = \{\overline{AE}\}$.

Demostració:

Suposem que $N \not\subseteq E(F)$. Aleshores existeix una aresta $e \in N$ tal que $e \notin E(F)$. Però com que N és un conjunt destructor minimal, pel lema 6.5 sabem que els extrems de e són vèrtexs de F , és a dir, $e = \overline{uv}$ amb $u, v \in V(F)$. Llavors, gràcies a les afirmacions que acabem de veure, obtenim que $e = \overline{AE}$. Ara bé, si contraïem \overline{AE} obtenim el graf G/\overline{AE} , que és outerplanar com es pot veure en la figura 40 i per tant, pel teorema de Chartrand-Harary, no conté cap subdivisió de $K_{2,3}$. Llavors $\{e\} \subseteq N$ és un conjunt destructor de $K_{2,3}$ i N és minimal. Llavors $N = \{e\} = \{\overline{AE}\}$. \square

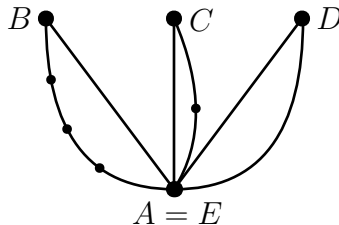


Figura 40: G/\overline{AE} és outerplanar.

El que acabem de veure implica que com a molt només pot existir un color M tal que el seu subconjunt destructor minimal N no està completament contingut en $E(F)$, ja que

l'aresta \overline{AE} només pot ser d'un color. Recordem que G és un graf simple, que vol dir que no conté arestes múltiples i que només pot existir una aresta \overline{AE} .

L'afirmació anterior de moment pot semblar irrellevant ja que podria ser que no existeixi un conjunt destructor minimal $N \not\subseteq E(F)$. De moment ens servirà, juntament amb l'afirmació següent, per entendre quines són les úniques maneres en què un color destrueix el $K_{2,3}$.

Afirmació 7.4. Sigui M un color de G i $N \subseteq M$ un conjunt destructor minimal de $K_{2,3}$. Si $N \subseteq E(F)$ aleshores N està contingut en un dels tres camins principals de $K_{2,3}$, i aquest té longitud 2 o 3 i conté només 2 colors.

Demostració:

Suposem que $N \subseteq E(F)$. Com que totes les contraccions de N es fan sobre els camins \overline{ABE} , \overline{ACE} , \overline{ADE} i G/N no conté cap subdivisió de $K_{2,3}$, aleshores G/N ha contret un dels camins principals fins a reduir-lo a una sola aresta. Suposem, sense perdre generalitat, que N contrau el camí \overline{ABE} de tal manera que en G/N és una sola aresta. Volem veure que no pot existir cap aresta de N en cap altre camí principal.

Suposem que existeix una aresta $e \in N$ tal que $e \in \overline{ACE}$. Aleshores contraure e és completament independent a contraure el camí \overline{ABE} i per tant el conjunt $N \setminus \{e\}$ segueix contraient el camí \overline{ABE} fins a una sola aresta, és a dir, $N \setminus \{e\}$ és un conjunt destructor de $K_{2,3}$. Això contradiu el fet que hem suposat que N és un conjunt destructor minimal. Per tant, N no pot contenir cap aresta en \overline{ACE} i, pel mateix raonament, tampoc pot contenir cap aresta en \overline{ADE} . Llavors $N \subseteq \overline{ABE}$.

Finalment veiem que $Long(\overline{ABE}) = 2$ o 3 . Ja sabem que $Long(\overline{ABE}) \geq 2$ ja que el camí té almenys tres vèrtexs. Com que la contracció de N redueix el camí a longitud 1, aleshores només hi ha una aresta f de color M' ($M' \neq M$ ja que f és adjacent a una aresta de color M) que no és de N i $\#N + 1 = Long(\overline{ABE})$. Podem expressar el camí per les seves arestes com $\overline{ABE} = (e_1, \dots, e_r, f, e'_1, \dots, e'_s)$. Els colors de les arestes són $\Gamma(\overline{ABE}) = (M, \dots, M, M', M, \dots, M)$. Però un camí d'arestes del mateix color ha de ser de longitud 0 o 1. Llavors $\Gamma(\overline{ABE}) = (M, M', M)$, o bé $\Gamma(\overline{ABE}) = (M, M')$, o bé $\Gamma(\overline{ABE}) = (M', M)$ (veure figura 41). En tots tres casos la longitud del camí principal \overline{ABE} és 2 o 3 i només té arestes de dos colors. \square

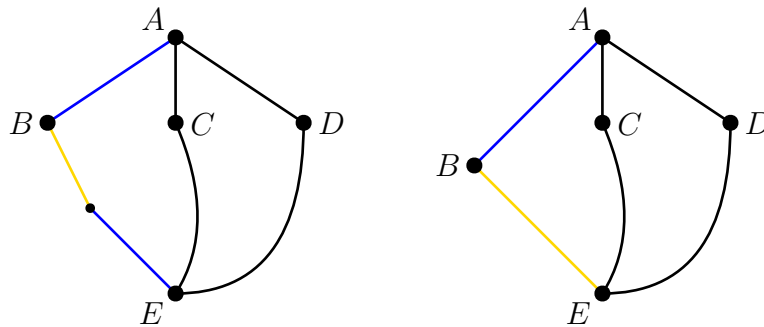


Figura 41: Representem M amb el color blau i M' amb el color groc. El camí \overline{ABE} ha de ser un dels dos casos (sota les hipòtesis de l'afirmació 7.4).

Aquesta última afirmació ens implica que G ha de tenir com a molt 7 colors ja que si els camins \overline{ABE} , \overline{ACE} , \overline{ADE} destrueixen $K_{2,3}$ per contracció, aleshores contenen només

2 colors cadascun d'ells. Això sumat a que podem tenir l'aresta \overline{AE} ens deixa un total de 7 colors com a molt, és a dir, G és un partial cube de dimensió n , per $4 \leq n \leq 7$. Arribats a aquest punt, el nombre d'opcions per a G és finit. Amb l'ajuda d'un ordinador podem considerar cada partial cube de dimensió 7 o menor i veure si satisfà totes les condicions de G . Acabariem veient que l'únic partial cube minimal per PC-menors que conté una subdivisió de $K_{2,3}$ però no de K_4 és el llibre L . No obstant això, podem arribar a la mateixa conclusió a mà.

Sabem que G té almenys 4 colors i que $\text{Deg}_G(A) = 3$ o 4 (depenent de si existeix l'aresta \overline{AE}). Com que G té almenys 4 colors, per l'afirmació 7.3 almenys tres colors M_1, M_2, M_3 tenen el seu conjunt destructor minimal completament contingut en un dels tres camins principals.

Afirmació 7.5. Dos conjunts destructors minimal no poden estar continguts en el mateix camí principal.

Demostració:

Siguin M_1, M_2 dos colors tals que els respectius subconjunts destructors minimal $N_1 \subseteq M_1, N_2 \subseteq M_2$ pertanyen al mateix camí principal. Suposem que $N_1, N_2 \subseteq \widetilde{ABE}$. Llavors per l'afirmació 7.4 $\text{Long}(\widetilde{ABE}) = 2$, és a dir, $\Gamma(\widetilde{ABE}) = (M_1, M_2)$. Sigui M_3 un tercer color tal que el seu subconjunt destructor minimal $N_3 \subseteq M_3$ està contingut en un dels altres dos camins principals. Per simetria podem suposar que $N_3 \subseteq \widetilde{ACE}$. Llavors per l'afirmació 7.4 $\text{Long}(\widetilde{ACE}) = 2$ o 3 però no pot tenir longitud 3 ja que no podem tenir cicles de longitud senar. Però si $\text{Long}(\widetilde{ACE}) = 2$ aleshores tenim un cicle de longitud 4 $\{A, B, E, C, A\}$ que conté tres colors diferents (figura 42), cosa que no pot passar mai en un partial cube. Hem arribat a una contradicció que ens implica que dos conjunts destructors minimal no poden estar en el mateix camí principal. \square

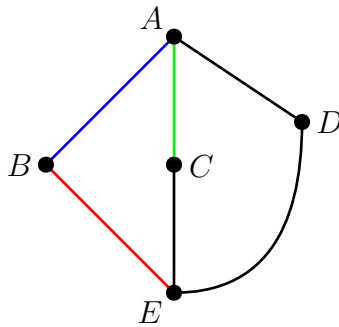


Figura 42: Representem M_1 en blau, M_2 en vermell i M_3 en verd. L'aresta \overline{CE} no es pot pintar de cap color. Llavors $\text{Long}(\widetilde{ABE})$ no pot ser 2.

La conclusió de l'afirmació anterior és que, com que tenim almenys tres conjunts destructors minimal N_1, N_2, N_3 continguts en els camins principals, aleshores cada conjunt destructor minimal pertany a un camí principal diferent i aquests són de longitud 3. Posem que $N_1 \subseteq \widetilde{ABE}, N_2 \subseteq \widetilde{ACE}, N_3 \subseteq \widetilde{ADE}$. A més a més, com que tenim almenys 4 colors, existeix un quart color M_4 tal que el seu conjunt destructor minimal N_4 no està contingut en $E(F)$ i per tant, per l'afirmació 7.3, $N_4 = \{\overline{AE}\}$. Aleshores no pot existir un cinquè color ja que el seu conjunt destructor minimal no pot ser de cap dels dos tipus que hem mencionat. Amb això deduïm que G és un partial cube de dimensió 4.

Finalment ja podem acolorir el graf G . Els tres camins principals tenen longitud 3.

$\widetilde{ABE} = (M_1, X, M_1)$, $\widetilde{ACE} = (M_2, X, M_2)$ i $\widetilde{ADE} = (M_2, X, M_2)$ per algun color X . Com que tenim un quart color M_4 que conté l'aresta \overline{AE} , aleshores $X = M_4$ ja que en tots els cicles cada color ha d'aparèixer un nombre parell de vegades. Llavors G conté el llibre L com a subgraf (figura 44). El que podria passar ara és que G conté més vèrtexs a part dels que hi ha en la subdivisió F .

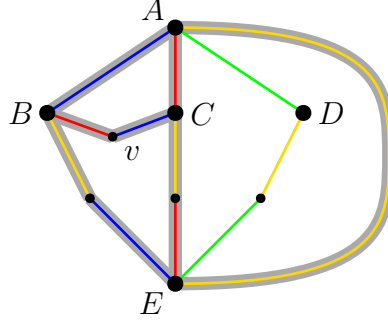


Figura 43: Per hipòtesi G no conté cap subdivisió de K_4 . Llavors \widetilde{BvC} no pot existir.

Afirmació 7.6. $V(G) \setminus V(F) = \emptyset$.

Com que G és un partial cube, G és connex. Si $V(G) \setminus V(F) \neq \emptyset$, aleshores existeix un vèrtex $u \in V(G) \setminus V(F)$ adjacent a algun vèrtex $v \in V(F)$. Com que G només té 4 colors i $\text{Deg}_G(A) = \text{Deg}_G(E) = 4$ aleshores $v \neq A, E$. Llavors per simetria en tots els altres vèrtexs de F podem suposar que $v = B$. Aleshores el color de l'aresta \overline{Bu} només pot ser dues opcions que són simètriques: $\Gamma(\overline{Bu}) = M_2$ o $\Gamma(\overline{Bu}) = M_3$. Podem suposar la primera opció. Aleshores el camí $P = \{u, B, A, C\}$ és un camí de longitud 3 que repeteix el color M_2 , cosa que implica que $\overline{Cu} \in E(G)$. Però llavors tenim una subdivisió de K_4 agafant com a vèrtexs originals a $V(K_4) = \{A, B, C, E\}$ (veure figura 43). Hem arribat a una contradicció. Concluïm llavors que $V(G) = V(F)$. \square

Tots els vèrtexs de G són també de F i per tant de L . Tenim que $G = L$. Donem per finalitzat aquest segon cas.

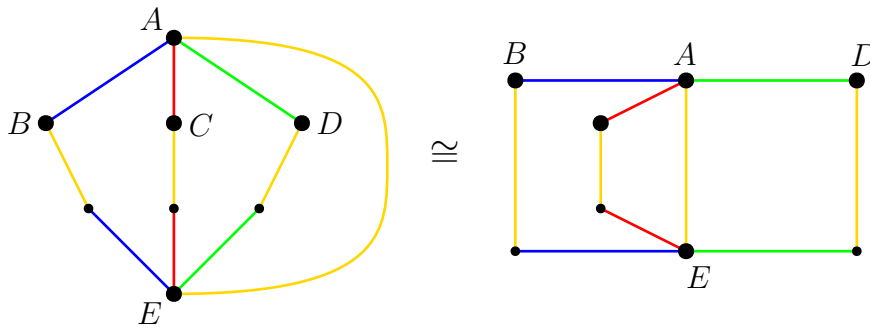


Figura 44: El graf L és una de les obstruccions que hem definit en seccions anteriors.

Tercer cas: G té 4 o més colors i conté una subdivisió de K_4 .

Passem ara a tractar l'últim cas: suposem que G té 4 o més colors i que conté una subdivisió de K_4 . De totes les subdivisions de K_4 contingudes en G n'escollim una amb el nombre mínim de vèrtexs. Anomenem H aquesta subdivisió i anomenem A, B, C, D els vèrtexs originals de K_4 .

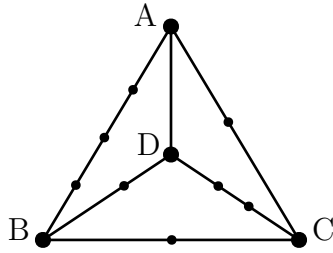


Figura 45: Exemple de com podria ser H .

Afirmació 7.7. Siguin $u, v \in V(H) \setminus \{A, B, C, D\}$ dos vèrtexs subdivisió no adjacents en H . Llavors tampoc són adjacents en G .

Demostració:

Per simetria en totes les arestes de K_4 , podem suposar que $u \in AB$. La posició de v respecte u tret de simetries és un dels tres casos següents:

- (i) $v \in \widetilde{AB}$
- (ii) $v \in \widetilde{AD}$
- (iii) $v \in \widetilde{CD}$

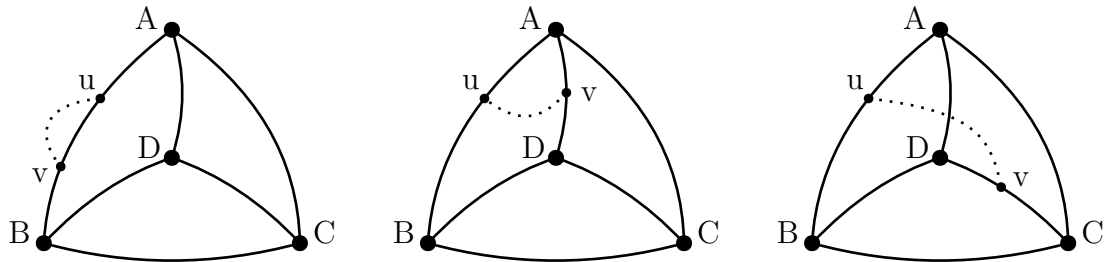


Figura 46: Representació dels casos (i), (ii), (iii).

En tots tres casos suposarem que $\overline{uv} \in E(G)$ i arribarem a una contradicció.

(i): Si $v \in \widetilde{AB}$ aleshores, com que u i v no són adjacents en H , una aresta entre u i v implica que hi ha una subdivisió de K_4 amb menys vèrtexs que H , cosa que no pot ser (veure figura 47 esquerra).

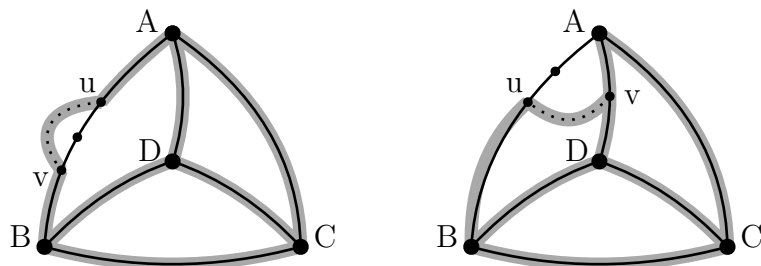


Figura 47: Els dos K_4 en gris tenen menys vèrtexs

(ii): Si $v \in \widetilde{AD}$ i existeix $\overline{uv} \in E(G)$ aleshores entre A i u o entre A i v hi ha d'haver algun vèrtex de la subdivisió, ja que en cas contrari tindríem que el cicle \overline{Auv} és un cicle

d'ordre 3 en un partial cube, que és un graf bipartit. Sense perdre generalitat, podem suposar que hi ha algun vèrtex entre A i u . Llavors de nou tenim una subdivisió de K_4 amb menys vèrtexs que H i arribem a una contradicció (figura 47 dreta).

(iii) Si $v \in \widetilde{CD}$ aleshores G no és planar ja que conté una subdivisió de $K_{3,3}$. La partició dels vèrtexs és $V(K_{3,3}) = \{A, B, v\} \cup \{C, D, u\}$. Això contradueix el lema 6.2 que diu que si $G \in \Omega$ aleshores G és planar.

Per tant, en cap cas hi pot haver una aresta en G que uneixi dos vèrtexs subdivisió. \square

Observem que el raonament del cas (i) de l'afirmació anterior val també si algun o tots els vèrtexs u, v són els vèrtexs originals A, B . És a dir, tampoc pot existir una aresta entre A i $u \in \widetilde{AB}$. El mateix raonament és vàlid per a qualsevol vèrtex original i qualsevol vèrtex subdivisió d'un camí original adjacent al vèrtex original.

Aleshores qualsevol aresta $e = \overline{uv}$ entre dos vèrtexs $u, v \in V(H)$ tal que $e \notin E(G)$ ha de ser una aresta mixta (recordem que una aresta mixta uneix un vèrtex original i un subdivisió d'un camí no adjacent al vèrtex original). L'afirmació següent ens permet restringir com són les arestes mixtes, si és que n'hi ha.

Afirmació 7.8. Totes les arestes mixtes són incidents al mateix vèrtex original.

Demostració:

Siguin $e, f \in E(G)$ dues arestes mixtes de diferent vèrtex original. Podem suposar, sense perdre generalitat, que $e = \overline{Au}$ i $f = \overline{Dv}$ per alguns vèrtexs subdivisió $u, v \in V(H)$.

Com que tenim simetria entre els vèrtexs B i C i entre A i D , tenim dues opcions per a cadascun dels vèrtexs u i v que ens deixen amb quatre possibilitats: (figura 48)

- (i) $u, v \in \widetilde{BC}$
- (ii) $u \in \widetilde{BD}$ i $v \in \widetilde{BC}$
- (iii) $u \in \widetilde{BD}$ i $v \in \widetilde{AC}$
- (iv) $u \in \widetilde{BD}$ i $v \in \widetilde{AB}$

En tots quatre casos arribarem a una contradicció o bé amb el fet que H és una subdivisió de K_4 amb el nombre mínim de vèrtexs, o bé amb el fet que G és planar.

(i): Existeix una subdivisió de K_4 que té A, B, D, u com a vèrtexs originals i que no conté C i per tant té menys vèrtexs que H (figura 49).

(ii): Existeix una subdivisió de K_4 que té A, C, D, v com a vèrtexs originals i que no conté u i per tant té menys vèrtexs que H (figura 49).

(iii): Existeix una subdivisió de K_4 que té A, C, D, v com a vèrtexs originals i que no conté u i per tant té menys vèrtexs que H (figura 49).

(iv): Existeix una subdivisió de $K_{3,3}$ amb la bipartició $V(K_{3,3}) = \{A, B, D\} \cup \{C, u, v\}$ i per tant G no és planar, cosa que contradueix el lema 6.2 (figura 49).

En tots quatre casos hem arribat a una contradicció. Per tant, G no pot tenir dues arestes mixtes en dos vèrtexs originals diferents, és a dir, totes les arestes mixtes de G són incidents al mateix vèrtex original de H . \square

Gràcies a l'afirmació anterior, podem suposar que totes les arestes mixtes són incidents a D . Llavors el graf G conté un subgraf de la forma de la figura 50. La forma del graf comença a assemblar-se a G_n , que és on volem arribar. Ara bé, encara no hem demostrat que existeix cap aresta mixta. Aquest serà l'objectiu de la següent part de la prova.

A continuació veurem quines són les dues maneres en què un color pot destruir tots els K_4

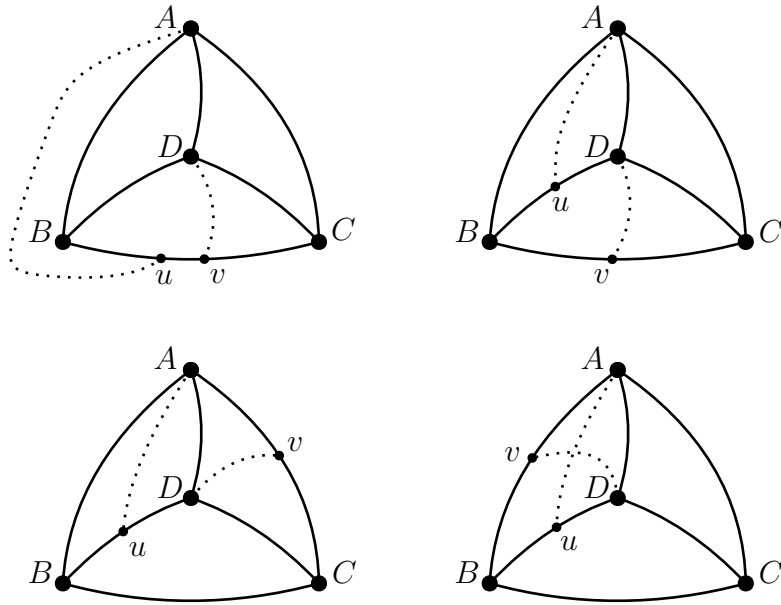


Figura 48: Dibuix dels casos (i), (ii), (iii) i (iv).

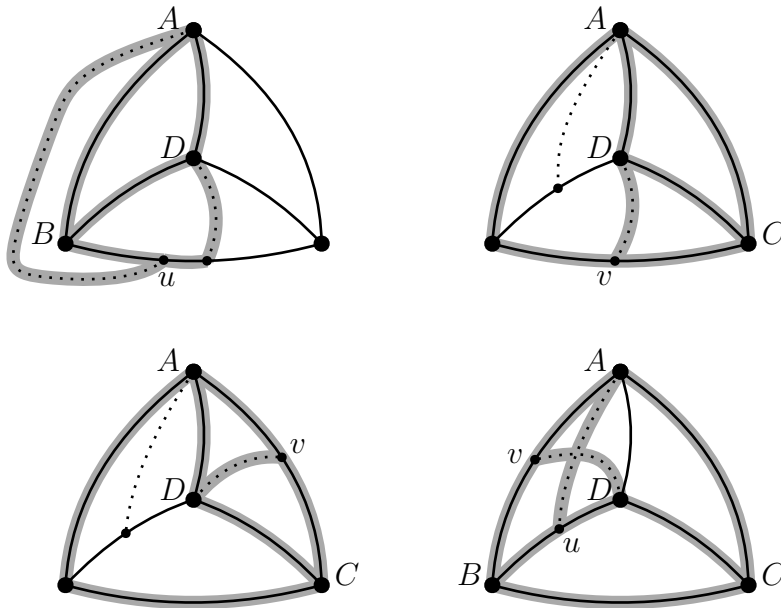


Figura 49: En gris els K_4 dels casos (i), (ii) i (iii) i el $K_{3,3}$ del cas (iv).

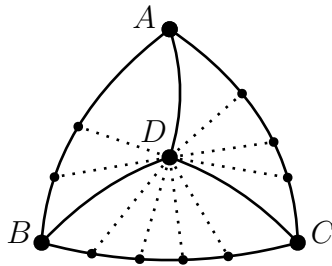


Figura 50: Podem suposar que totes les arestes mixtes (si existeixen) són incidents a D .

continguts en G . Amb les afirmacions 7.9 i 7.10 veurem que tot color ha de contenir una aresta original o una aresta mixta. Separarem els casos en què $N \subseteq E(H)$ i $N \not\subseteq E(H)$. Farem un raonament basat en el lema 6.5, que diu que tot conjunt destructor minimal de K_4 té tots els extrems de les seves arestes en la subdivisió H .

Afirmació 7.9. Sigui M un color de G i sigui $N \subseteq M$ el subconjunt destructor minimal de K_4 . Si $N \not\subseteq E(H)$ aleshores $N \setminus E(H) = \{e\}$ i e és una aresta mixta.

Demostració:

El resultat és una conclusió directa del lema 6.5. Sigui $e = \overline{uv} \in N$ tal que $e \notin E(H)$. Com que N és un conjunt destructor minimal aleshores $u, v \in V(H)$. Per l'afirmació 7.8, una aresta d'aquestes característiques només pot ser una aresta mixta, és a dir, $e = \overline{Dv}$. Observem que qualsevol altra aresta $f \in N \setminus E(H)$ hauria de ser mixta també i per tant hauria de ser $f = \overline{Dw}$. Però això no pot ser ja que $M = \Gamma(e) = \Gamma(f)$ i tindriem dues arestes adjacents del mateix color, cosa que no pot passar en un partial cube. Per tant e és l'única aresta de N que no pertany a $E(H)$. \square

Més endavant veurem que $N = \{e\}$, però encara ens falta informació per poder demostrar que e és una aresta destructora.

Afirmació 7.10. Sigui M un color de G i sigui $N \subseteq M$ el subconjunt destructor minimal de K_4 . Si $N \subseteq E(H)$ aleshores $N = \{e\}$ o $N = \{e, f\}$, en què e, f són arestes originals oposades.

Demostració:

Suposem que $N \subseteq E(H)$ i sigui $e = \overline{uv} \in N$. Considerem $G/(N \setminus \{e\})$. Com que $G/N = (G/(N \setminus \{e\}))/\{e\}$ no conté cap subdivisió de K_4 , aleshores e és una aresta destructora de $G/(N \setminus \{e\})$ i per tant e és una aresta original de $G/(N \setminus \{e\})$. Suposem que els extrems de e en $G/(N \setminus \{e\})$ són A i D . Aleshores existeix un camí $P = \overline{AuvD}$ tal que N el contrau completament fins a identificar $A = D$ en G/N . P és un camí format per arestes del mateix color. En un partial cube, un camí amb totes les arestes del mateix color ha de ser de longitud 0 o 1. Com que $A \neq D$, obtenim que $Long(P) = 1$ i $e = \overline{AD}$ és una aresta original. Si $f \in N$ és una altra aresta, aleshores f és també una aresta original. Com que e i f són del mateix color, no poden ser adjacents i per tant són oposades, és a dir, $e = \overline{AD}$ i $f = \overline{BC}$. \square

De moment no tenim prou eines per determinar si N conté una o dues arestes. Més endavant veurem que només pot contenir una aresta.

Afirmació 7.11. No poden existir 4 colors M_1, M_2, M_3, M_4 tals que els respectius conjunts destructors minimal N_1, N_2, N_3, N_4 estan continguts tots en $E(H)$. Com a molt n'hi poden existir 3.

Demostració:

Suposem que tenim 4 colors M_1, M_2, M_3, M_4 tals que els respectius conjunts destructors minimal N_1, N_2, N_3, N_4 estan continguts tots en $E(H)$. Aleshores per l'afirmació 7.10, existeixen 4 arestes originals e_1, e_2, e_3, e_4 tals que $e_i \in N_i$. Aquestes arestes originals són totes de colors diferents. Si les intentem encaixar en K_4 veiem que només hi ha dues possibles maneres de fer-ho tret de simetries:

$$(i) \quad e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AC}, e_3 = \overline{AD}, e_4 = \overline{BD}$$

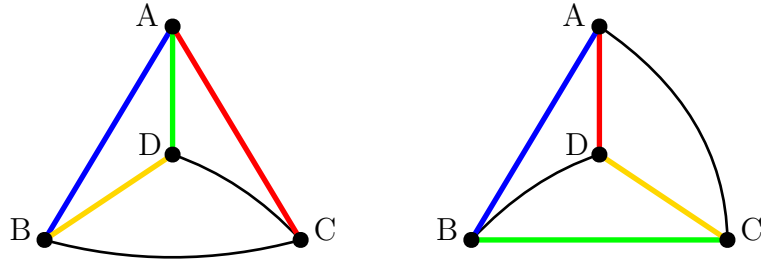


Figura 51: Respresentem M_1 en blau, M_2 en vermell, M_3 en verd i M_4 en groc. Els dos dibuixos ens mostren que no podem tenir 4 arestes originals de 4 colors diferents

(ii) $e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AD}, e_3 = \overline{BC}, e_4 = \overline{CD}$

Tots dos casos condueixen a una contradicció: en el cas (i) tenim un cicle de longitud 3, cosa que no pot passar en un partial cube ja que és bipartit. En el cas (ii) tenim un cicle de longitud 4 en què les quatre arestes són d'un color diferent, i en un partial cube un cicle d'ordre 4 ha de tenir només dos colors. \square

La conclusió de l'afirmació 7.11 és que, com que G té almenys 4 colors per hipòtesi, existeix un color M tal que el seu conjunt destructor minimal satisfà les hipòtesis de l'afirmació 7.9. Obtenim llavors que **existeix almenys una aresta mixta** $e = \overline{Du}$.

L'existència d'una aresta mixta $e = \overline{Du}$ és molt important perquè ens permet demostrar l'afirmació següent:

Afirmació 7.12. Els camins originals $\widetilde{AD}, \widetilde{BD}, \widetilde{CD}$ són en realitat arestes originals, és a dir, $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD} \in E(H)$.

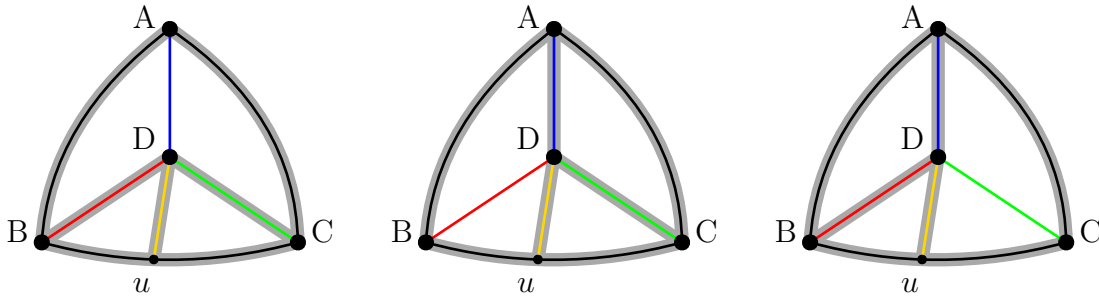


Figura 52: Les tres noves subdivisions H_1, H_2, H_3 de K_4 . La minimalitat de H implica que $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD} \in E(H)$ són arestes originals.

Demostració:

El raonament fa servir fortament que H és una subdivisió de K_4 amb el nombre mínim de vèrtexs. Suposem, sense perdre generalitat, que l'aresta mixta $e = \overline{Du}$ té el vèrtex u sobre el camí \widetilde{BC} . Aleshores podem construir tres noves subdivisions H_1, H_2, H_3 de K_4 d'acord amb la figura 52. Observem per la figura que $V(H_i) \subseteq V(H)$ i tenim igualtat si, i només si, no existeix cap vèrtex en els camins $\widetilde{AD}, \widetilde{BD}, \widetilde{CD}$ respectivament. Com que H és minimal en el nombre de vèrtexs alshores $V(H_i) = V(H)$ per cada $i = 1, 2, 3$. Això implica que els camins originals $\widetilde{AD}, \widetilde{BD}, \widetilde{CD}$ són arestes originals, és a dir, $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD} \in E(H)$. \square

Amb la informació que tenim ara podem millorar les afirmacions 7.9 i 7.10

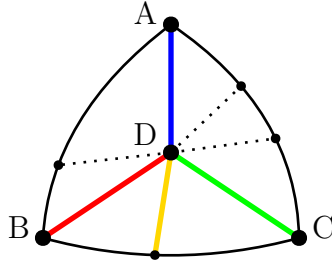


Figura 53: Ara ja sabem que G té tres arestes originals adjacents a D i almenys una aresta mixta.

Afirmació 7.13. Sigui M un color que satisfà les hipòtesis de l’afirmació 7.9, és a dir, tal que el seu subconjunt destructor minimal $N \subseteq M$ no està contigut en $E(H)$. Aleshores $N = \{e\}$ en què e és una aresta mixta.

Demostració:

Per l’afirmació 7.9, sabem que $N \setminus E(H) = \{e\}$, en què e és una aresta mixta. Suposem que $e = \overline{Du}$ amb $u \in \overline{BC}$. Per a veure que $N = \{e\}$, n’hi ha prou amb veure que $G/\{e\}$ és un graf outerplanar. Com que ara tenim les arestes originals $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD} \in E(H)$, el dibuix de $G/\{e\}$ de la figura 54 té tots els vèrtexs en la cara interior. Pel teorema de Chartrand-Harary, $G/\{e\}$ no conté cap subdivisió de K_4 . Llavors e és una aresta destructora i $N = \{e\}$. \square

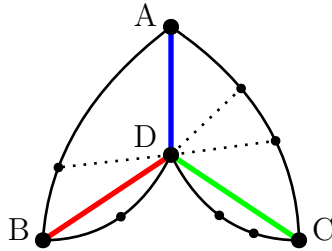


Figura 54: Contracció sobre l’aresta groga del graf de la figura 53. Tots els vèrtexs de G donen a la cara exterior.

Afirmació 7.14. Sigui M un color que satisfà les hipòtesis de l’afirmació 7.10, és a dir, tal que el seu subconjunt destructor minimal $N \subseteq M$ està contigut en $E(H)$. Aleshores $N = \{e\}$ en què e és una aresta original incident en D .

Demostració:

Per l’afirmació 7.10, sabem que $N = \{e\}$ o $N = \{e, f\}$, en què e, f són arestes originals oposades. Anem a veure que aquest segon cas no pot passar. Suposem que $N = \{e, f\}$ i que $e = \overline{AD}, f = \overline{BC}$. Llavors, com que ara sabem que tenim les arestes originals $\overline{BD}, \overline{CD}$, llavors tenim un cicle $\{B, C, D, B\}$ de longitud 3, cosa que no pot passar en un partial cube. Això contraduï el fet que hem suposat que $N = \{e, f\}$. Aleshores només queda la opció $N = \{e\}$ és una aresta destructora. A més, pel mateix motiu pel qual no existeix f , forçosament e ha de ser una aresta original incident en D . \square

Fem un resum de què tenim fins ara. Sigui M és un color i $N \subseteq M$ el subconjunt destructor minimal. Tenim dues opcions per N :

- (i) $N \subseteq E(H)$

(ii) $N \not\subseteq E(H)$

(i): Si $N \subseteq E(H)$ aleshores, per l'afirmació 7.14, $N = \{e\}$ en què e és una aresta original incident en D .

(ii): Si $N \not\subseteq E(H)$ aleshores, per l'afirmació 7.13, $N = \{e\}$ en què e és una aresta mixta que, per hipòtesi, és incident en D .

Llavors observem que tot color M conté una (i només una) aresta destructora (original o mixta) incident en D . Aleshores ja podem afirmar que $\text{Deg}_G(D) = n$ en què $n \geq 4$ és el nombre de colors que conté G . El següent que farem és raonar quina forma té el cicle exterior del K_4 : el cicle $Z = \overline{ABCA}$. Arribats a aquest punt ja no distingirem quina és la subdivisió H ja que si agafem el vèrtex D i tres vèrtexs adjacents a D tenim una subdivisió de K_4 amb el mateix nombre de vèrtexs. Tampoc distingirem els vèrtexs A, B, C dels altres vèrtexs del cicle Z . Anomenem v_1, \dots, v_n els vèrtexs del cicle Z que són adjacents a D .

Siuguin $v_1, v_2 \in Z$ dos vèrtexs adjacents a D que són consecutius (amb la propietat de ser adjacents a D) en el cicle, és a dir, tals que v_1, v_2, D pertanyen a la mateixa cara d'un dibuix planar de G (pel lema 35 sabem que G és planar). Sigui $P = \overline{v_1 v_2}$ el camí del cicle exterior més curt entre v_1 i v_2 . Suposem que $M_1 = \Gamma(Dv_1)$ i $M_2 = \Gamma(Dv_2)$.

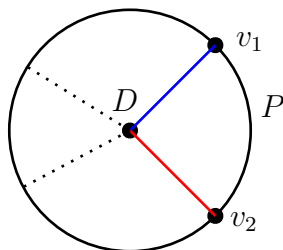


Figura 55: Representem M_1 en blau i M_2 en vermell a partir d'ara i fins el final de la demostració.

Afirmació 7.15. $\text{Long}(P) = 2$ en què P és el camí entre v_1 i v_2 més curt contingut en el cicle Z .

Demostració:

Si $P = (v_1, u_1, \dots, u_r, v_2)$, anomenem $e = \overline{v_1 u_1}$ (figura 56 esquerra). e no pot ser de color M_1 ja que tindríem dues arestes adjacents del mateix color.

Si $\Gamma(e) = M_i$ per $3 \leq i \leq n$ aleshores $d_G(v_i, u_1) = d_G(D, v_1) = 1$ i hem de tenir l'aresta $\overline{v_i u_1}$ (figura 56 mig). Llavors sorgeix una subdivisió de K_4 formada pels vèrtexs v_2, v_i, v_j, D , en què usem fortament que $n \geq 4$ per garantir l'existència d'un v_j diferent de v_1, v_2, v_i . Aquesta nova subdivisió conté menys que H vèrtexs ja que no conté a v_1 , tal com ho mostra la figura 56 (dreta). Això contradia el fet que H sigui una subdivisió de K_4 amb el mínim nombre de vèrtexs.

Per tant l'únic possible color per a e és $M_2 = \Gamma(e)$. Fent el mateix raonament obtenim que el color de l'aresta $\overline{u_r v_2}$ ha de ser M_1 (figura 57 esquerra).

Però ara tenim que el camí $\{u_1, v_1, D, v_2\}$ és un camí de longitud 3 que repeteix el color M_2 . Llavors no és un camí curt entre u_1 i v_2 i per tant un camí curt entre v_1 i v_2 ha de ser de longitud 1, és a dir, tenim l'aresta $\overline{u_1 v_2} \in E(G)$ (figura 57 mig). Això implica que $u_r = u_1$ i que $P = (v_1, u_1, v_2)$ (figura 57 dreta). \square

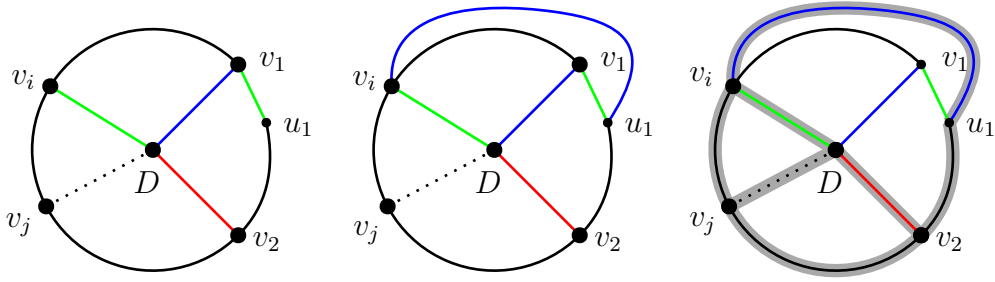


Figura 56: Representem M_i de color verd. Els tres passos del raonament fins a arribar a una contradicció amb el fet que H és minimal.

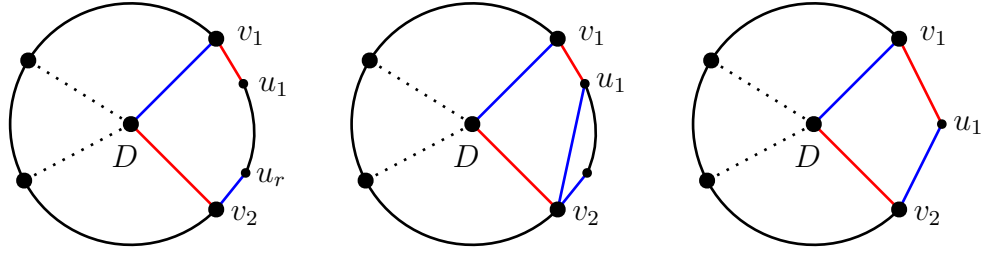


Figura 57: Els tres passos del raonament fins a obtenir que $P = (v_1, u_1, v_2)$

Llavors deduïm que el cicle Z està format per $Z = (v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n, v_1)$ en què els vèrtexs v_i són adjacents a D i els vèrtexs u_i no.

Amb tot el que tenim fins ara ja podem deduir que $G_n \subseteq G$. Només queda veure que no hi ha cap camí entre vèrtexs del cicle exterior. A partir d'ara farem servir que $G_n = H \cup \{\overline{Dv_i}, 1 \leq i \leq n\}$. Recordem que per l'afirmació 7.7 sabem que no pot existir cap aresta entre dos vèrtexs no consecutius del cicle exterior Z . Per tant en tenim prou amb veure que no hi ha cap més vèrtex en G dels que ja tenim en G_n .

Afirmació 7.16. $V(G) = V(G_n)$.

Demostració:

Suposem el contrari, que $V(G) \setminus V(G_n) \neq \emptyset$. Com que tot partial cube és connex, existeix $w \in V(G) \setminus V(G_n)$ tal que w és adjacent a algun vèrtex $v \in V(G_n)$. De fet, $v \in Z$ ja que $Deg(D) = n$ i per tant el vèrtex D no pot ser adjacent a cap més vèrtex. Recordem que $Z = (v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n, v_1)$. Aleshores tenim dos casos:

- (i) $v = v_i \in Z$ per algun $1 \leq i \leq n$.
- (ii) $v = u_i \in Z$ per algun $1 \leq i \leq n$.

(i): Podem suposar sense perdre generalitat que $v = v_1$. Suposem que $M = \Gamma(\overline{v_1 w})$. Observem que $M \neq M_1, M_2, M_n$ ja que no podem tenir dues arestes adjacents del mateix color. Com que $n \geq 4$, podem suposar que $M = M_i$ per $3 \leq i \leq n-1$ (si $n = 4$ llavors l'única opció és $i = 3$). Llavors per completar el quadrat $\{w, v_1, D, v_i\}$ necessitem $\overline{wv_i} \in E(G)$ (figura 58 esquerra). Però llavors observem que si contraïem l'aresta $e = \overline{Dv_2}$ (que ja hem vist que és una aresta destructora), tenim que el graf $G/\{e\}$ ha de ser outerplanar. Però $G/\{e\}$ conté una subdivisió de K_4 agafant com a vèrtexs originals a v_1, v_i, v_n, D tal com mostra la figura 58 (dreta). Hem arribat a una contradicció.

(ii): Podem suposar sense perdre generalitat que $v = u_1$. Suposem que $M = \Gamma(\overline{u_1 w})$.

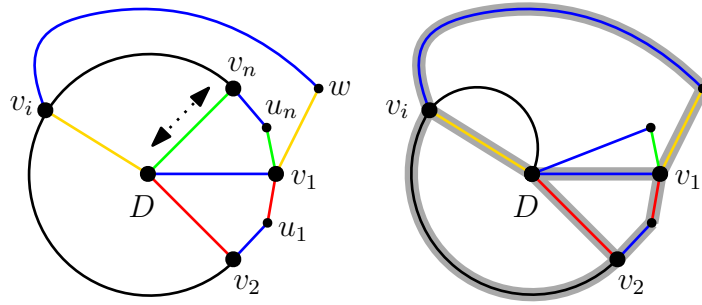


Figura 58: Cas (i). Representem M_n de color verd i M_i de color groc.

Observem que $M \neq M_1, M_2$ ja que no podem tenir dues arestes adjacents del mateix color. Posem $M = M_i$ per $3 \leq i \leq n$. Distingim de nou entre dos casos:

(a) $i = 3$ o n .

(b) $3 < i < n$

(a): Per simetria podem suposar que $i = 3$. Aleshores s'ha de completar el quadrat $\{w, u_1, v_2, u_2\}$ i tenim que $\overline{wu_2} \in E(G)$. Però llavors observem que si contraïem l'aresta $e = \overline{Du_2}$ (que ja hem vist que és una aresta destructora), tenim que el graf $G/\{e\}$ ha de ser outerplanar. Però $G/\{e\}$ conté una subdivisió de K_4 agafant com a vèrtexs originals a v_1, v_3, v_n, D (recordem que $n > 3$) tal com mostra la figura 59. Hem arribat a una contradicció.

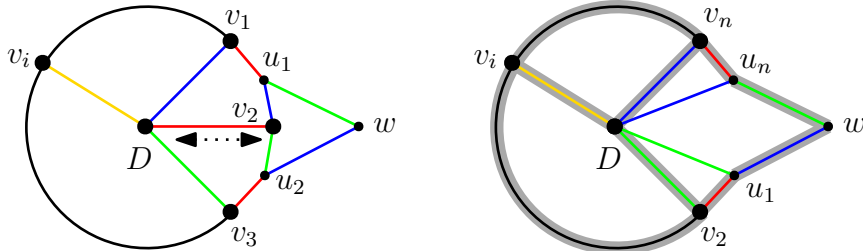


Figura 59: Cas (ii)(a). Representem M_3 de color verd i M_i de color groc.

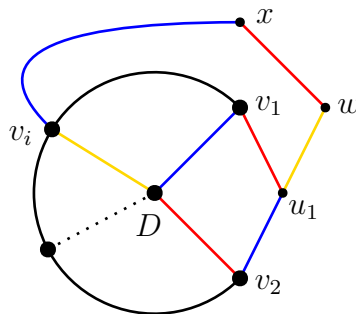


Figura 60: Cas (ii)(b). L'aresta $\overline{v_i x}$ satisfà les condicions del cas (i).

(b): Com que ara v_i no és consecutiu a v_1 ni v_2 en el cicle Z , tenim que v_i no és adjacent a cap aresta de color M_1 o M_2 del cicle Z . Ara, el camí $\{w, u_1, v_1, D, v_i\}$ és un camí de longitud 4 que repeteix el color M_i . Aleshores un camí curt entre w i v_i ha de ser

de longitud 2 i ha de contenir els colors M_1 i M_2 . Aleshores v_i té una aresta $e = \{v_i x\}$ incident de color M_1 o M_2 . Llavors, com hem vist, $e \notin E(G_n)$ i per tant $x \in V(G) \setminus V(G_n)$. Aleshores tenim una aresta com la del cas (i) (veure figura 60), que ja hem vist que ens condueix a una contradicció.

Tots els possibles casos ens han portat a una contradicció. Aleshores no pot existir cap aresta \overline{vw} amb $v \in Z$ i $w \in V(G) \setminus V(G_n)$. Com que G és connex, obtenim que $V(G) \setminus V(G_n) = \emptyset$, és a dir, $V(G) = V(G_n)$. \square

Aleshores tenim que $G_n \subseteq G$ i $V(G_n) = V(G)$. Finalment podem concloure que $G = G_n$. Donem per finalitzat el tercer cas.

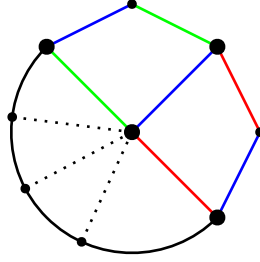


Figura 61: El tercer cas implica que $G = G_n$, per $n \geq 4$.

Conclusió final.

Tenim que $G \in \Omega$ és un partial cube no outerplanar minimal per PC-menors. Hem separat en tres casos:

- Si G té tres colors aleshores $G = Q_3$ o $G = G_3$.
- Si G té més de tres colors i conté una subdivisió de $K_{2,3}$ però no de K_4 aleshores $G = L$.
- Si G té més de tres colors i conté una subdivisió de K_4 aleshores $G = G_n$, $n \geq 4$.

Llavors ja podem assegurar que $\Omega \subseteq \{L, Q_3, G_n, n \geq 3\}$ i junt amb el lema 5.1 obtenim que $\Omega = \{L, Q_3, G_n, n \geq 3\}$. \square

Donem per finalitzada la caracterització de les obstruccions PC-menors de la classe dels partial cubes outerplanars.

8 Altres línies d'investigació

La classe dels grafs outerplanars és una classe relativament senzilla d'estudiar ja que les seves obstruccions són només K_4 i $K_{2,3}$ i aquests són grafs molt simples. Algunes classes tancades per menors més extenses i més complicades d'estudiar són les classes dels grafs k -outerplanars. Un graf és k -outerplanar si es pot dibuixar en el pla sense encreuaments de manera que si eliminem $k - 1$ vegades la cara exterior ens queda un graf outerplanar. Un graf 1-outerplanar és un graf outerplanar. Malauradament, per $k \geq 2$ no es coneix el conjunt de les seves obstruccions encara que sabem que és un conjunt finit pel teorema de Robertson i Seymour [9]. El problema és que aquest teorema no és constructivista i per tant no dóna cap manera de trobar quin és el conjunt de les obstruccions.

Dins de la classe dels grafs 2-outerplanars hi ha una subclasse més senzilla que són els grafs apex-outerplanars. Un graf és apex-outerplanar si es pot dibuixar en el pla sense encreuaments de manera que si eliminem un vèrtex el graf que queda és outerplanar. La classe dels grafs apex-outerplanars és també tancada per menors i el conjunt d'obstruccions el van determinar Ding i Dziobiak [5]. Resulta que és un conjunt format per 57 grafs.

Les següents línies d'investigació d'aquest treball podrien ser estudiar les classes de partial cubes k -outerplanars i apex-outerplanars i determinar el conjunt d'obstruccions per PC-menors. Per exemple, el 'grid graph' $(k + 1) \times (k + 1)$ és una obstrucció dels grafs k -outerplanars. Aquests conjunts d'obstruccions són infinits i se'n coneixen alguns elements, però ningú ha estat capaç de determinar-los sencers.

En definitiva, la teoria de menors de la teoria de grafs és ben extensa i hi ha molts problemes sense resoldre dels quals encara queden moltes coses per conèixer.

Referències

- [1] Marie Albenque and Kolja Knauer. Convexity in partial cubes: the hull number. *Discrete Math.*, 339(2):866–876, 2016.
- [2] G. Chartrand and Frank Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Nouv. Sér., Sect. B*, 3:433–438, 1967.
- [3] Victor Chepoi, Kolja Knauer, and Tilen Marc. Hypercellular graphs: partial cubes without Q_3^- as partial cube minor. *Discrete Math.*, 343(4):28, 2020. Id/No 111678.
- [4] Rémi Desgranges and Kolja Knauer. A correction of a characterization of planar partial cubes. *Discrete Math.*, 340(6):1151–1153, 2017.
- [5] Guoli Ding and Stan Dziobiak. Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs Comb.*, 32(2):583–627, 2016.
- [6] David Eppstein. Isometric diamond subgraphs. In *Graph drawing. 16th international symposium, GD 2008, Heraklion, Crete, Greece, September 21–24, 2008. Revised papers*, pages 384–389. Berlin: Springer, 2009.
- [7] R. L. Graham and H. O. Pollak. On the addressing problem for loop switching. *Bell Syst. Tech. J.*, 50:2495–2519, 1971.
- [8] C. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundam. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [9] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX: Wagner’s conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.
- [10] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. New Delhi: Prentice-Hall of India, 2nd ed. edition, 2005.