



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El teorema d'Erdős-Turán

Autor: Ana Sánchez Garcés

Director: Dr. Jordi Marzo
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

“L’essència de les matemàtiques no és fer les coses simples complicades, sinó fer les coses complicades simples.”

Stanley Gudder

Abstract

A classical result of Erdős and Turán states that if a monic polynomial has small size on the unit circle and its constant coefficient is not too small, then its zeros cluster near the unit circle and become equidistributed in angle.

The theorem of Erdős and Turán are then two results: that the zeros of a polynomial lie close to the unit circle and that the angles of the zeros are well distributed.

The first result (Theorem 1 p.4) is a simple consequence of Jensen's formula. The second (Theorem 2 p.5), which is the main result of the paper, we will prove by seeing that the discrepancy of the angles of the zeros of a polynomial is bounded by a measure of the size of the polynomial at the circle. To prove these results we will follow the article by K. Soundararajan [14].

Resum

Un resultat clàssic d'Erdős i Turán afirma que si un polinomi mònic té una mida petita al cercle unitari i el seu coeficient independent no és massa petit, aleshores els seus zeros s'agrupen prop del cercle unitari i es tornen equidistribuïts en angle.

El teorema d'Erdős i Turán són doncs dos resultats: que els zeros d'un polinomi es troben propers al cercle unitari i que els angles dels zeros estan ben distribuïts.

El primer resultat (Teorema 1 p.4) és una conseqüència senzilla de la fórmula de Jensen. El segon (Teorema 2 p.5), que és el resultat principal del treball, el demostrarem veient que la discrepància dels angles dels zeros d'un polinomi està afitada per una mesura del tamany del polinomi al cercle. Per a demostrar aquests resultats seguirem l'article de K. Soundararajan [14].

Agraïments

Vull agrair especialment al Dr. Jordi Marzo, el tutor d'aquest treball, per la dedicació i l'ajuda que m'ha proporcionat durant el desenvolupament del treball. També vull agrair a la meva família i als meus amics la seva confiança i el seu suport incondicional durant la meva etapa en el Grau de Matemàtiques ja que han estat essencials per a poder superar aquest repte.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Caracterització de $P(z)$	1
1.2	Magnitud dels zeros	4
1.3	Equidistribució dels angles	4
1.4	Història i millors constants	5
2	Sèries de Fourier	8
2.1	Funcions al cercle	8
2.2	Les sèries de Fourier	9
2.2.1	Sèrie de Fourier en termes de sinus i cosinus	10
2.3	Convergència i unicitat de les sèries de Fourier	14
2.4	Convolució	17
3	Demostració del teorema d'Erdős-Turán	22
3.1	La fórmula de Jensen i la demostració del Teorema 1	23
3.2	Observació de Schur	27
3.3	Sumes suavitzades sobre zeros	28
3.4	Demostració del Teorema 2	35
4	Conclusions	39

1 Introducció

Qualsevol conjunt de N nombres complexos es pot representar com el conjunt de zeros d'un polinomi de grau N . Però, si pensem en un polinomi que sorgeix de “manera natural” com, per exemple, un polinomi amb coeficients ± 1 , aleshores els zeros tendiran a estar distribuïts uniformement prop del cercle unitari. Per justificar aquest fenomen, Erdős i Turán van demostrar en [5] que si la mida d'un polinomi mònic al cercle unitari és petita i el seu terme constant no és massa petit, aleshores els zeros s'agrupen al voltant del cercle unitari i s'equidistribueixen en angle. Al llarg d'aquest treball concretarem tant la hipòtesi com la conclusió d'aquest resultat. Començem però, observant a la Figura 1 un exemple d'aquesta afirmació.

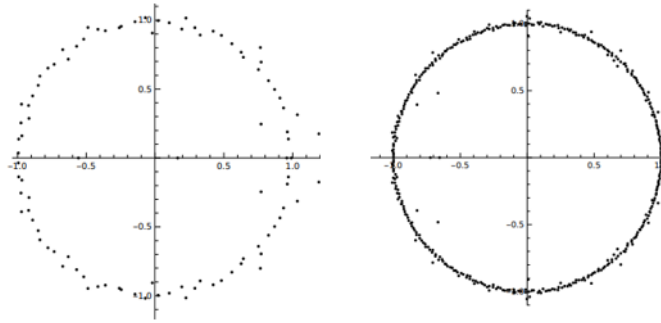


Figura 1: Esquerra: Zeros d'un polinomi de grau 100 amb coeficients $\{-1, 0, 1\}$. Dreta: Zeros d'un polinomi de grau 400 amb coeficients compresos entre -1 i 1.

1.1 Caracterització de $P(z)$

Sigui

$$P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j) = z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \dots + a_0$$

un polinomi mònic de grau N tal que les seves arrels són de la forma $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$. Per entendre les hipòtesis inicials del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis pot ser útil veure primer un parell d'exemples on les arrels no estan equidistribuïdes en angle.

Exemple 1.1. Considerem el polinomi mònic

$$P(z) = (z - 1)^N = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{N}{j} z^j.$$

Clarament, totes les arrels es concentren en el punt $z = 1$ i, per tant, els zeros del polinomi no es distribueixen uniformement al cercle unitari. D'altra banda, observem que aquest polinomi mònic té coeficients grans i assoleix una mida màxima de 2^N al cercle unitari.

Exemple 1.2. Considerem ara el polinomi mònic

$$P(z) = z^N - \frac{1}{2^N}.$$

En aquest cas observem que el coeficient a_0 va disminuint a mesura que N augmenta. D'altra banda, veiem que totes les arrels es concentren en el cercle de radi $\frac{1}{2}$.

Exemple 1.3. Finalment, considerem el polinomi

$$P(z) = z^N.$$

Clarament la mida de $P(z)$ al cercle unitari és petita però tots els zeros es concentren en el punt $z = 0$ i, per tant, no es compleix l'equidistribució dels angles de les arrels. Cal destacar també que el coeficient constant val 0.

Per tant, aquests tres exemples ens fan pensar que per a que els zeros d'un polinomi mònic estiguin equidistribuïts en angle caldria suposar que la mida de $P(z)$ al cercle unitari és petita mentre que el coeficient a_0 no ha de ser massa petit. Suposem doncs que $a_0 \neq 0$, de manera que totes les arrels del polinomi $P(z)$ són diferents de zero. D'altra banda, una manera de mesurar la mida de $P(z)$ al cercle és

$$H(P) = \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}}.$$

Donat que $P(z)$ és un polinomi mònic, a partir de la desigualtat triangular deduïm que

$$H(P) \leq \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{j=0}^N |a_j|.$$

Ara,

$$H(P) \leq \frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{j=0}^N |a_j| \Rightarrow H(P)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{|a_0|}} \sum_{j=0}^N |a_j| \right)^2.$$

Però, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz es compleix que

$$\sum_{j=0}^N |a_j| \cdot 1 \leq \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^N 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (N+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Per tant,

$$H(P)^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2. \quad (1.1)$$

D'altra banda,

$$H(P)^2 = \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|^2}{|a_0|} \geq \frac{1}{|a_0|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2 \quad (1.2)$$

ja que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\max_{\eta \in [0, 2\pi)} |P(e^{i\eta})|^2 \right] d\theta = \max_{\eta \in [0, 2\pi)} |P(e^{i\eta})|^2 = \max_{|z|=1} |P(z)|^2,$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^N |a_j e^{i\theta j}|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^N a_j e^{i\theta j} \right) \left(\sum_{l=0}^N \overline{a_l e^{i\theta l}} \right) d\theta \\ &= \sum_{j=0, l=0}^N \int_0^{2\pi} a_j e^{i\theta j} \overline{a_l} e^{-i\theta l} d\theta = \sum_{j=0, l=0}^N a_j \overline{a_l} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = 2\pi \sum_{j=0}^N |a_j|^2, \end{aligned}$$

on en la última igualtat hem fet ús de

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(j-l)} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ 2\pi & \text{si } j = l \end{cases}.$$

Unint els dos resultats (1.1) i (1.2) obtenim

$$\frac{1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2 \leq H(P)^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{j=0}^N |a_j|^2. \quad (1.3)$$

En conclusió, suposar que $H(P)$ és petit és equivalent a imposar que els coeficients de $P(z)$ són petits mentre que a_0 no és massa petit. Tot i que Erdős i Turán van utilitzar aquesta quantitat, donat que nosaltres seguim l'article [14], utilitzarem la següent mesura

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta$$

on $\log^+ x = \max(0, \log x)$. De (1.3) obtenim que

$$H^2(P) \geq \frac{|a_0|^2 + |a_N|^2}{|a_0|} = \frac{|a_0|^2 + 1}{|a_0|} \geq 1$$

i, per tant, $H(P) \geq 1$. Com a conseqüència d'aquest fet es dedueix fàcilment que

$$h(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \leq \log \max_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} = \log H(P).$$

D'aquesta desigualtat deduïm que

- si $H(P)$ és petit, aleshores $\log H(P)$ és petit i, en conseqüència, $h(P)$ també és petit.
- si $h(P)$ és petit, com $h(P) \leq \log H(P)$, no implica que $H(P)$ sigui petit.

Per tant, com a conclusió deduïm que la suposició que $h(P)$ és petit és més feble que la suposició que $H(P)$ és petit.

Passem ara a enunciar el teorema d'Erdős-Turán. Ho dividirem en dues etapes: primerament discutirem la magnitud dels zeros i després definirem el concepte de discrepància per tal de calcular el pitjor dels casos de desviació dels angles.

Enunciem doncs la primera part del teorema d'Erdős-Turán que ens mesura com de propers estan els zeros al cercle unitari.

1.2 Magnitud dels zeros

Per tractar la magnitud dels zeros de $P(z)$ definim

$$\mathcal{M}(P) = \prod_{j=1}^N \max\left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j}\right)$$

on $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ són els zeros de $P(z)$. Com a conseqüència de la fórmula de Jensen demostrarem la següent cota superior.

Teorema 1. (Erdős-Turán) *Amb les notacions anteriors, es compleix*

$$\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)}.$$

Observem les conseqüències de provar aquest teorema. Sigui $\epsilon > 0$ prou petit. Veiem que si $\mathcal{M}(P) \leq e^{\epsilon^2 N}$ aleshores hi ha com a molt ϵN zeros (és a dir, pocs) fora de la banda $e^{-\epsilon} \leq |z| \leq e^\epsilon$. En efecte, si $\rho_j e^{i\theta_j}$ està fora, aleshores $\max\left(\rho_j, \frac{1}{\rho_j}\right) \geq e^\epsilon$ i, en conseqüència,

$$e^{\epsilon^2 N} \geq \mathcal{M}(P) \geq \prod_{\text{zeros fora}} e^\epsilon = e^{\#(\text{zeros fora}) \cdot \epsilon}.$$

Per tant, és necessari que $\#(\text{zeros fora de la banda}) \leq \epsilon N$.

Per tant, amb la demostració del Teorema 1 provarem la primera part del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis que diu que la majoria de zeros de $P(z)$ es troben dins d'una banda estreta al voltant del cercle unitari.

1.3 Equidistribució dels angles

La part més difícil del teorema d'Erdős-Turán és demostrar l'equidistribució dels angles. Per fer-ho, introduïrem els conceptes d'equidistribució i discrepància i els relacionarem amb els zeros d'un arc I al cercle unitari.

Definició 1.4. *Una successió $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en $[0, 1)$ és equidistribuïda si per tots els intervals $I \subseteq [0, 1)$,*

$$\frac{1}{n} \#\{j \in \{1, \dots, n\} : x_j \in I\} \rightarrow |I| \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

És a dir, una successió és equidistribuïda si la proporció de punts d'aquesta en un interval és cada cop més propera a la mesura de l'interval.

Sigui I un arc del cercle unitari i sigui $N(I; P)$ el nombre de zeros $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ tal que $e^{i\theta_j} \in I$. Si els angles θ_j estan equidistribuïts, aleshores es compleix que

$$N(I; P) \approx \frac{N}{2\pi} |I|$$

on N és el nombre total de zeros i $|I| = \text{long}(I)$. Per tant, una mesura convenient de la distribució dels angles és la discrepància que ve donada per l'expressió

$$D(P) = \max_I \left| N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \right|.$$

És a dir, la discrepància considera el pitjor cas possible entre la proporció de punts i la longitud de l'interval.

El següent resultat dóna una cota superior de la discrepància a partir del grau i la mida del polinomi $P(z)$.

Teorema 2. (Erdős-Turán) *Amb les notacions anteriors,*

$$D(P) \leq C \sqrt{Nh(P)}$$

on C és una constant.

Per tant, els teoremes 1 i 2 en el seu conjunt demostren que si $h(P)$ és petit en comparació amb N , aleshores els zeros de $P(z)$ s'agrupen al voltant del cercle unitari i s'equidistribueixen en angle. L'objectiu d'aquest treball és donar les bases necessàries per tal de poder provar aquests resultats i, en conseqüència, demostrar el teorema d'equidistribució de zeros de polinomis.

1.4 Història i millors constants

Acabem la introducció amb alguns comentaris sobre la millor constant pel teorema d'Erdős-Turán. En l'estudi original d'Erdős i Turán [5] de 1950 es va demostrar que

$$D(P) \leq C' \sqrt{N \log H(P)} \tag{1.4}$$

on $C' = 16$. Recordem que anteriorment hem vist que (1.4) és menys fina que la desigualtat del Teorema 2. Més endavant, al 1954, Ganelius [6] va establir (1.4) per $C' = \sqrt{\frac{2\pi}{G}} = 2.5619\dots$ on

$$G = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 0.9159\dots$$

denota la constant de Catalan. Mignotte [8] va millorar el resultat de Ganelius establint la desigualtat

$$D(P) \leq C \sqrt{Nh(P)} \tag{1.5}$$

amb la mateixa constant $C = \sqrt{\frac{2\pi}{G}} = 2.5619\dots$ en 1992 i, 4 anys després, Amoroso i Mignotte [1] van demostrar a través d'exemples que la constant C' havia de ser almenys $\sqrt{2}$. Al 2019 Soundararajan [14] va millorar aquest resultat establint (1.5) amb la constant

$$C = \frac{8}{\pi} = 2.5464\dots$$

Dos anys més tard, al juliol de 2021, Carneiro, Kumar, Florea, Kumchev, Malik, Milinovich, Turnage-Butterbaugh i Wang [3] van demostrar que

$$C = \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 2.2567\dots$$

també satisfà (1.5). A més a més, van provar la millor cota inferior per a $C \geq 1.75936\dots$ amb un exemple que veurem en el capítol 3. Finalment, aquest mateix octubre de 2021 Shu i Wang [12] han demostrat que (1.4) es compleix per $C' = \sqrt{2}$. Així doncs, utilitzant aquest resultat conjuntament amb el d'Amoroso i Mignotte [1] van establir que

$$D(P) \leq \sqrt{2N \log H(P)}$$

i que aquesta desigualtat no es pot millorar.

En aquest projecte demostrarem el teorema d'Erdős-Turán basant-nos en l'estudi de K. Soundararajan i, per tant, provarem que

$$D(P) \leq C\sqrt{Nh(P)} \quad \text{per } C = \frac{8}{\pi}.$$

Estructura de la Memòria

Per tal d'assolir els objectius esmentats, la memòria està redactada com segueix.

En la primera secció es donen els conceptes més rellevants de les sèries de Fourier així com les propietats més importants relacionades amb la unicitat i la convergència d'aquestes. Seguidament, es presenta el concepte de convolució i algunes de les seves propietats. Per tal de dur a terme aquesta part m'he basat en el capítol 2 de la referència [15].

En la segona secció s'analitzen un conjunt d'eines i resultats que seran indispensables per a la demostració dels teoremes 1 i 2 enunciats anteriorment. Algunes d'aquestes són la fórmula de Jensen, l'observació de Schur o les sumes suavitzades. Finalment, es conclou la demostració del teorema d'Erdős-Turán amb la prova dels teoremes 1 i 2. Per a l'anàlisi de la fórmula de Jensen he consultat [10] i [11] mentre que per guiar-me en la demostració dels teoremes he utilitzat [3] i [14].

Finalment, en la tercera secció s'exposen les conclusions del treball.

2 Sèries de Fourier

Abans d'endinsar-nos en el teorema d'Erdős-Turán farem un estudi sobre els conceptes i resultats més rellevants de les sèries de Fourier que ens ajudaran després amb la demostració del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis. La importància d'aquestes en el nostre treball es degut a que mitjançant les sèries de Fourier podem expressar una funció periòdica com la suma d'ones elementals. Començarem amb un estudi bàsic sobre les funcions al cercle i la seva relació amb les funcions 2π -periòdiques. A continuació, definirem els coeficients i les sèries de Fourier, en veurem alguns exemples i demostrarem dos resultats importants relacionats amb la convergència i la unicitat d'aquestes. Finalment, introduïrem el concepte de convolució i algunes de les seves propietats. Cal remarcar que al llarg de tot el capítol suposarem que totes les funcions que utilitzem són integrables Riemann (direm integrables) ja que no necessitem més per demostrar el teorema d'Erdős-Turán. En tota aquesta secció seguirem el capítol 2 de la referència [15].

2.1 Funcions al cercle

Per tal de poder demostrar la distribució uniforme dels angles de les arrels és convenient treballar amb funcions definides al cercle. En aquest apartat veurem com relacionar funcions periòdiques de període 2π en \mathbb{R} i funcions definides al cercle. A més a més, demostrarem que el resultat d'integrar una funció 2π -periòdica f és independent de l'interval de longitud 2π escollit.

Un punt en el cercle unitari és de la forma $e^{i\theta}$ per a un únic $\theta \in [0, 2\pi)$. Sigui F una funció sobre el cercle unitari, aleshores per tot nombre real θ podem definir la funció

$$f(\theta) = F(e^{i\theta}).$$

Observem que f és una funció periòdica de període 2π , és a dir, $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ per a tot $\theta \in \mathbb{R}$. Com a conseqüència d'aquest fet podem restringir f a qualsevol interval de longitud 2π com, per exemple, $[0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$ i, tot i així, f continuarà relacionada amb la funció F definida inicialment. Observem que f així definida pren el mateix valor en ambdós extrems de l'interval ja que aquests corresponen al mateix punt del cercle, és a dir, $f(0) = f(2\pi)$ o $f(-\pi) = f(\pi)$. Inversament, si f és una funció 2π -periòdica podem definir una funció al cercle amb $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ per a $\theta \in [0, 2\pi)$. Per tant, les funcions 2π -periòdiques en \mathbb{R} i les funcions al cercle són la mateixa classe de funcions.

Observació 2.1. En general, la integrabilitat, la continuïtat i la diferenciabilitat de la funció al cercle F està determinada per la funció 2π -periòdica f i viceversa.

Veïem ara un resultat bàsic però necessari pel desenvolupament del treball.

Proposició 2.2. *Sigui f una funció integrable 2π -periòdica i sigui $a \in \mathbb{R}$. Aleshores,*

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_a^{2\pi+a} f(x)dx.$$

Demostració. Sigui f una funció amb les característiques de l'enunciat i sigui a un nombre real. Aleshores, existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - 2\pi k \in [0, 2\pi)$. Fent el canvi de variable $t = x - 2\pi k$ i tenint en compte la periodicitat de f obtenim

$$\int_a^{2\pi+a} f(x)dx = \int_{a-2\pi k}^{2\pi+a-2\pi k} f(t+2\pi k)dt = \int_{a-2\pi k}^{2\pi+a-2\pi k} f(t)dt.$$

D'altra banda, podem separar la integral de manera que

$$\int_{a-2\pi k}^{2\pi+a-2\pi k} f(t)dt = \int_{a-2\pi k}^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{2\pi+a-2\pi k} f(t)dt.$$

Ara, fent el canvi de variable $s = t - 2\pi$ en la segona integral obtenim

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a-2\pi k} f(t)dt = \int_0^{a-2\pi k} f(s+2\pi)ds = \int_0^{a-2\pi k} f(s)ds.$$

Finalment, fent els canvis de variable $t = x$ i $s = x$ deduïm que

$$\int_a^{2\pi+a} f(x)dx = \int_{a-2\pi k}^{2\pi} f(x)dx + \int_0^{a-2\pi k} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

□

Donat que a és un nombre real qualsevol, aquesta proposició demostra que el resultat de la integral d'una funció 2π -periòdica f és independent de l'interval de longitud 2π escollit.

2.2 Les sèries de Fourier

Un cop tenim clara la connexió entre les funcions 2π -periòdiques i les funcions al cercle podem definir els diferents conceptes que descriuen les sèries de Fourier: coeficient d'ordre n , sèrie i suma parcial de Fourier. A més a més, descriurem les sèries de Fourier en termes de sinus i cosinus i les relacionarem amb les sèries trigonomètriques. Finalment, veurem un parell d'exemples que utilitzarem en la demostració del teorema d'Erdős-Turán.

Definició 2.3. Sigui f una funció integrable a l'interval $[-\pi, \pi]$. Definim el coeficient de Fourier de f d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ com

$$\widehat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

i la sèrie de Fourier de f com la suma formal

$$Sf(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$$

on $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Observació 2.4. Al tractar amb funcions 2π -periòdiques, com hem vist en la Proposició 2.2, podem considerar funcions $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables i calcular $\widehat{f}(n)$ com

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

També podem calcular els coeficients i les sèries de Fourier d'una funció F definida al cercle. Arrel de l'apartat anterior deduïm que és suficient considerar F com una funció 2π -periòdica en \mathbb{R} restringida a qualsevol interval de longitud 2π i calcular els seus coeficients de Fourier.

Abans de continuar amb la noció de sumes parcials observem que les sèries de Fourier formen part de la família de les sèries trigonomètriques.

Definició 2.5. *Si $L > 0$ la longitud d'un interval $[a, b]$. Les sèries trigonomètriques són expressions de la forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{x}{L}}$$

on $c_n \in \mathbb{C}$. Si una sèrie trigonomètrica té un nombre finit de $c_n \neq 0$, és a dir, $c_n = 0$ per tot $|n| > m$ on $m \in \mathbb{N}$, aleshores aquesta s'anomena polinomi trigonomètric de grau m .

Definició 2.6. *Les sumes parcials de la sèrie de Fourier de f són un exemple de polinomis trigonomètrics i es defineixen com*

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Observem que aquesta suma es pot descomposar com la suma de sèries de Fourier de sinus i cosinus.

2.2.1 Sèrie de Fourier en termes de sinus i cosinus

Com a conseqüència de la fórmula d'Euler deduïm que la sèrie de Fourier d'una funció integrable f en termes de sinus i cosinus queda com la suma parcial

$$Sf(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$$

on

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad i \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Observació 2.7. Aquesta expressió es simplifica quan la funció f és parella o senar. Veiem-ho:

- Si f és parella.

En aquest cas $b_n = 0$, i per tant la sèrie de Fourier és de la forma

$$Sf(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

on

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

- Si f és senar.

En aquest cas $a_n = 0$, i per tant la sèrie de Fourier és de la forma

$$Sf(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$$

on

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Per finalitzar aquest apartat observem com calcular els coeficients i les sèries de Fourier de dos exemples diferents que seran útils més endavant.

Exemple 2.8. Veiem que la sèrie de Fourier de $|\sin(x)|$ ve donada per

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2 - 1}.$$

Observem que amb la igualtat anterior no diem res sobre la convergència de la sèrie. D'altra banda, la funció $f(x) = |\sin(x)|$ és una funció parella. Per tant, la sèrie de Fourier de $f(x)$ és de la forma

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Definim $n = 2l$. Aleshores,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(x)| \cos(0) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

D'altra banda, utilitzant la fórmula trigonomètrica

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(y-x)]$$

obtenim que

$$a_{2l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(2lx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x(2l+1)) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x(2l-1)) dx.$$

Fent el canvi de variable $u = x(2l + 1)$ obtenim que la primera integral val

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x(2l + 1)) dx = \frac{1}{\pi(2l + 1)} \int_0^{\pi(2l+1)} \sin(u) du = \frac{2}{\pi(2l + 1)}.$$

Anàlogament, fent el canvi de variable $u = x(2l - 1)$ obtenim que la segona integral val

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x(2l - 1)) dx = \frac{1}{\pi(2l - 1)} \int_0^{\pi(2l-1)} \sin(u) du = \frac{2}{\pi(2l - 1)}.$$

Restant les integrals obtenim que

$$a_{2l} = \frac{2}{\pi(2l + 1)} - \frac{2}{\pi(2l - 1)} = \frac{-4}{\pi(4l^2 - 1)}.$$

Finalment, deduïm que

$$|\sin(x)| = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l} \cos(2lx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2 - 1}.$$

Exemple 2.9. Veiem ara que els coeficients de Fourier de la funció 2π -periòdica

$$K_\delta(\theta) = \frac{2\pi}{\delta^2} \max(\delta - |\theta|, 0)$$

on $\theta \in (-\pi, \pi]$ valen

$$\widehat{K}_\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \left(\frac{\sin(\frac{k\delta}{2})}{\frac{k\delta}{2}}\right)^2 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

Observem primer com és la gràfica de la funció $K_\delta(\theta)$.

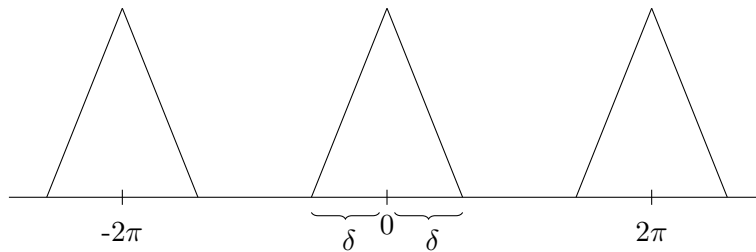


Figura 2: Funció $K_\delta(\theta)$.

Observem ràpidament el cas $k = 0$

$$\widehat{K}_\delta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) d\theta = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\delta} d\theta - \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\theta|}{\delta^2} d\theta = 1.$$

Veiem ara el cas $k \neq 0$. De la Figura 2 deduïm que els coeficients de Fourier es poden calcular com

$$\begin{aligned} \widehat{K}_\delta(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) [\cos(-k\theta) + i \sin(-k\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) \cos(-k\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) i \sin(-k\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Calculem ara les dues integrals de (2.1) per separat.

- Donat que el cosinus és una funció parella es compleix que $\cos(-k\theta) = \cos(k\theta)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) \cos(-k\theta) d\theta &= 2 \int_0^{\delta} \frac{\delta - \theta}{\delta^2} \cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} \cos(k\theta) d\theta - \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\delta} \theta \cos(k\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilitzant el canvi de variable $u = k\theta$ obtenim que la primera integral de (2.2) val

$$\frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{k\delta} \int_0^{k\delta} \cos(u) du = \frac{2 \sin(k\delta)}{k\delta}.$$

D'altra banda, fent integral per parts i el canvi de variable $u = k\theta$ obtenim que la segona integral val

$$\frac{2}{\delta^2} \int_0^{\delta} \theta \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{\delta^2} \left[\left[\frac{\theta \sin(k\theta)}{k} \right]_0^{\delta} - \int_0^{\delta} \frac{\sin(k\theta)}{k} d\theta \right] = \frac{2 \sin(k\delta)}{k\delta} + 2 \frac{\cos(k\delta) - 1}{k^2 \delta^2}.$$

Per tant, restant aquests dos resultats tenim

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) \cos(-k\theta) d\theta = 2 \frac{1 - \cos(k\delta)}{k^2 \delta^2}.$$

Utilitzant ara la fórmula trigonomètrica

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

obtenim

$$\sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(k\delta)}{2} \Rightarrow 2 \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right) = 1 - \cos(k\delta).$$

Per tant,

$$2 \frac{1 - \cos(k\delta)}{k^2 \delta^2} = \frac{4 \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{k^2 \delta^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{\frac{k^2 \delta^2}{4}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{\frac{k\delta}{2}}\right)^2.$$

- Donat que el sinus és una funció senar es compleix $\sin(k\theta) = -\sin(-k\theta)$. Com a conseqüència d'això i de la paritat del cosinus és fàcil provar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\pi}{\delta^2} (\delta - |\theta|) i \sin(-k\theta) d\theta = 0.$$

Per tant, queda demostrat que

$$\widehat{K}_\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \left(\frac{\sin\left(\frac{k\delta}{2}\right)}{\frac{k\delta}{2}}\right)^2 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

tal com volíem veure.

2.3 Convergència i unicitat de les sèries de Fourier

Un cop arribat a aquest punt caldria plantejar-se si la sèrie de Fourier d'una funció integrable f està unívocament determinada pels seus coeficients de Fourier i en quin sentit la sèrie de Fourier de f convergeix a la funció. Si la unicitat fós certa, aleshores tenir dues funcions f i g amb igual coeficients de Fourier implicaria que $f = g$. En altres paraules, implicaria que si $\widehat{f}(n) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$, aleshores $f = 0$. És fàcil veure que aquest resultat no és del tot correcte ja que les integrals de dues funcions qualsevol que difereixen en un nombre finit de punts poden coincidir i, per tant, aquestes funcions tindrien la mateixa sèrie de Fourier tot i ser diferents. En aquest apartat però, veurem un conjunt de resultats importants referents a la unicitat i a la convergència de les sèries de Fourier.

Teorema 2.10. *Sigui f una funció integrable al cercle tal que $\widehat{f}(n) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Si f és contínua en el punt θ_0 aleshores es compleix que $f(\theta_0) = 0$.*

Demostració. Suposem sense perdre generalitat que f és una funció amb valors reals definida en $[-\pi, \pi]$. Suposem també que $\theta_0 = 0$ i que $f(0) > 0$. La idea és construir una família de polinomis trigonomètrics $\{p_k\}$ amb un “pic” al 0 de manera que

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta) f(\theta) d\theta \rightarrow \infty \quad \text{quan } k \rightarrow \infty.$$

Veiem per què demostrar aquest darrer fet comportaria contradicció amb les hipòtesis inicials. Donat que p_k és un polinomi trigonomètric és de la forma

$$p_k(\theta) = \sum_{|j| \leq k} a_j e^{-ij\theta}.$$

Aplicant linealitat i la hipòtesi es compleix que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta) f(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|j| \leq k} a_j e^{-ij\theta} f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{|j| \leq k} a_j \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ij\theta} d\theta = 2\pi \sum_{|j| \leq k} a_j \widehat{f}(j) = 0. \end{aligned}$$

Per tant, arribariem a contradicció i, en conseqüència, quedaria demostrat que és necessari que $f(\theta_0) = f(0) = 0$ tal com diu el teorema.

Veiem ara com construir el polinomi p_k . Donat que f és contínua en el 0, podem triar $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ de manera que $f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$ si $|\theta| < \delta$. Definim

$$p(\theta) = \epsilon + \cos(\theta)$$

on $\epsilon > 0$ és prou petit per tal que $|p(\theta)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Ara triem $0 < \mu < \delta$ de manera que $p(\theta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$ per $|\theta| < \mu$. Finalment, definim

$$p_k(\theta) = [p(\theta)]^k$$

i triem B tal que $|f(\theta)| \leq B$ per a tot θ . Això es possible ja que f és integrable i, per tant, acotada. Veiem a la Figura 3 una idea de com és la família $\{p_k\}$.

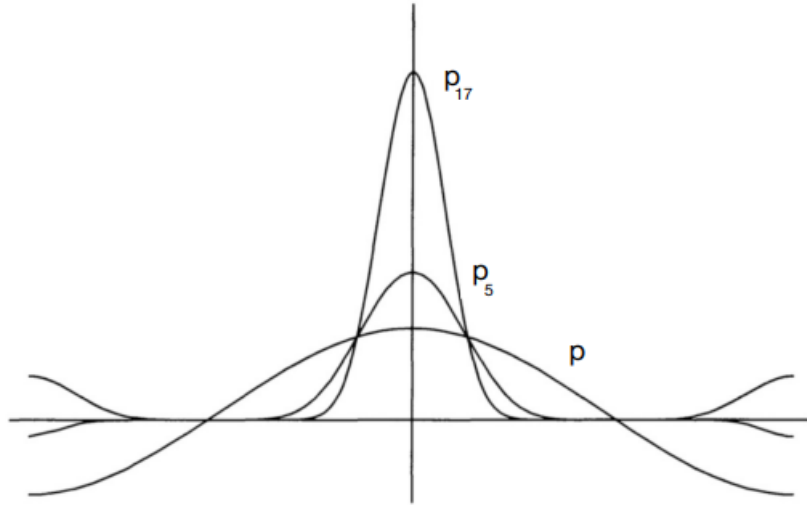


Figura 3: Funcions p, p_5 i p_{17} quan $\epsilon = 0.1$.

D'altra banda, observem que

$$\left| \int_{\delta \leq |\theta|} p_k(\theta) f(\theta) d\theta \right| \leq \int_{\delta \leq |\theta|} |p_k(\theta)| |f(\theta)| d\theta < 2\pi B \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^k \rightarrow 0$$

quan $k \rightarrow \infty$.

A més a més, com $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $p(\theta)$ i $f(\theta)$ són no negatius mentre $|\theta| < \delta$. Per tant,

$$\int_{\mu \leq |\theta| < \delta} p_k(\theta) f(\theta) d\theta \geq 0.$$

Finalment, tenim

$$\int_{|\theta| < \mu} p_k(\theta) f(\theta) d\theta \geq 2\mu \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k \rightarrow \infty \text{ quan } k \rightarrow \infty.$$

Per tant, amb aquestes tres darreres observacions deduïm que

$$\int p_k(\theta) f(\theta) d\theta \rightarrow \infty \text{ quan } k \rightarrow \infty$$

que porta a contradicció. □

Per demostrar el teorema quan f pren valors en el pla complex és suficient escriure $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$ on u i v són funcions reals i aplicar la demostració anterior.

El següent corol·lari és conseqüència del teorema que acabem de demostrar.

Corol·lari 2.11. *Si f és una funció contínua al cercle i $\hat{f}(n) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$, aleshores $f = 0$.*

Veiem ara un resultat que dóna les hipòtesis necessàries per tal que la sèrie de Fourier d'una funció f convergeixi uniformement a f .

Proposició 2.12. *Si f una funció contínua al cercle tal que la seva sèrie de Fourier és absolutament convergent, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$. Aleshores, la sèrie de Fourier convergeix uniformement a f , és a dir,*

$$f(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

uniformement en θ . Podem escriure aleshores que $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$.

Demostració. Donat que per hipòtesis $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$, pel criteri M. de Weierstrass deduïm que les sumes parcials $S_N f(\theta)$ convergeixen absolutament i uniformement. Sigui ara g la funció definida per

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Com que el límit d'una successió de funcions contínues que convergeixen uniformement és continu, podem afirmar que g és contínua al cercle. A més a més, per la convergència uniforme tenim que

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i\theta(n-k)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-k)} d\theta = \widehat{f}(k)\end{aligned}$$

on la última igualtat ve donada per

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-k)} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}.$$

Per tant, els coeficients de Fourier de la funció g són exactament els de f . Ara, com $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$, aplicant el corol·lari anterior a la funció $f - g$ obtenim que $f = g$ i, en conseqüència,

$$f(\theta) = g(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{in\theta}$$

tal com volíem veure. □

Observem que en els dos exemples analitzats a l'apartat anterior tenim convergència uniforme ja que ambdues funcions són contínues i és fàcil veure que les seves respectives sèries de Fourier són absolutament convergents.

2.4 Convolució

En aquest apartat veurem el concepte de convolució així com la seva relació amb les sèries de Fourier. A més a més, demostrarem dos resultats que seran fonamentals pel desenvolupament del projecte. El primer d'aquests afirma que la convolució de dues funcions integrables f i g és contínua, és a dir, demostra que la convolució de dues funcions és més regular que elles mateixes. El segon resultat destacable diu que el producte dels coeficients de Fourier de dues funcions f i g és igual als coeficients de Fourier de la convolució d'aquestes funcions. Aquest darrer fet és important ja que, en general, els coeficients de Fourier del producte fg no són el producte dels coeficients de f i g .

Definició 2.13. *Siguin f i g dues funcions integrables 2π -periòdiques sobre \mathbb{R} . Definim la convolució entre f i g en $[-\pi, \pi]$ com*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy.$$

És a dir, una convolució és un operador matemàtic que transforma dues funcions f i g en una tercera que representa la magnitud en que es superposen f i g . Observem que aquesta integral té sentit per tot x ja que el producte de dues funcions integrables també és integrable. A més a més, donat que les funcions f i g són 2π -periòdiques podem intercanviar les variables de manera que

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

És fàcil comprovar que la convolució satisfà les propietats distributiva, commutativa i associativa.

Observació 2.14. Podem relacionar la convolució i les sèries de Fourier a través de la següent manipulació de les sumes parcials

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy = (f * D_N)(x) \end{aligned}$$

on D_N representa el polinomi trigonomètric definit per $x \in [-\pi, \pi]$ com

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

Aquest polinomi trigonomètric és conegut amb el nom de nucli de Dirichlet d'ordre N .

Demostrem ara que la convolució de dues funcions és més regular que elles mateixes, és a dir, $(f * g)$ serà contínua tot i que f i g siguin discontinües.

Proposició 2.15. *Siguin f i g dues funcions integrables i 2π -periòdiques. Aleshores, $f * g$ és contínua.*

Demostració. Demostrem primer el cas on f i g són ambdues contínues. Primerament, observem que

$$(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)] dy.$$

Donat que g és contínua, g és uniformement contínua en qualsevol interval tancat i acotat. Però, com a més a més g és 2π -periòdica, és uniformement contínua en tot \mathbb{R} , és a dir, donat $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|g(s) - g(t)| < \epsilon$ quan $|s - t| < \delta$. Aleshores, $|x_1 - x_2| < \delta$ implica que $|(x_1 - y) - (x_2 - y)| < \delta$ per a tot $y \in \mathbb{R}$. Per tant,

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| dy \leq \frac{\epsilon}{2\pi} 2\pi B = \epsilon B, \end{aligned}$$

on B és un nombre real tal que $|f(x)| \leq B$ per a tot x . Per tant, si f i g són contínues, aleshores la convolució $f * g$ també és contínua. Per demostrar la proposició quan f i g són simplement integrables és necessari veure el següent resultat que ens permet aproximar funcions integrables de manera que la funció aproximada sigui també contínua.

Lema 2.16. *Sigui f una funció integrable al cercle i acotada per un nombre real B . Aleshores, existeix una successió $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funcions contínues al cercle de manera que*

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_k(x)| \leq B \quad \text{per tot } k = 1, 2, \dots,$$

i

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{quan } k \rightarrow \infty.$$

Demostració. Suposem que f és una funció que pren valors reals (en cas que f prengués valors complexos, seria suficient repetir l'argument d'aquesta demostració per la part real i la part imaginària per separat). Donat $\epsilon > 0$, triem la partició $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \pi$ de l'interval $[-\pi, \pi]$ de manera que les sumes superiors i inferiors difereixen com a màxim en ϵ . Sigui f^* la funció definida a trossos tal que

$$f^*(x) = \sup_{x_{j-1} \leq y \leq x_j} f(y) \quad \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j) \text{ per } 1 \leq j \leq N.$$

Per construcció tenim que $|f^*| \leq B$. A més,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x)) dx < \epsilon. \quad (2.3)$$

Ara cal modificar f^* de manera que sigui contínua i periòdica i, tot i així, continuï sent una bona aproximació de f . Sigui $\delta > 0$ petit i sigui \tilde{f} una funció tal que $\tilde{f}(x) = f^*(x)$ quan la distància de x a qualsevol dels punts de la divisió $x_1 < \dots < x_{N-1}$ és major o igual a δ . En un entorn de tamany δ al voltant de x_j per $j = 1, \dots, N-1$ definim $\tilde{f}(x)$ com la funció lineal que satisfà $\tilde{f}(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$. A prop de $x_0 = -\pi$, \tilde{f} és lineal amb $\tilde{f}(-\pi) = 0$ i $\tilde{f}(-\pi + \delta) = f^*(-\pi + \delta)$. De la mateixa manera, quan $x_N = \pi$ la funció \tilde{f} és lineal amb $\tilde{f}(\pi) = 0$ i $\tilde{f}(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$.

Aleshores, donat que $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ podem estendre f a una funció contínua i 2π -periòdica a \mathbb{R} . El valor absolut d'aquesta extensió també està acotat per B . A més a més, \tilde{f} difereix de f^* només en els N intervals de longitud 2δ que envolten els punts de la divisió. Per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq 2BN(2\delta).$$

Si triem δ suficientment petit obtenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx < \epsilon. \quad (2.4)$$

A partir de (2.3) i (2.4) i aplicant la desigualtat triangular deduïm que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f^*(x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx < 2\epsilon.$$

Si denotem f_k a la funció \tilde{f} i definim $2\epsilon = \frac{1}{k}$, aleshores obtenim que la successió $\{f_k\}$ satisfà

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{quan } k \rightarrow \infty$$

tal com volíem veure. □

Utilitzant aquest resultat podem completar la demostració de la Proposició 2.15. Aplicant el lema a f i g obtenim dues successions $\{f_k\}$ i $\{g_k\}$ de funcions contínues que aproximem f i g . Aleshores, aplicant la propietat distributiva obtenim

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g + f_k * (g - g_k).$$

Per les propietats de la successió $\{f_k\}$ deduïm que

$$|(f - f_k) * g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)| |g(y)| dy$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_y |g(y)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)| dy \rightarrow 0 \text{ quan } k \rightarrow \infty.$$

Per tant, $(f - f_k) * g \rightarrow 0$ uniformement en x . De la mateixa manera, $f_k * (g - g_k) \rightarrow 0$ uniformement i, en conseqüència, $f_k * g_k$ tendeix uniformement a $f * g$. Finalment, donat que $f_k * g_k$ és contínua, deduïm que $f * g$ també és contínua. \square

En general, els coeficients de Fourier del producte fg no són el producte dels coeficients de f i g . Veurem ara una última propietat que confirma que aquesta relació es manté si substituïm el producte fg per la seva convolució $f * g$.

Proposició 2.17. *Siguin f i g dues funcions integrables i 2π -periòdiques. Aleshores,*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Demostració. Anàlogament al resultat anterior, demostrarem primer la proposició per funcions f i g contínues.

A partir de les definicions de coeficient de Fourier i de convolució obtenim

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy. \end{aligned}$$

D'altra banda, es compleix

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt$$

on la primera igualtat ve donada pel canvi de variable $t = x - y$ i la segona és conseqüència de la periodicitat de la funció g i de la Proposició 2.2.

Unint aquests dos resultats deduïm que

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dy = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).$$

Veiem ara que la proposició també és certa quan les funcions f i g són simplement integrables. Siguin $\{f_k\}$ i $\{g_k\}$ les successions contínues formades com a conseqüència del lema anterior. Aleshores, per a tot enter n , es compleix que

$$\widehat{f_k * g_k}(n) \rightarrow \widehat{f * g}(n) \text{ quan } k \rightarrow \infty.$$

Ara com f_k i g_k són dues successions contínues, acabem de demostrar que

$$\widehat{f_k * g_k}(n) = \widehat{f_k}(n)\widehat{g_k}(n).$$

A més a més, en el Lema 2.16 hem vist també que

$$|\widehat{f}(n) - \widehat{f}_k(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_k(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0$$

quan $k \rightarrow \infty$.

Per tant, tenim que $\widehat{f}_k(n) \rightarrow \widehat{f}(n)$ i $\widehat{g}_k(n) \rightarrow \widehat{g}(n)$ quan k tendeix a l'infinit i, en conseqüència, deduïm que

$$\widehat{f_k * g_k}(n) \rightarrow \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).$$

□

3 Demostració del teorema d'Erdős-Turán

Al llarg d'aquest capítol veurem un conjunt de resultats que, conjuntament amb els conceptes previs definits al capítol 2, són necessaris per a la demostració del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis. Entre aquests trobem la fórmula de Jensen, l'observació de Schur i un seguit de lemes relacionats amb les sumes suavitzades. Finalment, amb l'ajuda d'aquestes bases es demostraran els resultats principals d'aquest treball enunciats a l'introducció i que conclouran amb la demostració del teorema d'Erdős-Turán. Per a l'anàlisi de la fórmula de Jensen he consultat les referències [10] i [11] mentre que per guiar-me en la demostració dels teoremes 1 i 2 he utilitzat les fonts [3] i [14].

Recordem que les desigualtats que volem demostrar en els teoremes 1 i 2 són

$$\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)} \quad \text{i} \quad D(P) \leq C\sqrt{Nh(P)}$$

respectivament. Abans de veure la demostració del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis però, veiem una cota inferior de la constant C a través d'un exemple.

Sigui $P(z) = (z-1)^N$ un polinomi de grau N amb totes les arrels concentrades en el punt $z = 1$. Aleshores,

$$D(P) = N \quad \text{i} \quad h(P) = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{i\theta} - 1| d\theta.$$

De la definició de $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ deduïm que

$$\log^+ |e^{i\theta} - 1| > 0 \Leftrightarrow |e^{i\theta} - 1| > 1 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right).$$

Per tant,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{i\theta} - 1| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi - \frac{\pi}{3}} \log |e^{i\theta} - 1| d\theta = 0.323066..$$

on la última igualtat l'hem calculat amb l'eina Wolfram Mathematica. Per tant, substituint les dades obtenim que

$$D(P) \leq C\sqrt{Nh(P)} \Leftrightarrow C \geq 1.75936..$$

és a dir, acabem de demostrar que la constant C ha de ser almenys 1.75936.

3.1 La fórmula de Jensen i la demostració del Teorema 1

Per poder entendre la demostració del Teorema 1 és necessari conèixer abans la fórmula de Jensen. Aquesta relaciona el logaritme d'una funció analítica en el cercle amb el nombre de zeros dins d'aquest. Per entendre la demostració d'aquesta però, cal veure primer un parell de resultats.

Corol·lari 3.1.

$$\int_0^1 \log \sin(\pi t) dt = -\log(2).$$

Demostració. A partir de la fórmula trigonomètrica

$$\sin(2\pi x) = 2 \sin(\pi x) \sin(\pi(x + \frac{1}{2}))$$

deduïm que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(2\pi x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log(2) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(\pi x)) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(\pi(x + \frac{1}{2}))) dx.$$

Fent els canvis de variable $t = 2x$ i $t = x + \frac{1}{2}$ obtenim

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(2\pi x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \log(\sin(\pi t)) dt$$

i

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(\pi(x + \frac{1}{2}))) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \log(\sin(\pi t)) dt.$$

Utilitzant les fórmules anteriors obtenim

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \log(\sin(\pi t)) dt = \frac{1}{2} \log(2) + \int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin(\pi t)) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \log(\sin(\pi t)) dt. \quad (3.1)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 \log(\sin(\pi t)) dt &= \frac{1}{2} \log(2) \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \log(\sin(\pi t)) dt &= -\log(2). \end{aligned}$$

□

Cal remarcar però, que totes les integrals de l'expressió (3.1) existeixen com a integrals impròpies de Riemann. En efecte, per taylor tenim $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ i, en conseqüència, $\sin(x) \approx x$. D'altra banda, $\int_0^\pi \log(t) dt$ existeix ja que, $x \log(x) - x$ és una antiderivada i $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) = 0$.

Lema 3.2.

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0.$$

Demostració. Observem que

$$|1 - e^{2i\varphi}|^2 = 2 - 2\operatorname{Re}(e^{-2i\varphi}) = 2 - 2\cos(2\varphi).$$

D'altra banda, com a conseqüència de la fórmula trigonomètrica

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \cos \alpha,$$

deduïm que

$$|1 - e^{2i\varphi}|^2 = 4 \sin^2(\varphi) \Leftrightarrow |1 - e^{2i\varphi}| = 2 \sin \varphi$$

on $\varphi \in [0, \pi]$.

Ara, fent el canvi de variable $\theta = 2\varphi$ obtenim que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta &= \int_0^{\pi} \log |1 - e^{2i\varphi}| d\varphi = \int_0^{\pi} \log(2 \sin(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \log(2) d\varphi + \int_0^{\pi} \log(\sin(\varphi)) d\varphi = 0 \end{aligned}$$

on la última igualtat ve donada pel corol·lari anterior. \square

Un cop hem vist aquests dos resultats, ja podem enunciar i demostrar la fórmula de Jensen.

Teorema. (*Fórmula de Jensen*) Sigui $\Omega = D(0, R)$, $f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0$, $0 < r < R$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ els zeros de f en $\bar{D}(0, r)$, ennumerats segons les seves multiplicitats. Aleshores,

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}.$$

Demostració. Primerament, ordenem els zeros α_j de manera que $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ estan en $D(0, r)$ i $|\alpha_{m+1}| = \dots = |\alpha_N| = r$. Podem tenir $m = N$ o $m = 0$. Definim

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^N \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}. \quad (3.2)$$

Observem que $g \in H(D)$ no té zeros en $D(0, r + \epsilon)$ per a un cert $\epsilon > 0$. Per tant, existeix una funció holomorfa $h(z) = \log g(z)$. Per la fórmula integral de Cauchy sabem que

$$h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(0)} \frac{h(z)}{z} dz.$$

Prenent la parametrització $C_r(0) = \{re^{i\theta} : \theta \in [-\pi, \pi]\}$ obtenim

$$\log |g(0)| = \operatorname{Re}(h(0)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(0)} \frac{h(z)}{z} dz \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\theta}) d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(h(re^{i\theta})) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'altra banda, de l'expressió (3.2) deduïm que

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^m \frac{r}{|\alpha_n|}. \tag{3.4}$$

Observem que per $1 \leq n \leq m$, els factors de (3.2) tenen valor absolut 1 si $|z| = r$. Si, a més a més, $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ per $m < n \leq N$, es compleix

$$|g(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})| \prod_{n=m+1}^N \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right|$$

i, utilitzant la igualtat $\log\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\log(\alpha)$ tenim que

$$\begin{aligned}
\log |g(re^{i\theta})| &= \log |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^N \log \left| \frac{\alpha_n - re^{i\theta}}{\alpha_n} \right| \\
&= \log |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^N \log |1 - e^{i(\theta - \theta_n)}|.
\end{aligned}$$

Ara, pel lema previ sabem que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=m+1}^N \log |1 - e^{i(\theta - \theta_n)}| d\theta = 0$$

i, per tant, deduïm que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Utilitzant ara el resultat (3.3) obtenim que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Finalment, aplicant (3.4) tenim el resultat

$$\log \left(|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

□

Observació 3.3. Sigui $\Omega = D(0, R)$, $f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0$, $0 < 1 < R$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ els zeros de f en $\bar{D}(0, 1)$. De la fórmula de Jensen deduïm que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_j \log \frac{1}{|\alpha_j|}.$$

Veiem ara la demostració del Teorema 1 que demostra la primera part del resultat d'Erdős i Turán que diu que si un polinomi mònic és petit al cercle unitari i el seu terme independent no és massa petit, aleshores les seves arrels es troben a prop del cercle unitari. A partir d'ara seguirem les referències [3] i [14].

Demostració. (Teorema 1)

Donat que $P(0) = a_0$, tenim que

$$\log \frac{|P(0)|}{\sqrt{|a_0|}} = \log \frac{|a_0|}{\sqrt{|a_0|}} = \frac{1}{2} \log |a_0|.$$

Aplicant l'observació 3.3 obtenim

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta = \frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j < 1} \log \frac{1}{\rho_j}.$$

D'altra banda, com $\log |a_0| = \log \left(\prod_{j=1}^N \rho_j \right) = \sum_j \log \rho_j$ deduïm que

$$\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j < 1} \log \frac{1}{\rho_j} = -\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j$$

i, en conseqüència,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta = -\frac{1}{2} \log |a_0| + \sum_{\rho_j > 1} \log \rho_j.$$

Per tant, utilitzant ambdues expressions tenim

$$2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \right) = \sum_j \log \max\left(\frac{1}{\rho_j}, \rho_j\right) = \log \mathcal{M}(P).$$

Ara, donat que

$$2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \right) \geq 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} d\theta \right) = \log \mathcal{M}(P)$$

deduïm que $2h(P) \geq \log \mathcal{M}(P)$ i, en conseqüència, $\mathcal{M}(P) \leq e^{2h(P)}$ que demostra el Teorema 1. \square

3.2 Observació de Schur

A partir d'ara, l'objectiu d'aquest capítol serà la demostració del resultat principal, el Teorema 2. Aquest diu que si un polinomi mònic és petit al cercle unitari i el seu terme independent no és massa petit, aleshores les seves arrels estan equidistribuïdes al cercle unitari. Comencem demostrant l'observació de Schur que ens permetrà assumir sense pèrdua de generalitat que tots els zeros del polinomi $P(z)$ es troben al cercle unitari.

Lema 3.4. *Sigui $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - \alpha_j)$ amb $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ tal que $P(0) = a_0$. Sigui*

$Q(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ un altre polinomi. Aleshores, per a qualsevol z amb $|z| = 1$ es compleix que

$$\frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} \geq |Q(z)|$$

i, en conseqüència, $h(P) \geq h(Q)$.

Demostració. Observem que per tot z amb $|z| = 1$ se satisfà

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - \alpha_j}{\sqrt{\rho_j}} \right|^2 &= \left| \frac{z - \rho_j e^{i\theta_j}}{\sqrt{\rho_j}} \right|^2 = \left| \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} - \sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\rho_j} + \rho_j - 2\operatorname{Re}(z e^{-i\theta_j}) \geq 2 - 2\operatorname{Re}(z e^{-i\theta_j}) = |z - e^{-i\theta_j}|^2. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $|P(0)| = |a_0| = \prod_{j=1}^N \rho_j$ obtenim

$$\frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}} = \prod_{j=1}^N \left| \frac{z}{\sqrt{\rho_j}} - \sqrt{\rho_j} e^{i\theta_j} \right| \geq \prod_{j=1}^N |z - e^{-i\theta_j}| = |Q(z)|.$$

□

Donat que acabem de demostrar que $h(P) \geq h(Q)$, l'observació de Schur ens permet assumir a partir d'ara que tots els zeros de P es troben al cercle unitari, és a dir, que $\rho_j = 1$ per tot j .

3.3 Sumes suavitzades sobre zeros

En aquesta secció veurem tres resultats que ens donaran les bases per a la demostració del Teorema 2. Al llarg d'aquesta considerarem $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$, un polinomi de grau N amb tots els zeros al cercle unitari.

El següent lema relaciona la mida del polinomi $P(z)$ i la suma de les potències de les seves arrels.

Lema 3.5. *Sigui $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ tal que $P(0) = a_0$. Per a qualsevol nombre enter $k \neq 0$ es compleix que*

$$\sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \quad (3.5)$$

i, consegüentment,

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq 4|k|h(P). \quad (3.6)$$

Demostració. Donat que $P(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^N (e^{i\theta} - e^{i\theta_j})$ és suficient demostrar que donats $\phi \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \neq 0$ es compleix

$$e^{ik\phi} = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |e^{i\theta} - e^{i\phi}| d\theta \quad (3.7)$$

ja que si fem el sumatori definint $\phi = \theta_j$ obtenim (3.5). Si substituïm $\theta = \phi + x$ i dividim per $e^{ik\phi}$ ambdós costats de la igualtat (3.7) tenim

$$1 = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log |e^{i\phi}(e^{ix} - 1)| dx = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log |e^{ix} - 1| dx.$$

Utilitzant la fórmula trigonomètrica

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}$$

deduïm que

$$|e^{ix} - 1| = \left| e^{\frac{ix}{2}} (e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \right| = \left| 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Per tant,

$$1 = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(kx) + i \sin(kx)) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx.$$

Tenint en compte l'expressió $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ i la paritat de les funcions sinus i cosinus, fent el canvi de variable $t = 2\pi - x$ obtenim

$$-\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} i \sin(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = 0$$

i, en conseqüència,

$$1 = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx. \quad (3.8)$$

Donat que la funció cosinus és una funció parella és suficient demostrar (3.8) per $k > 0$. Fent integració per parts tenim

$$1 = -\frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \log\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Ara, com

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{i} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

podem expressar el cosinus com una sèrie geomètrica i, a partir de la fórmula

$$\sum_{j=1}^N r^j = \frac{r - r^{N+1}}{1 - r}$$

tenim la igualtat

$$\frac{\sin(kx)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = 2 \sum_{j=1}^k \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right).$$

Per tant, cal provar la igualtat

$$1 = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Observem que si $j = 1$, aleshores

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2}(x + \sin(x)) \right]_0^{2\pi} = 1. \quad (3.9)$$

Veiem què passa quan $j \neq 1$. Amb la fórmula trigonomètrica $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ deduïm que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{yx}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{x(1+y)}{2}\right) + \cos\left(\frac{x(1-y)}{2}\right) \right]$$

i, en conseqüència,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{j-1} \sin((j-1)x) + \frac{1}{j} \sin(jx) \right) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Per tant,

$$\sum_{j=2}^k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0. \quad (3.10)$$

Unint ara en un sumatori les expressions (3.9) i (3.10) deduïm que

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 1$$

que demostra la igualtat (3.8) i, per consegüent, també demostra (3.7) i (3.5).

Per obtenir (3.6) observem que

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta.$$

D'altra banda,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |P(e^{i\theta})|| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\log^+ |P(e^{i\theta})| - \log |P(e^{i\theta})|) d\theta = 2h(P)$$

on $\log^+ x = \max(\log x, 0)$. Observem que hem aplicat la fórmula de Jensen i que $\rho_j = 1$ per obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta &= \log |P(0)| + \sum_{j=1}^N \log\left(\frac{1}{\rho_j}\right) \\ &= \log |P(0)| = \log\left(\prod_{j=1}^N | - e^{i\theta_j} |\right) = \log(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Per tant, finalment tenim (3.6)

$$\left| \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right| \leq 2|k|2h(P) = 4|k|h(P).$$

□

Per poder demostrar el Teorema 2 és necessari conèixer el nombre de zeros $N(I; P)$ que hi ha en un arc qualsevol I del cercle unitari per tal de saber la distància que haurien de tenir entre ells en cas que fóssin equidistribuïts.

Sigui I un arc del cercle unitari i sigui $\chi_I(\theta)$ la seva funció característica, és a dir, tal que

$$\chi_I(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } e^{i\theta} \in I \\ 0 & \text{si } e^{i\theta} \notin I \end{cases}.$$

Clarament $\chi_I(\theta)$ és una funció 2π -periòdica discontinua que satisfà

$$N(I; P) = \sum_{j=1}^N \chi_I(\theta_j).$$

D'altra banda, la discontinuïtat de χ_I provoca que la sèrie de Fourier d'aquesta no sigui absolutament convergent. Per tant, l'objectiu és definir una funció g 2π -periòdica i contínua que s'aproximi a χ_I i de manera que $\sum_{j=1}^N g(\theta_j)$ sigui una suma suavitzada sobre zeros. Observem a la Figura 4 una idea de com són les funcions χ_I i g .

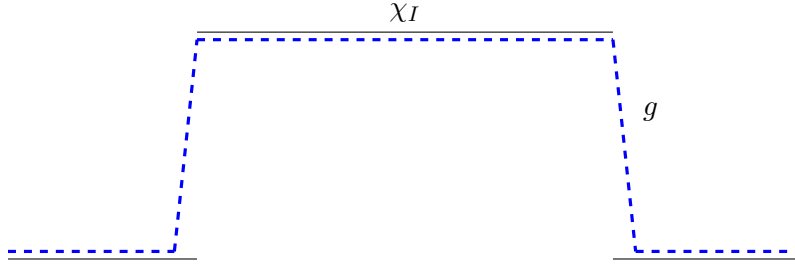


Figura 4: Funció característica χ_I i funció contínua g aproximada a χ_I .

Veiem ara dos resultats que ens ajudaran a saber quines característiques ha de complir la funció g .

Proposició 3.6. *Sigui $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ tal que $P(0) = a_0$. Sigui $g(\theta)$ una funció 2π -periòdica tal que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{g}(k)| < \infty.$$

Definim

$$G(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\hat{g}(k)e^{ik\theta} \quad i \quad G = \max_{\theta} |G(\theta)|.$$

Aleshores es compleix que

$$\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \right| \leq 4Gh(P).$$

Observació 3.7. Podríem pensar que no existeixen funcions g amb les característiques de la Proposició 3.6 però observem que si la funció 2π -periòdica g és continuament diferenciable l -vegades, aleshores si integrem per parts l vegades l'expressió $\hat{g}(k)$ per a $k \neq 0$ tenim

$$|\hat{g}(k)| = \left| \frac{1}{(ik)^l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{(l)}(\theta)e^{-ik\theta}d\theta \right| \leq \frac{1}{|k|^l} \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |g^{(l)}(\theta)|.$$

Per exemple, tota funció continuament diferenciable tres vegades complirà la hipòtesi de la Proposició 3.6.

Demostració. Donat que g és una funció contínua i $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{g}(k)| < \infty$, per la Proposició 2.12 sabem que

$$g(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) e^{ik\theta}$$

uniformement.

D'altra banda,

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-i0\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta.$$

Per tant, utilitzant ambdues observacions obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta &= \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - N\hat{g}(0) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) e^{ik\theta_j} \right) - N\hat{g}(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} \right) - N\hat{g}(0) \\ &= \hat{g}(0) \sum_{j=1}^N e^{i0\theta_j} + \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} - N\hat{g}(0) = N\hat{g}(0) + \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} - N\hat{g}(0) \\ &= \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j}. \end{aligned}$$

Utilitzant ara el Lema 3.5 deduïm que

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} &= - \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) \frac{|k|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| \sum_{k \neq 0} \hat{g}(k) |k| e^{ik\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Aplicant valors absoluts, la definició de G i el resultat (3.11) concloem que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| &\leq \frac{G}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log |P(e^{i\theta})| \right| d\theta \\ &= \frac{G}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \log^+ |P(e^{i\theta})| - \log |P(e^{i\theta})| \right) d\theta = 4Gh(P). \end{aligned}$$

□

A continuació, veurem un últim resultat per tal de crear correctament la funció g de manera que satisfaci la hipòtesi de la Proposició 3.6 i s'aproximi a la funció indicadora χ_I . Per fer-ho, definirem g mitjançant la convolució de la funció característica χ_I i una funció contínua adient K . Cal remarcar que, com a conseqüència de la Proposició 2.15, tot i que χ_I no és contínua, la convolució $\chi_I * K$ si ho és.

Lema 3.8. *Sigui I un arc sobre el cercle unitari i sigui $\chi_I(\theta)$ la seva funció característica. Sigui K una funció contínua 2π -periòdica no negativa tal que els seus coeficients de Fourier són tots no negatius $\widehat{K}(n) \geq 0$ i tals que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{K}(n) < \infty$. Sigui g la convolució de χ_I i K , és a dir,*

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_I(\alpha) K(\theta - \alpha) d\alpha.$$

Aleshores, g satisfà $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\widehat{g}(k)| < \infty$ (hipòtesi Proposició 3.6) i, en la notació que s'utilitza en aquesta, es compleix

$$G = \max_{\theta} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\widehat{g}(k)e^{ik\theta}| \right| \leq \frac{2}{\pi^2} K(0).$$

Demostració. Suposem que χ_I és l'arc des de $e^{i\alpha}$ a $e^{i\beta}$ de manera que per tot $k \neq 0$ tenim

$$\widehat{\chi}_I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{ik} [e^{-iky}]_{\alpha}^{\beta} = \frac{e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}}{2\pi ik}.$$

Recordem que en el capítol 2 hem vist que els coeficients de Fourier de la convolució de dues funcions són els productes dels coeficients de Fourier d'aquestes funcions. Per tant, tenim que $\widehat{g}(k) = \widehat{\chi}_I(k)\widehat{K}(k)$. Ara com,

$$|k\widehat{\chi}_I(k)| = \left| \frac{e^{-ik\alpha} - e^{-ik\beta}}{2\pi i} \right| \leq \frac{1+1}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

obtenim que

$$|k\widehat{g}(k)| = |k\widehat{\chi}_I(k)|\widehat{K}(k) \leq \frac{\widehat{K}(k)}{\pi}.$$

Per tant, deduïm que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\widehat{g}(k)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) = \frac{K(0)}{\pi} < \infty,$$

on en la última igualtat s'ha fet ús de la Proposició 2.12 per obtenir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k)e^{ik0} = K(0).$$

Per tant, s'ha demostrat que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\widehat{g}(k)| < \infty$ i que $G \leq K(0)/\pi$. Demostrem ara una millor cota per G . Observem que

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\widehat{g}(k)e^{ik\theta}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\widehat{\chi}_I(k)\widehat{K}(k)e^{ik\theta}| \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \operatorname{sgn}(k)\widehat{K}(k)(e^{ik(\theta-\alpha)} - e^{ik(\theta-\beta)}). \end{aligned}$$

Donat que, per hipòtesis, $\widehat{K}(k) \geq 0$ es compleix que

$$\widehat{K}(k) = \overline{\widehat{K}(k)} = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_0^{2\pi} K(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x)e^{ikx} dx = \widehat{K}(-k).$$

Per tant, utilitzant la paritat del cosinus i la igualtat $\widehat{K}(k) = \widehat{K}(-k)$ obtenim que

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \operatorname{sgn}(k) \widehat{K}(k) \left(\cos(k(\theta - \alpha)) - \cos(k(\theta - \beta)) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widehat{K}(k) \left(\cos(k(\theta - \alpha)) - \cos(k(\theta - \beta)) \right) - \widehat{K}(k) \left(\cos(k(\theta - \alpha)) - \cos(k(\theta - \beta)) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Per tant, tenim que

$$\begin{aligned} |G(\theta)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) \widehat{K}(k) \left(\sin(k(\theta - \alpha)) - \sin(k(\theta - \beta)) \right) \right| \\ &\leq 2 \max_{\phi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) |\sin(k\phi)| \end{aligned}$$

on $\max_{\phi} = \max(\theta - \alpha, \theta - \beta)$.

Aleshores,

$$G = \max_{\phi} |G(\theta)| \leq 2 \max_{\phi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) |\sin(k\phi)|.$$

Tenint en compte la següent expansió de Fourier analitzada a l'Exemple 2.8

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2lx)}{4l^2 - 1}$$

deduïm que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) |\sin(k\phi)| &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2kl\phi)}{4l^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} K(0) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{K(2l\phi)}{4l^2 - 1} \leq \frac{1}{\pi^2} K(0). \end{aligned}$$

On en la darrera igualtat hem aplicat novament la Proposició 2.12, la fórmula d'Euler i la paritat del sinus. Per tant, finalment obtenim que

$$G \leq 2 \max_{\phi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{K}(k) |\sin(k\phi)| \leq \frac{2}{\pi^2} K(0).$$

□

3.4 Demostració del Teorema 2

Arribat a aquest punt, ja tenim totes les eines necessàries per poder demostrar el Teorema 2 i, per tant, per finalitzar la demostració del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis.

Sigui I un arc del cercle unitari i sigui $P(z) = \prod_{j=1}^N (z - e^{i\theta_j})$ un polinomi de grau N amb tots els zeros a S^1 . Per demostrar que

$$D(P) = |N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N| \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}$$

és suficient veure que

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \frac{8}{\pi} \sqrt{Nh(P)}$$

ja que el valor absolut s'obté com a conseqüència de la igualtat

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N = \frac{|I^c|}{2\pi}N - N(I^c; P)$$

on I^c denota l'arc complementari de I .

Sigui g una funció 2π -periòdica que està per sobre de la funció característica χ_I , és a dir, tal que $g(\theta) \geq 0$ per a tot θ i tal que $g(\theta) \geq 1$ si $e^{i\theta} \in I$.

Donat que

$$N(I; P) = \sum_{j=1}^N \chi_I(\theta_j) \leq \sum_{j=1}^N g(\theta_j)$$

es compleix que

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{|I|}{2\pi}N.$$

Sumant i restant

$$\frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_j) d\theta$$

a la dreta de la desigualtat obtenim

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi}N \leq \left(\sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right) + N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{|I|}{2\pi} \right). \quad (3.12)$$

L'objectiu ara és acotar els dos termes de la dreta de l'expressió (3.12) per tal de minimitzar la discrepància. Per fer-ho, cal trobar una funció adient g de manera que poguem utilitzar la Proposició 3.6 i el Lema 3.8 per tal d'acotar el primer terme i, a la vegada, que g sigui prou propera a la funció indicadora χ_I per tal que el segon terme també sigui petit.

Donat $0 < \delta < \pi$, sigui I_δ l'arc obtingut d'afegir δ a banda i banda de l'arc I . (Si $|I| + 2\delta > 2\pi$ aleshores I_δ envolta tot el cercle unitari.) Sigui χ_{I_δ} la funció característica de l'arc I_δ i sigui K_δ la funció 2π -periòdica que hem estudiat a l'Exemple 2.9 definida per

$$K_\delta(\theta) = \frac{2\pi}{\delta^2} \max(\delta - |\theta|, 0)$$

on $\theta \in (-\pi, \pi]$. Observem que, de manera trivial, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\delta(\alpha) d\alpha = 1$. Definim g com la convolució de χ_{I_δ} i K_δ , és a dir,

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) K_\delta(\theta - \alpha) d\alpha.$$

Com a conseqüència de la Proposició 2.15, donat que g és la convolució d'una funció integrable i una funció contínua, g també és contínua. A més, és una funció no negativa i si $e^{i\theta} \in I$ aleshores

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) K_\delta(\theta - \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\delta(\theta - \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\delta(\alpha) d\alpha = 1. \end{aligned}$$

En la Figura 5 podem veure una idea de com és la funció contínua g . Observem que aquesta és diferent de 0 quan $e^{i\theta} \in I_{2\delta}$ i val 0 en cas contrari.

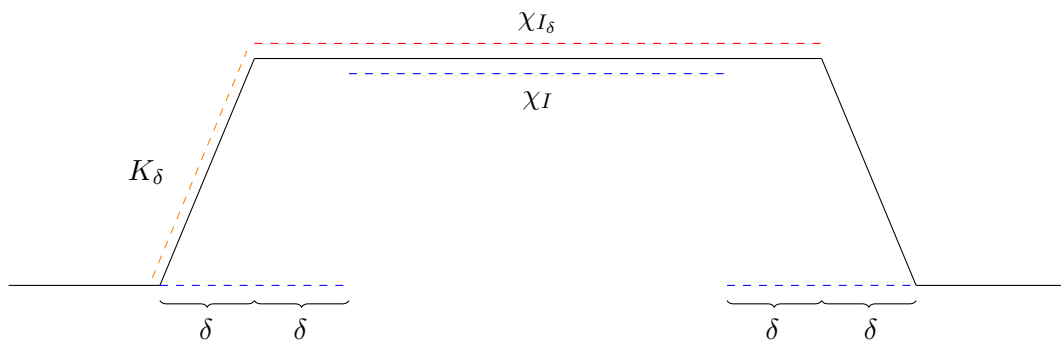


Figura 5: Funció $g = \chi_{I_\delta} * K_\delta$.

Pensem ara com triar el valor més adient per δ . Si disminuïm δ , la funció g s'aproximarà a χ_I i, en conseqüència, farà el segon terme de la igualtat (3.12) més petit mentre que el primer terme tendirà a augmentar. Per tant, el valor més adequat per δ és aquell que compensa aquests dos efectes.

Observem ara que

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) K_\delta(\theta - \alpha) d\alpha \right] d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\delta(\theta - \alpha) d\theta \right] d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{I_\delta}(\alpha) d\alpha \\
&= \frac{|I_\delta|}{2\pi} = \frac{|I| + 2\delta}{2\pi}
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $\int_0^{2\pi} K_\delta(\theta - \alpha) d\theta = 2\pi$. En cas que l'arc I_δ sigui tot el cercle unitari es satisfà $\widehat{g}(0) = 1$.

Arrel d'aquesta darrera observació i del fet que g maximitza la funció característica de l'arc I deduïm que el segon terme de la igualtat (3.12) val

$$\begin{aligned}
N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta - \frac{|I|}{2\pi} \right) &= N \left(\frac{|I| + 2\delta}{2\pi} - \frac{|I|}{2\pi} \right) \\
&= \frac{N2\delta}{2\pi} = \frac{N\delta}{\pi}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'altra banda, acotem el primer terme de (3.12) de la següent manera

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^N g(\theta_j) - \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \right| &\leq 4Gh(P) \\
&\leq \frac{8}{\pi^2} h(P) K_\delta(0) = \frac{16}{\pi\delta} h(P).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

La primera desigualtat és deguda a la Proposició 3.6 i la segona al Lema 3.8. Finalment, la darrera igualtat és conseqüència de que $K_\delta(0) = \frac{2\pi}{\delta}$ per definició. Unint els resultats (3.13) i (3.14) obtenim que

$$N(I; P) - \frac{|I|}{2\pi} N \leq \frac{16}{\pi\delta} h(P) + \frac{N\delta}{\pi}.$$

Finalment, si triem $\delta = 4\sqrt{\frac{h(P)}{N}}$ concloem que

$$\begin{aligned}
\frac{16}{\pi\delta} h(P) + \frac{N\delta}{\pi} &\leq \frac{16h(P)}{4\pi\sqrt{\frac{h(P)}{N}}} + \frac{4N}{\pi} \sqrt{\frac{h(P)}{N}} \\
&= \frac{4}{\pi} \sqrt{h(P)N} + \frac{4}{\pi} \sqrt{h(P)N} = \frac{8}{\pi} \sqrt{h(P)N}
\end{aligned}$$

que demostra el Teorema 2. □

Analitzem de manera ràpida com hem demostrat el teorema d'equidistribució de zeros de polinomis assenyalant els passos claus. Primerament, hem demostrat que els zeros del polinomi $P(z)$ s'acumulen a prop del cercle unitari amb una aplicació senzilla de la fórmula de Jensen.

La part més complicada ha estat veure l'equidistribució dels angles de les arrels. Hem començat estudiant l'observació de Schur, la qual ens ha permès restringir els polinomis que tenen totes les arrels al cercle unitari. Més endavant, hem vist un resultat clau (Lema 3.5) que relaciona la mida de $P(z)$ amb la suma de les potències de les seves arrels. Aquest ens ha permès relacionar les sumes suavitzades amb l'equidistribució dels angles (Proposició 3.6). En el Lema 3.8 hem aplicat els resultats anteriors relacionant les sumes suavitzades amb els angles sobre l'arc I . Finalment, hem definit una funció adient g mitjançant la convolució de χ_I i una funció concreta K_δ i, a partir de tota la informació recollida anteriorment, hem demostrat l'equidistribució dels angles dels zeros de $P(z)$ amb la constant $C = \frac{8}{\pi}$. D'aquesta manera, podem concloure que el teorema d'Erdős-Turán queda demostrat.

4 Conclusions

En aquest projecte he descobert el teorema d'Erdős-Turán així com la importància de les sèries de Fourier i el concepte de convolució. També he pogut adquirir i posar en pràctica coneixements d'anàlisi i càlcul obtinguts en el Grau de Matemàtiques.

Inicialment, he analitzat les hipòtesis del teorema d'equidistribució de zeros de polinomis i he plantejat els resultats necessaris per a la seva demostració. A continuació, he mencionat els diferents matemàtics que han aconseguit acotar cada cop més la constant C i he vist a través d'un exemple una cota inferior d'aquesta. Seguidament, he fet un estudi exhaustiu de les sèries de Fourier; he analitzat els conceptes més rellevants així com les propietats més importants relacionades amb la unicitat i la convergència d'aquestes. En aquesta etapa també he après el concepte de convolució i algunes de les seves propietats. Finalment, he analitzat resultats importants com la fórmula de Jensen o l'observació de Schur que han estat les bases per entendre i dur a terme la demostració del teorema d'Erdős-Turán.

Arrel d'aquest treball em queden alguns objectius pendents com, per exemple, l'estudi de les transformades de Fourier i la seva relació amb el teorema d'equidistribució de zeros de polinomis.

Referències

- [1] Amoroso F.; Mignotte M.: On the distribution of the roots of polynomials *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(3):1275-1291, 1996.
- [2] Carella N.A.: Note On The Catalan Constant And Prime Triples [arXiv:2203.01832 \[math.GM\]](#), 2022.
- [3] Carneiro E., Kumar M.; Florea A.; Kumchev A.V; Malik A.; Milinovich M.B.; Turnage-Butterbaugh C.; Wang J.: Hilbert transforms and the equidistribution of zeros of polynomials [arXiv:2104.00105v4 \[math.CA\]](#), 2021.
- [4] Erdelyi T.: *An improvement of the Erdős-Turán theorem on the distribution of zeros of polynomials*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 346(5/6): 267-270, 2008.
- [5] Erdős P.; Turán P.: On the distribution of roots of polynomials *Ann. of Math.* 51, 105-119, 1950.
- [6] Ganelius T.: Sequences of analytic functions and their zeros *Ark. Mat.*, 3:1-50, 1954.
- [7] Korner T.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press.
- [8] Mignotte M.: *Remarque sur une question relative à des fonctions conjuguées*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 907-911, 1992.
- [9] Odlyzko A. M.; Poonen B.: *Zeros of polynomials with 0, 1 coefficients*, Enseign. Math. 39(3/4): 317-348, 1993.
- [10] Remmert R.: *Classical Topics in Complex Function Theory*, University of Michigan, 1991.
- [11] Rudin W.: Real and Complex Analysis, *Mathematic Series*, Third Edition, 76-92, 1921.
- [12] Shu R; Wang J.: The sharp Erdős-Turán inequality [arXiv:2109.11006 \[math.CA\]](#), 2021.
- [13] Smyth C.: *The Mahler measure of algebraic numbers: A survey.*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 352. Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 322-349, 2008.
- [14] Soundararajan K.: Equidistribution of Zeros of Polynomials, *American. Math. Monthly* 126 (2019), no. 3, 226-236
- [15] Stein E.; Shakarchi R.: *I Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [16] Totik V.; Varjú P: *Polynomials with prescribed zeros and small norm*, Acta Sci. Math. 73(3/4): 593-611, 2007.