Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

La successió espectral de Serre i algunes aplicacions

Autor: Onofre Bisbal Castañer

Director: Dr. Javier José Gutiérrez Marín

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

The aim of this work is to introduce Serre's spectral sequence. Spectral sequences are a very powerful tool that allows us to relate the homology (or cohomology) groups of various topological spaces when we cannot do so using other simpler methods such as exact couples. The basic idea is to calculate successive approximations of the invariant we want to find, so that each term increases the level of precision, until we obtain it in the most favorable cases. However, its great utility implies an increase in the difficulty of the tools used, mostly based on homological algebra. In our case, Serre's spectral sequence allows us to relate the homology (or cohomology) groups of the base, fiber, and total space of a fibration, under some hypotheses about the structure of the base. Finally, the possibility of building a fibration from any space, called path fibration, will open up a wide range of possibilities for applying Serre's spectral sequence.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és introduïr la successió espectral de Serre. Les successions espectrals són una eina molt potent que ens permeten relacionar els grups d'homologia (o de cohomologia) de diversos espais topològics quan no ho podem fer utilitzant altres maneres més senzilles com ara les successions exactes. La idea bàsica, consisteix en anar calculant successives aproximacions de l'invariant que volem trobar de manera que, en cada terme augmenta el nivell de prescisió, fins a obtenir-lo, en els casos més favorables. Tot i això, la seva gran utilitat comporta un augment en la dificultat de les eines que s'utilitzen, majoritàriament basades en l'àlgebra homològica. En el nostre cas, la successió espectral de Serre ens permet relacionar els grups d'homologia (o cohomologia) de la base, la fibra i l'espai total d'una fibració, sota algunes hipòtesis sobre l'estructura de la base. Finalment, la possibilitat de construir una fibració a partir de qualsevol espai, anomenada fibració de camins, ens obrirà un ampli ventall de possibilitats on poder aplicar la succesió espectral de Serre.

2020 Mathematics Subject Classification. 55T05,55T10

Agraïments

En primer lloc, agraeixo als meus pares, Tomeu i Marga, el suport incondicional que m'han donat durant tots aquests anys, a més d'haver-m'ho donat tot. Sense vosaltres res no hagués estat possible.

Per altra banda, vull agraïr a tots els companys amb qui he compartit tantes hores de classe i d'estudi, especialment a en Joan i n'Álvaro, i a tots aquells que m'han fet costat durant tot aquest temps. Heu fet d'aquests anys a Barcelona una etapa memorable.

Finalment, donar les gràcies al meu tutor, el Dr. Javier Gutiérrez, que m'ha ajudat sempre que li ho he demanat i m'ha fet aprofundir una mica més en una branca tan interessant, així com complicada, que és la topologia algebraica.

The beauty of mathematics only shows itself to
more patient followers.

—*Maryam Mirzakhani*

Índex

1 Introducció

Sovint, l'atractiu de les matemàtiques rau en l'acte de trobar solucions a problemes que, a primera vista, semblen inaccessibles o de gran dificultat, fent ús d'estratègies que en molts casos destaquen per la seva creativitat i l'elegància amb que són executades.

En la topologia algebraica, el principal propòsit d'estudi és trobar invariants algebraics (com són l'homologia, la cohomologia o els grups d'homotopia) per a classificar espais topològics. Abordar aquest problema no sempre és fàcil degut a l'estructura complexa d'alguns espais. És per això, que una de les tàctiques més utilitzades es basa en la idea del "divideix i venceràs". És a dir, trencar el problema en peces més petites les quals coneixem millor i ajuntar-les de nou. Són exemples d'això el Teorema de Seifert-Van Kampen, que ens permet expressar (sota cèrtes hipòtesis) el grup fonamental d'un espai X en termes del grup fonamental de dos oberts U, V tals que $X = U \cup V$; la successió de Mayer-Vietoris, que també ens relaciona l'homologia d'un espai X, amb la de dos oberts A i B tals que $X = A \cup B$, o la successió exacta llarga d'homologia relativa a un parell (X, A).

Però a vegades, aquest tipus de relacions no són tan senzilles. És aquí on entren en joc les successions espectrals, que d'alguna manera generalitzen la successió llarga d'homologia relativa a un parell (X, A), considerant una successió creixent de subespais $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$, amb $X = \bigcup_i X_i$. La primera successió espectral en aparèixer fou la que avui en dia coneixem com la successió espectral de Serre, tot i que no fou exactament inventada pel matemàtic de la que porta le nom: Jean-Pierre Serre. Anem a posar-nos una mica en context.

Durant els anys 30, l'estudi de la topologia algebraica passava per un bon moment: sorgiren noves teories d'homologia com ara les de J.W. Alexander, E.Čech o S. Lefschetz, que ampliaven la teoria simplicial i permetien aplicar noves idees topològiques. Entre els anys 1935 i 1936, W. Hurewicz introduí els grups d'homotopia superiors, i posteriorment demostrà diverses relacions entre els grups d'homotopia i altres invariants (teoremes de Hurewicz). Aquests i molts altres foren els avenços durant aquesta dècada, fins l'esclat de la Segona Guerra Mundial, en que va disminuir la recerca. Tot i això el progrés va continuar i varen seguir sorgint nous conceptes i resultats. Un dels més destacats, va aparèixer l'any 1941, de la mà de H. Hopf en *Annals of Mathematics*, en el que introduïa una generalització dels grups de Lie compactes, que a dia d'avui coneixem com *H-espais*. Aquesta nova estrucutra va permetre a Hopf demostrar diversos resultats sobre la els grups d'homologia i cohomologia d'alguns grups de Lie.

De totes maneres, el primer en resoldre el problema de relacionar la cohomologia fou J. Leray, mentre era presoner de guerra a Austria entre els anys 1940 i 1945. Leray, que havia fet algunes contribucions rellevants en l'estudi de la mecànica de fluids i treballava en equacions diferencials, va amagar la seva experiència en aquesta branca per por a que els seus coneixements poguéssin ser utilitzats en favor de la guerra i va dedicar-se a la Teoria de Feixos. Així va ser com va introduïr el primer exemple d'una successió espectral. Anys més tard, la tasca que havia realitzat Leray, va ser reunida i escrita en un llenguatge més clar per J.L. Koszul i H.Cartan en un article publicat a *Comptes Rendus* (1947).

Finalment, el matemàtic francés Jean-Pierre Serre, l'any 1951 presentava la seva tesi doctoral, on donava el nom "successió espectral" tal i com el coneixem avui en dia i introduia el concepte de fibració de Serre, a més de donar varis exemples d'aplicació de la successió espectral. És per això que avui en dia, la successió espectral que originalment havia ideat J. Leray, porta el nom de "Successió espectral de Serre", encara que a vegades també se la denomina "successió espectral de Leray-Serre". Més envant, foren creades altres successions espectrals com ara la successió espectral de Adams.

És important destacar que l'estructura a partir de la qual hem definit la successió espectral, la parella exacta, fou introduïda per William Massey l'any 1952.

Estructura

Aquest treball esta dividit en tres parts ben distingides. En la primera es comença definint el concepte genèric de successió espectral. A continuació, es defineixen les parelles exactes, amb les quals es contrueix posteriorment una successió espectral i per acabar, es tracta la pàgina infinit i s'aborda el tema de la convergència.

La segona part, s'inicia amb la definició de la propietat d'elevació d'homotopies, la qual ens permet definir el concepte de fibració. També es donen exemples de fibracions, així com alguns resultats interessants. Tot seguit, es presenta la successió espectral de Serre i es dona un esbós de la seva construcció. Per acabar l'apartat s'exposa l'estructura multiplicativa que adquireix la successió en el cas cohomològic.

Per últim, la tercera part s'inicia definint la fibració de l'espai de camins. Seguidament s'utilitza la successió espectral de Serre per a trobar els grups d'homologia de l'espai de llaços d'una esfera i es demostren els teoremes de Gysin i de Wang, així com el teorema a de l'isomorfisme de Hurewicz. Finalment, es defineixen els espais d'Eilenberg-Mac Lane i es calcula la seva cohomologia en coeficients en $\mathbb{Q}$, i es demostra la finitud dels grups d'homotopia de les esferes.

2 Successions espectrals

2.1 Definició

Anem a donar una definició general de successió espectral. Aquestes estan definides tant pel cas homològic com pel cas cohomològic, en el nostre cas, però, ens centrarem en l'homològic.

Definició 2.1. *Un* ***mòdul bigraduat*** $A = A_{*,*}$ *sobre un anell* R *és una col·lecció de* R*-mòduls* $\{A_{p,q}\}_{p,q}$ *on* $p, q \in \mathbb{Z}$.

Siguin A *i* B *mòduls bigraduats, un morfisme* $f : A \to B$ *de mòduls bigraduats de bigrau* (s, t) *és una família de morfismes de* R*-mòduls tal que:*

$$f_{p,q} : A_{p,q} \to B_{p+s,q+t}$$

per a qualssevol $p, q \in \mathbb{Z}$. *Siguin ara* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$ *morfismes de mòduls bigraduats de bigrau* (s, t) *i* (s', t') *respectivament. Aleshores* $g \circ f : A \to C$ *és un morfisme de mòduls bigraduats de bigrau* $(s + s', t + t')$.

Definició 2.2. *Un* ***mòdul diferencial bigraduat*** *sobre un anell* R *és un mòdul bigraduat* $E = E_{*,*}$, *juntament amb un morfisme* $d : E_{*,*} \to E_{*,*}$ *anomenat* ***diferencial****, de bigrau* (u, v), *que satisfà* $d \circ d = 0$.

Siguin ara els submòduls de $E_{p,q}$ següents:

$$\mathrm{Ker}(d)_{p,q} = \mathrm{Ker}(d_{p,q}) \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}(d)_{p,q} = \mathrm{Im}(d_{p-u,q-v}),$$

llavors com que $d \circ d = 0$ tenim que

$$\mathrm{Im}(d)_{p,q} \subset \mathrm{Ker}(d)_{p,q} \subset E_{p,q}$$

per a tot $p, q \in \mathbb{Z}$. Aleshores, podem considerar l'homologia d'un mòdul diferencial bigraduat:

$$H_{p,q}(E, d) \cong \frac{\mathrm{Ker}(d)_{p,q}}{\mathrm{Im}(d)_{p,q}} \quad .$$

Amb els conceptes que hem explicat fins ara, ja podem donar la definició de successió espectral.

Definició 2.3. *Una* ***successió espectral homològica*** *és una col·lecció de mòduls diferencials bigraduats* $\{E^r_{p,q}, d^r\}_{r\geq 1}$ *on els diferencials* $d^r : E^r \to E^r$ *tenen bigrau* $(-r, r-1)$ *i es compleix que* $H_{p,q}(E^r, d^r) \cong E^{r+1}_{p,q}$ *per a tot* $r \geq 1$.

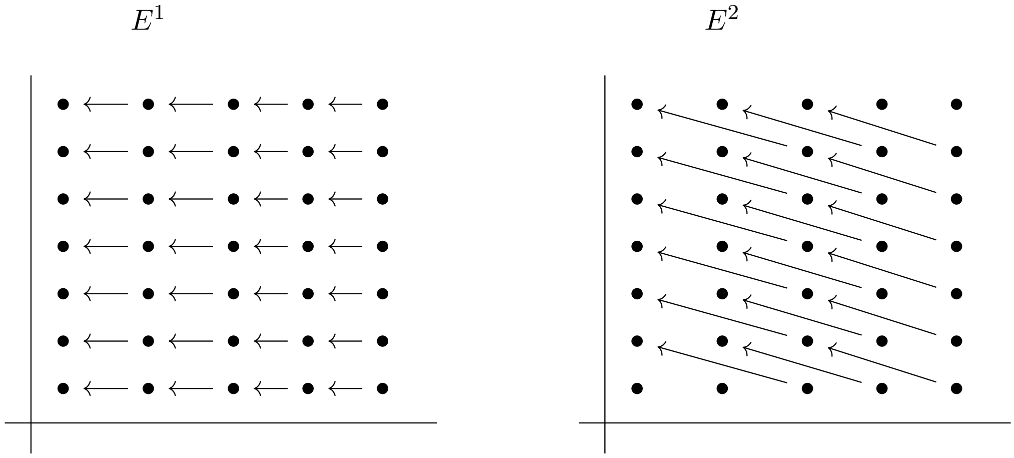
Anàlogament, podem definir les successions espectrals de tipus cohomològic:

Definició 2.4. *Una* ***successió espectral cohomològica*** *és una col·lecció de mòduls diferencials bigraduats* $\{E_r^{p,q}, d_r\}_{r\geq 1}$ *on els diferencials* $d_r : E_r \to E_r$ *tenen bigrau* $(r, 1-r)$ *i es compleix que* $H^{p,q}(E_r, d_r) \cong E^{p,q}_{r+1}$ *per a tot* $r \geq 1$.

Definició 2.5. *Sigui* $\{E^r_{p,q}, d^r\}_{r\geq 1}$ *una successió espectral, diem que és de primer quadrant si* $E^r_{p,q} = 0$ *quan* $p < 0$ *o* $q < 0$.

Les successions espectrals contenen una gran quantitat d'informació. Podem pensar-les com un llibre on cada mòdul bigraduat E^r correspon a la pàgina r-èssima. Cada una d'aquestes pàgines consta d'una quadrícula de punts, de manera que l'element situat en la posició (p, q) de la pàgina r-èssima correspon al R-mòdul $E^r_{p,q}$. A més, dels diferents punts entren i surten els diferencials, que van r unitats cap a l'esquerra i $r-1$ cap a dalt.

Per exemple, la primera i la segona pàgina d'una successió espectral de tipus homològic tendrien la següent forma:



Observació 2.6. En alguns casos, la primera pàgina d'una successió espectral no té cap rellevància i es comencen els càlculs a partir de la segona, com és el cas de la successió espectral de Serre.

2.2 La pàgina E^∞

És il·lustratiu descriure una successió espectral $\{E^r_{*,*}, d^r\}_{r\geq 1}$ en funció dels submòduls de $E^1_{*,*}$ (o de la pàgina per la qual es comença). A continuació, eliminarem els subíndexos per a facilitar la lectura. Siguin:

$$Z^1 = \operatorname{Ker} d^1 \quad \text{i} \quad B^1 = \operatorname{Im} d^1,$$

com que $d^1 \circ d^1 = 0$, podem afirmar que $B^1 \subseteq Z^1 \subseteq E^1$. A més per definició tenim que $H(E^1) \cong Z^1/B^1 \cong E^2$. Sigui ara $\overline{Z^2} = \operatorname{Ker} d^2$, com que és un submòdul de E^2 aleshores tenim $\overline{Z^2} \cong Z^2/B^1 \subseteq Z^1/B^1 \cong E^2$, on Z^2 és un submòdul de Z^1.
Procedint de la mateixa manera, denotem $\overline{B^2} = \operatorname{Im} d^2$, llavors $\overline{B^2} \cong B^2/B^1$ i com que $\overline{B^2} \subseteq \overline{Z^2}$, $B^2 \subseteq Z^1$. Per tant tenim:

$$H(E^2) = \overline{Z^2}/\overline{B^2} \cong (Z^2/B^1)/(B^2/B^1) \cong Z^2/B^2.$$

Observem que hem obtingut la cadena d'inclusions

$$B^1 \subseteq B^2 \subseteq Z^2 \subseteq Z^1 \subseteq E^1.$$

Aleshores, de manera inductiva obtenim una torre de submòduls de E^1:

$$B^1 \subseteq B^2 \subseteq \cdots \subseteq B^n \subseteq \cdots \subseteq Z^n \subseteq \cdots \subseteq Z^2 \subseteq Z^1 \subseteq E^1$$

que compleixen $E^{r+1} \cong Z^r/B^r$. Aleshores, podem considerar el diferencial d^{r+1} com una aplicació de Z^r/B^r en Z^r/B^r que té nucli Z^{r+1}/B^r i imatge B^{r+1}/B^r. Per tant de la successió exacta curta induida per d^{r+1}

$$0 \longrightarrow Z^{r+1}/B^r \longrightarrow Z^r/B^r \longrightarrow B^{r+1}/B^r \longrightarrow 0$$

obtenim que $(Z^r/B^r)/(Z^{r+1}/B^r) \cong B^{r+1}/B^r$, i pel tercer teorema d'isomorfia tenim que $Z^r/Z^{r+1} \cong B^{r+1}/B^r$.

Per acabar, tornem a introduir els subíndexos per a donar la definció de la pàgina límit:

Definició 2.7. *Considerem els submòduls bigraduats*

$$Z^\infty_{p,q} := \bigcap_{r\geq 1}^{\infty} Z^r_{p,q} \quad i \quad B^\infty_{p,q} := \bigcup_{r\geq 1}^{\infty} B^r_{p,q}$$

Observem que $B^\infty_{p,q} \subset Z^\infty_{p,q}$, aleshores definim la ***pàgina límit*** *de la successió espectral com*

$$E^\infty_{p,q} = \frac{Z^\infty_{p,q}}{B^\infty_{p,q}} \quad .$$

Podem pensar les diferents pàgines E^r com aproximacions de la pàgina límit E^∞, que serà l'objectiu de càlcul de la successió espectral. Acabem amb una proposició que ens serà útil més tard quan estudiem la pàgina E^∞.

Proposició 2.8. *Sigui $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$ una successió espectral, aleshores:*

(i) $E^{r+1} = E^r$ *si i només si* $Z^{r+1} = Z^r$ *i* $B^{r+1} = B^r$.

(ii) *si* $E^{r+1} = E^r$ *per a tot* $r \geq s$, *aleshores* $E^s = E^\infty$.

Demostració. Comencem provant (i). La implicació de dreta a esquerra és trivial. Ara, suposem que $E^{r+1} = E^r$. Com que $B^r \subseteq B^{r+1} \subseteq Z^{r+1} \subseteq Z^r$ i $E^{r+1} = Z^{r+1}/B^{r+1} = Z^r/B^r = E^r$, si $x \in B^{r+1}$, tenim que $\bar{x} = \bar{0}$ en Z^r/B^r. Per tant, $Z^{r+1}/B^r = Z^r/B^r$ i d'aqui $Z^{r+1} = Z^r$.
L'apartat (ii) surt de manera directa de (i). □

2.3 Construcció

Un cop hem definit el concepte de successió espectral, anem a veure com podem obtenir-les. Principalment, poden construir-se a partir de dos objectes matemàtics: les parelles exactes o els mòduls filtrats.

A més, cal destacar que podem obtenir una parella exacta a partir d'un mòdul filtrat. En aquest cas, la successió espectral associada a la parella exacta obtinguda serà equivalent a l'associada directament al mòdul filtrat.

$$
\begin{tikzcd}
\{\text{Parelles exactes}\} \arrow[r] & \{\text{Successions espectrals}\} \\
\{\text{Mòduls filtrats}\} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

En el nostre cas, construirem una parella exacta a partir d'un mòdul filtrat, per associar-li finalment una successió espectral.

Definició 2.9. *Sigui $M_* = M_n$, un R-mòdul graduat, una filtració de M_* és una família de submòduls tal que*

$$\cdots F^{p+1}M_* \subset F^pM_* \subset F^{p-1}M_* \subset \cdots \subset M_* \qquad \textit{(filtració decreixent)}$$

o bé,

$$\cdots F^{p-1}M_* \subset F^pM_* \subset F^{p+1}M_* \subset \cdots \subset M_* \qquad \textit{(filtració creixent)}$$

on $p \in \mathbb{Z}$. Diem que p és el grau de la filtració i n és el grau total.

Exemple 2.10. Suposem que tenim un espai topològic X, podem pensar el complex de cadenes $(C_*(X), d)$ com un mòdul diferencial filtrat graduat C amb la filtració donada per $C_n(X)$ i el diferencial $C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$. Aleshores $C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n(X)$.

En el nostre cas, suposarem que tenim una filtració creixent. Llavors, per a cada $p \in \mathbb{Z}$ tenim una successió exacta curta de R-mòduls graduats

$$0 \longrightarrow F^{p-1}M_* \longrightarrow F^pM_* \longrightarrow F^pM_*/F^{p-1}M_* \longrightarrow 0.$$

que ens indueix una successió exacta llarga en homologia:

$$\cdots \to H_n(F^{p-1}M_*) \to H_n(F^pM_*) \to H_n(F^pM_*/F^{p-1}M_*) \to H_{n-1}(F^{p-1}M_*) \to \cdots$$

Observem que cada successió exacta llarga té termes comuns amb la successió consecutiva, per això podem unir-les totes en el diagrama exacte següent:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & H_n(F^{p-1}M_*) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(F^{p-1}M_*/F^{p-2}M_*) \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-2}M_*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(F^pM_*) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(F^pM_*/F^{p-1}M_*) \arrow[r] & H_{n-1}(F^{p-1}M_*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(F^{p+1}M_*) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(F^{p+1}M_*/F^pM_*) \arrow[r] & H_{n-1}(F^pM_*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Per tal de simplificar la notació, reescrivim $n = p + q$, i definim $A^1_{p,q} = H_{p+q}(F^p M_*)$ i $E^1_{p,q} = H_{p+q}(F^p M_*/F^{p-1}M_*)$. D'aquesta manera podem considerar els R-mòduls bigraduats següents:

$$A = \bigoplus_{p,q} A^1_{p,q} \qquad \text{i} \qquad E = \bigoplus_{p,q} E^1_{p,q}.$$

Ara ja podem introduir el concepte de parella exacta. Aquesta estructura, ens permetrà tenir una visió més resumida del diagrama anterior i serà el punt de partida de la successió espectral.

Definició 2.11. *Siguin A, E R-mòduls (bigraduats), i, j, k morfismes de R-mòduls. Una **parella exacta**, $\mathcal{C} = \{A, E, i, j, k\}$ és una successió exacta de la forma:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & A \arrow[dl, "j"] \\ E \arrow[u, "k"] & \end{tikzcd}$$

Definim $d : E \to E$ donat per $d = j \circ k$. Degut a l'exactitud dels morfismes, tenim que $d \circ d = (j \circ k) \circ (j \circ k) = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$. Aleshores, d actua com a diferencial. Llavors, és natural considerar l'homologia de E. Ara, anem a definir la **parella derivada** de la parella exacta inicial. Sigui:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] & A' \arrow[dl, "j'"] \\ E' \arrow[u, "k'"] & \end{tikzcd}$$

on

- $E' = H(E, d) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$.
- $A' = i(A)$.
- $i' = i|_{A'}$.
- $j'(i(a)) = [j(a)] \in E'$. Aquesta aplicació està ben definida, en efecte, $j(a) \in \operatorname{Ker} d$ ja que $d(j(a)) = (jk)(j(a)) = j(kj)(a) = 0$. Per altra banda, si $i(a_1) = i(a_2)$ tenim que $i(a_1) - i(a_2) = i(a_1 - a_2) = 0$, llavors $a_1 - a_2 \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$. Per tant existeix $y \in E$ tal que $k(y) = a_1 - a_2$, aleshores $j(a_1) - j(a_2) \in \operatorname{Im} jk = \operatorname{Im} d$.
- $k'([b]) = k(b)$. Per exactitud, tenim que si $j(k(b)) = 0$, existeix algun $a \in A$ tal que $k(b) = i(a)$.

Un cop construïda la parella derivada, tenim el següent resultat:

Proposició 2.12. *La parella derivada $\mathcal{C}' = \{A', E', i', j', k'\}$ definida anteriorment és una parella exacta.*

Demostració. Demostrarem l'exactitud en cada vèrtex:

(i) $\operatorname{Im} i' = \operatorname{Ker} j'$: Si $a'`\in A', a' = i(a)$. Llavors $j'(i'(a')) = j'(i(a')) = [j(a')] = 0$ per exactitud , aleshores $\operatorname{Im} i' \subset \operatorname{Ker} j'$. Per altra banda, si tenim $a' \in A'$ tal que $j'(a') = 0$. Com que $a' = i(a)$, $j'(a') = j'(i(a)) = [j(a)] = 0$. Aleshores, $j(a) \in \operatorname{Im} d$, per tant, $j(a) = d(e) = j(k(e))$ per algun $e \in E$. Ara, $(a - k(e)) \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$. Per tant, existeix $b \in A$ tal que $i(b) = a - k(e)$, llavors, $i(a - k(e)) = i(a) - i(k(e)) = i(a) = i^2(b)$. Aleshores, $a' = i(a) \in \operatorname{Im} i^2 = \operatorname{Im} i'$.

(ii) $\operatorname{Im} j' = \operatorname{Ker} k'$: Sigui $a' \in A'$, com $a' = i(a)$, tenim $k'(j'(a')) = k'[j(a)] = k(j(a)) = 0$, aleshores $\operatorname{Im} j' \subset \operatorname{Ker} k'$. Fem l'altra inclusió, Sigui $[e] \in E'$ tal que $k'[e] = 0$, aleshores, $k(e) = 0$ i per exactitud, existeix $a \in \operatorname{Im} j$ tal que $e = j(a)$. Això implica que $[e] = [j(a)] = j'(a')$. Llavors $[e] \in \operatorname{Im} j$.

(iii) $\operatorname{Im} k' = \operatorname{Ker} i'$: Sigui $[e] \in E'$, $i'(k'([e])) = i'(k(e)) = i(k(e)) = 0$, llavors $\operatorname{Im} k' \subset \operatorname{Ker} i'$. Ara, si $a' \in \operatorname{Ker} i'$, $i'(a') = 0$, per tant, $i(a') = 0$ llavors $a' \in \operatorname{Im} k$, aleshores $a' = k(e)$ per algun $e \in E$, que equival a $a' = k'[e]$. Aleshores $a' \in \operatorname{Im} k'$.

□

Observació 2.13. Donada una parella exacta $\mathcal{C} = \{A, E, i, j, k\}$, podem iterar el procés anterior per tal d'obtenir la **r-èssima parella derivada de $\mathcal{C}$**,

$$\mathcal{C}^r = \{A^r, E^r i^r, j^r, k^r\}.$$

Un cop hem definit els R-mòduls bigraduats $A = A_{*,*}$ i $E = E_{*,*}$, els morfismes i, j, k i el concepte de parelles derivades i exactes, ja podem enunciar el teorema que ens permet construir una successió espectral a partir d'una parella exacta.

Teorema 2.14. *Siguin $A = A_{*,*}$ i $E = E_{*,*}$ R-mòduls bigraduats, considerem la següent parella exacta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & A \arrow[dl, "j"] \\ E \arrow[u, "k"] & \end{tikzcd}$$

on i, j, k tenen bigraus (1,-1), (0,0) i (-1,0), respectivament. Aleshores $\{E^r, d^r\}$, $r = 1, 2, \ldots$ determina una successió espectral de tipus homològic, on $E^r_{*,*}$ és el r-èssim mòdul derivat de $E_{*,*}$ i $d^r = j^r \circ k^r$.

Demostració. Com que per definició tenim que $E^{r+1} \cong H(E^r)$ només ens cal provar que d^r té bigrau $(-r, r-1)$. Ho farem per inducció, com que $d^1 = j^1 \circ k^1$, el grau de d^1 és $(0,0) + (-1,0) = (-1,0)$. Ara suposem que j^{r-1} i k^{r-1} tenen bigraus $(2-r, r-2)$ i $(-1,0)$. Com que $j^r(i^{r-1}(a)) = [j^{r-1}(a)]$, tenim que j^r te bigrau $(1-r, r-1)$, per altra banda, $k^r[e] = k^{r-1}(e)$, llavors k té bigrau $(-1,0)$. Per tant, el grau de $d^r = j^r \circ k^r$ és $(1-r, r-1) + (-1,0) = (-r, r-1)$ tal com volíem demostrar. □

Si escrivim el diagrama exacte de la pàgina 7 en la notació $A_{*,*}$, $E_{*,*}$ és facil veure que els morfismes i, j, k tenen els graus adequats per a poder aplicar el teorema anterior.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "i"] & \vdots & \vdots \arrow[d, "i"] & \\
\cdots \arrow[r, "k"] & A_{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p-1,q+1} \arrow[r, "k"] & A_{p-2,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "k"] & A_{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p,q} \arrow[r, "k"] & A_{p-1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "k"] & A_{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p+1,q-1} \arrow[r, "k"] & A_{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Observació 2.15. En cada una de les columnes, tant $E^r_{*,*}$ com $A^r_{*,*}$, el grau total $n = p+q$ es manté constant.

2.4 Convergència d'una successió espectral

A continuació estudiarem més a fons la convergència d'una successió espectral donant algunes eines que ens permetran trobar els diferents R-mòduls $E^\infty_{p,q}$. Ho farem suposant certes algunes hipòtesis que en la successió espectral de Serre es satisfan i que ens facilitaran la feina. Abans de tot, ens cal saber que significa que una successió espectral convergeixi.

Definició 2.16. *Sigui $\{E^r_{*,*}, d^r\}_{r\geq 1}$ una successió espectral i $(F^pA_*)_p$ una filtració associada a un R-mòdul graduat A_*, aleshores diem que la successió espectral **convergeix a $\mathbf{A}_*$** si existeixen isomorfismes*

$$E^\infty_{p,q} \cong \frac{F^pA_{p+q}}{F^{p-1}A_{p+q}}$$

per a qualssevol $p, q \in \mathbb{Z}$. En aquest cas ho denotem

$$E^r_{*,*} \Longrightarrow A_*.$$

Ara, suposarem que en cada columna de A's totes menys un nombre finit de les i's són isomorfismes. És a dir, que hi ha un terme inferior i un de superior entre els quals tots els mòduls són isomorfs. En el nostre cas, els denotarem $A^1_{n,0}$ i $A^1_{n,\infty}$, respectivament, on n denota el grau total d'aquella columna. A més suposarem que $A^1_{n,0} = 0$.

Aquest fet, implica per exactitud que només un nombre finit de termes en les columnes de les E's són diferents de 0. D'aquesta manera, podem a firmar que per a un valor de r prou gran $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q}$.

A continuació, si mirem la r-èssima parella derivada tenim:

$$\cdots \longrightarrow E^r_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{k} A^r_{p+r-2,q-r+2} \xrightarrow{i} A^r_{p+r-1,1-r+1} \xrightarrow{j} E^r_{p,q} \xrightarrow{k} A^r_{p-1,q} \longrightarrow \cdots$$

Ja hem vist que si r és suficientment gran, $E^r_{p+r-1,q-r+2} = 0$. Per altra banda, tenim que $A^r_{p-1,q} = i^{r-1}(A^1_{p-r,q+r-1})$, llavors per $r >> 0$, tindrem que $A^1_{p-r,q+r-1} \cong A^1_{n-1,0} = 0$, per tant $A^r_{p-1,q} = 0$. D'aquesta manera obtenim la següent successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow A^r_{p+r-2,q-r+2} \longrightarrow A^r_{p+r-1,q-r+1} \longrightarrow E^r_{p,q} \longrightarrow 0,$$

d'on obtenim l'isomorfisme

$$E^r_{p,q} \cong \frac{A^r_{p+r-1,q-r+1}}{i(A^r_{p+r-2,q-r+2})}.$$

Finalment, ens interessa reescriure l'isomorfisme en termes de filtracions, per això definim per a cada n els submòduls de $A^1_{n,\infty}$:

$$F^p A^1_{n,\infty} : \mathrm{Im}(A^1_{p,q} \hookrightarrow A^1_{n,\infty}),$$

que ens donen una filtració creixent de $A^1_{n,\infty}$:

$$\cdots \subseteq F^{p-1}A1_{n,\infty} \subseteq F^p A^1_{n,\infty} \subseteq F^{p+1}A1_{n,\infty} \subseteq \cdots \subseteq A^1_{n,\infty}.$$

Per acabar, observem que $A^r_{p+r-1,q-r+1} = i^{r-1}(A^1_{p,q})$ i $i(A^r_{p+r-2,q-r+2}) = i(i^{r-1}(A^1_{p-1,q+1})) = i^r(A^1_{p-1,q+1})$, i si r és suficientment gran, $A^1_{p+r-1,q-r+1} = A^1_{p+r-2,q-r+2} = A^1_{n,\infty}$. Per tant,

$$A^r_{p+r-1,q-r+1} = \mathrm{Im}(A^1_{p,q} \hookrightarrow A^1_{n,\infty}) = F^p A^1_{n,\infty}$$
$$i(A^r_{p+r-2,q-r+2}) = \mathrm{Im}(A^1_{p-1,q+1} \hookrightarrow A^1_{n,\infty}) = F^{p-1}A^1_{n,\infty}$$

i

$$E^\infty_p \cong \frac{F^p A_{n,\infty}}{F^{p-1}A_{n,\infty}}$$

tal i com voliem veure.

3 La successió espectral de Serre

En aquesta secció tractarem la successió espectral de Serre. Tot i això, prèviament recordarem la propietat d'elevació d'homotopies i introduirem alguns conceptes nous com ara el de fibració d'un espai topològic. També donarem alguns exemples i resultats que més tard ens seran útils a l'hora d'utilitzar la successió.

Tot seguit, introduirem la successió espectral de Serre, tant pel cas homològic com pel cohomològic. Donada una fibració $\pi : E \to B$ amb fibra F, aquesta successió espectral ens permet relacionar els grups d'homologia (cohomologia) dels espais E, B i F. En la majoria dels casos, s'utilitza per a trobar l'homologia (cohomologia) de l'espai total E a partir de les homologies de B i F. Tot i això, a vegades, també ens permet trobar l'homologia (cohomologia) d'un espai (que no sigui necessàriament E) a partir de la dels altres dos.

Per acabar la secció, parlarem de la estructura multiplicativa amb la que podem dotar la successió espectral en el cas cohomològic quan calculem la cohomologia amb coeficients en un anell commutatiu. Aquest producte ens serà de gran utilitat a l'hora de trobar les aplicacions diferencials de la successió espectral.

3.1 Fibracions

Definició 3.1. *Sigui $\pi : E \to B$ una aplicació contínua i Y un espai topològic. Diem que π té la* ***propietat d'elevació d'homotopies*** *respecte Y si donada una homotopia $H : Y \times [0,1] \to B$ i una aplicació $h : Y \to E$ tal que $H(y,0) = \pi \circ h(y)$, aleshores existeix una homotopia $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to E$ tal que $\tilde{H}(y,0) = h(y)$ per a tot y i $\pi \circ \tilde{H} = H$. Podem visulitzar-ho millor amb el següent diagrama commutatiu:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
Y \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Definició 3.2. *Una* ***fibració*** *és una aplicació $\pi : E \to B$ que satisfà la propietat d'elevació d'homotopies respecte qualsevol espai X. Per altra banda, diem que una aplicació $\pi : E \to B$ és una* ***fibració de Serre*** *si satisfà la propietat d'elevació d'homotopies respecte qualsevol n-cèl·lula.*

*Així doncs, donada una fibració anomenarem a E l'**espai total** i a B la **base** de la fibració. A més, per a qualsevol $b \in B$ denominem **fibra** de π sobre b a l'antiimatge $F_b = \pi^{-1}(b)$.*

Observació 3.3. Per la definició anterior és clar que qualsevol fibració és una fibració de Serre. No obstant, el contrari no és cert, és a dir, no tota fibració de Serre és una fibració.

Una de les propietats més interessants de les fibracions de Serre és la següent:

Teorema 3.4. *Sigui $\pi : E \to B$ una fibració de Serre. Considerem els punts $e_0 \in X$ i $b_0 \in B$ tals que $\pi(e_0) = b_0$, i definim la fibra $F = \pi^{-1}(b_0)$, aleshores tenim la successió exacta llarga:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(B,b_0) \arrow[r] & \pi_n(F,e_0) \arrow[r] & \pi_n(E,e_0) \arrow[r] & \pi_n(B,b_0) \arrow[r] & \pi_{n-1}(F,e_0) \arrow[r] & \cdots \arrow[dllllll, hook, rounded corners] \\
\cdots \arrow[r] & \pi_1(B,b_0) \arrow[r] & \pi_0(F,e_0) \arrow[r] & \pi_0(E,e_0) \arrow[r] & \pi_0(B,b_0) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostració. No la farem. □

Proposició 3.5. *Sigui $\pi : E \to B$ una fibració amb B arc-connex, aleshores per a tots $b_1, b_2 \in B$, F_{b_1} és homotòpicament equivalent a F_{b_2}.*

Demostració. Com que B és arc-connex, existeix un camí $\gamma : [0,1] \to B$ tal que $\gamma(0) = b_1$ i $\gamma(1) = b_2$. Aleshores, considerem el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
F_{b_1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "\pi"] \\
F_{b_1} \times [0,1] \arrow[r, "\gamma"'] & B
\end{tikzcd}$$

On i denota la inclusió de F_{b_1} en l'espai total E. Observem que $\pi(i(x)) = b_1$, ja que si $x \in F_{b_1}$, l'aplicació π envia un punt de la fibra F_{b_1} al punt base b_1. Aleshores, $h(x,0) = b_1$ per a tot $x \in \pi^{-1}(b_1)$.

Aleshores, podem definir $h(x,t) = \gamma(t)$. Ara, com que π és una fibració, tenim que satisfà la propietat d'elevació d'homotopies. Per tant, tenim una única aplicació $\bar{h} : \pi^{-1}(b_1) \times I \to E$ tal que $\pi \circ \bar{h} = h$. Llavors, podem concloure que $\bar{h}$ defineix una homotopia entre $\pi^{-1}(b_1)$ i $\pi^{-1}(b_2)$. □

A partir d'ara, donada una fibració $\pi : E \to B$, sempre que estiguem en el cas que B és arc-connex, podem parlar de F com la fibra de π, ja que sabem que és única excepte equivalència homotòpica, i usualment escriurem $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$.

Lema 3.6. *Sigui $F \hookrightarrow E \to B$ una fibració, aleshores tenim una successió*

$$\cdots \to \Omega^2 F \to \Omega^2 E \to \Omega^2 B \to \Omega F \to \Omega E \to \Omega B \to F \to E \to B$$

on tot parell d'aplicacions consecutives formen una fibració. Aquesta successió rep el nom de ***successió de Puppe****.*

Demostració. La podeu trobar a [2]. □

Exemple 3.7. La projecció sobre el primer factor, $\pi : B \times F \to B$ és una fibració amb fibra F. L'anomenem fibració trivial. Per veure que és una fibració, anem a veure que satisfà la propietat d'elevació d'homotopies. Com que π és la projecció sobre la primera component i $\pi(h(y)) = H(y,0)$, escrivim $h(y) = (H(y,0), h_2(y))$, per tant, podem definir $\tilde{H}(y,t) = (H(y,t), h_2(y))$, que compleix el que volem demostrar.

Un exemple menys intuïtiu d'una fibració és el següent:

Exemple 3.8. Existeix una fibració $\nu : S^3 \to S^2$ amb fibra S^1. L'anomenem fibració de Hopf. Anem a donar una idea de la seva contrucció sense entrar en detalls. En primer lloc, considerem $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Ara, com que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, definim la projecció: $p : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to \mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Finalment, sigui $\nu := p_{|S^3}$, tenim la fibració desitjada:

$$\nu : S^3 \to S^2$$

Ara, sigui $x \in S^2$, la seva fibra és $\nu^{-1}(x) = \{\lambda(z,w) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, per a $(z,w) \in \mathbb{C}$ fixats. Si restringim aquest conjunt a S^3, la fibra és el conjunt de solucions de l'equació $|\lambda|^2(|z|^2 + |w|^2) = 1$, que és homeomorf a S^1.

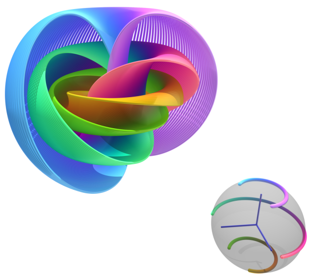


Figura 1: *Representació de la fibració de Hopf.*

Definició 3.9. *Sigui X un espai topològic amb punts base x_0, diem que X és **n-connex** si $\pi_i(X, x_0) = 0$ per a tot $i \leq n$. Si es 1-connex direm que és **simplement connex**.*

3.2 La successió espectral de Serre

A continuació, introduirem la successió espectral de Serre En el nostre cas considerarem que tenim una fibració $\pi : X \to B$, on B és un CW-complex arc-connex. La filtració de B donada pels successius p-esquelets, ens indueix una filtració creixent de X donada per $X_p = \pi^{-1}(B^{(p)})$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\emptyset & \subset & B^{(0)} & \subset & \cdots & B^{(p-1)} & \subset & B^{(p)} & \subset & \cdots & B \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
\emptyset & \subset & X_0 & \subset & \cdots & X_{p-1} & \subset & X_p & \subset & \cdots & X
\end{array}$$

Aleshores, per a cada p tenim una successió exacta llarga

$$\cdots \to H_n(X_{p-1}) \to H_n(X_p) \to H_n(X_p, X_{p-1}) \to H_{n-1}(X_{p-1}) \to \cdots .$$

Llavors, com hem vist en l'apartat anterior, tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{p-1}, X_{p-2}) \arrow[r] & H_{n-1}(X_{p-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_p, X_{p-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X_{p+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{p+1}, X_p) \arrow[r] & H_{n-1}(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

La propietat d'elevació d'homotopies juntament amb el fet que el parell $(B^{(p)}, B^{(p-1)})$ sigui p-connex, ens asseguren que (X^p, X^{p-1}) també serà p-connex. D'aquesta manera, la inclusió $X_p \hookrightarrow X$ indueix un isomorfisme en els grups d'homologia quan $p > n$. Per altra banda, per la definició de X_p podem afirmar que $X_p = \emptyset$ quan $p < 0$. D'aquests dos fets, podem conclou que hi haurà una successió espectral associada a la filtració de X definida anteriorment que convergirà a $H_*(X)$.

A més, la primera pàgina de la successió espectral estarà formada pels grups $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$. Com que el parell (X_p, X_{p-1}) és $(p-1)$-connex, llavors $E^1_{p,q} \neq 0$ només quan $p+q \geq p$, i com que per la definició de la filtració $p \geq 0$ podem concloure que $q \geq 0$, aleshores tenim que la successió espectral és de primer quadrant.

Cal remarcar que uns dels motius que fan aquesta successió espectral tan rellevant és la manera en la que podem expressar la pàgina E^2 de la successió en termes dels grups d'homologia de la base B, i la fibra F. Tot seguit, donarem una versió reduïda de com podem obtenir aquesta expressió en el cas en que la fibració és trivial, és a dir, $E = B \times F$, i B es arc-connex.

Si estem en aquesta situació, podem demostrar que $(X_p, X_{p-1}) = (B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F$. Llavors, $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = H_{p+q}((B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F)$. Per tant, aplicant la fórmula de Künneth obtenim que

$$E^1_{p,q} \cong Cell_p(B) \otimes H_q(F; G),$$

on $Cell_p(B)$ denota l'homologia cel·lular p-èssima de B. Passant a la següent pàgina tenim

$$E^2_{p,q} \cong H_{p+q}(Cell_p(B) \otimes H_q(F; G))$$

i pel teorema dels coeficients universals, obtenim l'expressió

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B; H_q(F; G))$$

tal com volíem veure.

Cal aclarar que denotarem l'homologia d'un espai X amb coeficients en un sistema local A com $H_*(X;\underline{A})$. Ídem per la cohomologia.

Arribats fins aquí, anem a enunciar els teoremes, tant pel cas homològic com pel cohomològic.

Teorema 3.10. *Sigui G un R-mòdul. Donada una fibració $F \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} B$ amb B arc-connex, existeix una successió espectral (de tipus homològic) de primer quadrant $\{E^r_{*,*}, d^r\}$ que convergeix a $H_*(X;G)$ amb*

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B; \underline{H_q(F;G)}).$$

És a dir, l'homologia singular de B amb coeficients en el sistema local induït per la fibra de π. Aquesta successió espectral és natural respecte les aplicacions que preserven la fibra. A més, si B és simplement connex, qualsevol fibració sobre B indueix un sistema de coeficients locals simple, per tant

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B; H_q(F;G)).$$

Demostració. Podeu consultar la demostració a [3], [5] . A més, si voleu veure la construcció de la successió espectral amb coeficients en un sistema local, ho podeu fer a [4] □

De la mateixa manera, definim la successió espectral pel cas cohomològic.

Teorema 3.11. *Sigui R un anell commutatiu amb unitat. Donada una fibració $F \hookrightarrow X \xrightarrow{\pi} B$, amb B arc-connex existeix una successió espectral (de tipus cohomològic) de primer quadrant $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ que convergeix a $H^*(X;R)$ amb*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \underline{H^q(F;R)}).$$

És a dir, la cohomologia singular de B amb coeficients en el sistema local induït per la fibra de π. Aquesta successió espectral és natural respecte les aplicacions que preserven la fibra. De la mateixa manera que en el cas homològic, si B és simplement connex, tenim que

$$E^2_{p,q} \cong H^p(B; H^q(F;G)).$$

Pel teorema dels coeficients universals i el teorema de Künneth es pot demostrar que si es calcula la cohomologia amb coeficients en un cos K, aleshores

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F;K)) \cong H^p(B;K) \otimes_k H^q(F;K)$$

Observació 3.12. Pot ser important aclarar que el fet que la successió convergeixi a $H_*(X)$, significa que l'homologia de X és la suma directa de les diagonals principals de E^∞, és a dir:

$$H_n(X) = \bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{p,q}$$

Per a tot n. El mateix és cert pel cas cohomològic.

3.3 Estructura multiplicativa

El fet que la cohomologia sigui un functor contravariant ens permet definir-hi un producte, anomenat *producte cup*, que li dona estructura d'anell. La idea bàsica és que donades dues cocadenes $\alpha \in C^p(X;R)$ i $\beta \in C^q(X;R)$, el *producte cup* ens dona una cocadena $\alpha \smile \beta \in C^{p+q}(X;R)$, definida en un $(p+q)$-símplex singular $\sigma : \Delta^{p+q} \to X$ per:

$$(\alpha \smile \beta)(\sigma) := \alpha(\sigma|_{[v_0,\dots,v_p]}) \cdot \beta(\sigma|_{[v_p,\dots,v_{p+q}]})$$

On $\cdot$ denota el producte en R. D'aquesta manera, la covora de $\alpha \smile \beta$ ve donada per:

$$\delta(\alpha \smile \beta) := \delta\alpha \smile \beta + (-1)^p \alpha \smile \delta\beta$$

Per a veure'n una demostració podeu consultar [7].
Podem deduir per la fórmula anterior que el producte cup de dos cocicles és un cocicle, i que el producte d'un cocicle i una covora és una covora, llavors, el *producte cup* ens indueix un producte en cohomologia:

$$\smile : H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R).$$

Aleshores, podem definir l'anell de cohomologia.

Definició 3.13. *Sigui X un espai topològic i R un anell commutatiu amb unitat, definim el grup*

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(X;R)$$

*aleshores, juntament amb el producte cup obtenim una estructura d'anell unitari (i graduat) , que anomenarem l'**anell de cohomologia** de X amb coeficients en R.*

Tot i això, l'anell de cohomologia no és un anell commutatiu. De fet, diem que és anticommutatiu. Més concretament, donats dos generadors $\alpha \in H^p(X;R)$ i $\beta \in H^q(X;R)$, tenim que

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq}(\beta \smile \alpha).$$

D'aquesta manera, podem donar a la successió espectral de Serre cohomològica una estructura multiplicativa dotant-la d'uns productes bilineals $E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \xrightarrow{\cdot_r} E_r^{p+s,q+t}$ per a $1 \leq r \leq \infty$, que compleixen les següents propietats:

(i) Els diferencials d_r satisfan $d_r(x \cdot_r y) = d_r(x) \cdot_r y + (-1)^{p+q} x \cdot_r d_r(y)$ on $x \in E_r^{p,q}$ i $y \in E_r^{s,t}$.

(ii) El producte $\cdot_r$ en E_r indueix el producte $\cdot_{r+1}$ en E_{r+1}.

(iii) En la pàgina E_2, el producte ve donat per $x \cdot_2 y = (-1)^{qs} x \smile y$, on

$$\smile\colon H^p(B; H^q(F;R)) \times H^s(B; H^t(F;R)) \to H^{p+s}(B; H^{q+t}(F;R))$$

denota el *producte cup* definit abans. A més els coeficients, també venen donats pel *producte cup* $H^q(F;R) \times H^t(F;R) \to H^{q+t}(F;R)$.

(iv) Si l'homologia està calculada sobre un cos K, el producte en la pàgina E_2,

$$\smile\colon (H^p(B;K) \otimes H^q(F;K)) \times (H^s(B;K) \otimes H^t(F;K)) \to (H^{p+s}(B;K) \otimes H^{q+t}(F;K))$$

ve donat per

$$(x \otimes y) \cdot_2 (z \otimes u) = (-1)^{|y||z|}(x \smile z) \otimes (y \smile u)$$

A més, tenim

$$E^{p,0} \cong H_p(B; H_0(F;R)) \cong H_p(B;R),$$
$$E^{0,q} \cong H_0(B; H_q(F;R)) \cong H_q(F;R),$$

Podeu consultar [3] per a veure una demostració de (i),...,(iv).

4 Aplicacions de la successió espectral de Serre

4.1 La fibració de camins

En aquest apartat introduirem la fibració de camins. Aquesta eina ens serà de gran utilitat a l'hora d'aplicar la successió espectral de Serre, ja que ens permet construir una fibració a partir d'un espai topològic qualsevol. Comencem definint alguns conceptes:

Donat un espai topològic puntejat (X, x_0), definim l'*espai de camins* de X com

$$PX = \{\lambda : [0,1] \to X \mid \ \lambda \text{ és contínua i } \lambda(0) = x_0\}$$

i l'*espai de llaços* de X,

$$\Omega X = \{\lambda : [0,1] \to X \mid \ \lambda \text{ és contínua i } \lambda(0) = \lambda(1) = x_0\}.$$

Aleshores tenim el següent resultat:

Proposició 4.1. *Sigui (X, x_0) un espai puntejat, aleshores l'aplicació $\pi : PX \to X$ que envia λ a $\lambda(1)$ és una fibració amb fibra ΩX.*

Demostració. En primer lloc, anem a veure que l'aplicació és una fibració. Suposem que tenim una aplicació $h : Y \to PX$ i una homotopia $H : Y \times [0,1] \to X$ tals que $H(y, 0) = \pi(h(y))$ per a tot $y \in Y$, aleshores definim la funció $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to PX$ de la següent manera:

$$\tilde{H}(y,t)(s) = \begin{cases} h(y)(s(t+1)), & \text{si } 0 \leq s \leq \ 1/(t+1), \\ H(y, s(t+1) - 1), & \text{si } 1/(t+1) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Primer de tot, tenim que $\tilde{H}(y,t)(s) \in PX$ és una aplicació contínua. A més, per una banda tenim que $\tilde{H}(y,0)(s) = h(y)$. Per altra banda, $\pi(\tilde{H}(y,t)(s)) = \tilde{H}(y,t)(1) = H(y,t)$. Per tant, la propietat d'elevació d'homotopies es satisfà per a qualsevol espai Y. En conseqüència, $\pi : PX \to X$ és una fibració. Per acabar, observem que la fibra de π és $F_{x_0} = \pi^{-1}(x_0) = \{\lambda \in PX \mid \pi(\lambda) = \lambda(1) = x_0\} = \Omega X$. □

Proposició 4.2. *Per a qualsevol espai topològic puntejat (X, x_0), l'espai de camins és contràctil.*

Demostració. Sigui $f : PX \to \{x_0\}$ l'aplicació tal que $f(\lambda) = \lambda(0)$ i $g : \{x_0\} \to PX$ l'aplicació que envia x_0 al camí constant x_0 en B. Hem de veure que $f \circ g \sim Id_{\{x_0\}}$ i $g \circ f \sim Id_{PX}$. En primer lloc, observem que $f(g(x_0)) = x_0$, per tant, $f \circ g = Id_{\{x_0\}}$. Per veure que $g \circ f \sim Id_{PX}$, definim la homotopia $H(\lambda, t)(s) = \lambda(s(1-t))$ per a tot $\lambda \in PX$ i $t, s \in [0,1]$. Observem quue és contínua ja que és composició de dues funcions contínues λ i $p(s,t) = s(1-t)$ Aleshores, tenim que $H(\lambda, 0)(s) = \lambda(s) = Id_{PX}(\lambda)$ i $H(\lambda, 1)(s) = \lambda(0) = x_0 = g(f(\lambda))$ □

Finalment, podem enunciar el següent corol·lari:

Corołari 4.3. *Sigui (X, x_0) un espai puntejat, tenim que $\pi_{n+1}(X, x_0) \cong \pi_n(\Omega X, x_0)$ per a tot $n \geq 1$.*

Demostració. Considerem la fibració de camins $\Omega X \hookrightarrow PX \to X$, aleshores apliquem el teorema 3.4 i com que hem vist que PX és contràctil, tenim que $\pi_n(PX, x_0) = 0$ per a tot n. Aleshores tenim els isomorfismes desitjats. □

4.2 Homologia de ΩS^n

Començarem a utilitzar la successió espectral de Serre amb un exemple senzill. Utilitzarem la fibració de camins $\Omega S^n \hookrightarrow PS^n \to S^n$ per a trobar l'homologia de ΩS^n.

El cas $n = 1$ és trivial. Suposem que $n \geq 2$, llavors sabem que S^n és simplement connex.
Ara, recordem els grups d'homologia de l'esfera S^n i d'un punt (amb coeficients en $\mathbb{Z}$):

$$H_p(S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 0, n \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad H_p(\{*\};\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = 0 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant, els elements de la pàgina inicial valen:

$$E^2_{p,q} = H_p(S^n; H_q(\Omega S^n)) = \begin{cases} H_q(\Omega S^n), & \text{si } q = 0, n \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

A més, com que la successió convergeix a l'homologia de PS^n (que és un espai contràctil), tenim que $E^\infty_{p,q} = \mathbb{Z}$ si $(p,q) = (0,0)$ i 0 en cas contrari.

Pel que fa als diferencials , observem que els únics que poden ser diferents de 0 són $d^n_{n,q} : E^n_{n,q} \to E^n_{o,q+n-1}$. Aquest fet ens permet assegurar que $E^1 = E^2 = \cdots = E^n$ i $E^{n+1} = \cdots = E^\infty$. Aleshores, observem que tenim la successió exacta:

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n,q} \longrightarrow E^n_{n,q} \xrightarrow{d_n} E^n_{0,q+n-1} \longrightarrow E^\infty_{0,q+n-1} \longrightarrow 0$$

i com que $E^\infty_{p,q} = 0$ quan $(p,q) \neq (0,0)$ podem deduir que els diferents d_n seran isomorfismes. A més, la resta de grups d'homologia $H_p(\Omega S^n)$ per a $0 < p < n$ valen 0, ja que no tenen cap diferencial ni entrant ni sortint, i per tant, en passar a la pàgina infinit no moririen. Llavors:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
3(n-1) & H_{3(n-1)}(\Omega S^n) & H_{3(n-1)}(\Omega S^n) \\
2(n-1) & H_{2(n-1)}(\Omega S^n) & H_{2(n-1)}(\Omega S^n) \arrow[ul] \\
n-1 & H_{n-1}(\Omega S^n) & H_{n-1}(\Omega S^n) \arrow[ul] \\
0 & H_0(\Omega S^n) & H_0(\Omega S^n) \arrow[ul] \\
 & 0 & n
\end{tikzcd}$$

Aleshores, observem que tenim els següents isomorfismes

$$H_{k(n-1)}(\Omega S^n; G) \cong H_{(k+1)(n-1)}(\Omega S^n; G)$$

per a tot $k \geq 0$. Llavors:

$$H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = k(n-1) \text{ amb } k \geq 0, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

4.3 Successions de Gysin i de Wang

En aquest apartat, veurem dues successions exactes que s'obtenen a partir de la successió espectral de Serre. En primer lloc, la successió exacta de Gysin, en la que partirem d'una fibració amb fibra S^n. Per altra banda, la successió exacta de Wang, la construirem a partir d'una fibració en que la base és S^n. Finalment, utilitzarem la successió de Gysin per a trobar la cohomologia de $\mathbb{CP}^n$.

En primer lloc, anem a donar dos resultats d'àlgebra homològica que ens serviran posteriorment per demostrar l'existència de les dues successions. A més, recordem que donat un morfisme de R-mòduls, $f : M \to N$, es defineix el conucli de f com $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$.

Proposició 4.4. *Siguin $A \to B \xrightarrow{f} C$ i $D \xrightarrow{g} E \to F$ successions exactes de R-mòduls. Suposem que existeix un isomorfisme $\varphi : \operatorname{Coker} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker} g$, aleshores tenim la successió exacta llarga*

$$A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow F$$

$$c \longmapsto \varphi(\bar{c})$$

on $\bar{c}$ és la classe de c a $\operatorname{Coker} f$.

Demostració. Hem de veure que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}\psi$ i $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker} g$. En primer lloc, és clar que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Ara, sigui $c \in \operatorname{Ker}\psi$, tenim que $\psi(c) = \varphi(\bar{c}) = 0$ i com que φ és un isomorfisme, $\bar{c} = \bar{0}$ en $\operatorname{Coker} f$, per tant $c \in \operatorname{Im} f$.

A continuació, provarem la segona igualtat. La inclusió d'esquerra a dreta és trivial. En direcció contrària, si $d \in \operatorname{Ker} g$, com que $\operatorname{Coker} f \cong \operatorname{Ker} g$, podem afirmar que existeix $c \in C$ tal que $\varphi(\bar{c}) = d$. i per definició de ψ, tenim que $\psi(c) = \varphi(\bar{c}) = d$. Llavors $d \in \operatorname{Im}\psi$. □

També tenim el següent resultat:

Proposició 4.5. *Sigui el següent diagrama commutatiu de R-mòduls:*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "f"] & & \\
 & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dashed, "hg"] & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d] & D \arrow[r, "j"] & E \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On les files i les columnes són exactes. La successió induïda:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h \circ g} D \xrightarrow{j} E$$

és exacta.

Demostració. Hem de veure que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} h \circ g$ i $\operatorname{Im} h \circ g = \operatorname{Ker} j$. En primer lloc, com que h és monomorfisme, tenim que $\operatorname{Ker} h \circ g = \operatorname{Ker} g$ i per exactitud de la columna, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, llavors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} h \circ g$. Per altra banda, pel fet que g sigui epimorfisme podem assegurar que $\operatorname{Im} h \circ g = \operatorname{Im} h$, i per exactitud de la columna $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} j$, per tant $\operatorname{Im} h \circ g = \operatorname{Ker} j$. □

Teorema 4.6. ***(Successió de Gysin).*** *Sigui $S^n \hookrightarrow E \to B$ una fibració de Serre, on B és simplement connex i $n \geq 1$, aleshores tenim la següent successió exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_r(B) \longrightarrow H_{r-n-1}(B) \longrightarrow H_{r-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

A més, si $0 \leq r \leq n-1$, tenim que $H_r(B) \cong H_r(E)$.

Demostració. Podem utilitzar la successió espectral de Serre. La segona pàgina ve donada per:

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(S^n)) = \begin{cases} H_p(B;\mathbb{Z}), & \text{si } q = 0, n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que els únics diferencials diferents de zero seran els de la pàgina $(n+1)$-èssima, $d^{n+1}_{p,0} : E^{p+1}_{p,0} \to E^{n+1}_{p-n-1,n}$. A més, això ens assegura que $E^2 = \ldots = E^{n+1}$.
Per altra banda, la resta de pàgines venen donades per:

$$H_{p,q}(E^{n+1}) = E^{n+2}_{p,q} = \ldots = E^{\infty}_{p,q} = \begin{cases} \operatorname{Ker} d^{n+1}_{p,0}, & \text{si } q = 0, \\ \operatorname{Coker} d^{n+1}_{p+n+1,0}, & \text{si } q = n, \\ 0, & \text{si } q \neq 0, n. \end{cases}$$

Per tant, tenim les successions exactes:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^{n+1}_{p,0} \longrightarrow E^{n+1}_{p,0} = E^2_{p,0},$$

$$E^2_{p-n-1,n} \longrightarrow \operatorname{Coker} d^{n+1}_{p,0} \longrightarrow 0.$$

Ara, vegem que $\operatorname{Ker} d^{n+1}_{p,0} = E^{\infty}_{p,0}$ i $\operatorname{Coker} d^{n+1}_{p,0} = E^{\infty}_{p-n-1,n}$. A més, pel primer teorema d'isomorfia tenim que $E^{n+1}_{p,0} / \operatorname{Ker} d^{n+1}_{p,0} \cong \operatorname{Im} d^{n+1}_{p,0}$. Llavors per la Proposició 4.4, obtenim la successió exacta llarga:

$$0 \longrightarrow E^{\infty}_{p,0} \longrightarrow E^2_{p,0} \xrightarrow{d^{n+1}} E^2_{p-n-1,n} \longrightarrow E^{\infty}_{p-n-1,n} \longrightarrow 0$$

Per altra banda, de l'estructura que té la pàgina E^{∞}, per a cada r podem obtenir la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow E^{\infty}_{r-n,n} \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_r(E) / E^{\infty}_{r-n,n} = E^{\infty}_{r,0} \longrightarrow 0$$

Ara, ajuntant les dues successions exactes tenim:

$$
\begin{tikzcd}
\ddots \arrow[dr, dashed] & \vdots \arrow[d] & & & & \\
& H_r(E) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E^{\infty}_{r,0} \arrow[r] \arrow[d] & E^2_{r,0} \arrow[r] & E^2_{r-n-1,n} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & E^{\infty}_{r-n-1,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & & H_{r-1}(E) \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
& & & & E^{\infty}_{r-1,0} & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Per acabar, aplicant la Proposició 4.5 per a cada r i tenguent en compte que $E^2_{p,0} \cong H_p(B;\mathbb{Z})$, tenim la successió exacta llarga:

$$\cdots \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_r(B) \longrightarrow H_{r-n-1}(B) \longrightarrow H_{r-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

tal com volíem demostrar. A més, si $0 \leq r \leq n-1$, tenim que $H_r(B) = 0$ per tant,

$$0 \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_r(B) \longrightarrow 0,$$

llavors $H_r(E) \cong H_r(B)$. $\square$

A continuació, enunciarem i demostrarem el teorema que enuncia la successió de Wang, que és semblant al de Gysin però en aquest cas és la base de la fibració que té estructura de n-esfera. La demostració és pràcticament idèntica a la demostració de la successió de Gysin, per això no donarem tants detalls.

Teorema 4.7. ***(Successió exacta de Wang).*** *Sigui $F \hookrightarrow E \to S^n$ una fibració de Serre, on $n \geq 2$, aleshores tenim la següent successió exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H_r(F) \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_{r-n}(F) \longrightarrow H_{r-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

A més, si $0 \leq r \leq n-2$, tenim que $H_r(E) \cong H_r(F)$.

Demostració. Utilitzem la successió espectral de Serre. La segona pàgina ve donada per:

$$E^2_{p,q} = H_p(S^n; H_q(F)) = \begin{cases} H_q(F;\mathbb{Z}), & \text{si } p = 0, n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Els únics diferencials que poden ser diferents de zero són d^n. Aleshores, tenim que $E^2 = E^3 = \ldots = E^n$. Per altra banda,

$$H_{p,q}(E^n) = E^{n+1}_{p,q} = \ldots = E^{\infty}_{p,q} = \begin{cases} \operatorname{Coker} d^n_{n,q-n+1}, & \text{si } p = 0, \\ \operatorname{Ker} d^n_{n,q}, & \text{si } p = n, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, n. \end{cases}$$

Així doncs, tenim la següent successió exacta:

$$0 \longrightarrow E^{\infty}_{n,q} \longrightarrow E^2_{n,q} \xrightarrow{d^n} E^2_{0,q+n-1} \longrightarrow E^{\infty}_{0,q+n-1} \longrightarrow 0$$

A més, sabem que en la pàgina límit, tenim la filtració de $H_r(E)$, llavors:

$$0 \longrightarrow E^{\infty}_{0,r} \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow {}^{H_r(E)}\!/\!_{E^{\infty}_{0,r}} = E^{\infty}_{n,n-r} \longrightarrow 0$$

Per acabar, podem unificar les dues successions exactes obtingudes en el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\ddots \arrow[dr, dashed, red] & \vdots \arrow[d] & & & & \\
& H_r(E) \arrow[d] \arrow[dr, dashed, red] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E^{\infty}_{n,r-n} \arrow[r] \arrow[d] & E^2_{n,r-n} \arrow[r, red] & E^2_{0,r-1} \arrow[r] \arrow[dr, dashed, red] & E^{\infty}_{0,r-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & & H_{r-1}(E) \arrow[d] \arrow[dr, dashed, red] & \\
& & & & E^{\infty}_{n,r-n-1} & \ddots
\end{tikzcd}$$

Per acabar, com que $E^2_{n,r-n} = H_{r-n}(F)$ i $E^2_{0,r-1} = H_{r-1}(F)$ per a cada r, aplicant 4.4 i 4.5, tenim la successió exacta llarga:

$$\cdots \longrightarrow H_r(E) \longrightarrow H_{r-n}(F) \longrightarrow H_{r-1}(F) \longrightarrow H_{r-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

tal com volíem veure.

$\square$

A continuació veurem dos exemples on aplicarem s'utilitza la successió de Gysin per a trobar els grups d'homologia d'alguns espais topològics.

Exemple 4.8. Sigui $\mathbb{CP}^n$ l'espai projectiu complex de dimensió n, tenim la fibració següent:

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n \text{ per a } n \geq 1.$$

A més, sabem que és un espai simplement connex. Per la seva estructura com a CW-complex, podem afirmar que $H_p(\mathbb{CP}^n) = 0$ quan $p \geq 2n$. Per tant, anem a trobar $H_p(\mathbb{CP}^n)$ per a $p \leq 2n$. Pel Teorema 4.6 tenim:

$$\cdots \to \underbrace{H_{2n+2}(S^{2n+1})}_{=0} \to \underbrace{H_{2n+2}(\mathbb{CP}^n)}_{=0} \to H_{2n}(\mathbb{CP}^n) \to \underbrace{H_{2n+1}(S^{2n+1})}_{\cong \mathbb{Z}} \to \underbrace{H_{2n+1}(\mathbb{CP}^n)}_{=0} \to \cdots,$$

llavors,

$$0 \longrightarrow H_{2n}(\mathbb{CP}^n) \longrightarrow H_{2n+1}(S^{2n+1}) \longrightarrow 0$$

per tant tenim $H_{2n}(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}$. D'aquí tenim:

$$\cdots \to \underbrace{H_{2n}(S^{2n+1})}_{=0} \to \underbrace{H_{2n}(\mathbb{CP}^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \to H_{2n-2}(\mathbb{CP}^n) \to \underbrace{H_{2n-1}(S^{2n+1})}_{=0} \to \cdots.$$

Aleshores, si apliquem de manera repetida aquest raonament obtenim que per a tot $0 \leq k \leq n$, $H_{2k}(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}$. Finalment, només ens cal veure que si p és senar, llavors $H_p(\mathbb{CP}^n) = 0$. Com que sabem que $H_p(\mathbb{CP}^n) = 0$ si $p > 2n$,de la successió de Gysin tenim:

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_{2n+1}(\mathbb{CP}^n)}_{=0} \longrightarrow H_{2n-1}(\mathbb{CP}^n) \longrightarrow \underbrace{H_{2n}(S^{2n+1})}_{=0} \longrightarrow \cdots,$$

en conseqüència, $H_{2n-1}(\mathbb{CP}^n) = 0$. Ara,

$$\cdots \to \underbrace{H_{2n-1}(S^{2n+1})}_{=0} \to \underbrace{H_{2n-1}(\mathbb{CP}^n)}_{=0} \to H_{2n-3}(\mathbb{CP}^n) \to \underbrace{H_{2n-2}(S^{2n+1})}_{0} \to \cdots$$

per tant, $H_{2n-3}(\mathbb{CP}^n) = 0$. De manera inductiva, obtenim que per a tot $0 < p < p2n$ amb p senar $H_p(\mathbb{CP}^n) = 0$. En conclusió ajuntant tots els casos,

$$H_p(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p \text{ és parell i } p \leq 2n, \\ 0, & \text{si } p \text{ és senar i } p \leq 2n, \\ 0, & \text{si } p > 2n. \end{cases}$$

4.4 Teorema de l'isomorfisme de Hurewicz

Els teoremes de Hurewicz són un conjunt d'enunciats proposats per Witold Hurewicz sobre l'any 1935 que tenen gran importància en la topologia algebraica, ja que ens permeten relacionar els grups d'homologia i els grups d'homotopia d'un espai topològic.

Teorema 4.9. *Sigui X un espai topològic arc-connex. El primer grup d'homologia de X és l'abelianitzat del grup fonamental de X, és a dir, tenim:*

$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

Demostració. Aquesta prova no la farem, es pot veure a [9].

□

Teorema 4.10. ***(Teorema de l'isomorfisme de Hurewicz).*** *Sigui X un espai topològic simplement connex. Aleshores, els primers grups d'homotopia i d'homologia no trivials es donen en la mateixa dimensió i són iguals. És a dir, donat $n \geq 2$, si $\pi_p(X) = 0$ per $1 \leq p < n$, llavors $H_p(X) = 0$ per $1 \leq p < n$ i $H_n(X) = \pi_n(X)$.*

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre n. Pel cas $n = 2$, considerem la fibració de camins de X, $\Omega X \hookrightarrow PX \to X$. La segona pàgina de la successió espectral de Serre ve donada per $E^2_{p,q} = H_p(X; H_q(\Omega X))$. Ara, pel corol·lari 4.3, tenim que $\pi_0(\Omega X) \cong \pi_1(X) = 0$, aleshores, ΩX és arc-connex, per tant, $H_0(\Omega X) \cong \mathbb{Z}$. A més, com que X és arc-connex, tenim que $H_0(X) = \mathbb{Z}$, i utilitzant que $\pi_1(X) = 0$ juntament amb el Teorema 4.9 obtenim que $H_1(X) = 0$.

Per altra banda, $H_0(X; H_q(\Omega X)) = H_q(\Omega X)$, llavors $E^2_{0,q} = H_q(\Omega X)$. Per tant, tenim el següent:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & & & & \\
2 & H_2(\Omega X) & & & & \\
1 & H_1(\Omega X) & & & & \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & H_2(X) \arrow[ull, "d^2_{2,0}"'] & H_3(X) & \cdots \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ara, veurem que $d^2_{2,0}$ és un isomorfisme. En efecte, els termes de les posicions $(0,1)$ i $(2,0)$ només poden ser alterats pel diferencial $d^2_{2,0}$, per tant, $E^3_{0,1} = E^\infty_{0,1}$ i $E^3_{2,0} = E^\infty_{2,0}$. Aleshores, com que PX és contràctil, tenim que $E^3_{0,1} = 0$ i $E^3_{2,0} = 0$, ja que en la pàgina E^∞ només és diferent de 0 el valor de la posició $(0,0)$. Llavors, $E^3_{0,1} = H_1(\Omega X)/\operatorname{Im} d^2_{2,0} = 0$, si i només si $\operatorname{Im} d^2_{2,0} = H_1(\Omega X)$ i $E^3_{2,0} = \operatorname{Ker} d^2_{2,0} = 0$, per tant, $d^2_{2,0}$ és isomorfisme.

Finalment, pel Teorema 4.9, tenim $H_1(\Omega X) \cong \pi_1(\Omega X)/[\pi_1(\Omega X), \pi_1(\Omega X)]$ però com que sabem que $\pi_1(\Omega X) \cong \pi_2(X)$, que és un grup abelià, podem concloure que $H_1(\Omega X) \cong \pi_2(X)$, i per l'isomorfisme que hem trobat, obtenim

$$H_2(X) \cong \pi_2(X).$$

Sigui $n > 2$ un enter. Per la hipòtesi d'inducció tenim que $H_q(\Omega X) \cong \pi_q(\Omega X) \cong \pi_{q+1}(X) = 0$, per a tot $q < n-1$, i $H_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_n(X)$. Per tant, si procedim com abans, la segona pàgina de la successió espectral te la següent estructura:

$$\begin{tikzcd}
n-1 & H_{n-1}(\Omega X) & & & & \\
\vdots & 0 & & & & \\
1 & 0 & & & & \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 & H_n(X) \arrow[lllluuu, "d^n_{n,0}"'] \\
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n
\end{tikzcd}$$

De la mateixa manera que hem vist pel cas inicial, $d^n_{n,0} : H_n(X) \to H_{n-1}(\Omega X)$ és també és un isomorfisme. Per tant, pel mateix raonament que abans, obtenim:

$$H_n(X) \cong \pi_n(X)$$

tal com volíem demostrar. □

D'aquest teorema, obtenim immediatament el següent corol·lari:

Corołari 4.11. *Per a tot $n \geq 2$, tenim que*

$$\pi_q(S^n) = \begin{cases} 0, & si\ q < n, \\ \mathbb{Z}, & si\ q = n. \end{cases}$$

Demostració. Apliquem el Teorema 4.10. □

4.5 Espais d'Eilenberg-Mac Lane

Definició 4.12. *Sigui $n \geq 1$. Donats X un espai topològic arc-connex i G un grup (abelià quan $n > 1$). Aleshores si es compleix:*

$$\pi_i(X) = \begin{cases} G, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

*diem que X és un **espai d'Eilenberg Mac-Lane** de tipus (G, n) i el denotem per $K(G, n)$.*

Exemple 4.13. L'esfera, S^1, és un $K(\mathbb{Z}, 1)$.

Exemple 4.14. L'espai projectiu real de dimensió infinita, $\mathbb{RP}^\infty$, és un $K(\mathbb{Z}/2, 1)$.

Exemple 4.15. L'espai projectiu complex de dimensió infinita, $\mathbb{CP}^\infty$, és un $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Observació 4.16. Donats un grup G i un enter n arbitraris, podem construïr un CW-complex amb estructura de $K(G, n)$. Per a veure'n més detalls podeu consultar [2].

Ara, considerem la fibració de camins d'un espai d'Eilenberg-Mac Lane qualsevol:

$$\Omega K(G, n) \hookrightarrow PK(G, n) \to K(G, n)$$

llavors, com que $PK(G, n)$ és contràctil, podem aplicar el Corol·llari 4.3 i obtenim que per a tot i:

$$\pi_{i+1}(K(G, n)) \cong \pi_i(\Omega K(G, n)),$$

aleshores podem concloure que $K(G, n-1) \cong \Omega K(G, n)$

A continuació, utilitzarem la successió espectral de Serre per a trobar la cohomologia de $K(\mathbb{Z}, 2)$,així com també el seu anell de polinomis.

Exemple 4.17. Considerem la fibració de camins $K(\mathbb{Z}, 1) \hookrightarrow PK(\mathbb{Z}, 2) \to K(\mathbb{Z}, 2)$. Com que $K(\mathbb{Z}, 2)$ és simplement connex tenim:

$$E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, 2); H^q(S^1)) = \begin{cases} H^p(K(\mathbb{Z}, 2)), & \text{si } q = 0, 1, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que els únics diferencials que poden ser diferents de zero són els de la segona pàgina, $d_2^{p,1} : E_2^{p,1} \to E_2^{p+2,0}$. A més, com que la successió espectral convergeix a la cohomologia de $PK(\mathbb{Z}, 2)$, que és contràctil, aleshores:

$$H^{p,q}(E_2) = E_3^{p,q} = \ldots = E_\infty^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = q = 0, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

El fet que només sobrevisqui el terme de la posició $(0, 0)$ ens permet afirmar que tots els diferencials han de ser isomorfismes. En efecte, si no fos així, en passar a la tercera pàgina hi hauria termes que no s'anul·larien. Per tant,

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 & \mathbb{Z} \arrow[drr] & H^1 \arrow[drr] & H^2 \arrow[drr] & H^3 \arrow[drr] & H^4 & H^5 & \cdots \\
0 & \mathbb{Z} & H^1 & H^2 & H^3 & H^4 & H^5 & \cdots \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots
\end{tikzcd}
$$

En conclusió:

$$
H^p(K(\mathbb{Z},2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p \text{ és parell,} \\ 0, & \text{si } p \text{ és senar.} \end{cases}
$$

A continuació, anem a trobar l'estructura d'anell de $K(\mathbb{Z},2)$. Sigui y l'element generador de $E_2^{0,1}$, i $d_2(y) = x$ el generador de $E_2^{2,0}$. Com que $E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z},2) \otimes H^q(S^1)$, tenim que yx genera $E_2^{2,1}$. Ara,

$$
d_2(yx) = d_2(y)x - yd_2(x) = d_2(y)x - y^2 = d_2(y)x = x^2.
$$

Llavors, x^2 és generador de $E_2^{4,0}$, i en conseqüència, yx^2, ho és de $E_2^{4,1}$. Llavors de manera inductiva, tenim

$$
d_2(yx^n) = d_2(y)x^n - yd_2(x^n) = xx^n = x^{n+1}.
$$

Per tant, tenim que l'anell de cohomologia de $K(\mathbb{Z},2)$ és $H^*(K(\mathbb{Z},2)) \cong \mathbb{Z}[x]$, amb $|x| = 2$.

Un cop hem trobat la cohomologia de $K(\mathbb{Z},2)$, es pot utilitzar aquest resultat per a calcular la de $K(\mathbb{Z},3)$. La demostració és semblant però amb una mica més de complexitat.

4.5.1 Cohomologia racional de $K(\mathbb{Z},n)$

A continuació, anem a calcular $H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$. No obstant això, primer hem de definir el concepte d'algebra exterior.

Definició 4.18. *Sigui K un cos. Definim l'àlgebra exterior sobre K com el K-mòdul lliure amb base els productes finits $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, amb $i_1 < \cdots < i_k$. El producte és associatiu, distributiu i compleix que $x_i x_j = -x_j x_i$ quan $i \neq j$, i $x_i^2 = 0$. La denotem per $\Lambda[x_1, \ldots, x_n]$.*

Teorema 4.19. *La anell cohomologia racional $H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$ és isomorf a $\mathbb{Q}[x]$ quan n és parell i a $\Lambda[x]$ quan n és senar, on x és un generador de $H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$.*

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre n utilitzant la fibració de camins

$$
K(\mathbb{Z},n-1) \hookrightarrow PK(\mathbb{Z},n) \to K(\mathbb{Z},n),
$$

distingint quan n és parell i quan és senar. Pel cas inicial $n = 1$, com que $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, clarament tenim que $H^*(S^1; \mathbb{Q}) \cong \Lambda[x]$, amb $x \in H^1(S^1; \mathbb{Q})$.

Ara, sigui $n \geq 2$ parell. En primer lloc, tenim que la primera pàgina de la successió espectral ve donada per

$$E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, n); H^q(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) \cong H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \otimes H^q(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}).$$

En la pàgina E_2 només hi apareixeran termes diferents de 0 en les columnes 0 i $n - 1$. A més, com que $PK(\mathbb{Z}, n)$ és contràctil, en la pàgina E_∞, només el terme $E_\infty^{0,0}$ serà no nul i valdrà $\mathbb{Q}$. Aleshores repetint arguments que hem utilitzat en altres exemples, podem afirmar que els únics diferencials que no s'anul·laran seran $d_n^{p,n-1} : E_n^{p,n-1} \to E_n^{p+n,0}$ i a més, podem afirmar que seran isomorfismes.

Ara, volem demostrar que per $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$ per a tot p no múltiple de n. Per la succcessió de Gysin, tenim que si $0 < p < n - 1$, aleshores

$$H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = H^p(PK(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0.$$

Per tant, el fet que els diferencials siguin isomorfismes ens assegura que per a tot $kn < p < (k+1)n$, amb $k \geq 0$, tindrem que $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$, tal com volíem veure. Llavors, la pàgina E_2 serà de la següent forma:

$$\begin{tikzcd}
n-1 & \mathbb{Q} \arrow[dr] & H^n \arrow[dr] & H^{2n} \arrow[dr] & H^{3n} & \cdots \\
0 & \mathbb{Q} & H^n & H^{2n} & H^{3n} & \cdots \\
 & 0 & n & 2n & 3n & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sigui ara $y \in E_n^{0,n-1}$ i $d_n(y) = x \in E_n^{n,0}$, aleshores xy és un generador de $E_n^{n,n-1}$, a més:

$$d_n(xy) = d_n(x)y + (-1)^n y d_x = y d_n(x) = y^2$$

Per tant, y^2 genera $E_n^{2n,0}$. De manera inductiva, observem que si x^k és un generador de $H^{kn}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$, aleshores $x^k y$ genera $H^{kn}(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}))$ i

$$d_n(x^k y) = d_n(x^k)y + (-1)^{kn} x^k d_n(y) = x^{k+1}.$$

Per tant tenim:

$$
\begin{tikzcd}
n-1 & y \arrow[dr] & yx \arrow[dr] & yx^2 \arrow[dr] & yx^3 & \cdots \\
0 & 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
 & 0 & n & 2n & 3n & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Finalment, podem concloure que $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]$, on x és un generador de grau n. Suposem ara que n és senar. En aquest cas, observem que només hi haura termes no nuls en les files múltiples de $n-1$. És senzill veure, pel mateix raonament que en el cas parell, que el diferencial $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0}$ ha de ser un isomorfimse. Llavors siguin els generadors $y \in H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})$ i $d_n(y) = x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$, podem afirmar que xy genera $H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}))$

Sabem que si q és múltiple de $n-1$, aleshores $H^q(K(\mathbb{Z}, n-1)) \cong \mathbb{Q}$ i en cas contrari val 0. Per tant, en aquest cas tindrem,

$$
E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}), & \text{si } q \text{ és multiple de } n-1, \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}
$$

A més, com que $PK(\mathbb{Z}, n)$ és contràctil podem afirmar que el primer diferencial que no s'anul·larà serà d_n. D'aquí, deduim que $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$ quan $0 < p < n$, ja que en cas contrari, serien diferents de 0 en E_∞. Pel mateix motiu, tenim que $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0}$ és un isomorfisme. Ara, si $y \in E_n^{0,n-1}$ i $d_n(y) = x \in E_n^{n,0}$ aleshores, anem a demostrar que $d_n(y^k) = ky^{k-1}k$ per a tot $k \geq 1$. Si $k = 1$, és cert. Ara,

$$
d_n(y^k) = d_n(y^{k-1})y + y^{k-1}d_n(y) = (k-1)y^{k-2}xy + y^{k-1}x = ky^{k-1}x.
$$

i com que estem calculant amb coeficients en $\mathbb{Q}$, podem afirmar que els diferencials seran isomorfismes. La pàgina E_2 quedarà de la següent forma.

$$
\begin{tikzcd}
4(n-1) & y^4 \arrow[dr] & y^4x & \cdots \\
3(n-1) & y^3 \arrow[dr] & y^3x & \cdots \\
2(n-1) & y^2 \arrow[dr] & y^2x & \cdots \\
n-1 & y \arrow[dr] & yx & \cdots \\
0 & 1 & x & \cdots \\
 & 0 & n & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Finalment, hem de demostrar que $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$ per a tot $p \geq n+1$. Suposem que existeix $k \geq n+1$ tal que $H^p(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$ per a tot $n < p < k$. Aleshores $E_2^{k,0} \cong H^k(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$. A més, tenim que $E_\infty^{k,0}$ ha de ser 0. Ara, el diferencial

$$d_k : E_k^{0,k-1} \to E_k^{k,0}$$

ha de ser 0 ja que $E_k^{0,k-1} \subset E_{n+1}^{0,k-1} = 0$. Per altra banda,

$$d_{k-n} : E_{k-n}^{n,k-n-1} \to E_{k-n}^{k,0}$$

amb $k - n \geq 2$, també ha de valer 0, en efecte, si $0 < k-n-1 < n-1$ o bé $k - n \geq n+1$, llavors $E_{k-n}^{n,k-n-1} = 0$. Finalment, en el cas en que $k = 2n$, el diferencial

$$d_n : E_n^{n,n-1} \to E_n^{2n,0}$$

també serà 0, ja que $d_n^2 = 0$. D'aquesta manera, tenim que, o bé $E_\infty^{k,0} = 0$ o $E_2^{k,0} = 0$, per tant $H^k(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = 0$, i podem concloure que $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \Lambda[x]$, on x és un generador de grau n, tal com volíem demostrar.

$\square$

4.5.2 Finitud dels grups d'homotopia de les esferes

En aquest apartat, ens introduirem en la teoria de l'homotopia racional, que va sorgir degut a la gran dificultat que suposa el càlcul dels grups d'homotopia dels espais topològics. Donat un CW-complex de dimensió finita i simplement connex, els seus grups d'homotopia $\pi_n(X)$, són grups abelians finitament generats. D'aquesta manera, es poden descompondre de la següent forma:

$$\pi_n(X) = \mathbb{Z}^r \oplus T$$

on r denota el rang i T el subgrup de torsió. Aleshores, la idea bàsica de la teoria de l'homotopia racional consisteix en ometre la part de torsió (degut a la complexitat que sol presentar) per a obtenir una teoria més senzilla. La manera de fer-ho és racionalitzant l'espai X, és a dir, tensorialitzar-lo per $\mathbb{Q}$, de forma que s'obté un nou espai $X_{\mathbb{Q}}$, que compleix

$$\pi_n(X_{\mathbb{Q}}) \cong \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$$

Per tant, donats dos espais X, Y diem que són homotòpicament equivalents de manera racional, i ho escrivim $X_{\mathbb{Q}} \sim Y_{\mathbb{Q}}$, si les respectives racionalitzacions $X_{\mathbb{Q}}$ i $Y_{\mathbb{Q}}$ són homotòpicament equivalents.

Teorema 4.20. *Sigui X un espai simplement connex, aleshores $\widetilde{H}_n(X)$ és finita per a tot n si i només si $\pi_n(X)$ és finit per a tot n.*

Demostració. La prova es pot trobar a [8]. □

Definició 4.21. *Sigui X un espai arc-connex, definim el* ***recobridor* n*-connex*** *de X, com l'espai $X\langle n\rangle$ tal que:*

$$\pi_i(X\langle n\rangle) = \begin{cases} \pi_i(X), & si\ i > n, \\ 0, & si\ i \leq n. \end{cases}$$

Teorema 4.22. *Sigui un enter senar $n \geq 1$. Aleshores $\pi_i(S^n)$ és finit per a tot $i > n$.*

Demostració. El cas S^1 és conegut, llavors suposarem que $n \geq 3$. Podem construir una fibració a partir de l'aplicació $f : S^n \to K(\mathbb{Z}, n)$:

$$F \to S^n \to K(\mathbb{Z}, n)$$

on $F \cong S^n\langle n\rangle$ és el recobridor n-connex de S^n. Llavors tenim que $\widetilde{H}_q(F) = 0$ per a tot $q \leq n$.

A continuació, volem veure que $H_q(F)$ és finit per a $q > n$. Ho demostrarem per reducció a l'absurd suposant que existeix $k > n$ tal que $H_k(F)$ no és finit. Utilitzem la successió espectral de Serre. La pàgina inicial ve donada per:

$$E^2_{p,q} = H_p(K(\mathbb{Z}, n); H_q(F)).$$

Per hipòtesi, tenim que tots els termes $E^2_{p,q}$ són finits per a $q < k$, excepte $E^2_{0,0} = \mathbb{Z}$ i $E^2_{n,0} = \mathbb{Z}$. Per aquest motiu, podem afirmar que tots els diferencials arribant a $E^r_{0,k}$ per a cada r, surten d'un grup finit. D'aquí es pot demostrar per inducció que $E^\infty_{0,k}$ és inifinit. Per tant, hem arribat a una contradicció ja que:

$$E^\infty_{0,k} \subset \bigoplus_{p+q=k} E^\infty_{p,q} = H_k(S^n) = 0.$$

Aleshores, podem afirmar que $\pi_q(F)$ és finit per a cada $q > n$. I per tant, com $F \cong S^n\langle n\rangle$, per la definició del recobridor connex podem afirmar que $\pi_i(S^n)$ és finit quan $i > n$.

$\square$

Ara ho veiem pel cas parell. La demostració està feta amb poc detall. Per a veure'n una completa podeu consultar [8].

Teorema 4.23. *Sigui un enter parell $n \geq 2$. Aleshores $\pi_i(S^n)$ és finit per a tot $i > n$, excepte en el cas en que $i = 2n - 1$, que és suma directa de $\mathbb{Z}$ i un grup finit.*

Demostració. Si apliquem la successió de Puppe a la fibració definida en el cas senar, obtenim la següent fibració:

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \to F \to S^n,$$

observem que ara, tenim el recobridor n-connex de S^n en la base. A continuació utilitzem la successió espectral de Serre:

$$E^2_{p,q} = H_p(S^n; H_q(K(\mathbb{Z}, n-1))).$$

Només les columnes 0 i n tindran valors no nuls. A més, els termes de les posicions $(0,0), (n, n-1)$ valdràn $\mathbb{Z}$; en $(0,q), (n,q)$ seran finits quan $q \geq n$ i en la resta de casos valdran 0. És a dir:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\
n-1 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z} \arrow[uulll, "d_n"'] \\
 & 0 & & & n
\end{tikzcd}$$

Com que F és n-connexa, tenim que $d^n_{n,0} : E^2_{n,0} \to E^2_{0,n-1}$ serà un isomorfisme. Llavors, tindrem que

$$E^\infty_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } (p,q) = (0,0), (n, n-1), \\ \text{finit}, & \text{si } (p,q) = (0,k), (n,k), \text{ amb } k \geq n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

D'aquí podem concloure que $H_i(F)$ serà suma directa de grups finits, i per tant, serà un grup finit, quan $i > n$, excepte en el cas en que $i = 2n - 1$, que serà suma directa d'un grup finit i $\mathbb{Z}$.

A continuació, es pot demostrar que tneim una fibració

$$F' \to F \to K(\mathbb{Z}, 2n-1).$$

on tenim que F' és almenys n-connex. Seguint un raonament semblant al cas senar, podem veure que $H_q(F')$ és finit per a tot $q > n$. D'aquesta manera, podem deduir que $\pi_q(F')$ és finit per a tot $q > n$, i per tant, $\pi_q(F)$ també ho serà quan $q > n$, excepte en $q = 2n-1$. Pel fet que en $q > n$ tenim que $\pi_q(F) \cong \pi_q(S^n)$, tenim el resultat desitjat. $\square$

5 Conclusions

Aquest treball ha estat per a mi una tasca d'aprofundiment en l'estudi de la topologia algebraica, branca que més m'ha cridat l'atenció del grau. L'interés despertà amb l'estudi del grup fonamental i el Teorema de Seifert-Van Kampen a l'assignatura *Topologia i geometria global de superfícies* i continuà a l'optativa *Topologia algebraica* amb els grups d'homologia i la successió de Mayer-Vietoris.

He hagut d'aprendre noves estructures tan algebraiques, com topològiques com ara el concepte de parella exacta, de fibració, els espais d'Eilenberg-Mac Lane o el mateix concepte de successió espectral. Però aquest procés ha resultat gratificant quan, cap al final, he comprovat que amb la successió espectral de Serre i l'ajuda de poquess eines de caràcter més algebraic, es podien trobar els grups d'homologia o cohomologia d'alguns espais aparentment difícils, coneixent només els d'espais bàsics com ara S^n.

No obstant això, durant aquest treball he pogut observar de primera mà que, com més indagues en un tema, més portes se t'obren per a continuar estudiant-lo i refinar els coneixements. Un clar exemple d'això és el càlcul d'homologies amb coeficients locals, que apareix en la definició de la successió espectral de Serre, però que no s'ha pogut abordar ja que excedia les dimensions del treball.

Barcelona, Gener del 2023.

Referències

[1] Berglund, Alexander. *Rational homotopy theory*, Lecture notes, University of Copenhagen (2012).

[2] Hatcher, Allen, *Algebraic topology*, Cambridge: Cambridge University Press, (2002).

[3] Hatcher, Allen. *Spectral sequences*, preprint (2004).
`https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/SSAT/SSch1.pdf`

[4] Holmberg-Péroux, Maximilien. *The Serre Spectral Sequence.* Bachelor Semester Project at the École Polytechnique Fédérale de Lausanne, available online.

[5] McCleary, John. *A user's guide to spectral sequences*, No. 58. Cambridge University Press, 2001.

[6] McCleary, John. *A history of spectral sequences.* History of Topology, ed. by IM James, Elsevier, Amsterdam (1999): 631-663.

[7] Munkres, James R. *Elements of algebraic topology.* CRC press, 2018.

[8] Rognes, John. *Spectral Sequences.* Lecture notes, University of Oslo (2012).

[9] Rotman, Joseph J. *An introduction to algebraic topology.* Vol. 119. Springer Science & Business Media, 2013.

[10] Serre, Jean-Pierre. *Homologie Singuliere Des Espaces Fibres.* Annals of Mathematics, vol. 54, no. 3, 1951, pp. 425-505. JSTOR, https://doi.org/10.2307/1969485. Accessed 18 Jan. 2023.

A Complexes CW. Homologia cel·lular

En aquest afegit introduirem els complexos CW o també anomenats complexos cel·lulars. També farem una breu explicació de l'homologia cel·lular. Ambdós conceptes són usats freqüentment en el treball, sobretot en la construcció de la successió espectral de Serre.

A.1 Complexes CW

Anomenem **n-disc** al conjunt $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, **n-cèl·lula** al conjunt $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ i **n-esfera** al conjunt $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Observem que $\partial D^n = S^{n-1}$, on ∂ denota la frontera del conjunt.

Definició A.1. *Definim un* ***complex cel·lular*** *com l'espai topològic X obtingut de la següent manera:*

1. *Considerem un conjunt discret X^0, format per les 0-cèl·lules (punts) de X. Al conjunt X^0 l'anomenem 0-esquelet.*
2. *Inductivament, construirem el n-esquelet X^n a partir del (n-1)-esquelet X^{n-1} adjuntant n-cèl·lules e^n_α via aplicacions $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. És a dir,*

   $$X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha / \sim$$

   on $x \sim \varphi_\alpha(x)$ si i només si $x \in \partial D^n_\alpha$.
3. *Finalment, $X = \bigcup_n X^n$ amb la topología dèbil. És a dir, un subconjunt $A \subset X$ és obert (o tancat) si i només si $A \cap X^n$ és obert (o tancat) en X^n per cada n.*

Definició A.2. *Sigui X un CW-complex, definim la* ***dimensió*** *de X com el màxim $n \in \mathbb{Z}$ tal que e^n_α és en la descomposició de X. Si $n < \infty$, diem que X és finit.*

Observació A.3. Quan la dimensió de X és finita tenim que $X = X^n$ per algún n. Aleshores la caracterització dels oberts és trivial ja que si A és obert en X, això implica que $A \cap X^{n-1}$ és obert en X^{n-1}, i pel mateix raonament, tenim que $A \cap X^{n-i}$ és obert en X^{n-i}.

Podem assignar-li a cada cèl·lula la seva **aplicació característica** Φ_α, que ve donada per la composició $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha \to X^n \hookrightarrow X$. Aquesta aplicació és contínua ja que és composició d'aplicacions contínues. A més, la restricció de Φ_α a l'interior de D^n_α és homeomorfa a e^n_α. Aleshores, podem enunciar una altra caracterització dels oberts i els tancats d'un CW-complex a partir de l'aplicació caracterìstica.

Lema A.4. *Un subconjunt $A \subset X$ és obert (tancat) si i només si $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ és obert (tancat) en D^n_α per a cada aplicació característica Φ_α.*

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta és trivial ja que Φ_α és una aplicació contínua. En direcció contrària, suposem que $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ és oberta en D^n_α per a cada Φ_α i suposem per inducció que $A \cap X^{n-1}$ és obert en X^{n-1}. Llavors, com que $\Phi^{-1}_\alpha(A)$ és obert en D^n_α per a tot α, $A \cap X^n$ és obert en X^n per la definició de la topologia de X^n. Per tant, A és obert en X. □

Definició A.5. *Un subespai d'un CW-complex, $A \subset X$, és un* ***subcomplex*** *si A és un CW-complex format per un subconjunt de cèl·lules de X. Sigui X un CW-complex i A un subcomplex anomenem* ***parell CW*** *a (X, A).*

Definició A.6. *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre dos complexes CW, diem que f és* ***cel·lular*** *si $f(X^n) \subset Y^n$.*

Si considerem les cèl·lules de $X - A$, tenim que el quocient X/A té estructura de CW-complex i que la projecció $\pi : X \to X/A$ és cel·lular.

Proposició A.7. *Tot subespai compacte $K \subset X$ d'un CW-complex està contingut en un subcomplex finit.*

Demostració. En primer lloc, demostrarem que K està contingut en un nombre finit de cèl·lules de X. Suposem que existeix un conjunt infinit de punts $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq K$ tal que cada $x_i \in K$ pertany a una cèl·lula diferent. Aleshores S és tancat en X. Ara, si suposem que $S \cap X^{n-1}$ és tancat en X^{n-1}, per inducció en n tenim que per cada $e^n_\alpha \in X$, $\varphi^{-1}_\alpha(S)$ és tancat en ∂D^n_α i $\Phi^{-1}_\alpha(S)$ conté com a màxim un punt en D^n_α, per tant $\Phi^{-1}_\alpha(S)$ és tancat en D^n_α. Aleshores, $S \cap X^n$ és tancat en X^n per a tot n, aleshores S és tancat en X. Aleshores, tenim que S és tancat i és subconjunt d'un compacte, per tant és compacte, això és una contradicció amb el fet que S sigui infinit.

Com que hem vist que K està contingut en una unió finita de cèl·lules, és suficient veure que una unió finita de cèl·lules està continguda en un subcomplex finit de X. Una unió finita de subcomplexos finits, és un subcomplex finit. Per tant, si demostrem que una cèl·lula e^n_α està continguda en un subcomplex finit ja haurem acabat. Tenim que $\varphi_\alpha(e^n_\alpha)$ és compacta, llavors per inducció en la dimensió, està continguda en un subcomplex $A \subset X^{n-1}$. Per tant, e^n_α està contingut en el subcomplex finit $A \cup e^n_\alpha$.

□

A continuació podem explicar d'on provenen les lletres "CW", que donen nom a aquests espais topològics:

1. **C**, prové de *closure-finiteness*, ja que per la proposició A.7 obtenim que l'adherència de cada cèl·lula intersecta un nombre finit d'altres cèl·lules.
2. **W**, prové de *weak topology*, ja que un conjunt A és tancat si i només si $A \cap \bar{e}$ és tancat en $\bar{e}$.

A.2 Homologia cel·lular

En aquest apartat, anem a introduir l'homologia cèl·lular. En primer lloc, enunciem el següent lema, que ens ajudarà posteriorment en la construcció del complex de cadenes cel·lulars.

Lema A.8. *Sigui X un CW-complex, aleshores:*

(a) $H_p(X^n, X^{n-1}) = 0$ *quan* $p \neq n$, *i és lliure abelià per a* $p = n$.

(b) $H_p(X^n) = 0$ *si* $p > n$.

(c) *Sigui $X^n \hookrightarrow X$ la inclusió. L'aplicació induïda $H_p(X^n) \hookrightarrow H_p(X)$ és un isomorfisme per $p < n$ i és exhaustiva quan $p = n$*

Demostració. En primer lloc, tenim que $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_i S^n$, és a dir, és una suma puntual de n-esferes (una per a cada n-cèl·lula de X). Per tant tenim (a). A continuació, si considerem la successió exacta llarga d'homologia del parell (X^n, X^{n-1}),

$$\to \cdots H_{p+1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_p} H_p(X^{n-1}) \xrightarrow{i_p} H_p(X^n) \xrightarrow{\pi_p} H_p(X^n, X^{n-1}) \to \cdots$$

Per l'apartat (a), tenim que els dos extrems valen 0 quan $p \neq n, n-1$. Per tant, $H_p(X^{n-1}) \cong H_p(X^n)$. Aleshores, tenim la successió d'inclusions:

$$H_p(X^0) \to H_p(X^1) \to \cdots \to H_p(X^{k-1}) \to H_p(X^k) \to H_p(X^{k+1}) \to \cdots$$

i pel que acabem de veure, totes seran isomorfismes, excepte les inclusions entrant i sortint de $H_p(X^k)$. Ara, com que X^0 és un conjunt discret, $H_p(X^0) = 0$ si $p > 0$, i podem concloure (b). La prova de (c), requereix una mica més de feina i no la farem. Es pot trobar a [2]. $\square$

Ara, ja podem definir el complex de cadenes cel·lulars, així com els operadors vora. Això ens permetrà calcular l'homologia d'un CW-complex. Finalment veurem que els grups d'homologia cel·lular coincidiran amb els d'homologia simplicial..

Sigui X un CW-complex, definim el grup de cadenes cel·lulars de dimensió n com:

$$Cell_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

Ara vegem que $Cell_*(X)$ és un complex de cadenes, i que els seus grups d'homologia es corresponen amb els grups d'homologia de X. Per això, hem de definir les diferencials. De la successió exacta llarga d'homologia dels parells (X^n, X^{n-1}) i (X^{n-1}, X^{n-2}) , tenim

$$\delta_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1})$$

i per altra banda,

$$\pi_{n-1} : H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

Llavors definim el diferencial complex de cadenes cel·lulars per a cada n com:

$$\partial_n^{cell} := \pi_{n-1} \circ \delta_n : Cell_n(X) \to Cell_{n-1}(X),$$

Observem que

$$(\partial^{cell})^2 = \partial_p^{cell} \circ \partial_{p+1}^{cell} = \pi_{p-1} \circ \delta_p \circ \pi_p \circ \delta_{p+1} = 0$$

pel fet que $\delta_p \circ \pi_p = 0$ per ser consecutives en la mateixa successió exacta llarga. Podem observar millor la situació amb el diagrama segënt:

$$
\begin{tikzcd}
Cell_{n+1}(X) = H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[d, "\delta_{n+1}"] \arrow[dr, "\partial^{cell}_{n+1}"] & & H_{n-1}(X^{n-2}) = 0 \arrow[d] \\
H_n(X^n) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d] & Cell_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[dr, "\partial^{cell}_n"] & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[d, "\pi_{n-1}"] \\
H_n(X^{n+1}) \arrow[d] & & Cell_{n-1}(X) = H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
0 = H_n(X^{n+1}, X^n) & &
\end{tikzcd}
$$

Finalment, si calculem l'homologia n-èssima de $Cell_*(X)$,

$$H_n(Cell_*(X)) = \operatorname{Ker} \partial^{cell}_n / \operatorname{Im} \partial^{cell}_{n+1}$$

Com que π_{n-1} és injectiva, ja que $H_{n-1}(X^{n-2}) = 0$, i tant les files com les columnes són exactes , podem afirmar que

$$\operatorname{Ker} \partial^{cell}_n = \operatorname{Ker} \delta_n = \operatorname{Im} \pi_{n-1} = H_n(X^n).$$

Per altra banda, com π_n és exhaustiva per definició,

$$\operatorname{Im} \partial^{cell}_{n+1} = \pi_n(\operatorname{Im} \delta_{n+1}) = \operatorname{Im} \delta_{n+1} \subseteq H_n(X^n)$$

i per l'exactitud de la columna de l'esquerra, podem concloure que

$$H_n(Cell_*(X)) = H_n(X^n) / \operatorname{Im} \delta_{n+1} = H_n(X^{n+1}).$$

i com que per l'apartat (b) de A.8 sabem que $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$, tenim el que volíem.

B Cohomologia simplicial

Anem a introduir breument la cohomologia d'espais topològics. A diferència de l'homologia, la cohomologia és un functor contravariant, fet que li aporta una estructura més avantatjosa que la de l'homologia.

Definició B.1. *Siguin A, G grups abelians, definim $Hom(A, G)$ com el conjunt de tots els morfismes de grups de A en G.*

Definició B.2. *Sigui $f : A \to B$ un morfisme de grups, ens indueix un morfisme en $Hom(-, G)$,*

$$\bar{f} : Hom(B, G) \to Hom(A, G) \tag{B.1}$$

$$\phi \mapsto \phi \circ f \tag{B.2}$$

on $\phi \in Hom(B, G)$.

Per tant, si fixem un grup G, tenim que $Hom(-, G)$ és un factor contravariant de la categoria de grups abelians en ella mateixa.

Proposició B.3. *Sigui $(C_*(X), \partial_*)$ un complex de cadenes simplicials d'un espai X, i G un grup abelià. Definim el grup de cocadenes de dimensió n amb coeficient en G com el grup*

$$C^p(X; G) = Hom(C_p(X); G)$$

Per altra banda, sigui $\partial_{p+1} : C_{p+1}(X) \to C_p(X)$ l'operador vora. Llavors, la covora ve definida per

$$\delta_p : C^p(X) \to C^{p+1}(X).$$

De la mateixa manera que en l'homologia podem definir els cocicles i les covores com

$$Z^p(X; G) = \operatorname{Ker} \delta_p$$

i

$$B^p(X; G) = \operatorname{Im} \delta_p$$

Per tant definim el p-èssim grup de cohomologia de X per

$$H^p(X; G) = \frac{Z^p(X; G)}{B^{p+1}(X; G)}$$