



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

De la bifurcació de Hopf al
teorema del centre de Lyapunov.
Aplicacions al problema restringit
dels tres cossos.

Autor: Roger Almasqué Vila

Director: Dr. Alex Haro Provinciale

Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada

Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

Lyapunov center theorem provides the conditions in order to ensure the existence of periodic orbits in the surroundings of a fixed point of a Hamiltonian system, when its lineal problem already contain periodic orbits. Therefore, by studying a simpler system, it is possible to obtain information about the nonlinear dynamical system. In this final project, we will state and study this theorem, providing its proof (using Hopf bifurcation theorem), and we will also give an insight of Hamiltonian mechanics and the restricted three body problem in its circular version. In the latter, we will see that the Lyapunov theorem can be applied to some fixed points, and in a computational way, we will present explicitly some periodic solutions around the equilibrium point called L_1 .

Resum

El teorema del centre de Lyapunov dona les condicions per l'existència d'òrbites periòdiques al voltant d'un punt fix en un sistema hamiltonià, quan aquestes existeixen en el problema lineal (que usualment és molt més senzill d'estudiar). En aquest treball estudiarem i provarem aquest teorema a partir del teorema de la bifurcació de Hopf, realitzarem una introducció a la mecànica hamiltoniana i en particular, al problema restringit dels tres cossos en la seva versió circular. En aquest darrer, aplicarem el teorema i, finalment, hi calcularem de forma computacional, solucions periòdiques al voltant del punt d'equilibri L_1 .

Agraïments

Vull agrair en primer lloc al meu tutor del projecte, el Dr. Alex Haro Provinicale, per la seva dedicació i suport durant aquests darrers mesos. M'ha proporcionat la bibliografia adequada per a fer el treball amb èxit, tot relacionant-ho amb els conceptes apresos a les assignatures del grau quan ho he requerit. Fer el treball amb un tutor així ha estat un plaer. Destacar també en Josep Maria Mondelo, per facilitar-me material essencial per al treball.

Sense oblidar-me de tots els companys, amics, que m'han acompanyat al llarg d'aquests anys i que m'han (i ens hem) ajudat quan més ho he necessitat. I la meua família, sense els quals possiblement no hauria pogut dedicar tot el temps i esforç a l'estudi com he fet, animant-me i ajudant-me incondicionalment en tot el que els ha estat possible durant aquests darrers sis anys.

A tots, us vull donar les gràcies més sinceres.

Índex

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducció | 1 |
| 2 | Breu introducció a la mecànica hamiltoniana | 3 |
| 2.1 | Breu introducció conceptual | 3 |
| 2.2 | Formalisme Lagrangianà i Hamiltonià | 4 |
| 3 | El problema dels tres cossos | 8 |
| 3.1 | Derivació de les equacions | 9 |
| 3.2 | Equilibris de Lagrange | 12 |
| 3.3 | Anàlisi de l'estabilitat | 13 |
| 4 | De la bifurcació de Hopf al teorema del centre de Lyapunov | 16 |
| 4.1 | Enunciat | 16 |
| 4.2 | Demostració del teorema de Hopf (4.2) | 16 |
| 4.3 | Demostració del teorema de Lyapunov (4.1): | 20 |
| 4.4 | Exemples | 23 |
| 5 | Computació d'òrbites periòdiques al CRTBP | 27 |
| 5.1 | Mètode de Taylor | 28 |
| 5.2 | Òrbites periòdiques | 31 |
| 5.3 | Continuació numèrica | 37 |
| 5.4 | Resultats numèrics | 38 |
| 6 | Conclusions | 45 |
| A | Figures complementàries | 47 |
| B | Funcions i codi | 50 |

1 Introducció

El projecte

Des dels temps de Newton, matemàtics i científics han modelitzat sistemes físics mitjançant equacions diferencials, a partir de les quals es podia descriure tot el moviment. Es varen desenvolupar resultats importants en sistemes lineals, mentre que la complexitat dels sistemes no lineals impedeixen en molts casos determinar solucions que es puguin escriure explícitament amb expressions algebraiques, i fins i tot el seu comportament qualitatiu.

En particular, són interessants els sistemes hamiltonians, sistemes dinàmics les equacions dels quals són les equacions de Hamilton. El formalisme de Hamilton permet estudiar el moviment dels cossos celestes, governat per la senzilla llei de la Gravitació Universal, a partir d'un conjunt d'equacions diferencials. Quan el nombre de cossos incrementa a tres, la complexitat esdevé molt alta. Sorgeix l'anomenat problema dels tres cossos, i la seva versió restringida. Tal era la seva importància que fins i tot, el 1889, el rei Oscar II de Suècia va oferir un premi a qualsevol que pogués donar una solució general al problema. Finalment, tot i que aquest problema va ser teòricament resolt per Karl Sundman a principis del segle XX, ha estat sempre un problema en la ment de molts i grans matemàtics com Poincaré, Laplace i Lagrange, sent així una font de descobriments matemàtics i nous problemes més enllà de la seva aplicació directa a cossos celestes.

En aquest treball descriurem un resultat que permet obtenir solucions periòdiques a l'entorn d'un punt fix en un sistema hamiltonià: el teorema de Lyapunov. Sota l'assumpció que el sistema lineal a l'entorn d'aquest punt fix conté òrbites periòdiques i, a més, satisfà una condició pels valors propis de la diferencial del camp, es pot assegurar que existeix una família d'òrbites periòdiques d'un període determinat, properes a les del sistema lineal. Tot i que existeix una demostració del teorema més clàssica i constructiva utilitzant sèries de potències, en aquest treball es descriurà la prova del teorema amb l'aplicació quasi directa del teorema de bifurcació de Hopf.

A més, històricament, la falta de potència computacional va limitar el progrés en el camp dels sistemes dinàmics, limitant-se en gran manera a l'estudi de solucions molt regulars. Actualment, es disposa d'ordinadors amb capacitat suficient per aproximar numèricament solucions dels sistemes no lineals, analitzar-les i representar gràficament els resultats. Per aquest motiu, descriurem els algoritmes que s'han emparat per tal de trobar explícitament les famílies que descriu el teorema del centre de Lyapunov quan s'aplica al problema restringit de tres cossos. En destaquem l'ús de la diferenciació automàtica, un integrador numèric basat en el mètode de Taylor i la descomposició de matrius per reflexions de Householder, entre d'altres.

Estructura de la Memòria

La memòria d'aquest treball s'ha dividit en dues parts diferenciades.

La primera, de caire teòric i dedicada al teorema del centre de Lyapunov i la seva demostració a partir del teorema de Hopf. Breument, s'introdueixen els conceptes necessaris per a estudiar sistemes dinàmics del tipus hamiltonià. Es descriu el formalisme lagrangià i hamiltonià, i les equacions que se'n desprenen. Seguidament, es presenta el problema restringit de tres cossos, el sistema dinàmic format per tres partícules (una d'elles amb massa negligible) que es mouen únicament a causa a la força gravitatòria, una força d'atracció mútua que és proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre els seus centres de massa. Es calculen els punts d'equilibri d'aquest sistema, anomenats punts de Lagrange, i se n'estudia la seva estabilitat. Finalment, es presenta i es demostra el teorema del centre de Lyapunov, que proporciona més informació sobre la dinàmica de l'entorn dels punts d'equilibri. En particular, es veurà que és possible aplicar el teorema en els punts de Lagrange.

La segona part, en canvi, és de caire computacional. Es presenten al lector les eines i els algorismes utilitzats per a desenvolupar un programa escrit en C que permet calcular i determinar explícitament òrbites periòdiques al voltant del punt d'equilibri L_1 . S'utilitza el model circular dels tres cossos CRTBP², ja que en ser un sistema autònom permet ser estudiat de forma més senzilla. Bàsicament, a partir d'una primera aproximació obtinguda d'una òrbita periòdica del problema lineal de l'entorn del punt fix, es millora iterativament l'òrbita fins a convergir en una solució periòdica amb una certa tolerància fixada. Es presenten tres tipus de famílies d'òrbites periòdiques, dues de les quals són conseqüència del teorema del centre de Lyapunov, i la tercera, deguda a una bifurcació. Notar que de tota manera, el codi es pot adaptar de forma senzilla, canviant les posicions inicials, al càlcul de solucions periòdiques en altres punts d'interès.

La memòria conté un annex, que conté, per una banda, les figures que complementen algunes de les seccions de la part computacional per tal de no saturar al lector. I per altra banda, inclou el programa que s'ha desenvolupat i que computa les òrbites presentades.

²De l'anglès, circular restricted three-body problem.

2 Breu introducció a la mecànica hamiltoniana

2.1 Breu introducció conceptual

La mecànica de Newton va ser sens dubte un dels avenços més importants en la ciència. Aquesta, es basa en el principi fonamental de la mecànica clàssica, que s'escriu com $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (on \vec{p} és el moment lineal), i que normalment, dona lloc a la coneguda relació $\vec{F} = m\vec{a}$. També Newton va establir la llei de la gravitació universal, que serà en la qual ens basarem i que vectorialment té la següent forma:

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{r^3} \vec{r}$$

On recordem que el vector \vec{F} fa referència a la força exercida sobre un cos de massa m per l'efecte de la massa M d'un segon cos, i \vec{r} és el vector que uneix els seus centres de massa respectius. Per altra banda, G és una constant que s'anomena constant de la gravitació universal. Notem que les equacions contenen dependència de les posicions, és a dir, de les coordenades cartesianes (x,y,z) .

Per aquesta raó, per un sistema de N partícules es tenen $3N$ equacions diferencials que dependran de les coordenades triades. Sovint, però, es duen a terme canvis de coordenades per incloure lligadures/simetries i simplificar el problema. Per obtenir una expressió invariant respecte de la selecció de coordenades, s'introdueix el principi de Hamilton. Es tracta d'una reformulació de la mecànica, ja que a partir d'aquest, es poden recuperar les equacions de Newton. El principi de Hamilton és un principi integral i diu que "el moviment del sistema a l'espai de configuració³ és tal que l'integral de línia (anomenada acció) $\int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ és un extremal respecte a variacions del camí $q(t)$." [1]. El principi adopta la següent forma:

$$\delta S(q) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = 0 \quad (2.1)$$

La funció escalar $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$ és C^2 en les seves variables. S'anomena lagrangiana i descriu el moviment del sistema.

Les variables del lagrangiana són el temps t (escalar), les coordenades generalitzades $q(t) = (X(t), \dots, q_n(t))$ i les seves velocitats, $\dot{q}(t) = (\dot{X}(t), \dots, \dot{q}_n(t))$ (vectors n -dimensionals) amb $\dot{q}_i(t) = \frac{dq_i(t)}{dt}$. Clarament, també requerim que les coordenades generalitzades siguin funcions $q_i : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Per un sistema mecànic de N partícules, es tindrà, en general, $n = 3N$ graus de llibertat.

Per altra banda, notem que el lagrangiana no és únic, sinó que es pot multiplicar per una constant λ i afegir una derivada total del temps $\frac{dG}{dt}$ d'una funció G de classe C^1 de les coordenades, velocitats i el temps. Qualsevol canvi que es pugui descriure d'aquesta manera no modificarà la trajectòria solució del sistema.

³L'espai n -dimensional definit per les coordenades generalitzades q , que contenen implícitament les simetries/lligadures del sistema.

2.2 Formalisme Lagrangia i Hamiltonia

En aquesta secció obtindrem les equacions del moviment a partir del principi de Hamilton anunciat a la secció anterior. Obtindrem primer les equacions de Euler-Lagrange corresponents al formalisme lagrangia i, a partir d'aquestes, deduirem les equacions de Hamilton.

Per tal de poder desenvolupar les equacions de Hamilton, introduïm primer els següents conceptes:

Definició 2.1. Donades unes coordenades generalitzades q_i , amb $i = 1, \dots, n$. Definim el moment generalitzat, també anomenat moment conjugat, p_i com

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.2)$$

Definició 2.2. Donada una funció $L = L(q, \dot{q}, t)$ lagrangia es defineix el hamiltonia associat com la transformada de Legendre:

$$H(q, p, t) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (2.3)$$

Com el hamiltonia és funció de les coordenades generalitzades i dels seus moments conjugats, es requereix que les velocitats generalitzades \dot{q}_i puguin ser resoltes de forma unívoca a partir de la definició dels moments generalitzats: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i, t)$. Per tant, pel teorema de la funció implícita, requerim que la matriu $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{ij}$ sigui invertible.

Teorema 2.3. Sigui L el lagrangia d'un sistema de n graus de llibertat. Aleshores una corba $q(t)$ fa extremal l'acció S i és per tant el moviment del sistema en l'espai de configuració si i només si té els extrems fixats $q(t_1) = X$ i $q(t_2) = Y$ i, a més, satisfà:

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Aquestes equacions s'anomenen equacions d'Euler-Lagrange. Per la derivació d'aquestes equacions s'utilitza el següent lema.

Lema 2.4. Sigui $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en el interval $[a, b] \in \mathbb{R}$ que satisfà la igualtat següent per tota funció $h(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(a, b)$ amb $h(a) = h(b) = 0$.

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$$

Aleshores $f(x) \equiv 0$.

Demostració 2.4

Per contraposició, suposem que $f(x)$ no és idènticament nul·la. Aleshores existeix $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$ (el cas negatiu es faria igual). Com $f(x)$ és contínua en x_0 , existirà un entorn obert $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ al voltant de x_0 tal que $f(x) > 0$ per tot $x \in U$. Observem que en el cas que x_0 sigui un dels extrems, podem prendre $U = [x_0, x_0 + \varepsilon)$ (pel cas $x_0 = a$) i $U = (x_0 - \varepsilon, x_0]$ (pel cas $x_0 = b$). Aleshores prenent una funció $h(x)$ del tipus "bump":

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 & x &\notin U \\ h(x) &= \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2 - (x - x_0)^2}\right) & x &\in U \end{aligned}$$

La funció h és de classe C^1 (de fet, C^∞), i pren valors positius en U , mentre que és nul·la en la resta de l'interval $[a, b]$. Per tant,

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_U f(x)h(x)dx > 0$$

Ja que és la integral d'una funció positiva sobre l'interval U que té longitud no nul·la. En conseqüència, la integral resulta no ser nul·la i queda demostrat el lema. \square

Demostració 2.3

Suposem que la funció $q(t)$ existeix i defineix la trajectòria en l'espai de configuració del sistema. Sigui $\bar{q} = q(t) + \varepsilon\eta(t)$ una pertorbació controlada per ε que manté fixes els extrems, és a dir, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. A més, prenem la funció $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com una funció de classe C^1 .

Volem que se satisfaci la següent condició (extremal de S) si i només si se satisfan les equacions d'Euler-Lagrange:

$$\delta S_\varepsilon = 0 \implies \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \implies \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{d\varepsilon} dt \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Desenvolupant la derivada total obtenim el següent:

$$\frac{dL}{d\varepsilon}(q(t) + \varepsilon\eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i(t)$$

Per tant podem escriure la integral com (per $\varepsilon = 0$):

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i(t) \right) dt \quad (2.5)$$

Volem fer factor comú de la funció $\eta_i(t)$, per tant integrem per parts el segon terme de cada sumand, utilitzant que les $\eta_i(t)$ satisfan $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i(t) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i(t) dt \quad i = 1, \dots, n$$

En conseqüència (2.5) resulta:

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i(t) dt \quad (2.6)$$

Per una banda, si suposem que se $q(t)$ extremitza l'acció, aleshores l'expressió anterior és idènticament zero i aplicant el lema 2.4 (utilitzant per a cada i : $\eta_i(t) \not\equiv 0$, i la resta de components $\eta_j(t) \equiv 0$ per tal de reduir el sumatori a només un terme), obtenim les equacions d'Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Per altra banda, si suposem que $q(t)$ satisfà les equacions d'Euler-Lagrange (2.3), aleshores les integrals de (2.6) són directament igual a zero i implica, per tant, que $q(t)$

minimitza l'acció. Amb això queda demostrat el teorema. \square

A continuació, per assolir les equacions de Hamilton procedirem a partir de la derivada total del hamiltonià. A partir de la seva definició:

$$H(q, p, t) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \implies dH = \sum_{i=1}^n \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Per la definició del moment generalitzat observem que els termes amb $d\dot{q}_i$ es cancel·len. A més, notem que el hamiltonià no té dependència de les \dot{q} ja que podem utilitzar la relació $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$. Usant les equacions d'Euler-Lagrange observem el següent:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \implies \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Així, per associació dels termes ens resulten finalment les equacions de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

De forma més compacte,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = -J^{-1} DH^T$$

On J és la matriu simplèctica, per blocs: $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ i DH^T el jacobià del hamiltonià.

L'espai $2n$ -dimensional resultant de (q, p) s'anomena espai de fase. Per tant, les solucions de les equacions de Hamilton (2.8) són corbes en aquest espai. Així, les equacions de Hamilton són $2n$ -equacions diferencials de primer ordre, a diferència de les equacions d'Euler-Lagrange que són n -equacions de segon ordre.

A més, notem que no tots els canvis de coordenades preserven les equacions diferencials (2.8). Aquells canvis $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$ que mantenen la forma de les equacions (tot i que poden modificar el hamiltonià) s'anomenen transformacions canòniques. Destaquem que el conjunt d'aquests canvis és molt més ampli que el conjunt de canvis que preserven les equacions de Newton o les d'Euler-Lagrange.

Definició 2.5. *Sigui ϕ l'aplicació que envia $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$. Aleshores s'anomena transformació canònica si ϕ és derivable (amb inversa també derivable) i el jacobià $D\phi$ satisfà la següent igualtat:*

$$(D\phi)^T J (D\phi) = J$$

Per garantir una transformació vàlida, és útil el concepte de funció generatriu. Una funció $F(q, p, Q, P, t)$ és una funció generatriu si F només té dependència d'una variable del conjunt (q, p) i d'una variable del conjunt (Q, P) (i en general, també de la variable t). Per tant, hi ha quatre tipus de funcions generatrius, depenent de la tria de variables.

En particular, s'anomena de funció de segona espècie si és del tipus $F(q, P, t)$ i satisfà $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial P} \right| \neq 0$. En aquest cas, se satisfà per $i = 1, \dots, n$:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.9)$$

On $K(Q, P, t)$ és el nou hamiltonià. El teorema de la funció implícita ens garanteix que les noves variables no depenguin de les originals.

Per veure (2.9), igualem els lagrangians pels dos conjunts de variables utilitzant 2.3. Al lagrangiana de les noves variables, afegim una derivada total de la funció $G = -P^T \dot{Q} + F(q, P, t)$

$$p^T \dot{q} - H(q, p, t) = P^T \dot{Q} - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} - \dot{P}^T Q - P^T \dot{Q}$$

A més, la derivada total de F respecte del temps,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

Per tant, associant termes de les dues igualtats anteriors i donat que les variables noves i originals són independents obtenim (2.9).

Finalment, observem també que el paper de les variables t i q_i són fortament diferents. En conseqüència, aquest marc teòric és poc útil a l'estudiar problemes sota la teoria que generalitza i unifica la relativitat amb la gravitació de Newton: la relativitat general. És per això que d'aquí en endavant ens restringirem a la mecànica newtoniana, ja que en la majoria de situacions, estarem lluny dels límits de la teoria. Per a problemes celestes on les velocitats són de l'ordre de c o bé en camps gravitatoris molt intensos, en què hi ha curvatura de l'espai i aquest deixa de ser euclidià, s'haurà de recórrer a les equacions de la relativitat general. Les equacions de Hamilton escrites de forma covariant (on t és considerat com una variable q_i) necessiten de termes de potencial covariant al Lagrangiana. Cercar-los, però, només resulta relativament senzill per al cas del camp electromagnètic. És per això que no abordarem aquest cas en el treball⁴.

⁴Com a ampliació, la formulació Hamiltoniana per aquest cas pot trobar-se en l'article: Hamiltonian Formulation of General Relativity, Edmund Bertschinger, 2002

3 El problema dels tres cossos

Introducció

El problema dels tres cossos és "senzillament" el problema de resoldre les equacions del moviment a partir de les posicions i velocitats inicials (aplicant la llei de la Gravitació Universal juntament amb les lleis del moviment de Newton) de tres masses puntuals sotmeses únicament a la mútua atracció gravitatòria. És un cas particular del problema de n-cossos.

Històricament, Newton, després de resoldre el problema de dos cossos, va ser el primer que va intentar resoldre el problema (enfocant-se en el sistema Sol-Terra-Lluna). La complexitat del problema va traduir-se en la frase que Newton va dir a l'astrònom John Machin: "No havia tingut mai tants mal de caps com amb els seus estudis sobre la Lluna" [3]. Altres avenços destacables van ser deguts a Heinrich Bruns (1887) que va demostrar que no podien existir noves integrals del moviment que s'expressessin com funcions algebraïques de les posicions i velocitats cartesianes dels cossos. Posteriorment, Henri Poincaré (1890) va demostrar que tampoc podien existir aquestes integrals del moviment que depenguessin analíticament de posicions, velocitats i ràtios de les masses. Amb aquests resultats, s'arribà a la conclusió que el problema no podia ser resolt amb fórmules algebraïques i integrals. Finalment, Karl Sundman (1912) va trobar una sèrie de potències infinita que podia sumar-se per donar la solució al problema. Malauradament, aquesta suma no convergeix prou ràpidament com per a produir resultats interessants o millorar la nostra comprensió del problema.

Problema restringit dels tres cossos

El problema restringit dels tres cossos és un cas simplificat del problema de tres cossos. La simplificació és tractar el tercer cos, de massa infinitesimal, com un objecte que es mou únicament sota la influència del camp creat pels dos cossos massius segons (2.1), que al seu torn es comporten com un problema de dos cossos. El problema de dos cossos dona lloc a tres tipus diferents de moviment al voltant del centre de masses comú: el·líptic (amb el circular com a cas particular), parabòlic i hiperbòlic. Pels dos darrers casos, el moviment no està acotat i, per tant, ens basarem en el cas el·líptic (circular) per estudiar resultats aplicables a sistemes que perdurin lligats en el temps⁵.

Destaquem que tot i aquesta simplificació, el problema restringit és útil per estudiar diferents situacions, com per exemple en el camp del sistema solar: un cometa entrant al sistema Sol-Terra (uns 10^{13} kg enfront dels 10^{24} kg i 10^{30} kg, de la Terra i el Sol), o també satèl·lits viatjant en el sistema Terra-Lluna (uns 10^3 kg enfront dels 10^{22} kg i 10^{24} kg, de la Lluna i la Terra), etc.

⁵El sistema solar, per exemple, és un sistema lligat de n-cossos amb òrbites pràcticament circulars (les excentricitats dels principals planetes és petita)

3.1 Derivació de les equacions

Segons la gravitació universal de Newton, les equacions del moviment (en coordenades cartesianes) per a la tercera partícula, sense massa, seran:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} &= \ddot{X} = G \left(m_1 \frac{X_1 - X}{r_{31}^3} + m_2 \frac{X_2 - X}{r_{32}^3} \right) \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \ddot{Y} = G \left(m_1 \frac{Y_1 - Y}{r_{31}^3} + m_2 \frac{Y_2 - Y}{r_{32}^3} \right) \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= \ddot{Z} = G \left(m_1 \frac{Z_1 - Z}{r_{31}^3} + m_2 \frac{Z_2 - Z}{r_{32}^3} \right)\end{aligned}$$

On r_{ij} és la distància entre la massa i -èsima i la j -èsima. Les funcions $(X_i(t), Y_i(t), Z_i(t))$ per $i = 1, 2$ són funcions del temps que descriuen el moviment dels objectes amb massa. En aquest treball ens restringirem al problema circular (CRTBP). És a dir, els dos objectes massius faran trajectòries circulars al voltant del centre de massa comú i amb la mateixa velocitat angular. A més, el seu moviment queda restringit a un pla.

Per a l'estudi del tercer cos, utilitzarem el formalisme hamiltonià introduït a la secció anterior. El hamiltonià de la partícula en les coordenades cartesianes usuals és el següent:

$$H = T + U = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{m_1}{r_{13}} - \frac{m_2}{r_{23}}$$

Observem que el primer terme és l'energia cinètica clàssica i el segon terme és l'energia potencial gravitatòria newtoniana. Les equacions del moviment seran doncs:

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial p_X} \quad \dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial p_Y} \quad \dot{Z} = \frac{\partial H}{\partial p_Z} \quad p_{\dot{X}} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad p_{\dot{Y}} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \quad p_{\dot{Z}} = -\frac{\partial H}{\partial Z}$$

En general, les solucions d'equilibri sorgeixen d'imposar $\dot{q}_i = \dot{p}_i = 0$ i resoldre el sistema de 6 equacions resultant. En coordenades cartesianes, però, no existeix una solució al sistema. Per això, a continuació, introduïm un nou sistema de coordenades (anomenat sinòdic) que permet trobar solucions d'equilibri relatiu que esdevenen solucions periòdiques.

Com els dos objectes massius formen un problema de dos cossos, si prenem el sistema de coordenades cartesià amb el pla XY definit com el pla on m_1 i m_2 realitzen el seu moviment i l'origen al centre de masses, tenim que $Z_1 = Z_2 = 0$ i que per tant $p_Z \propto Z$. En conseqüència, a l'estudiar els punts d'equilibri fixarem $Z = 0$ per tal de tenir $p_Z = 0$. D'aquesta manera, reduïm l'estudi a dues dimensions perquè el moviment dels tres cossos queda restringit al pla XY.

Per tal de simplificar més el problema, utilitzarem un canvi de variables de manera que el nou sistema de coordenades rota uniformement amb velocitat angular ω al voltant de l'origen sobre el pla on es troben els cossos m_i , i per tant, en aquest sistema els cossos estan en repòs (i sense pèrdua de generalitat, podem suposar que l'eix OX coincideix amb els primaris).⁶

Més precisament, el canvi que fem s'escriu com:

$$x = X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \quad y = -X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \quad z = Z \quad (3.1)$$

⁶Pel cas el·líptic general, ω no pot prendre un valor constant, sinó que hauria de variar periòdicament amb el temps.

Per als cossos primaris tindrem:

$$(x_1, y_1, z_1)(t) = \left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2}, 0, 0 \right) \quad , \quad (x_2, y_2, z_2)(t) = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}, 0, 0 \right)$$

Notar la nova notació: $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ fan referència a les coordenades de la partícula m_i en el nou sistema rotatori.

Per a facilitar el seguiment i els càlculs, definim la massa $\mu = m_2/(m_1 + m_2) \in (0, 0.5)$ (suposant $m_1 > m_2$) i utilitzem la posició del centre de masses: $(1 - \mu)x_1 + \mu x_2 = 0$. Ens resulta (veure Fig. 1):

$$(x_1, y_1, z_1)(t) = (-\mu, 0, 0) \quad , \quad (x_2, y_2, z_2)(t) = (1 - \mu, 0, 0)$$

A més, podem utilitzar les unitats adients de manera que sense pèrdua de generalitat podem escollir $G = 1$, $\omega = 1$ i $m_1 + m_2 = 1$.

Per retrobar les equacions del moviment de la tercera partícula, primer cal garantir que es tracta d'una transformació canònica. Per fer-ho, afegim els moments generalitzats corresponents p_X , p_Y i utilitzarem la següent funció generatriu:

$$W = W(X, Y, p_x, p_y) = [(X \cos(t) + Y \sin(t))p_x + (-X \sin(t) + Y \cos(t))p_y]$$

Proposició 3.1. *La funció $W(X, Y, p_x, p_y)$ és una funció generatriu de segona espècie i defineix el canvi de sistema de coordenades proposat a 3.1.*

Per demostrar-ho, observem primerament que la funció $W(X, Y, p_x, p_y)$ depèn de les coordenades originals i els nous moments, per tant és de segona espècie i, a més, de classe C^∞ . Per tant, únicament cal veure que se satisfà el teorema de la funció implícita. Tenim:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial p_x} & \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial p_y} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial p_x} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial p_y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

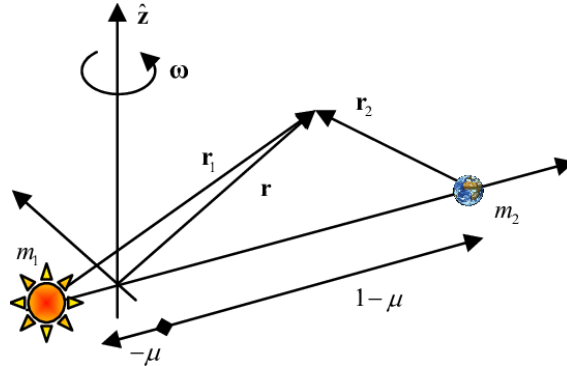


Figura 1: Representació del canvi de variable 3.1 de forma gràfica.

Per tant, la funció W és una funció generatriu i es preserven les equacions de Hamilton. De la transformació canònica se segueix:

$$\begin{aligned} p_X &= \frac{\partial W}{\partial X} & p_Y &= \frac{\partial W}{\partial Y} \\ x &= \frac{\partial W}{\partial p_x} & y &= \frac{\partial W}{\partial p_y} \\ K &= H + \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned}$$

Desenvolupant les derivades i aplicant les equacions de Hamilton en resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} + y & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} + p_y \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} - x & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} - p_x \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}$$

On H s'ha expressat en termes de les noves variables. El nou hamiltonià K pren la següent forma:

$$K(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_{13}} - \frac{\mu}{r_{23}} \quad (3.2)$$

Observem també:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} &= p_x & \frac{\partial H}{\partial p_y} &= p_y \end{aligned}$$

Per tant, les equacions del moviment resulten (afegint la component vertical, que roman intacta):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{p}_x &= \frac{(1-\mu)(-\mu-x)}{r_{13}^3} + \frac{\mu(1-\mu-x)}{r_{23}^3} + p_y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_y &= -\left(\frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right)y - p_x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_z &= -\left(\frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right)z \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Equilibris de Lagrange

Aquestes darreres equacions (3.3), a l'anul·lar-se, donen lloc a les solucions d'equilibri anomenades punts de Lagrange. Aquests punts d'equilibri seran òrbites periòdiques en el sistema original (el sistema previ a la rotació ω): la tercera massa romandrà orbitant circularment al voltant del centre de masses mantenint distàncies constants amb els dos cossos massius.

Aleshores, igualant les equacions a zero, es pot eliminar la variable dels moments generalitzats, obtenint directament la següent relació:

$$x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{(1-\mu)(-\mu-x)}{r_{13}^3} - \frac{\mu(1-\mu-x)}{r_{23}^3} \quad (3.4)$$

$$y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) y \quad (3.5)$$

Suposem el cas en que el sistema formi un triangle equilàter amb les tres partícules. Aleshores tenim $r_{13} = r_{23} = r_{12} = r$. A partir de (3.4) s'obté:

$$x = r^{-3}x$$

Tenim $r = 1 - \mu + \mu = 1$, de manera que aquesta configuració és solució de les equacions.

Suposem ara que el triangle format per les tres partícules no és equilàter, de manera que $r_{13} \neq r_{23}$. En aquest cas, observem que de (3.5) se segueix la següent condició:

$$y \left(1 - \left(\frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) \right) = 0$$

De manera que si els tres cossos no formen un triangle equilàter, aleshores son col·lineals (ja que $y = 0$). Per altra banda, ens quedarà:

$$x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{(1-\mu)(-\mu-x)}{|-\mu-x|^3} - \frac{\mu(1-\mu-x)}{|1-\mu-x|^3}$$

Resulta:

$$x = -\frac{\partial U}{\partial x} \implies \frac{1}{(2\mu-1)^3}x + \mu \frac{1-\mu-x}{|1-\mu-x|^3} - (1-\mu) \frac{\mu+x}{|\mu+x|^3} = 0$$

Obtenim d'aquesta manera una equació per x amb μ com a paràmetre. Observem que prenent la part esquerra de la igualtat com la funció $f(x)$ tenim que $f(x)$ és contínua en els intervals $(-\infty, -\mu)$, $(-\mu, 1-\mu)$, $(1-\mu, +\infty)$ i se satisfà:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0 & \lim_{x \rightarrow -\mu^-} f(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\mu^+} f(x) < 0 & \lim_{x \rightarrow 1-\mu^-} f(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1-\mu^+} f(x) < 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0 \end{array}$$

Per tant podem assegurar que hi ha tres valors de x que són solució de l'equació i per tant tenim tres punts d'equilibri: L_1, L_2, L_3 . De fet, gràficament:

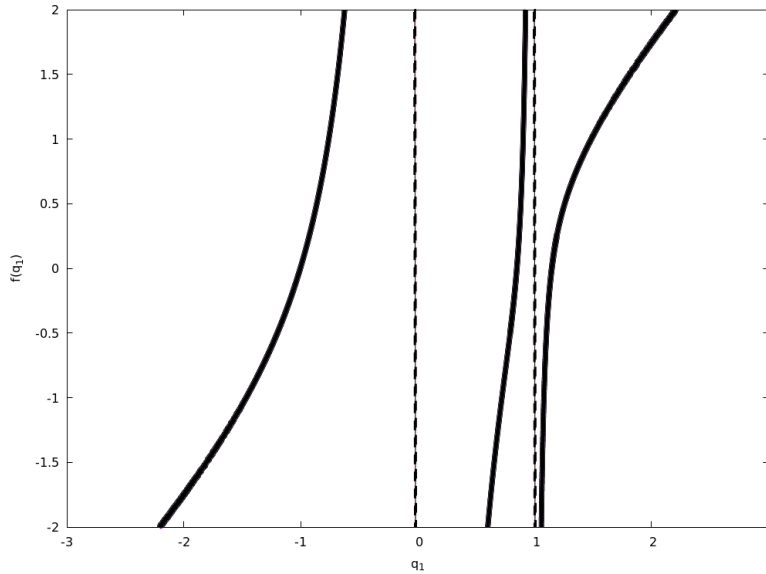


Figura 2: La corba sòlida representa la funció $f(x)$ pel cas de $\mu = 0.01$. Les dues rectes verticals puntejades fan referència als valors $-\mu$ i $(1 - \mu)$.

Les tres solucions col·lineals s'anomenen punts de Lagrange L_1, L_2, L_3 mentre que les dues solucions provinents de la disposició en triangle equilàter s'anomenen punts de Lagrange L_4, L_5 .

3.3 Anàlisi de l'estabilitat

En l'opinió de Lagrange, les solucions que va trobar no tenien rellevància en astronomia. Tanmateix, es van descobrir que al voltant dels punts L_4, L_5 del sistema restringit Sol-Júpiter es troben petits planetes i asteroides formant així un triangle equilàter. A més, els punts L_1, L_2 són utilitzats actualment per missions espacials.

A continuació estudiarem l'estabilitat dels punts de Lagrange trobats a la secció anterior a través de la seva component lineal (estudiarem la diferencial del camp F format per les equacions del moviment). Aquesta diferencial en $z = 0$ la podem dividir en el subespai de l'eix vertical (z, p_z) i el pla XY on es troben els cossos, ja que estan totalment desacoblats. Obtenim, doncs, per (z, p_z) :

$$DF_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial z} & \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_z & 0 \end{pmatrix}$$

Amb

$$\Delta_z = -\frac{1-\mu}{r_{13}^3} - \frac{\mu}{r_{23}^3} < 0$$

Per tant, obtenim valors propis imaginaris purs:

$$\lambda^2 - \Delta_z = 0 \quad \implies \quad \lambda = \pm \sqrt{|\Delta_z|}i$$

Per altra banda, en el pla XY tenim la següent diferencial del camp F:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial y} & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_y} \\ \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial y} & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_x} & \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_y} \end{pmatrix}$$

Calculant les derivades parcials en cada cas, obtenim:

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & 0 & 1 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores, si calculem els valors propis de la darrera matriu, obtenim:

$$|DF - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^4 + \lambda^2(2 - \Delta_{11} - \Delta_{22}) + 2\lambda(\Delta_{12} - \Delta_{21}) + \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21} + \Delta_{11} + \Delta_{22} + 1 = 0$$

Observem que $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ pel fet que $\dot{p}_{q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ (degut a la continuïtat en les derivades de U). Desenvolupant les derivades:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \frac{3(1-\mu)(-\mu-x)^2}{r_{13}^5} - \frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{3\mu(1-\mu-x)^2}{r_{23}^5} - \frac{\mu}{r_{23}^3} \\ \Delta_{21} = \Delta_{12} &= \frac{-3(1-\mu)(-\mu-x)y}{r_{13}^5} + \frac{-3\mu(1-\mu-x)y}{r_{23}^5} \\ \Delta_{22} &= \frac{3(1-\mu)y^2}{r_{13}^5} - \frac{1-\mu}{r_{13}^3} + \frac{3\mu y^2}{r_{23}^5} - \frac{\mu}{r_{23}^3} \end{aligned}$$

Punts L_4, L_5

Els dos punts satisfan que $r_{13} = r_{23} = 1$. Per altra banda,

$$x = 1 - \mu - \frac{1}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -\frac{1}{4} \\ \Delta_{21} = \Delta_{12} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \Delta_{22} &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Substituint els valors obtenim el següent polinomi característic,

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$$

Els valors propis corresponents seran:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}$$

Aleshores si se satisfà $1 - 27\mu(1 - \mu) \geq 0$, tindrem valors propis imaginaris purs, i per tant podem dir que L_4, L_5 són solucions estables en el problema lineal. Aquesta condició ens proporciona una relació entre les masses:

$$1 \geq 27\mu(1 - \mu) \implies \mu \geq \mu_0 = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0.03852 \implies m_1 \geq 24.96 m_2$$

Aquest valor μ_0 s'anomena valor crític de Routh. Tot i això, notar que l'estabilitat pel sistema no lineal no pot ser establerta a partir del sistema lineal (no es pot, per exemple, aplicar el teorema de Hartman-Grobman pel fet de no ser punts hiperbòlics). Es requereixen doncs, resultats més avançats per establir condicions per l'estabilitat. Per exemple, fent ús del teorema de Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) se sap que L_4, L_5 són estables en el rang de masses establert en el cas lineal excepte per tres valors concrets del paràmetre μ , aproximadament $\mu \in (0.010913, 0.013516, 0.024293)$ [7].

En cas contrari, si $1 - 27\mu(1 - \mu) < 0$, el valor propi tindrà part real no nul·la i per tant resultarà en un punt inestable.

Punts L_1, L_2, L_3

Els punts col·lineals satisfan

$$x = x \quad y = 0$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 2 \left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) \\ \Delta_{21} &= \Delta_{12} = 0 \\ \Delta_{22} &= - \left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) \end{aligned}$$

Substituint els nous valors obtenim el següent polinomi característic,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + \lambda^2(2 - \alpha) - 2\alpha^2 + \alpha + 1 \\ \alpha &= \frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \end{aligned}$$

En aquest cas, els valors propis seran:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}}{2}}$$

Observem que per tot valor de $\alpha > 8/9$ (fet que se satisfà per valors de μ suficientment petits) tenim que els valors propis per α seran dos valors propis reals i dos valors propis imaginaris purs. Com que tenim un valor propi real positiu, podem concloure que els punts L_1, L_2, L_3 són inestables (més concretament, tindrem varietats estables i inestables). A més, la seva inestabilitat augmenta a mesura que α també ho fa.

4 De la bifurcació de Hopf al teorema del centre de Lyapunov

4.1 Enunciat

El teorema del centre de Lyapunov, en endavant teorema de Lyapunov, ens permet trobar i estudiar famílies de solucions periòdiques d'un sistema d'equacions diferencials amb integrals primeres al voltant d'un punt d'equilibri. La idea és, que sota certes condicions, òrbites periòdiques del camp linealitzat persisteixen en el sistema no lineal prop del punt d'equilibri. Posteriorment, l'aplicarem en el CRTBP que hem descrit a la secció anterior. A més, en endavant, suposarem que les funcions són tan diferenciables com es requereixi.

Teorema 4.1. (*Lyapunov*) *Suposem que el sistema n -dimensional autònom $\dot{x} = f(x)$ admet una integral primera de la forma $I(x) = \frac{1}{2}x^T Sx + o(|x|^2)$ amb $S = S^T$ i $\det(S) \neq 0$. Suposem també que el sistema té en l'origen un punt d'equilibri amb exponents $\pm i\beta, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ on $i\beta$ és un imaginari pur. Si $\lambda_j/i\beta \notin \mathbb{Z}$ per tot $j = 3, \dots, n$ aleshores existeix una família uniparamètrica d'òrbites periòdiques que quan tendeixen al punt d'equilibri el seu període tendeix a $T = 2\pi/\beta$.*

Per la demostració del teorema de Lyapunov utilitzarem una versió d'un teorema més general anomenat teorema de bifurcació de Hopf. Un cop demostrat, justificarem que les hipòtesis del teorema de Lyapunov verifiquen les condicions necessàries del teorema de bifurcació de Hopf.

Teorema 4.2. (*Hopf*) *Sigui $\dot{x} = F(x, \mu)$ un sistema n -dimensional autònom que depèn del paràmetre real μ . Suposem per un valor $\mu = \mu_0$, el punt $x = x_0$ és fix i la seva matriu jacobiana és denotada per $F_x(x_0, \mu_0)$ i té dos valors propis imaginaris purs, $\pm i\beta$ i cap altre valor propi múltiple enter de $i\beta$. Aleshores existeix una família que denotem per $x_0(\mu)$ de punts d'equilibri amb $x_0(\mu_0) = x_0$. Si, a més, $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ és la continuació del valor propi $\pm i\beta$ i $\alpha'(\mu) \neq 0$ aleshores existeixen funcions diferenciables $\mu(\varepsilon)$ i $T(\varepsilon)$ del paràmetre $\varepsilon \in \mathbb{R}$ amb $\mu(0) = \mu_0$ i $T(0) = \frac{2\pi}{\beta}$ de manera que existeixen solucions periòdiques no constants $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ amb període $T(\varepsilon)$ que tendeixen a l'origen $\mathbf{x}_0(\mu_0)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$.*

4.2 Demostració del teorema de Hopf (4.2)

L'existència de la família de punts d'equilibri és conseqüència directa del teorema de la funció implícita aplicat a la funció $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. En efecte, per ser x_0 punt d'equilibri de $F(\cdot, \mu_0)$, es té $F(x_0, \mu_0) = 0$ i per hipòtesi, $F_x(x_0, \mu_0)$ no té valors propis nuls, i per tant té rang màxim i és invertible. En conseqüència existeix una família que denotem per $x_0(\mu)$ de punts d'equilibri.

Per demostrar la segona part, fem una reordenació sota un canvi lineal (i constant) dels eixos, de manera que podem suposar que les dues primeres coordenades de $\mathbf{x}(\mu)$ són generades pels vectors propis dels valors propis $\pm i\beta$. Així, denotem $x(\mu) = (x_1(\mu), x_2(\mu), y(\mu))$. Si definim A com la matriu jacobiana de F , aleshores F admet el següent desenvolupament al voltant de x_0 :

$$F(x, \mu_0) = F(x_0, \mu_0) + A|_{x_0(\mu_0)}(x - x_0) + f(x, \mu_0) \quad (4.1)$$

On

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

I on \tilde{A} té dimensió $(n-2) \times (n-2)$ i no té valors propis múltiples de $i\beta$. A més, $F(x_0, \mu_0) = 0$ ja que per hipòtesi ha ser solució, i $f(x(\mu), \mu_0)$ (i la seva derivada) és nul·la en x_0 .

Segui ara $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ la continuació del valor propi $\pm i\beta$. Expandint (4.1) resulta doncs el següent sistema (en les coordenades adequades):

$$\dot{x}_1(t) = \alpha(\mu)(x_1(t) - x_{10}(\mu)) - \beta(\mu)(x_2(t) - x_{20}(\mu_0)) + f_1(x_1, x_2, y, \mu) \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha(\mu)(x_2(t) - x_{20}(\mu)) + \beta(\mu)(x_1(t) - x_{10}(\mu_0)) + f_2(x_1, x_2, y, \mu) \quad (4.3)$$

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}(\mu)(y(t) - y_0(\mu)) + g(x_1, x_2, y, \mu) \quad (4.4)$$

Afegim també un desplaçament per simplificar les expressions (que de fet, no té efecte en les derivades ja que són solució de l'equació diferencial):

$$z(t) = (x_1(t) - x_{10}(\mu), x_2(t) - x_{20}(\mu), y(t) - y_0(\mu))$$

$$\mu_1 = \mu - \mu_0$$

El camp reescrit en les noves variables z, μ_1 , i que denotem per $Z(z, \mu_1)$ satisfà $Z(0, \mu_1) = F(x_0(\mu_0 + \mu_1), \mu_0 + \mu_1) = 0$ per a tot μ_1 , i per tant, ho podem escriure de la següent manera

$$\dot{z} = Z(z, \mu_1) = \int_0^1 D_z Z(sz, \mu_1) ds \quad z = \tilde{M}(z, \mu_1)z$$

Ja que,

$$Z(z, \mu_1) = Z(z, \mu_1) - Z(0, \mu_1) = \int_0^1 \frac{d}{ds} Z(sz, \mu_1) ds = \left(\int_0^1 D_z Z(sz, \mu_1) ds \right) z$$

Llavors, existiran solucions periòdiques $z(t) = \varepsilon w(t)$ de període T_0 si $w(T_0) = w(0)$. De la mateixa manera:

$$\varepsilon \dot{w}(t) = \int_0^1 D_z Z(s\varepsilon w, \mu_1) ds \quad w = M(w, \mu_1, \varepsilon)\varepsilon w$$

Que simplificant obtenim el camp $\dot{w}(t) = W(w, \mu_1, \varepsilon)$, formant el següent sistema

$$\dot{w}(t) = \int_0^1 D_z Z(s\varepsilon w, \mu_1) ds \quad w = M(w, \mu_1, \varepsilon)w = W(w, \mu_1, \varepsilon) \quad (4.5)$$

$$w(0) = w(T) \quad (4.6)$$

Amb $w(0) = (w_{10}, w_{20}, \eta_0)^T$. Segui $\phi(t; (w_0, \mu_1, \varepsilon))$ el flux de (4.5). La condició de periodicitat quedarà doncs en la següent forma:

$$\phi\left(t; \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \mu_1, \varepsilon\right) - \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si busquem òrbites periòdiques en el cas $\varepsilon = \mu_1 = 0$, tenim solució del sistema 4.5 si $\eta_0 = 0$.

$$\dot{w}(T_0) = \int_0^1 D_z Z(0,0) ds w = D_z Z(0,0) w = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} w$$

$$\phi(t; (w_{10}, w_{20}, 0)^T, 0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) & 0 \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & e^{\tilde{A}t} \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{10}\cos(\beta t) - w_{20}\sin(\beta t) \\ w_{10}\sin(\beta t) + w_{20}\cos(\beta t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, se satisfà $\phi(T_0; (w_{10}, w_{20}, 0)^T, 0, 0) - (w_{10}, w_{20}, 0)^T = 0$ amb $T_0 = 2\pi/\beta$. De fet, el subespai (w_1, w_2) forma un oscil·lador harmònic bidimensional de període $T = 2\pi/\beta$. Pel que fa a les condicions inicials, podem prendre $w_{10} = 1$ i $w_{20} = 0$ sense pèrdua de generalitat. Degut al caràcter autònom de l'equació diferencial, podem agafar la condició inicial en un hiperplà concret (secció de Poincaré), com $w_{20} = 0$. Per altra banda, agafem $w_{10} = 1$ ja que podem escollir les unitats adients per tal de carregar la informació de la dimensió de l'òrbita periòdica $z(t)$ en la variable ε (de manera que resulta en una òrbita normalitzada i parametritzada per $z(t) = \varepsilon w(t)$). En endavant doncs, prendrem $w_{10} = 1$ i $w_{20} = 0$.

Volem veure ara que per $\varepsilon \neq 0$, la diferenciabilitat de l'equació diferencial respecte del paràmetre μ , ens permet trobar solucions periòdiques properes de període $T_0(\varepsilon)$, amb $T_0(0) = 2\pi/\beta$ i contínua. De la mateixa manera, funcions diferenciables $\mu_1(\varepsilon), \eta_0(\varepsilon)$ que satisfacin $\mu_1(0) = 0$ i $\eta_0(0) = 0$. Per demostrar-ho, utilitzarem el teorema de la funció implícita a $\Gamma(\varepsilon, (T_0, \mu_1, \eta_0)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida de la següent manera:

$$\Gamma(\varepsilon, (T_0, \mu_1, \eta_0)) = \phi(T_0; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \mu_1, \varepsilon) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Com hem vist, $\Gamma(0, (2\pi/\beta, 0, 0)) = 0$. Resta per veure que la submatriu resultant de la jacobiana de Γ en (T_0, μ_1, η_0) és invertible en el punt $(0, (2\pi/\beta, 0, 0))$.

$$D_{(T_0, \mu_1, \eta_0)} \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial (T_0, \mu_1, \eta_0)} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial T_0} \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_0} \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_1} \right)$$

Per una banda tenim,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T_0} \Big|_{(0, (2\pi/\beta, 0, 0))} = \frac{\partial \phi(t; (1, 0, 0)^T, 0, 0)}{\partial t} \Big|_{t=T_0} = \begin{pmatrix} -\beta \sin(\beta T_0) \\ \beta \cos(\beta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculem ara la diferencial $\partial \Gamma / \partial \eta_0$ en el punt. No ho fem directament sinó que utilitzarem les equacions variacionals. Inicialment,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t; (1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon) = W(\phi(t; (1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon))$$

I fent la diferencial respecte de η_0 obtenim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_0} \Big|_{(t;(1,0,0)^T,0,0)} = \frac{\partial W}{\partial w} \Big|_{\phi(t;(1,0,0)^T,0,0)} \frac{\partial \phi}{\partial \eta_0}(t; (1, 0, 0)^T, 0, 0)$$

amb la condició inicial

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta_0} \Big|_{(0;(1,0,0)^T,0,0)} = \frac{\partial}{\partial \eta_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n-2} \end{pmatrix}$$

Aleshores, com

$$\frac{\partial W}{\partial w}(w, \mu_1, \varepsilon) = \int_0^1 D_z Z(s\varepsilon w, \mu_1) ds + \left(\int_0^1 D_z^2 Z(s\varepsilon w, \mu_1) s\varepsilon ds \right) w$$

En $\varepsilon = \mu_1 = 0$ resulta

$$\frac{\partial W}{\partial w}(w, 0, 0) = \int_0^1 D_z Z(0, 0) ds = D_z Z(0, 0) = A$$

Per tant, tenim una equació diferencial lineal hi homogènia amb solució:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta_0} \Big|_{(T_0;(1,0,0)^T,0,0)} = e^{AT_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\tilde{A}T_0} \end{pmatrix}$$

Finalment resta calcular la diferencial respecte de μ_1 . Com $\mu_1 \neq 0$, sistema deixa de ser $\dot{w}(t) = Aw(t)$, sinó que utilitzem la matriu amb la continuació dels valors propis,

$$M(w, \mu_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu_1) & -\beta(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \beta(\mu_1) & \alpha(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A}(\mu_1) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

on s'ha reescrit els valors propis $\alpha(\mu)$ i $\beta(\mu)$, i la submatriu $\tilde{A}(\mu)$ en termes de $\mu_1 = \mu - \mu_0$ per facilitar els càlculs. Aleshores, a partir de $\dot{w}(t) = M(w, \mu_1, 0)w(t)$ tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(t; ((1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon)) &= \frac{\partial M(w, \mu_1, 0)}{\partial \mu_1} \phi(t; ((1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon)) \\ &+ M(w, \mu_1, 0) \frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(t; ((1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon)) \\ &+ D_w M(w, \mu_1, 0) \frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(t; ((1, 0, \eta_0)^T, \mu_1, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Per $\varepsilon = 0, \mu_1 = 0, \eta_0 = 0, T_0 = 2\pi/\beta$, resulta $M(w, 0, 0) = A$, i també $D_w M(w, 0, 0) = 0$. D'aquesta manera, resta una equació diferencial lineal no homogènia del tipus $\dot{w} = Aw + b(t)$ que tindrà com a solució:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu_1}(T_0; ((1, 0, 0)^T, 0, 0)) = e^{AT_0} e^{-AT_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{AT_0} \int_0^{T_0} e^{-At} A'(0) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

La part no nul·la de la integral resulta,

$$\int_0^{T_0} \begin{pmatrix} \cos(\beta(0)t) & +\sin(\beta(0)t) \\ -\sin(\beta(0)t) & \cos(\beta(0)t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(0) & -\beta'(0) \\ \beta'(0) & \alpha'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta(0)t) \\ \sin(\beta(0)t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{T_0} \begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ \beta'(0) \end{pmatrix} dt$$

Finalment, recuperant que $\beta(\mu_1 = 0) = \beta$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} \phi(T_0; ((1, 0, 0)^T, 0, 0)) = e^{AT_0} \int_0^{T_0} \begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ \beta'(0) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2\pi\alpha'(0)/\beta \\ 2\pi\beta'(0)/\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant la jacobiana $D_{(T_0, \mu_1, \eta_0)} \Gamma$ serà,

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial T_0} \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_0} \mid \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_1} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\pi\alpha'(0)/\beta \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & 2\pi\beta'(0)/\beta \\ \hline 0 & & & & 0 \\ \vdots & e^{\tilde{A}T_0} - I_{n-2} & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

I per tant, com \tilde{A} no té valors propis múltiples enters de $i\beta$, es té que per cada valor propi de λ de \tilde{A} ,

$$e^{\lambda 2\pi/\beta} - 1 \neq 0$$

Aleshores, globalment podem concloure que:

$$\det(e^{\tilde{A}T_0} - I) \neq 0$$

I d'aquesta manera, la matriu $D_{(T_0, \mu_1, \eta_0)} \Gamma$ té rang màxim (ja que $\alpha'(\mu_0) \neq 0$). Sota aquestes condicions, podem aplicar el teorema de la funció implícita que ens permet afirmar que existeix un obert V , amb $0 \in V \subset \mathbb{R}$ tal que existeixen funcions diferenciables $\mu_1(\varepsilon), T_0(\varepsilon), \eta_0(\varepsilon)$ amb $\varepsilon \in V$ que satisfan les condicions de periodicitat tal com volíem. D'aquesta manera demostrem l'existència d'òrbites periòdiques i per la continuïtat de les funcions tenim que el període $T = T_0(\varepsilon) \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3 Demostració del teorema de Lyapunov (4.1):

Per a la demostració del teorema de Lyapunov, estudiem el sistema n -dimensional autònom $\dot{x} = F(x, \mu)$ definit de la següent manera (i que té dependència del paràmetre real μ).

$$\dot{x} = f(x) + \mu D_x I(x)^T \tag{4.8}$$

Observem que recuperem l'equació diferencial original $\dot{x} = f(x)$ per $\mu = 0$. Començarem comprovant la hipòtesi del teorema de Hopf: la continuació real dels valors propis $\pm i\beta$ té derivada no nul·la. Podem reescriure el camp $F(x, \mu)$ prop de l'origen (punt fix) com:

$$F(x, \mu) = F(0, \mu) + DF(x, \mu)|_{x=0} x + g(x, \mu)$$

On la funció $g(x, \mu)$ i la seva diferencial prenen valor nul en $(0, 0)$. Per altra banda, sabem que per hipòtesi admet una integral primera $I(x) = \frac{1}{2} x^T S x + o(|x|^2)$. Si l'expresssem com $I(x) = \frac{1}{2} x^T S x + h(x)$, satisfent $h(0) = 0$ i $D_x h(0) = D_x(D_x h(0)) = 0$, es té

$$D_x I(x) = D_x \left(\frac{1}{2} x^T S x \right) + D_x h(x) = x^T S + D_x h(x)$$

Ja que si denotem x_i una component qualsevol de x ,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (x^T S x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j^n \sum_k^n x_j S_{jk} x_k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n S_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n x_j S_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n S_{ij} x_j$$

On en la darrera igualtat s'ha fet servir que $S = S^T$. Aleshores $DF(x, \mu)|_{x=0}$ es pot escriure com:

$$D_x F(x, \mu)|_{x=0} = D_x f(x)|_{x=0} + \mu S + \mu D_x (D_x h(x))|_{x=0}$$

I degut a que $D_x f(x_0) = A$ i que $D_x h(0) = D_x^2 h(0) = 0$ obtenim,

$$D_x F(0, \mu) = A + \mu S$$

La matriu jacobiana de f , A , en l'origen, la podem escriure de la mateixa manera que en la demostració del teorema de Hopf: sota una transformació lineal podem suposar que els valors propis $\pm i\beta$ corresponen a les dos primeres coordenades, i a més, suposarem que la resta de vectors propis formen la base per \tilde{A} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Si, a més, suposem que S té la següent forma

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{S} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Aleshores resulta que tenim la següent part lineal de l'equació 4.8:

$$A + \mu S = \begin{pmatrix} \mu a & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & \mu a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{A} + \mu \tilde{S} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Observem que $a \neq 0$ perquè la matriu S té determinant no nul per hipòtesi. Per tant, clarament s'obté que la part real és $\alpha(\mu) = a\mu$ i amb derivada $\alpha'(\mu) = a \neq 0$ tal com volíem veure.

Queda provar que S és de la forma 4.9. Per a fer-ho, utilitzarem el teorema de Sylvester, que anunciem a continuació:

Teorema 4.3. *Donades unes matrius $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, una equació del tipus $AX + XB = C$ (anomenada equació de Sylvester) té una única solució $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ per a tota matriu $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ si i només si A i $-B$ no comparteixen cap valor propi.[8]*

En primer lloc, volem veure que se satisfà la relació $SA = -A^T S$: com $I(x)$ és integral primera, el seu valor no varia al llarg d'una solució i particular, es té:

$$D_x(I(x)) \cdot f(x) = 0 \implies 0 = (x^T S^T + D_x h(x)) \cdot (Ax + g(x))$$

Que desenvolupant el producte resulta

$$0 = x^T S^T Ax + x^T S^T g(x) + D_x h(x) Ax + D_x h(x) g(x) \quad (4.10)$$

On hem escrit $f(x) = Ax + g(x)$ separant el terme lineal en x . Observem que el segon i tercer sumands són $o(\|x\|^3)$ i el quart és $o(\|x\|^4)$. Per tant, la igualtat de (4.10) impliquen

$$0 = D_x^2(D_x I(x) \cdot f(x))|_{x=0} = SA^T + A^T S \implies SA = -A^T S$$

Per tant SA és una matriu antisimètrica. Imposant aquesta igualtat a les matrius escrites per blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \beta J_2 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right), \quad S = \left(\begin{array}{c|c} S_1 & B \\ \hline B^T & \tilde{S} \end{array} \right)$$

tenim el següent:

$$\left(\begin{array}{c|c} S_1 & B \\ \hline B^T & \tilde{S} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \beta J_2 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c|c} \beta J_2 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} S_1 & B \\ \hline B^T & \tilde{S} \end{array} \right)$$

I se'n desprèn que:

$$\beta S_1 J_2 = \beta J_2 S_1 \implies S_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ja que

$$\begin{aligned} s_{12}\beta &= -\beta s_{12} &\implies s_{12} &= 0 \\ s_{22}\beta &= \beta s_{11} &\implies s_{11} &= s_{22} = a \end{aligned}$$

Per altra banda, tenim també:

$$B\tilde{A} = \beta J_2 B \implies \beta J_2 B - B\tilde{A} = 0 \implies B = 0$$

On en la darrera implicació hem utilitzat el teorema de Sylvester (4.3). Com que la matriu $B = 0$ és solució de l'equació, aquesta és solució única, ja que els valors propis de βJ_2 són $\pm i\beta$ i no ho són de \tilde{A} . Així doncs, veiem que S té la forma 4.9, com volíem.

Aplicant el teorema de Hopf podem assegurar l'existència d'òrbites periòdiques dependent d'un paràmetre ε amb $\mu(\varepsilon)$ (i que dona la mida de l'òrbita periòdica). Ens falta provar que, de fet, òrbites no estacionàries es donen només pel cas de $\mu(\varepsilon) \equiv 0$ i per tant tindrem òrbites en el sistema $\dot{x} = f(x)$. Si calculem la derivada temporal de $I(x)$ al llarg de les solucions tenim:

$$\frac{dI(x(t))}{dt} = D_x(I(x)) \frac{dx}{dt} = D_x(I(x)) \cdot (f(x) + \mu D_x(I(x))^T)$$

Si utilitzem que $I(x)$ és integral primera del sistema $\dot{x} = f(x)$, ens queda el següent resultat:

$$\frac{dI(x)}{dt} = \mu \|D_x(I(x))\|^2$$

Per altra banda, al suposar que $x(t)$ és solució periòdica, es tindrà per un temps $T > 0$,

$$x(t) = x(t + T) \implies I(x(t)) = I(x(t + T))$$

Si tenim $\mu \neq 0$, llavors $\frac{dI(x)}{dt}$ és una funció monòtona creixent (per $\mu > 0$) o monòtona decreixent (per $\mu < 0$). En conseqüència, es podrà satisfer la periodicitat en el temps de l'integral $I(x(t))$ només per la solució $x(t) \equiv 0$, ja que $D_x(I(x)) = Sx + O(\|x\|^2)$.

Així doncs, aplicant el teorema de Hopf juntament amb $\mu = 0$, demostrem el teorema de Lyapunov.

4.4 Exemples

Per entendre la necessitat de les hipòtesis del teorema de Lyapunov, utilitzarem els següents exemples[5]. També aplicarem el teorema als punts de Lagrange col·lineals.

Exemple 1

Sigui el sistema

$$\dot{x} = -y + \mu x(x^2 + y^2)^g \quad \dot{y} = x + \mu y(x^2 + y^2)^g \quad (4.11)$$

Per dues funcions $x(t), y(t)$ amb $g \in \mathbb{N}, \mu \neq 0$. Observem que la part lineal del correspon a:

$$\dot{x} = -y \quad \dot{y} = x$$

Que té solucions periòdiques del tipus $x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$, $y(t) = \alpha \sin(t) - \beta \cos(t)$, amb α, β constants d'integració (tipus oscil·lador harmònic simple). Aquest sistema lineal té valors propis $\pm i$. Si en canvi, integrem el sistema no lineal utilitzant coordenades polars r, ϕ

$$\dot{r} = \mu r^{2g+1} \quad \dot{\phi} = 1$$

On hem fet servir que $x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi)$. La solució al sistema és, en aquest cas

$$r = (a - 2g\mu t)^{-\frac{1}{2g}} \quad \phi = b + t$$

Aquestes solucions són del tipus espiral i, per tant, no són periòdiques. És a dir, veiem que tenir una parella de valors propis imaginaris purs en el cas lineal, no és suficient per l'existència d'òrbites periòdiques pel cas no lineal (en aquest sistema ens falta que admeti una integral primera de la forma $I(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)S(x, y)^T \dots$ amb $S = S^T, |S| \neq 0$).

Exemple 2

En aquest exemple veurem que la condició de no ressonància és, també, important i essencial. Donat el següent hamiltonià cúbic:

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - x_2^2 - y_2^2 + x_1 y_1 x_2 + \frac{1}{2} y_2(x_1^2 - y_1^2)$$

Aleshores les equacions del moviment resulten en:

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad \dot{y}_1 = -x_1 - y_1 x_2 - x_1 y_2 \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_2 = -2y_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) \quad \dot{y}_2 = 2x_2 - x_1 y_1 \quad (4.13)$$

S'observa que tenim un punt d'equilibri per $x_i = y_i = 0$. A més, el corresponent sistema lineal és

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té com a valors propis $\lambda_{12} = \pm i$, i $\lambda_{34} = \pm 2i$. Observem que es produeix ressonància per $\lambda_{34}/\lambda_{12} = 2 \in \mathbb{Z}$. Pel que fa a $\lambda_{34} = \pm 2i$, buscarem solucions periòdiques de període proper a $T = \frac{2\pi i}{\lambda_{34}} = \pi$. De manera explícita, el pla invariant definit per $x_1 = y_1 = 0$ en 4.12:

$$\dot{x}_2 = -2y_2 \quad \dot{y}_2 = 2x_2$$

Que resulta en un moviment harmònic simple 2-dimensional, en general:

$$x_2(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \quad y_2(t) = B\cos(2t) - A\sin(2t)$$

Per tant, tindrem òrbites periòdiques que formaran circumferències en el pla definit per x_2, y_2 , amb exactament període $T = \pi$, com volíem veure.

Per altra banda, veurem a continuació que no podem trobar òrbites periòdiques associades a λ_{12} , properes al punt d'equilibri i de període proper a $T = 2\pi$ (degut a la ressonància $\lambda_{34}/\lambda_{12}$).

Definint $p = x_1^2 + y_1^2$, $q = x_2^2 + y_2^2$, tindrem:

$$\frac{1}{2}\dot{p} = x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 = x_1y_1 + x_1^2x_2 - x_1y_1y_2 - x_1y_1 - y_1^2x_2 - x_1y_1y_2$$

$$\frac{1}{2}\dot{q} = x_2(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1y_1y_2$$

Tornant a derivar,

$$\frac{1}{2}\ddot{p} = \dot{x}_2(x_1^2 - y_1^2) + 2x_2(x_1\dot{x}_1 - 2y_1\dot{y}_1) - 2\dot{x}_1y_1y_2 - 2x_1\dot{y}_1y_2 - 2x_1y_1\dot{y}_2$$

$$\frac{1}{2}\ddot{q} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)^2 + 2x_2^2(x_1^2 + y_1^2) + 2y_2^2(x_1^2 + y_1^2)$$

Que utilitzant les noves variables resulta:

$$\ddot{p} = p^2 + 4pq$$

Per solucions que no estan al pla invariant, observem que $\ddot{p} = p^2 + 4pq > 0$. Si tinguéssim periodicitat, aquesta es propagaria a $p(t)$, i a $\dot{p}(t)$. Com, a més, al ser funcions contínues, $\ddot{p}(t)$ tindria intervals amb valors positius i intervals amb valors negatius. Per tant, no tenim òrbites periòdiques més enllà de les descrites per λ_{34} .

Exemple 3

Recuperant els valors propis dels punts de Lagrange L_1, L_2, L_3 , es una parella de valors propis reals $\lambda = \pm\beta_1$, i dues parelles de valors propis imaginaris $\lambda = \pm\sqrt{|\Delta_z|}i, \lambda = \pm\beta_2i$.

$$\lambda \in \left\{ \pm\sqrt{\alpha}i, \pm\sqrt{\frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}}{2}} \right\} \quad (4.14)$$

Degut als valors propis reals, tenim varietats estables i inestables. Però, en punts no hiperbòlics com aquests, no podem concloure res a partir dels valors propis imaginaris.

Al voltant de cada un dels punts, i sota una translació del sistema de referència que centri el punt en l'origen, podem expressar el potencial com $U(\vec{x}) = U_1\vec{x} + \vec{x}^T U_2 \vec{x} + o(\|\vec{x}\|^3)$, de manera que de (3.2), tenim la integral primera:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - U(x, y, z) = \vec{x}^T T \vec{x} - U_1 \vec{x} - \vec{x}^T U_2 \vec{x} + o(\|\vec{x}\|^3)$$

Com en els punts de Lagrange són punts fixos, $U_1 = 0$ i resulta doncs que H té la mateixa forma que requereix el teorema. Més concretament la forma de la matriu S que mencionem al teorema seria:

$$S = T - U_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que és simètrica i no degenerada. Així, si suposem $\beta_2/\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ (Fig. 3), estem en el cas de no ressonància.

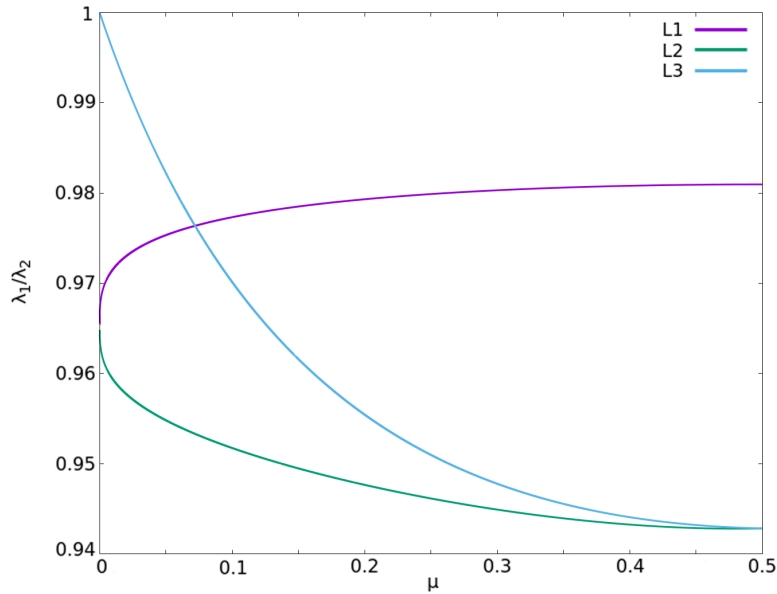


Figura 3: Valors del quocient dels valors propis imaginaris, per tot el rang de $\mu \in (0, 0.5)$. Qualitativament es pot observar l'absència de ressonàncies.

Aleshores si apliquem el teorema de Lyapunov, tindrem dues famílies d'òrbites periòdiques de diferent període al voltant del punt de Lagrange (plana i vertical). A més, a partir d'una certa energia es produeix ressonància, i la família d'òrbites planes esdevé una família d'òrbites anomenades halo (per bifurcació tipus "pitchfork").

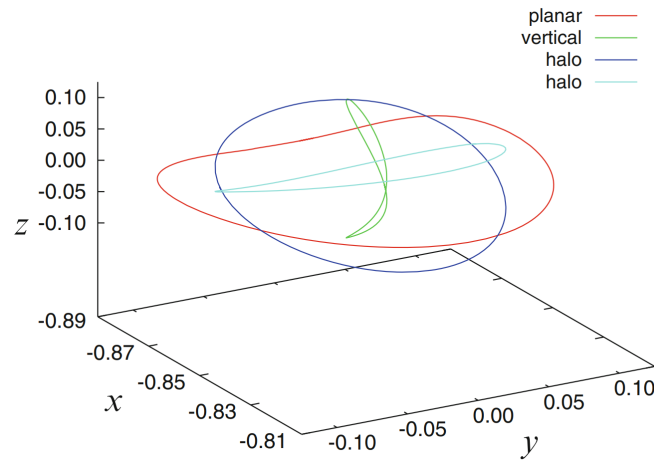


Figura 4: Algunes òrbites periòdiques calculades per $H = -1.565$ al voltant de L_1 Terra-Lluna.[10]

5 Computació d'òrbites periòdiques al CRTBP

La computació d'òrbites periòdiques és un problema clàssic i un camp ben estudiat. De fet, fa anys que existeix programari que les calcula i en permet fer les continuacions per famílies. Tanmateix, hem fet el nostre propi programa basant-nos en la lliçó Computing Invariant Manifolds for Libration Point Missions[13]. En aquesta secció descriurem el mètode numèric que s'ha fet servir per a trobar i determinar les òrbites periòdiques, l'existència de la qual queda demostrada pel Teorema de Lyapunov. En concret, ens restringirem al punt d'equilibri L_1 del problema de tres cossos restringit amb paràmetre $\mu = 0.01$. En aquest cas, L_1 , té dues parelles de valors propis que no es troben en ressonància (Fig. 3) i en conseqüència podem aplicar el Teorema de Lyapunov.

Pel cas de L_1 recordem que valors propis són els que trobem en l'expressió (13) amb

$$\alpha = \frac{\mu}{|L_1 + \mu - 1|^3} + \frac{1 - \mu}{|L_1 + \mu|^3}$$

Aleshores numèricament, per $\mu = 0.01$, tenim $L_1 \approx 0.848$ i per tant, obtenim un valor aproximat $\alpha \approx 5.06$ que ens permet assegurar que $\lambda_1/\lambda_2 \approx 2.25i/2.32i \notin \mathbb{Z}$.

Així doncs, tenim dues famílies d'òrbites periòdiques, l'associada a $\lambda_1 = \sqrt{\alpha}i$ i vector propi en la direcció de l'eix z anomenada vertical, i l'associada a $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha-2 \pm \sqrt{9\alpha^2-8\alpha}}{2}}$, i vector propi en el pla $z = 0$, anomenada plana.

Per tal de calcular-les, requerirem unes coordenades i un període com a aproximació inicial i, de manera iterativa, millorarem l'aproximació fins a una precisió donada. En endavant, anomenem $\dot{x} = f(x)$ al sistema d'equacions diferencials del problema de tres cossos restringit, que pren la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_x &= -(1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_{13}^3} - \mu \frac{x + \mu - 1}{r_{23}^3} + p_y \\ \dot{p}_y &= - \left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) y - p_x \\ \dot{p}_z &= - \left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) z \end{aligned} \tag{5.1}$$

On hem recuperat 3.3, prenent també un sistema de referència sense unitats, $G = r_{12} = \omega = 1$.

5.1 Mètode de Taylor

En sistemes dinàmics com el problema restringit de tres cossos, mètodes numèrics per integrar 5.1 són necessaris. Per controlar l'error, els mètodes amb longitud de pas variable són més preferibles que els de pas constant. En el nostre cas ens hem basat en el mètode de Taylor. Hem fet el nostre propi integrador basant-nos en la descripció feta per Àngel Jorba[11] (no s'ha utilitzat el paquet que incorpora).

Denotem $\phi(t; t_0, x_0)$ la solució del sistema 5.1 amb condició inicial $\phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$. Aleshores donat un $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i una tolerància petita $\varepsilon \in \mathbb{R}$, implementem una rutina (integració numèrica de la ODE) que retorna x i que satisfà el següent:

$$|x - \phi(t, 0, x_0)| < \varepsilon$$

Per a fer-ho, calculem de forma recursiva punts x_1, x_2, \dots, x_{m-1} on cada punt és calculat a partir de l'anterior, i que en el pas d'integració k satisfan el següent:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_{k+1} &= \tilde{\phi}(t_k + h_k, t_k, x_k) \\ t_{k+1} &= t_k + h_k \end{aligned}$$

I $\tilde{\phi}(t_k + h_k, t_k, x_k)$ que és una aproximació de $\phi(t_k + h_k, t_k, x_k)$, es calcula mitjançant l'aproximació de la sèrie de Taylor fins a ordre p .

$$\tilde{\phi}(t_k + h_k, t_k, x_k) = x_{k+1} = x_k + x'_k(h_k)h + \frac{x''_k(t_k)}{2!}h_k^2 + \dots + \frac{x_k^{(p)}(t_k)}{p!}h_k^p$$

Cal prèviament calcular les derivades i avaluar aquestes expressions per obtenir els coeficients de la sèrie. Sovint, això pot resultar ser feixuc i, de fet, són els principals inconvenients d'aquest mètode. Per evitar el càlcul de les derivades i avaluar-les a cada temps, recorrem a utilitzar la diferenciació automàtica, que permet calcular ràpidament les derivades fins a un ordre arbitràriament gran.

La diferenciació automàtica és un procediment recursiu que computa el valor de les derivades d'una funció en un punt donat. En particular, en el CRTBP, es pot fer servir aquest mètode perquè el camp el podem expressar amb la suma, producte, quocient i composició de funcions elementals.

Si introduïm la n -èssima derivada normalitzada respecte del temps t d'una funció $a : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tant derivable com es requereixi com:

$$a^{[n]}(t) = \frac{1}{n!}a^{(n)}(t)$$

Aleshores podem calcular les seves derivades a partir del següent:

$$\begin{aligned} a(t) = b(t) \pm c(t) &\implies a^{[n]}(t) = b^{[n]}(t) \pm c^{[n]}(t) \\ a(t) = b(t)c(t) &\implies a^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n b^{[n-i]}(t)c^{[i]}(t) \\ a(t) = b(t)^\alpha &\implies a^{[n]}(t) = \frac{1}{nb^{[0]}(t)} \sum_{i=0}^{n-1} (n\alpha - i(\alpha + 1))b^{[n-i]}(t)a^{[i]}(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

La demostració de la primera regla és evident, la derivada d'una suma és la suma de les derivades. Per la segona igualtat, es pot utilitzar la fórmula de Leibniz:

$$a^{[n]}(t) = \frac{1}{n!} a^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b^{(n-i)}(t) c^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)! i!} b^{(n-i)}(t) c^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b^{[n-i]}(t) c^{[i]}(t)$$

Finalment, per demostrar la tercera regla, per $a(t) = b(t)^\alpha$ utilitzarem la derivada i prendrem logaritmes:

$$\log(a(t)) = \alpha \log(b(t)) \implies a'(t)b(t) = \alpha a(t)b'(t)$$

Aleshores la derivada normalitzada n-èsima serà

$$\sum_{i=0}^n (n+1-i) a^{[n+1-i]} b^{[i]} = \sum_{i=0}^n \alpha (n+1-i) b^{[n+1-i]} a^{[i]}$$

Aïllant el terme $a^{[n+1]}$ del sumatori ens queda

$$(n+1)b^{[0]}a^{[n+1]} = \sum_{i=0}^n \alpha(n+1-i)a^{[i]}b^{[n+1-i]} - \sum_{i=0}^n i b^{[n+1-i]} a^{[i]} = \sum_{i=0}^n (\alpha(n+1) - i(\alpha+1)) a^{[i]} b^{[n+1-i]}$$

Que finalment agrupant els sumatoris i dividint per $(n+1)b^{[0]}$ ens queda el que volíem veure (fent el canvi $n+1$ per n):

$$a^{[n]} = \frac{1}{nb^{[0]}} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha n - i(\alpha+1)) a^{[i]} b^{[n-i]}$$

A partir de 5.1, observem que les derivades de les coordenades x, y, z són l'aplicació directa de la fórmula per la suma. Les derivades de p_x, p_y, p_z són, en canvi, més complexes però es calculen mitjançant operacions elementals. Com a exemple, explicitem a continuació el cas de les derivades de \dot{p}_x , ja que les altres dues són pràcticament equivalents. Per descompondre \dot{p}_x , utilitzarem les següents variables auxiliars:

$$\begin{aligned} u_1 &= x + \mu \\ v_1 &= x + \mu - 1 \\ u_2 &= u_1^2 \\ v_2 &= v_1^2 \\ u_3 &= y^2 \\ u_4 &= z^2 \\ u_5 &= u_2 + u_3 + u_4 \\ v_5 &= v_2 + u_3 + u_4 \\ u_6 &= u_5^{-3/2} \\ v_6 &= v_5^{-3/2} \\ u_7 &= u_6 \cdot u_1 \\ v_7 &= v_6 \cdot v_1 \\ u_8 &= p_y - (1 - \mu)u_7 - \mu v_7 \end{aligned}$$

Utilitzant les fórmules de 5.2 obtenim finalment per $n > 0$:

$$\begin{aligned}
u_1^{[n]} &= x^{[n]} & v_1^{[n]} &= x^{[n]} \\
u_2^{[n]} &= \sum_{i=0}^n u_1^{[n-i]} u_1^{[i]} & v_2^{[n]} &= \sum_{i=0}^n v_1^{[n-i]} v_1^{[i]} \\
u_3^{[n]} &= \sum_{i=0}^n y^{[n-i]} y^{[i]} \\
u_4^{[n]} &= \sum_{i=0}^n z^{[n-i]} z^{[i]} \\
u_5^{[n]} &= u_2^{[n]} + u_3^{[n]} + u_4^{[n]} & v_5^{[n]} &= v_2^{[n]} + u_3^{[n]} + u_4^{[n]} \\
u_6^{[n]} &= \frac{1}{nu_5^{[0]}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{-3}{2}n + \frac{1}{2}i\right) u_5^{[n-i]} u_6^{[i]} & v_6^{[n]} &= \frac{1}{nv_5^{[0]}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{-3}{2}n + \frac{1}{2}i\right) v_5^{[n-i]} v_6^{[i]} \\
u_7^{[n]} &= \sum_{i=0}^n u_1^{[n-i]} u_6^{[i]} & v_7^{[n]} &= \sum_{i=0}^n v_1^{[n-i]} v_6^{[i]} \\
u_8^{[n]} &= p_y^{[n]} - (1 - \mu) u_7^{[n]} - \mu v_7^{[n]} \\
p_x^{[n+1]} &= \frac{1}{n+1} u_8^{[n]}
\end{aligned}$$

On l'últim factor $\frac{1}{n+1}$ prové del fet que estem calculant derivades normalitzades. Amb aquest mètode calculem els "jets" de derivades fins a ordre p que es requerien per calcular l'aproximació de la sèrie de Taylor. A l'estar normalitzades, aquestes derivades són directament els coeficients del desenvolupament de Taylor. Per avaluar eficientment el polinomi de Taylor resultant, utilitzem el mètode d'Horner, que requereix el mínim nombre d'operacions.

Aquest mètode s'ha utilitzat en el codi en les funcions *taylor* i *taylor_nm* que es poden trobar a l'Apèndix B.

Per altra banda, per fer una integració numèrica eficient, utilitzarem els paràmetres p, h (que canvien en cada pas d'integració, i per tant anomenarem p_m, h_m) que minimitzen el nombre d'operacions fetes per avançar una unitat de temps tot satisfent una precisió donada per ε . Obtenim els paràmetres de la següent manera[12].

$$p_m = \lceil -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + 1 \rceil \quad (5.3)$$

$$h_m = \frac{\rho_m}{e^2} \exp\left(-\frac{0.7}{p_m - 1}\right) \quad (5.4)$$

amb

$$\rho_m = \min \left\{ \left(\frac{1}{\|x_m^{[p]}\|_\infty} \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{1}{\|x_m^{[p-1]}\|_\infty} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right\}$$

On $\|x_m^{[p]}\|_\infty$ (resp. $\|x_m^{[p-1]}\|_\infty$) fa referència al màxim entre els últims (resp. penúltims) coeficients del polinomis de Taylor de cada una de les components de x_m . El càlcul d'aquests paràmetres es fa en les funcions *grau*, *radi* i *radi_nm* que es poden trobar a l'Apèndix B.

5.2 Òrbites periòdiques

Un cop programat l'integrador numèric, ens serà possible obtenir l'aproximació $\tilde{\phi}(t; 0, x_0)$ quan ens sigui necessari. Seguidament, descrivim el mètode utilitzat basant-nos en el de J.M. Mondelo[13] per trobar òrbites periòdiques de període T i amb energia h en el CRTBP.

Com es tracta d'un problema autònom, en general tenim $\tilde{\phi}(t, t_0, x_0) = \tilde{\phi}(t - t_0, 0, x_0)$ i en endavant farem ús de la notació $\tilde{\phi}_t(x_0)$ per referir-nos a $\tilde{\phi}(t, x_0) = \tilde{\phi}(t, 0, x_0)$. La posició inicial $x_0 \in \mathbb{R}^6$ per trobar les òrbites periòdiques serà les coordenades d'un punt proper al punt fix estudiat. En el nostre cas el punt de Lagrange L_1 . Si considerem l'aplicació $F(x) = \tilde{\phi}_T(x)$ aleshores una òrbita T-periòdica es troba a partir d'un zero de l'aplicació diferenciable $G(x) = F(x) - x$, i en conseqüència aquesta queda determinada per x i T .

Per trobar solucions de $G(x)$ a partir de x_0 , hi ha diferents algorismes numèrics, com el mètode de Newton. Un cop trobada una solució de $G(x) = 0$, tots els punts de la seva òrbita $\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \tilde{x} = \tilde{\phi}_t(x) \quad \forall t \in [0, T]\}$ seran, igualment, solucions de $G(x) = 0$. Per tant, en aquest cas, l'aplicació directa del mètode de Newton no funciona, ja que el conjunt $\{G(x) = 0\}$ defineix una varietat de punts periòdics amb $DG(x) = 0$. Per evitar aquesta singularitat, podem afegir una nova equació que ens limiti x a un hiperplà $g(x) = 0$ (fixant, per exemple, una de les coordenades), fixant així una secció de Poincaré. A més, reduïm el sistema dinàmic a una varietat d'energia constant, és a dir que satisfà $H(x) = h \in \mathbb{R}$, i que es pot calcular mitjançant l'expressió (3.2). Amb aquestes restriccions, és possible calcular una òrbita periòdica tot adaptant el mètode de Newton. A posteriori, tractarem aquest darrer valor h com un paràmetre de manera que tractarem amb diferents varietats d'energia per obtenir continuacions d'òrbites periòdiques.

A la pràctica el sistema $(n + 2) \times (n + 1)$ de $(n + 2)$ equacions i $(n + 1)$ incògnites que volem resoldre serà:

$$\left. \begin{aligned} H(x) - h &= 0 \\ \tilde{\phi}_T(x) - x &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Notem que les incògnites són $p = (T, x)$, ja que h és un paràmetre donat prèviament. A més, es tracta d'un sistema sobredeterminat, i conseqüentment no podem assegurar que el sistema tingui solució. El que podem assegurar és l'existència i unicitat d'una solució del sistema per mínims quadrats (una "solució" que comporti un error quadràtic mínim) i amb norma mínima (utilitzant la norma euclidiana usual). Així, per resoldre el sistema considerem el mètode de Newton modificat: donada una primera aproximació y_0 , iterativament prenem $p_{n+1} = p_n + \Delta p_n$ on Δp_n és solució de norma mínima del sistema lineal

$$DG(p_n)\Delta p_n = G(p_n) \quad (5.6)$$

En general, una solució p^* és solució per mínims quadrats de l'equació matricial $Ap = b$ amb $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si satisfà:

$$p^* \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|b - Ap\|_2 = \min_{p \in \mathbb{R}^n} \|b - Ap\|_2$$

En el CRTBP, el rang de la matriu $DG(p_n)$ serà sempre màxim i, per tant, la solució per mínims quadrats serà ja única i no farà falta trobar la solució amb norma mínima. A més, la solució trobada tindrà error nul, ja que realment tenim un sistema sobredimensionat

però amb dues equacions que no són independents (les dues primeres de (5.5)). Aquesta rutina per a la resolució del sistema queda reflectida al codi en la funció *resol* que es pot trobar a l'Apèndix B.

```

input:     $p_0, G, \text{tol}, \text{maxit}$ 
do:       $p := p_0$ 
            for it from 1 to maxit do

                if ( $|G(p)| < \text{tol}$ ) return  $p$ 
                solve  $DG(p)\Delta p = G(p)$  for  $\Delta p$ 
                 $p := p - \Delta p$ 
            error (maxit exceeded)
output:   $p$  (if OK)

```

Figura 5: Esquema de l'algoritme emprat per a trobar zeros de $G(x)$, amb tolerància tol i aproximació inicial p_0 . Esquema extret de [13].

Reflexions de Householder

Per resoldre aquest sistema (5.5) per mínims quadrats, farem ús de la descomposició QR (producte d'una matriu ortogonal Q amb una matriu triangular T) mitjançant reflexions de Householder amb pivot en les columnes. El principal avantatge respecte del més conegut algoritme de Gram–Schmidt és la seva major estabilitat numèrica (les petites desviacions i errors en l'input no són magnificats durant l'algoritme).

De forma breu, una transformació de Householder (o reflexió) és una transformació lineal que descriu una reflexió sobre un hiperplà que conté l'origen. D'aquesta manera, volem aconseguir que un vector x es transformi per la matriu Q en un nou vector del mateix mòdul però col·lineal a un vector de la base utilitzada, és a dir, $Qx = e_i$. Més concretament, es pot obtenir Q de la següent forma:

$$Q_{ij} = I_{ij} - 2v_i v_j$$

On I és la matriu identitat de l'ordre corresponent, i v és un vector unitari que és perpendicular a l'hiperplà sobre el que es produeix la reflexió. Podem trobar el vector v agafant

$$v = \frac{x - e_i}{\|x - e_i\|} = \frac{u}{\|u\|}$$

Així, prenent x de forma iterativa per cada columna de $DG(p_n)$, podem aconseguir una matriu triangular, i d'aquesta manera una forma QR que es pot resoldre per substitució enrere. Per la primera columna, utilitzant $i = 1$

$$Qx = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies Q \cdot DG(p_n) = \begin{pmatrix} \alpha & dg_{12} & \dots & dg_{1(n+1)} \\ 0 & dg_{22} & \dots & dg_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & dg_{(n+2)2} & \dots & dg_{(n+2)(n+1)} \end{pmatrix}$$

Per la següent columna, es fa el mateix procediment prenent com a matriu la submatriu resultant de treure la primera fila i columna a $DG(p_n)$ i agafant el segon vector de la base e_2 (o equivalentment, el primer vector de la base del subespai corresponent a la nova matriu).

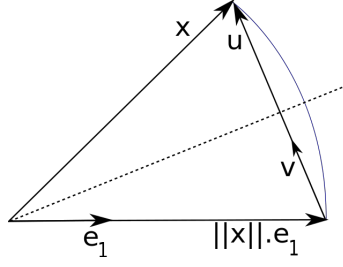


Figura 6: Representació gràfica d'una reflexió de Householder sobre l'hiperplà corresponent a la línia de punts.

Aleshores si P és la matriu que conté els pivots de les columnes, la solució al sistema per mínims quadrats serà:

$$Q^T DG(p_n)P = \begin{pmatrix} R_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \implies \Delta p_n = R_{11}^{-1} \tilde{G}(p_n)$$

Amb R_{11} una matriu triangular de rang màxim (concretament $n + 1$), i $\tilde{G}(p_n)$ fent referència a les primeres $n + 1$ components de $Q^T G(p_n)P$.

Aquest mètode és l'utilitzat al codi en la funció *triangula* que es pot trobar a l'Apèndix B.

Equacions variacionals per al càlcul de DG

Per altra banda, és interessant esmentar com s'ha determinat la matriu diferencial $DG(p_n)$. Les derivades parcials respecte de T de la primera i l'última equació (les restriccions de l'energia i l'hiperplà) són clarament nul·les. Les que no són nul·les les podem calcular a través del camp $f(x)$:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(T, x)}{\partial t} = \dot{\tilde{\phi}}(T, x) = f(\tilde{\phi}(T, x))$$

Les derivades parcials de l'energia $H(x)$ les calculem explícitament i les avaluem numèricament. En canvi, pel que fa a la diferencial respecte de les coordenades de la posició inicial x , $D_x \tilde{\phi}_T(x)$, ho fem a través de l'equació variacional. De

$$\dot{\tilde{\phi}}_T(x) = f(\tilde{\phi}_T(x))$$

que dóna lloc al següent problema (equacions variacionals):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_x \tilde{\phi}(T, x) &= D_x f(\tilde{\phi}(T, x)) D_x \tilde{\phi}(T, x) \\ D_x \tilde{\phi}(0; 0, x) &= I_n \end{aligned} \tag{5.7}$$

Aquest el resollem de la mateixa manera que hem resolt $\dot{x} = f(x)$, utilitzant el mètode de Taylor adaptant la diferenciació automàtica als nous elements de $D_x f(x)$.

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & -1 & 0 & 0 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

amb

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial x} = -(1-\mu) \frac{-2(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \mu \frac{-2(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\
\Delta_{12} &= \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} = \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\mu(x+\mu-1)}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) 3y \\
\Delta_{13} &= \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial x} = \left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\mu(x+\mu-1)}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) 3z \\
\Delta_{22} &= \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial y} = -(1-\mu) \frac{(x+\mu)^2 - 2y^2 + z^2}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \mu \frac{(x+\mu-1)^2 - 2y^2 + z^2}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\
\Delta_{23} &= \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial y} = \left(\frac{1-\mu}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\mu}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) 3zy \\
\Delta_{33} &= \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial z} = -(1-\mu) \frac{(x+\mu)^2 + y^2 - 2z^2}{((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \mu \frac{(x+\mu-1)^2 + y^2 - 2z^2}{((x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Una alternativa a aquest darrer mètode seria la diferenciació utilitzant diferències finites, és a dir (en la versió central):

$$D_x \tilde{\phi}(T, x)|_{ij} = \frac{\tilde{\phi}(T; 0, x + h_j)|_i - \tilde{\phi}(T; 0, x - h_j)|_i}{2h} \quad (5.8)$$

On h_j és un vector $h_j = (0, 0, \dots, h, 0, \dots, 0)$, amb $h > 0$ que provoca un petit desplaçament de x en la direcció de la component j . Notem que contràriament al mètode de les equacions variacionals, utilitzant les diferències finites estem limitats a un error $O(h^2)$.

Utilitzant les dues estratègies, hem realitzat diferents comprovacions per tal d'assegurar-nos el bon funcionament de l'algoritme.

En primer lloc, en donar una volta a l'òrbita periòdica es té un valor propi $\lambda = 1$ degut a la periodicitat, així que es pot fer la següent comprovació:

$$\det(D_x \tilde{\phi}(T, x) - I) = 0$$

Per altra banda, la diferencial del flux hamiltonià preserva el producte simplèctic, així que s'ha de satisfer la relació:

$$D_x \tilde{\phi}(T, x)^T \cdot J \cdot D_x \tilde{\phi}(T, x) = J$$

amb J la matriu simplèctica d'ordre corresponent.

Finalment també podem fer la comprovació utilitzant que la diferencial ha de traslladar correctament el camp, de manera que altre cop per la periodicitat tenim:

$$D_x \tilde{\phi}(T, x) \cdot f(x) = f(x)$$

Les equacions variacionals per l'obtenció de $D_x \tilde{\phi}(T, x)$ s'han utilitzat en el codi en les funcions *phi_nm* i *taylor_nm* que es poden trobar a l'Apèndix B.

Mètode de tir paral·lel

En el CRTBP, indiferentment del mètode escollit per al càlcul, s'observa que en moltes òrbites periòdiques, el màxim dels valors propis de $D_x \tilde{\phi}(T, x)$ per $\mu \approx 0.01$ pot arribar a ser elevat. Els seus valors són propers a $e^{2\pi\lambda/\beta}$ (pel teorema del centre de Lyapunov) i pel cas del valor propi real i positiu de L_1 pot arribar a estar per sobre de 10^3 . Per tant, a l'integrar numèricament T unitats de temps, l'error en les condicions inicials s'amplifica per aquest factor. De fet, es pot estudiar l'estabilitat del sistema sumant les parelles de valors propis λ i λ^{-1} i determinant el paràmetre d'estabilitat d'Hénon (veure secció 5.4).

Tot això implica requerir de condicions inicials molt exactes per obtenir una bona convergència del mètode de Newton. Ara bé, es pot reduir aquests factors d'amplificació utilitzant una estratègia de tir paral·lel. Es tracta d'utilitzar punts intermedis x_1, x_2, \dots, x_{k-1} al llarg de l'òrbita periòdica. D'aquesta manera no imposam que $\tilde{\phi}_T(x) = x$, sinó que imposam que el camp transporti un punt x_i al següent x_{i+1} en T/k unitats de temps. D'aquesta manera els factors d'ampliació es redueixen amb l'arrel k-èsima, a canvi de multiplicar les dimensions del sistema d'equacions no lineals.

Així, les noves equacions que formen el sistema $G(p) = 0$ amb $p = (x, x_1, \dots, x_{k-1}, T/k)$

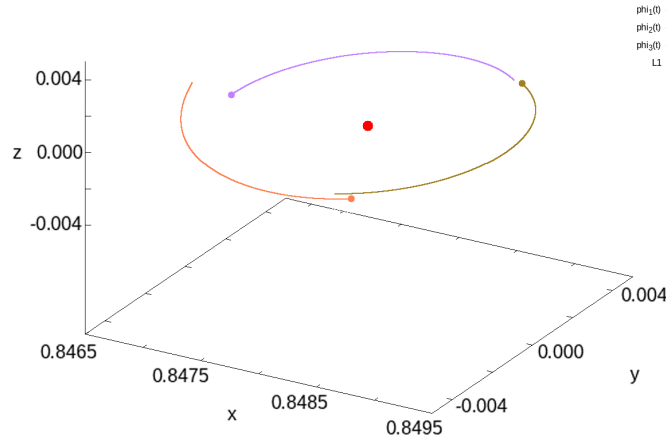


Figura 7: Tir paral·lel amb tres punts per a la família d'òrbites planes. Situació inicial, on $\tilde{\phi}_{T/k}(x_i)$ no transporta exactament d'un punt al següent.

són:

$$\left. \begin{aligned} H(x) - h &= 0 \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x) - x_1 &= 0 \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x_1) - x_2 &= 0 \\ &\dots \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x_{k-1}) - x &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Observem que tenim $(kn + 2)$ equacions i $(kn + 1)$ incògnites.

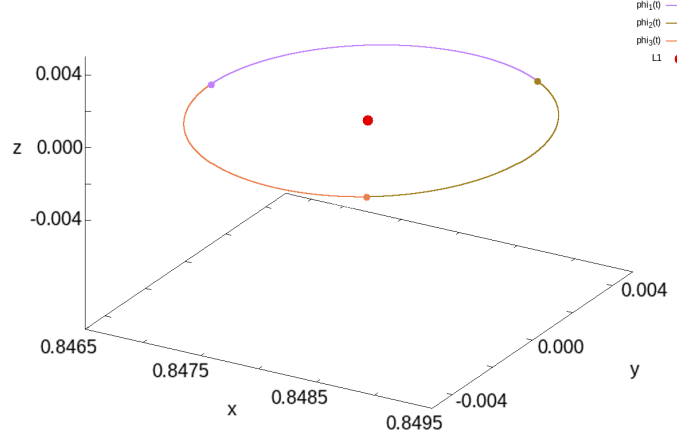


Figura 8: Tir paral·lel amb tres punts per a la família d'òrbites planes. Un cop l'algoritme convergeix suficient, tenim $G(p) = 0$ i $\tilde{\phi}_{T/k}(x_i)$ transporta d'un punt al següent.

La nova diferencial DG prendrà la següent forma:

$$\begin{pmatrix} D_x H(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_x \tilde{\phi}(T/k, x) & -Id & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \tilde{\phi}(T/k, x)}{\partial t} \\ 0 & D_{x_1} \tilde{\phi}(T/k, x_1) & -Id & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \tilde{\phi}(T/k, x_1)}{\partial t} \\ & & & \vdots & & & \\ -Id & 0 & 0 & 0 & \dots & D_{x_{k-1}} \tilde{\phi}(T/k, x_{k-1}) & \frac{\partial \tilde{\phi}(T/k, x_{k-1})}{\partial t} \\ D_x g(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que les comprovacions per al càlcul de $D_x \tilde{\phi}(T, x) = \prod_k D_{x_k} \tilde{\phi}(T/k, x_k)$ esmentades poden aplicar-se a la òrbita globalment, o en cada punt entremig.

Aproximació inicial a partir del comportament lineal

Finalment, cal determinar una primera aproximació de l'òrbita periòdica per calcular els punts $p_0 = (x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, T/k)$. En el nostre cas, prop de L_1 , utilitzarem la part lineal del camp per a obtenir aquests punts. És a dir, suposem que tenim

$$f(x) = f(L_1) + D_x f(L_1)(x - L_1) + O(\|x - L_1\|^2)$$

Aleshores, en general si denotem per $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propi de la diferencial $D_x f(L_1)$ i el seu vector propi associat per $v = v_1 + i v_2 \in \mathbb{C}^n$ tindrem que

$$\tilde{\phi}(t; x) = L_1 + e^{\lambda t} v$$

és solució de la part lineal de l'equació diferencial.

Per a valors propis amb part real positiva, es genera una varietat inestable, i per valors propis amb part real negativa, s'obté una varietat estable. En canvi, pels valors

propis imaginaris purs $\lambda = i\beta$ de L_1 es genera una òrbita periòdica de període $T = 2\pi/\beta$. Utilitzarem aleshores la següent aproximació

$$\tilde{\phi}_\gamma(t) = L_1 + \gamma(v_1 \cos(\beta t) - v_2 \sin(\beta t)) \quad (5.10)$$

En el nostre cas, per a la computació d'òrbites periòdiques utilitzarem valors de γ de 10^{-2} .

5.3 Continuació numèrica

Les òrbites que s'obtenen del teorema del centre de Lyapunov i que volem trobar numèricament, no es presenten de forma aïllada, sinó que formen famílies. Per trobar aquestes famílies, al tenir fixada l'energia, s'ha de fer una continuació numèrica d'aquest paràmetre.

Es tracta d'una tècnica que permet trobar una solució d'un sistema d'equacions diferencials no lineals $G_2(x)$ a partir d'una solució coneguda d'un sistema $G_1(x)$ que és prou proper a $G_2(x)$. Prendrem el següent camí, utilitzant el paràmetre $\lambda \in [0, 1]$,

$$G(\lambda, x) = G_1(x)(1 - \lambda) + G_2(x)\lambda$$

D'aquesta manera, es comença amb $\lambda = 0$ resolent el sistema conegut i augmentant λ amb un cert pas petit $\Delta\lambda = 1/m$, s'acaba resolent el sistema desitjat per $\lambda = 1$.

```

input:    $x_0 \in \mathbb{R}^n$  such that  $G(0, x_0) = 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ 
do:      $x := x_0$ 
            $\Delta\lambda := 1/m$ 
            $\forall i = 1, \dots, m$ 
              $\lambda := i \Delta\lambda$ 
             solve  $G(\lambda, y) = 0$  iteratively for  $y$  taking  $x$  as
               starting value
              $x := y$ 
output:  $x$ 

```

Figura 9: Esquema de l'algoritme emparat per a la continuació numèrica de l'energia. Esquema extret de [13].

En el nostre cas, el sistema només tindrà dependència del paràmetre λ en l'equació de l'energia:

$$\left. \begin{aligned} H(x) - h_1(1 - \lambda) - h_2\lambda &= 0 \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x) - x_1 &= 0 \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x_1) - x_2 &= 0 \\ &\dots \\ \tilde{\phi}(T/k; 0, x_{k-1}) - x &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

La continuació numèrica de l'energia seguint aquest algoritme és sensible a les bifurcacions que es puguin produir. En el cas dels voltants de L_1 , la tipologia de les bifurcacions ens permet continuar amb aquest mètode.

5.4 Resultats numèrics

Dividirem aquesta secció en tres parts. Primer presentarem els resultats trobats quan iniciem l'algorisme amb el vector propi que correspon a la família d'òrbites planes. Continuarem amb les òrbites halo, i finalment exposarem les òrbites de la família vertical.

Família de Lyapunov plana

Per les òrbites planes és té:

$$\lambda = i\sqrt{\frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}}{2}} \approx 2.315i$$

I el vector propi associat és

$$v = v_1 + iv_2 \approx (-0.1381, 0, 0, 0, 1, 0) + i(0, -0.4915, 0.1718, 0, 0)$$

Utilitzarem tir paral·lel amb tres punts, de manera que prendrem tres punts x_i de (5.10) aproximadament equidistants ($x_i = \tilde{\phi}_\gamma(i \cdot T/3)$, per $i = 0, 1, 2$). La primera òrbita periòdica d'aquesta família que s'ha trobat seguint l'algorisme descrit és la següent:

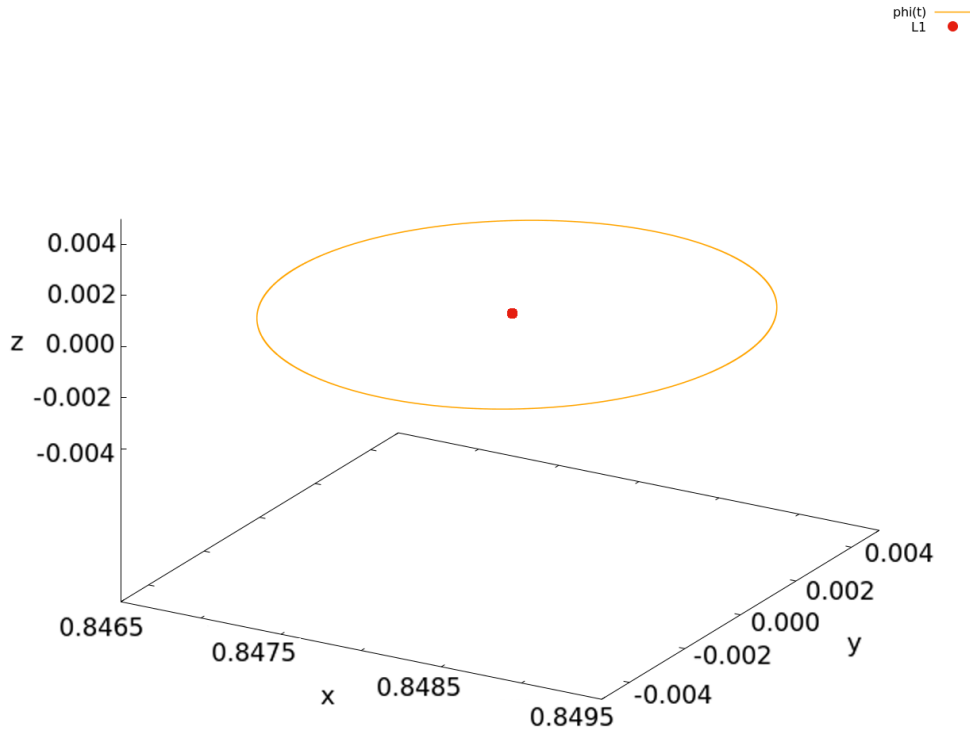


Figura 10: Òrbita plana d'energia $H = -1.58377$ i període $T = 2.71413$

L'evolució temporal de les coordenades (x, y, z) es poden trobar al apèndix. Utilitzant aquesta òrbita per a iniciar la continuació respecte de l'energia, s'obté la següent família en el rang de $H \in [-1.58377, -1.55724]$:

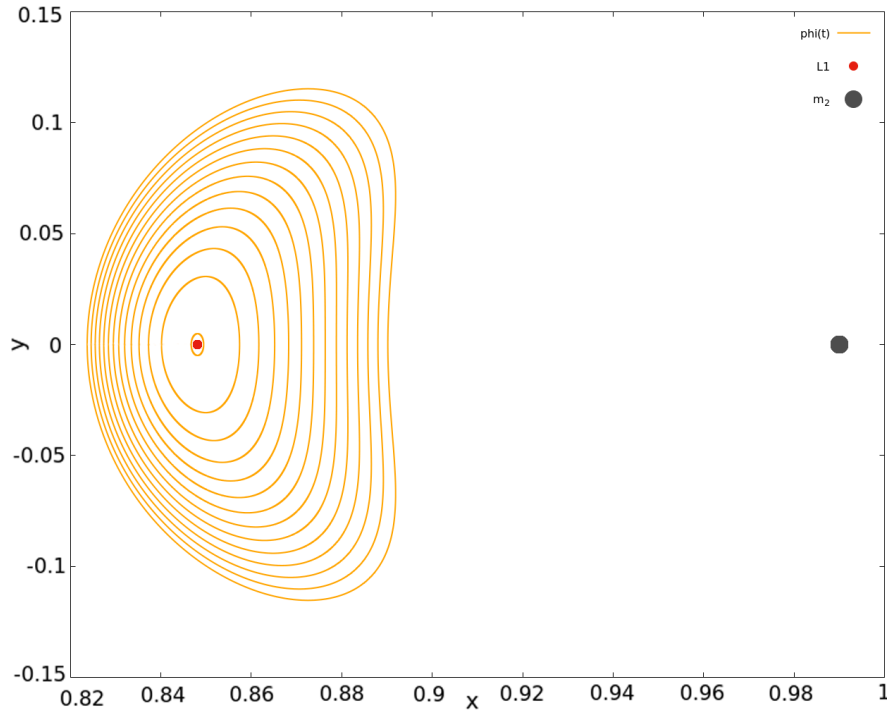


Figura 11: Projectió en el pla XY d'algunes de les òrbites de la família plana per diferents energies. Es mostra també la posició de la segona massa m_2 del sistema

Com hem mencionat en l'apartat 5.2, la diferencial es pot calcular mitjançant equacions variacionals (5.7) o bé, diferències finites (5.8). Per aquesta família hem fet una comparació entre els dos mètodes en la Taula 1, demanant en tots dos casos una precisió de 10^{-12} . En aquesta comparació calculem, a partir de les condicions inicials, 30 òrbites periòdiques amb un increment d'energia entre dues de consecutives de $\Delta H = 10^{-3}$.

Com que la resta del codi és igual, les diferències entre els temps de computació i en el nombre d'iteracions necessàries per convergir a l'òrbita periòdica buscada només seran degudes a aquests dos mètodes.

| | Tir paral·lel | Temps (s) | Nombre d'iteracions mitjà |
|------------------------|---------------|-----------|---------------------------|
| Diferències finites | 7 | 8.64 | 5.8 |
| Equacions variacionals | 7 | 7.92 | 6.9 |
| Diferències finites | 10 | 14.07 | 5.3 |
| Equacions variacionals | 10 | 12.37 | 5.5 |
| Diferències finites | 12 | 21.38 | 5.3 |
| Equacions variacionals | 12 | 20.10 | 5.5 |
| Diferències finites | 14 | 31.21 | 5.5 |
| Equacions variacionals | 14 | 30.45 | 5.3 |

Taula 1: Temps de computació total i mitjana del nombre d'iteracions requerides per convergir a l'òrbita periòdica per diferent nombre de punts de tir paral·lel.

Notar que el temps requerit per al càlcul ha estat sempre menor quan s'han utilitzat equacions variacionals, mentre que el nombre de iteracions necessàries per convergir a l'òrbita periòdica és pràcticament igual en els dos mètodes.

Per altra banda, per estudiar el canvi de comportament i l'estabilitat de la família d'òrbites planes utilitzarem la diferencial de l'aplicació de Poincaré: $D_x \tilde{\phi}(T, x)$. El valor propi $\lambda = 1$ sempre apareix degut al caràcter autònom i periodicitat. A més, sabem que al ser una matriu simplèctica, els valors propis són els següents:

$$\{1, 1, \lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}\}$$

Per estudiar l'estabilitat de les òrbites fem ús del paràmetre d'estabilitat d'Hénon $|s_i|$ per a cada valor propi λ_i , on per $i = 1, 2$ es defineix:

$$s_i = \lambda_i + \lambda_i^{-1}$$

Aleshores podem relacionar-lo amb els valors propis de la següent manera:

$$\begin{aligned} |s_i| > 2 &\iff \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ |s_i| \leq 2 &\iff \lambda_i \in \mathbb{C} \quad i \quad |\lambda_i| = 1 \end{aligned}$$

Es produeix una bifurcació quan augmenta la multiplicitat del valor propi $\lambda = 1$, és a dir, quan es té $|s| = 2$. Observem que això es dona per primera vegada per al valor de $H \approx -1.5775$. Tal com es veu en la figura 12, es comença la continuació amb $|s_1| < 2$ i després de la bifurcació es té $|s_1| > 2$.

Per altra banda, representem la part real i imaginària de la parella de valors propis que creua $|s| = 2$ (Fig.13). És interessant observar que abans de la bifurcació es té una parella de valors propis complexos conjugats de mòdul unitari, i després, es té una parella de valors propis purament reals.

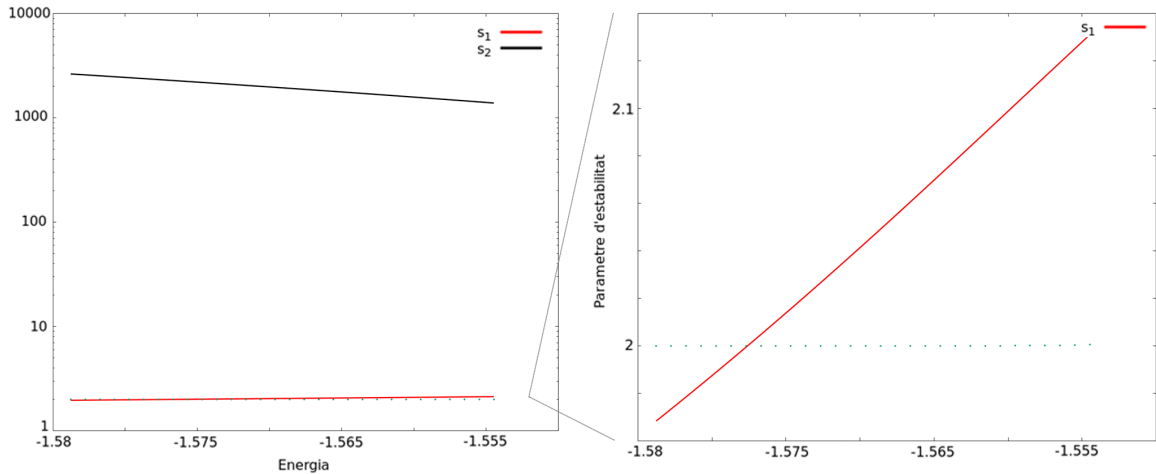


Figura 12: Evolució dels paràmetres d'estabilitat en funció de l'energia de l'òrbita. A la dreta, es mostra una ampliació de l'escala per notar el canvi d'estabilitat.

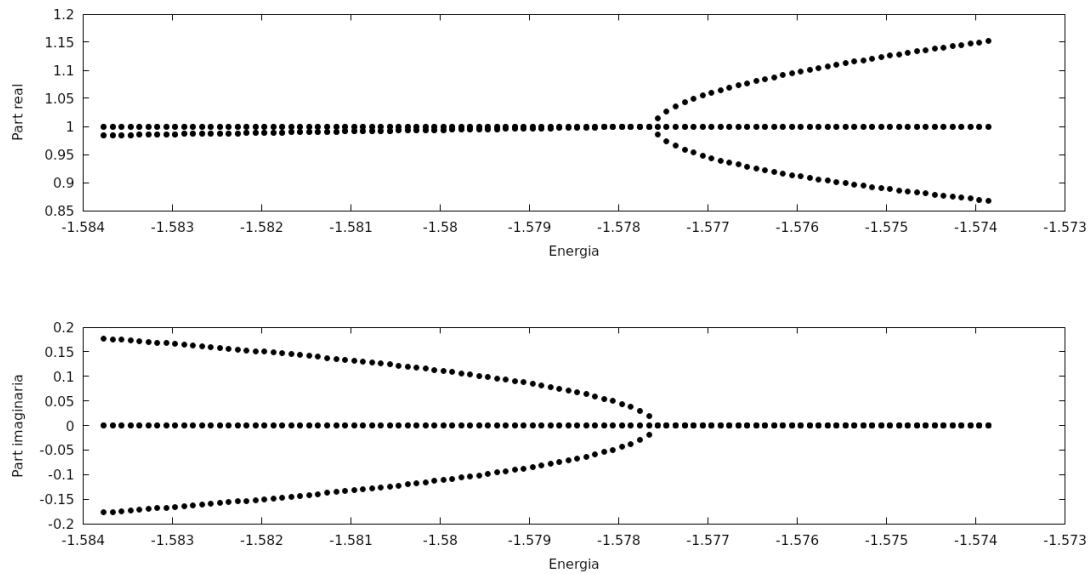


Figura 13: Representació gràfica de l'evolució dels valors propis en funció de l'energia per a una continuació d'òrbites periòdiques planes. A dalt la component real, i a sota la component imaginària.

Per a fer una continuació de les òrbites bifurcades, s'ha introduït un petit desplaçament en la coordenada z en el moment que detectem el canvi d'estabilitat. D'aquesta manera, l'algoritme té suficient per convergir a una de les òrbites bifurcades, generant-se una família d'òrbites que deixen de ser pràcticament planes (de fet, canviant el signe del desplaçament, obtenim dues famílies simètriques resp. el pla XY). Són anomenades òrbites halo, i tenen una gran importància en el disseny de missions espacials. Per exemple, destaquem:

- Genesis (2001, halo L_1 Sol-Terra)
- Solar and Heliospheric Observatory, SOHO (1995, halo L_1 Sol-Terra)
- James Webb Space Telescope, JWST (2021, halo L_2 Sol-Terra)
- Queqiao (2018, halo L_2 Terra-Lluna)

A continuació mostrem la òrbita halo amb una energia de $H = -1.55520$, utilitzant un nombre de punts per al tir paral·lel major, de 11.

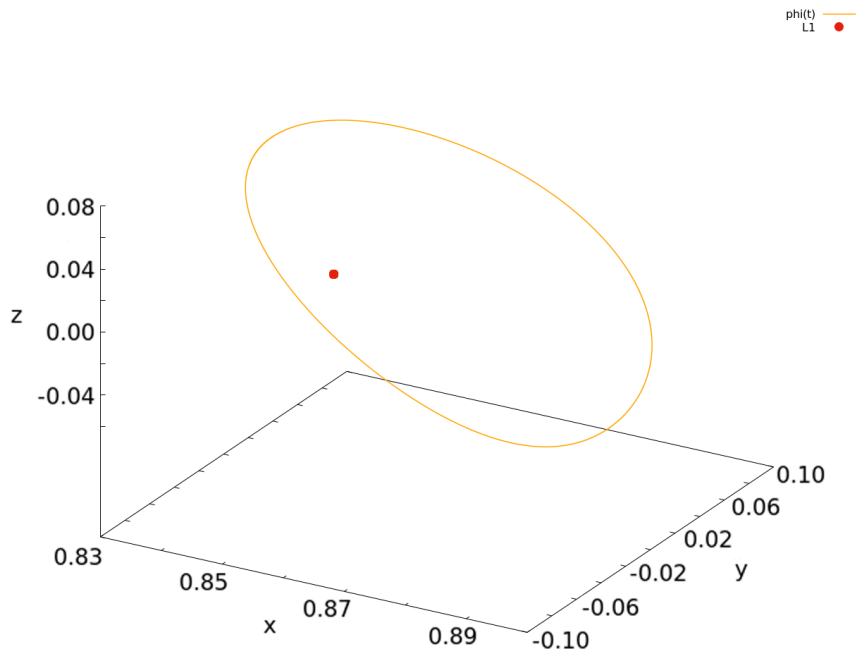


Figura 14: Òrbita halo d'energia $H = -1.55520$

De la mateixa manera, es pot continuar l'energia seguint el mateix procediment que per a la família d'òrbites planes, tot obtenint un seguit d'òrbites halo:

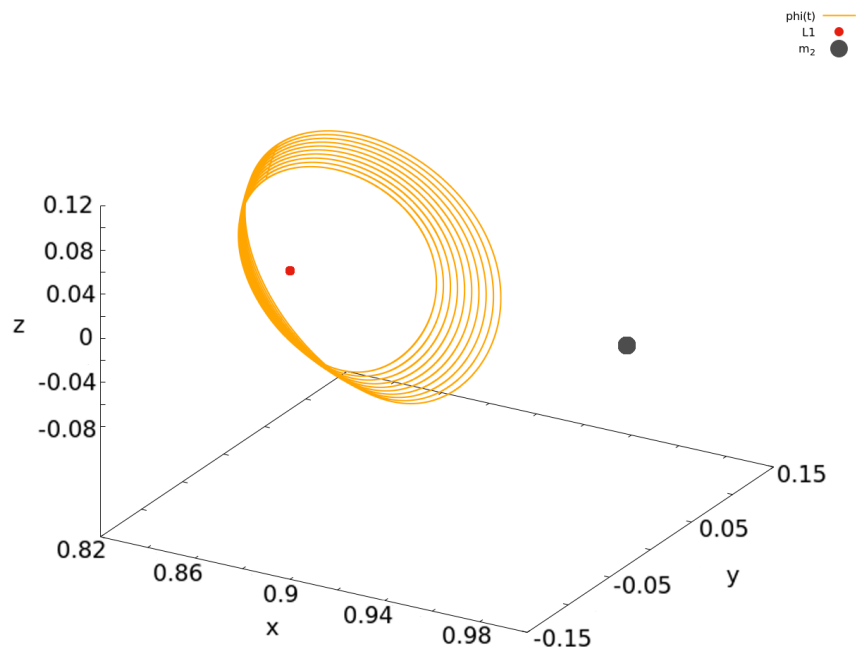


Figura 15: Continuació d'energia de les òrbites halo. Es mostra també la posició de m_2 , la menor del sistema.

Família de Lyapunov vertical

Idènticament, per a les òrbites verticals, es té

$$\lambda = i\sqrt{\alpha} \approx 2.250i$$

I el vector propi associat és

$$v = v_1 + iv_2 \approx (0, 0, 0, 0, 0, 1) + i(0, 0, -0.4446, 0, 0, 0)$$

També utilitzarem tir paral·lel amb tres punts. La primera òrbita periòdica d'aquesta família que s'ha trobat seguint l'algorisme descrit és la següent:

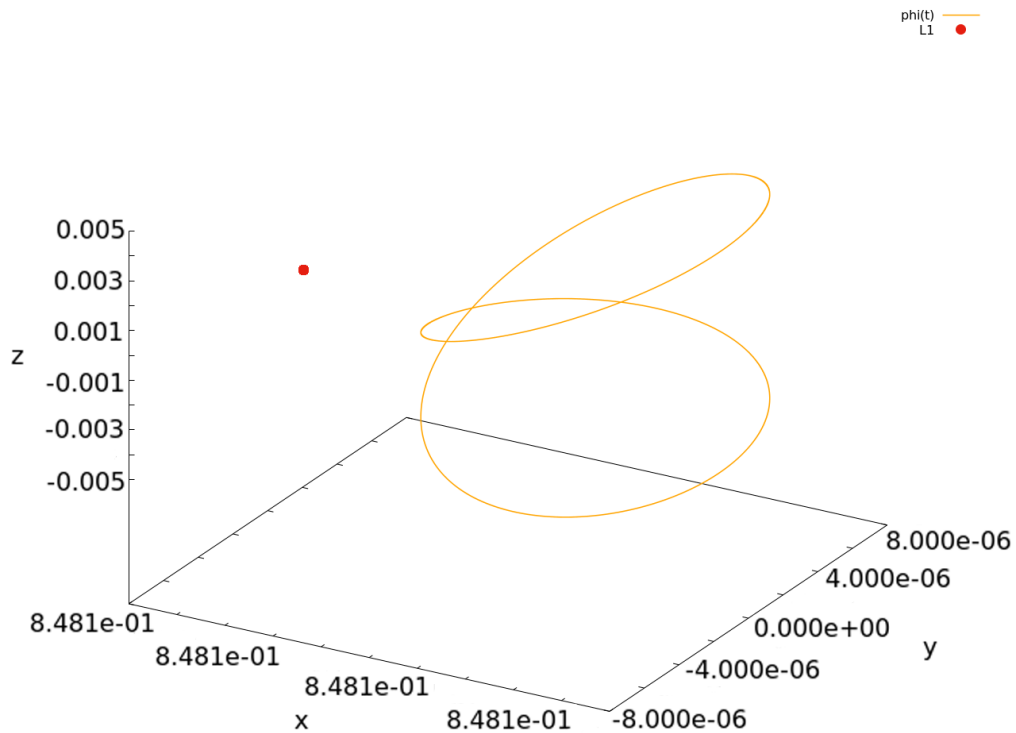


Figura 16: Òrbita vertical d'energia $H = -1.58377$ i període $T = 2.79328$

L'evolució temporal de les coordenades (x, y, z) també es poden trobar al apèndix. Utilitzant aquesta òrbita per a iniciar la continuació respecte de l'energia, s'obté la següent família en el rang de $H \in [-1.58377, -1.51438]$:

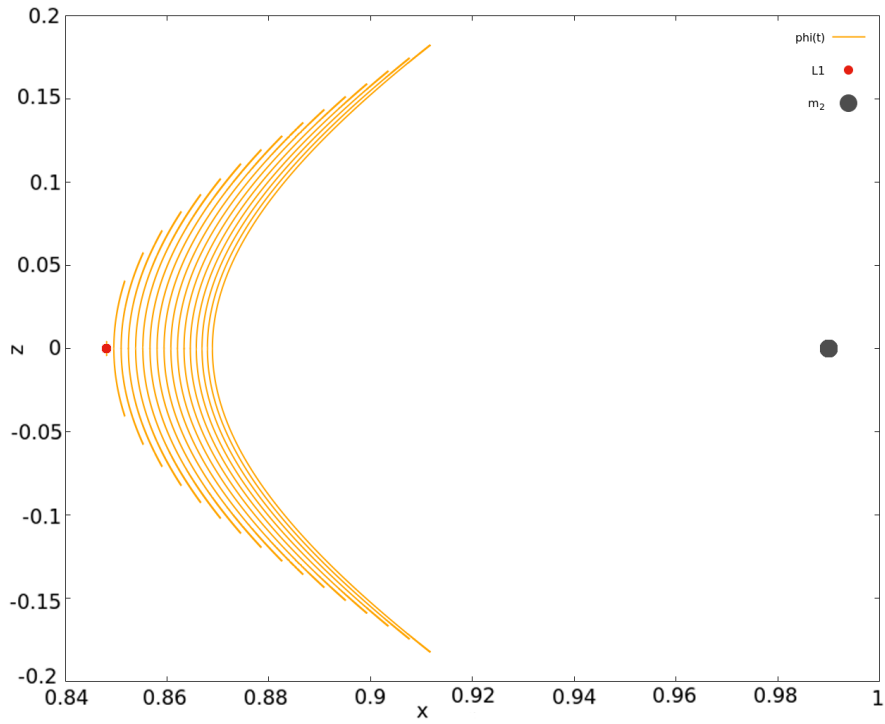


Figura 17: Projectió en el pla XZ d'algunes de les òrbites de la família vertical per diferents energies.

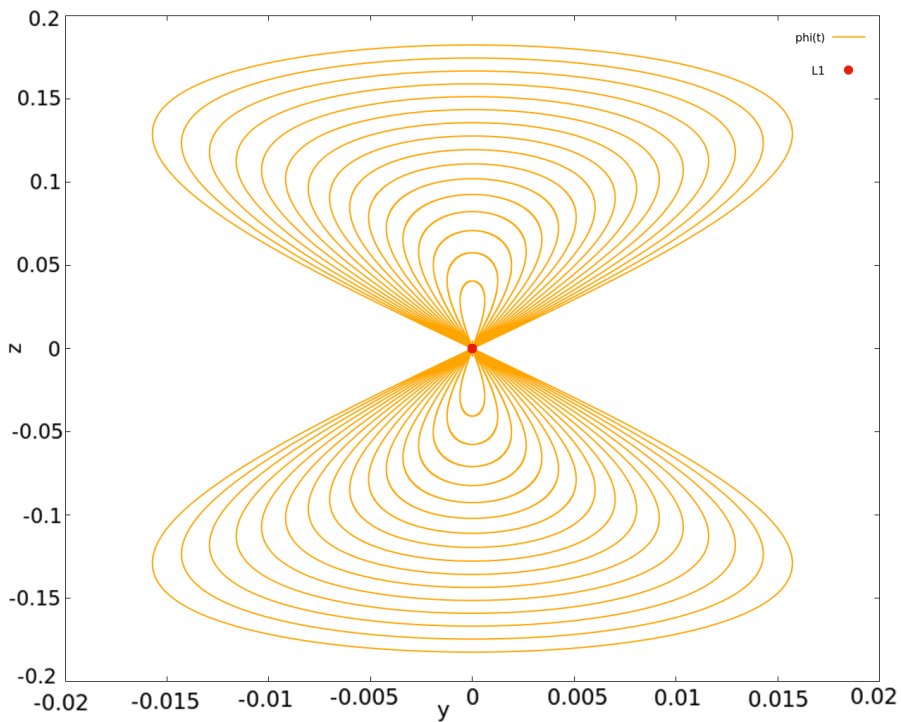


Figura 18: Projectió en el pla YZ d'algunes de les òrbites de la família vertical per diferents energies.

6 Conclusions

Utilitzant les dues vessants, teòrica i computacional, en aquesta memòria s'ha estudiat amb èxit la persistència d'òrbites periòdiques al voltant d'un punt d'equilibri d'un sistema d'equacions diferencials no lineal. En concret, hem treballat al voltant del Teorema del centre de Lyapunov, demostrant-lo a partir del més general Teorema de Hopf.

Per aplicar-lo, s'ha fet una breu introducció a la mecànica teòrica i ens hem centrat en l'estudi del sistema hamiltonià format pel problema restringit dels tres cossos. Els punts d'equilibri col·lineals que sorgeixen de les equacions diferencials que el defineixen, són punts que satisfan les condicions del Teorema del centre de Lyapunov, i per aquest motiu, hem desenvolupat un programa escrit en C que permet trobar explícitament les òrbites al voltant del punt d'equilibri de Lagrange (L_1) l'existència de les quals queda predita pel teorema.

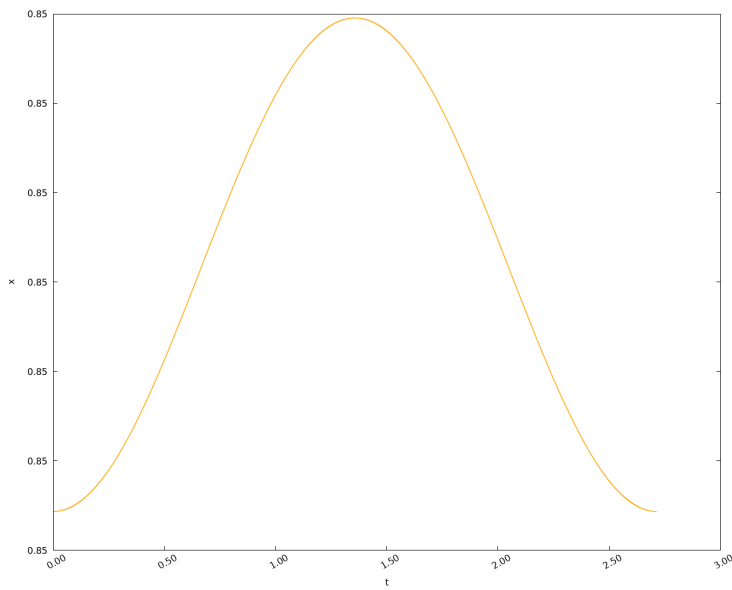
A més, s'han seguit les famílies a través d'una continuació de l'energia i s'ha pogut observar la bifurcació de les òrbites planes en òrbites halo, que són de gran importància i estudiades en el disseny de missions espacials. En aquest sentit, la continuació natural del treball podria ser el càlcul de connexions homoclíniques i heteroclíniques, que permetrien determinar trajectòries interessants per a satèl·lits (utilitzades per primera vegada en la missió Gènesis, el 2001).

Pel que fa als coneixements que hem requerit per a dur a terme aquest treball, una majoria els hem estudiat en assignatures del grau de les que destaquem Equacions Diferencials, Mètodes Numèrics i Programació científica. També Sistemes Dinàmics, on es dóna una altra versió de la bifurcació de Hopf. Clarament, altres nocions han estat adquirides al llarg del treball a través de diferents llibres i recursos bibliogràfics (destaquem el paper [9] i el capítol [13]), així com en assignatures d'altres graus, com Mecànica Teòrica (corresponent al grau de Física).

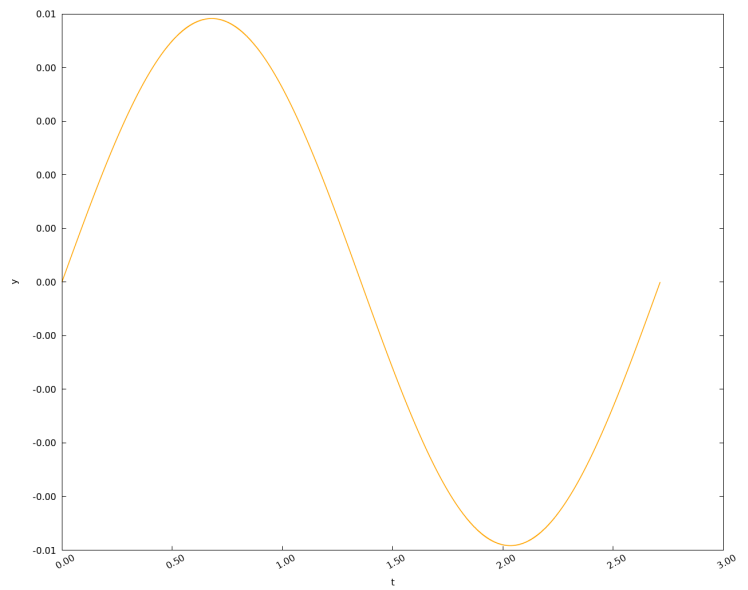
Referències

- [1] H. Goldstein: Classical Mechanics,
Addison-Wesley Publishing Company, 1950.
- [2] Kenneth R. Meyer; Glen R. Hall; Dan Offin: Introduction to Hamiltonian, Dynamical
Systems and the N-Body Problem,
Springer Science+Business Media, 2009.
- [3] Manuscrit de Newton de la col·lecció Keynes
King's College, Cambridge, Llibre 3; Pàgina 3
- [4] Stephen Wolfram: A New Kind of Science
Wolfram Media, 2002
- [5] C.L.Siegel, J.K.Moser: Lectures on Celestial Mechanics
Springer-Verlag, Berlin, 1971
- [6] Yi-Sui Sun, Li-Yong Zhou: From ordered to chaotic motion in celestial mechanics
World Scientific, 2016
- [7] Deprit, A., Deprit-Bartholome, A: Stability of the triangular Lagrangian points
Astronomical Journal, Vol. 72, p. 173, 1967
- [8] Sylvester, J.: Sur l'equations en matrices $px=xq$
C.R.Acad.Sci.Paris, Vol 99, 1884
- [9] Dieter S. Schmidt: Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Theorem of Liapunov
with Resonance Cases
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1978
- [10] A.Haro, M.Canadell, JL.Figueras, A.Luque, JM.Mondelo: The Parameterization
Method for Invariant Manifolds
Springer, 2016
- [11] Àngel Jorba, Maorong Zou: A software package for the numerical integration of
ODEs by means of high-order Taylor methods
2004
- [12] C. Simó: Global dynamics and fast indicators. In H.W. Broer, B. Krauskopf, and G.
Vegter: Global analysis of dynamical systems, IOP Publishing, 2001.
- [13] Josep-Maria Mondelo: Computing Invariant Manifolds for Libration Point Missions
Springer Nature Switzerland AG, 2019

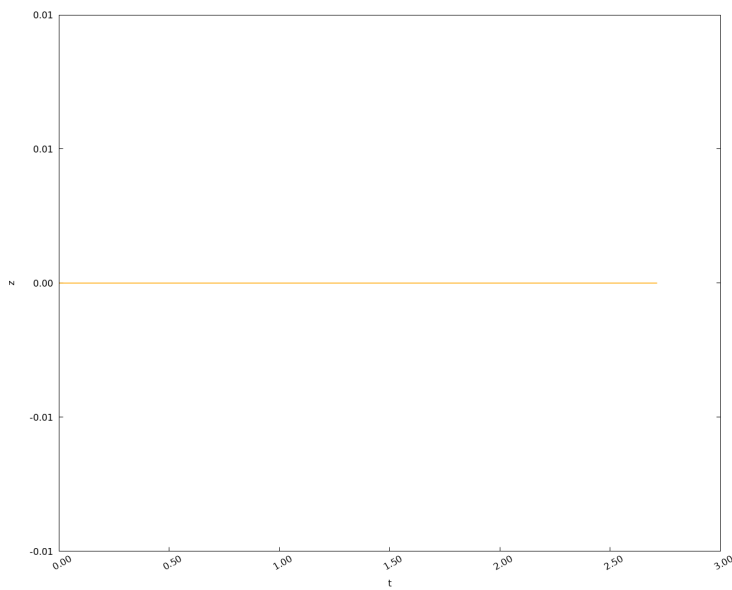
A Figures complementàries



(a) Gràfica $x(t)$

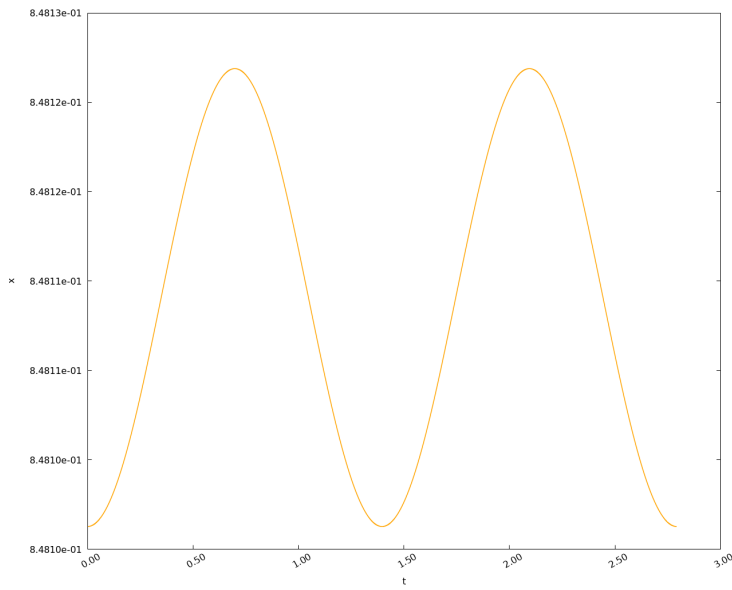


(b) Gràfica $y(t)$

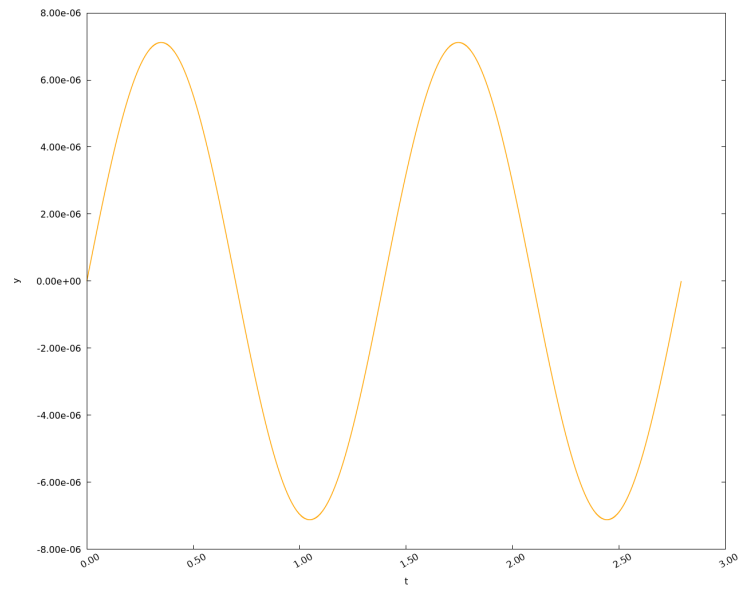


(c) Gràfica $z(t)$

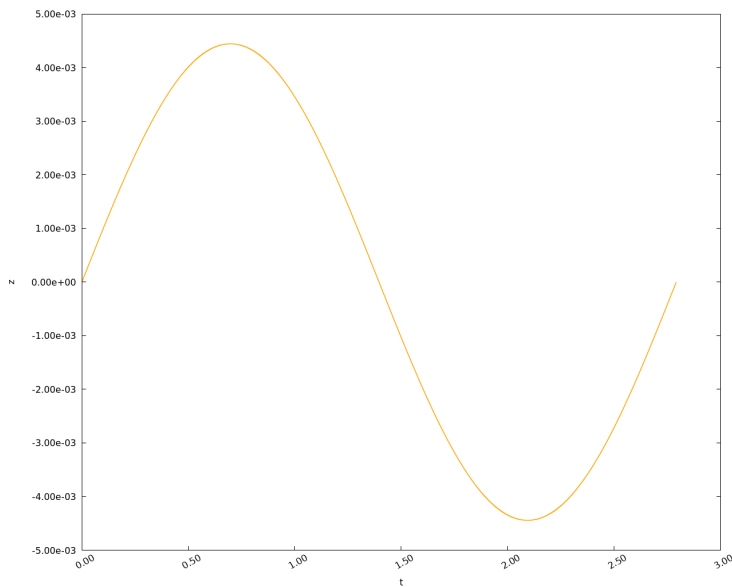
Figura 19: Evolució temporal de les coordenades $(x, y, z)(t)$ per les òrbites planes.



(a) Gràfica $x(t)$

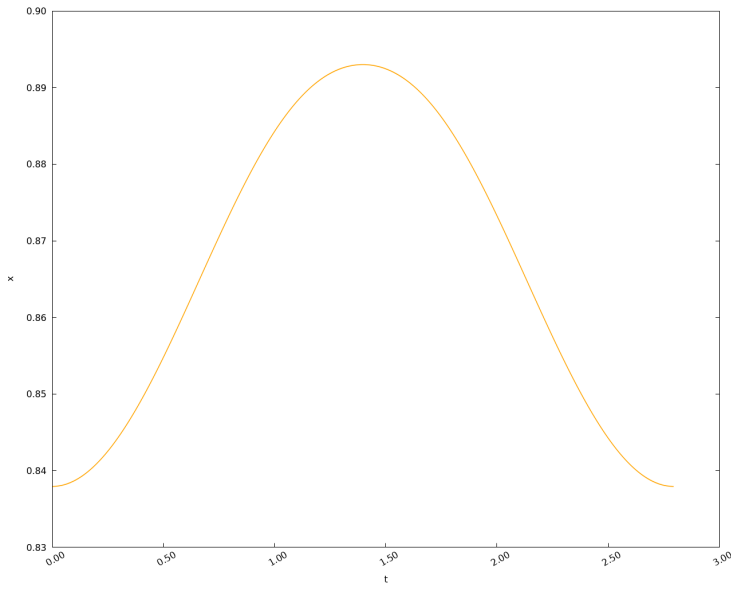


(b) Gràfica $y(t)$

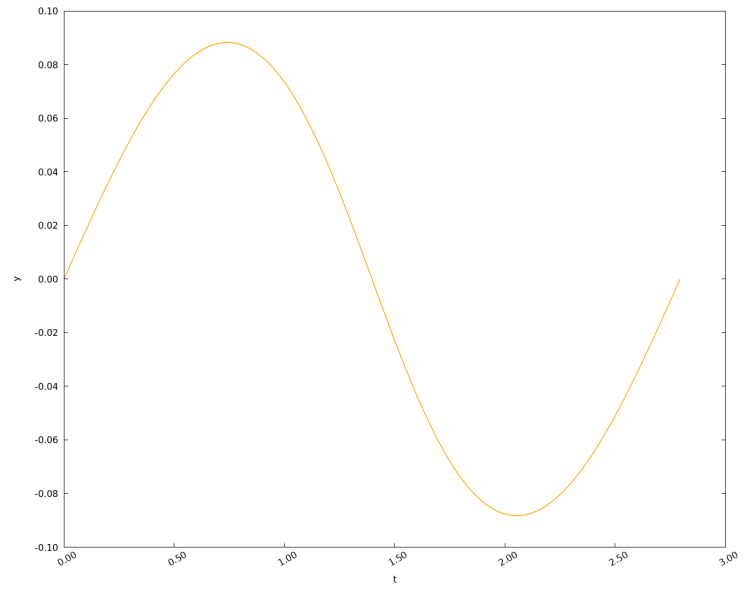


(c) Gràfica $z(t)$

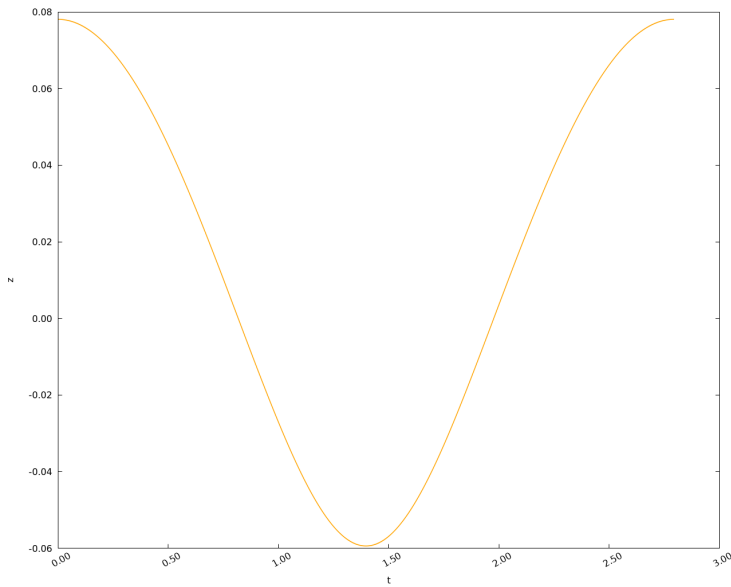
Figura 20: Evolució temporal de les coordenades $(x, y, z)(t)$ per les òrbites verticals.



(a) Gràfica $x(t)$



(b) Gràfica $y(t)$



(c) Gràfica $z(t)$

Figura 21: Evolució temporal de les coordenades $(x, y, z)(t)$ per les òrbites halo.

B Funcions i codi

A continuació s'adjunta el codi emparat per al càlcul de òrbites periòdiques. Concretament, pel cas de les òrbites verticals, tot i que les diferències entre aquest i el cas de les planes és molt petita i deguda bàsicament a les condicions inicials. Notar que s'ha eliminat els trossos de codi que no afegixen valor, com el guardat i la comprovació de memòria, l'alliberament de memòria, i certes comprovacions que han estat útils al llarg del desenvolupament de la part computacional del treball.

■ El programa "main" queda de la següent manera:

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 int main(void) {
6     int contador,punts,i,j,k,g,limit,tir_par,dim,dh;
7     double dif,tol,eps,mu,T0,T1,ham,ham1,ham2,g_value,delta;
8     double *x0,*y0,*x0_aux,*y0_aux,*x1,*y1,*x2,*y2,*sist;
9     double **d_sist,**dx;
10    FILE* arxiu;
11
12    /*Introduim quin tir parallel volem*/
13    tir_par=11;
14    dim=3*tir_par;
15
16    /*Reservem la memoria necessaria. No incloem les comprovacions de
17     que els punters siguin no NULL*/
18    x0=(double*)calloc(dim, sizeof(double)); /*Posicions*/
19    y0=(double*)calloc(dim, sizeof(double)); /*Moments*/
20    x0_aux=(double*)calloc(dim, sizeof(double));
21    y0_aux=(double*)calloc(dim, sizeof(double));
22    x1=(double*)calloc(3, sizeof(double));
23    y1=(double*)calloc(3, sizeof(double));
24    x2=(double*)calloc(3, sizeof(double));
25    y2=(double*)calloc(3, sizeof(double));
26    sist=(double*)calloc(2+2*dim, sizeof(double)); /*G(X)*/
27    d_sist=(double**)calloc(2+2*dim, sizeof(double*)); /*DG(X)*/
28    dx=(double**)calloc(6, sizeof(double*));
29
30    for (i = 0; i < 6; i++){
31        dx[i]=(double*)calloc(6, sizeof(double));
32    }
33    for (i = 0; i < 2+2*dim; i++){
34        d_sist[i]=(double*)calloc(1+2*dim, sizeof(double));
35    }
36
37
38    /*Calcul de les posiscions x_i pel tir parallel: L1=8.48078713e-01
39    Aproximacio de l'orbita a buscar: PHI=L1+(v1*cos(wt)-v2*sin(wt))*
40     cte
41    vap iw --> w=2.2494
42    vep v1+iv2 --> v1=(0,0,0,0,0,1) , v2=(0,0,-0.4446,0,0,0)*/
43
44    T0=((2*3.1416)/2.2494)/tir_par;
45    eps=1e-16; /*Precisio buscada*/
46    mu=0.01; /*Parametre de massa*/
47    grau(&g,eps);
```

```

47 delta=1e-2;
48 for (i = 0; i < tir_par; i++){
49     x0[i*3]=8.48078713e-01;
50     x0[i*3+1]=0.0;
51     x0[i*3+2]=0.4446*sin(1.16*i*T0)*delta;
52     y0[i*3]=0.0;
53     y0[i*3+1]=8.48078713e-01;
54     y0[i*3+2]=1.0*cos(1.16*i*T0)*delta;
55 }
56
57 /*Inicialitzem l'energia inicial per resoldre el sistema*/
58 ham1=energia(x0,y0,mu);
59 ham2=ham1+0.2;
60 punts=50; /*Pas definit per a la continuacio de l'energia*/
61 limit=1000; /*Limit d'iteracions permes*/
62 tol=1e-12;
63 arxiu=fopen("grafica.res","w");
64 if(arxiu==NULL){
65     printf("Error al obrir arxiu\n");
66     exit(1);
67 }
68
69 /*Fem continuacio de l'energia*/
70 for (dh = 0; dh < punts; dh++) {
71     /*Actualitzem els valors per resoldre el sistema H+dH*/
72     ham=ham1*(1-(1.0*dh)/(punts-1))+ham2*((1.0*dh)/(punts-1));
73     contador=0;
74     dif=1.0;
75     g_value=1.0; /*norma de G(X)*/
76     min=1.0;
77     min2=1.0;
78
79     /*Resolem el sistema de coordenades i T. Metode de tir parallel:
80     Metode Newton modificat*/
81     while (dif>tol*tol&&contador<limit){
82         contador++;
83         /*Posem a zero les matrius del sistema a resoldre*/
84         for (i = 0; i < 2+2*dim; i++) {
85             for (j = 0; j < 1+2*dim; j++) {
86                 d_sist[i][j]=0.0;
87             }
88             sist[i]=0;
89         }
90         /*Calcul de DG(X). Donem unicament valors a aquelles posicions
91         que son no nulles*/
92         /*Derivades de la energia*/
93         d_sist[0][0]=-y0[1]+(1-mu)*(x0[0]+mu)*pow((x0[0]+mu)*(x0[0]+mu)
94         +x0[1]*x0[1]+x0[2]*x0[2],-1.5)+mu*(x0[0]+mu-1)*pow((-x0[0]-mu+1)
95         *(-x0[0]-mu+1)+x0[1]*x0[1]+x0[2]*x0[2],-1.5);
96         d_sist[0][1]=y0[0]+x0[1]*((1-mu)*pow((x0[0]+mu)*(x0[0]+mu)+x0
97         [1]*x0[1]+x0[2]*x0[2],-1.5)+mu*pow((-x0[0]-mu+1)*(-x0[0]-mu+1)+x0
98         [1]*x0[1]+x0[2]*x0[2],-1.5));
99         d_sist[0][2]=x0[2]*((1-mu)*pow((x0[0]+mu)*(x0[0]+mu)+x0[1]*x0
100        [1]+x0[2]*x0[2],-1.5)+mu*pow((-x0[0]-mu+1)*(-x0[0]-mu+1)+x0[1]*x0
101        [1]+x0[2]*x0[2],-1.5));
102         d_sist[0][3]=y0[0]+x0[1];
103         d_sist[0][4]=y0[1]-x0[0];
104         d_sist[0][5]=y0[2];
105
106         /*Derivades de phi resp de t*/
107         for (i = 0; i < tir_par; i++){

```

```

100     copiar(x1,x0,0,i*3,i*3+3);
101     copiar(y1,y0,0,i*3,i*3+3);
102     phi(x1,y1,g,mu,T0);
103     camp(x2,y2,x1,y1,mu);
104     d_sist[6*i+1][2*dim]=x2[0];
105     d_sist[6*i+2][2*dim]=x2[1];
106     d_sist[6*i+3][2*dim]=x2[2];
107     d_sist[6*i+4][2*dim]=y2[0];
108     d_sist[6*i+5][2*dim]=y2[1];
109     d_sist[6*i+6][2*dim]=y2[2];
110 }
111
112 /*Derivades de phi respecte posicions i moments ---*/
113 for (i = 0; i < tir_par; i++){
114     copiar(x2,x0,0,i*3,i*3+3);
115     copiar(y2,y0,0,i*3,i*3+3);
116     phi_nm(x2,y2,dx,g,mu,T0);
117     for (j = 0; j < 6; j++){
118         for (k = 0; k < 6; k++){
119             d_sist[6*i+1+j][6*i+k]=dx[j][k];
120         }
121         if (i==tir_par-1) {
122             d_sist[6*i+1+j][j]+=-1.0;
123         }else{
124             d_sist[6*i+1+j][6*(i+1)+j]+=-1.0;
125         }
126     }
127 }
128
129 /*Derivada de g(x)=0. Busquem familia Lyapunov vertical: y=0*/
130 d_sist[1+2*dim][1]=1;
131
132 /*Calcul de G(X) i la seva norma*/
133 sist[0]=energia(x0,y0,mu)-ham;
134
135 for (j = 0; j < tir_par-1 ; j++){
136     copiar(x2,x0,0,j*3,j*3+3);
137     copiar(x1,x0,0,(j+1)*3,(j+1)*3+3);
138     copiar(y2,y0,0,j*3,j*3+3);
139     copiar(y1,y0,0,(j+1)*3,(j+1)*3+3);
140
141     phi(x2,y2,g,mu,T0);
142
143     sist[6*j+1]=x2[0]-x1[0];
144     sist[6*j+2]=x2[1]-x1[1];
145     sist[6*j+3]=x2[2]-x1[2];
146     sist[6*j+4]=y2[0]-y1[0];
147     sist[6*j+5]=y2[1]-y1[1];
148     sist[6*j+6]=y2[2]-y1[2];
149 }
150 copiar(x2,x0,0,tir_par*3-3,tir_par*3);
151 copiar(x1,x0,0,0,3);
152 copiar(y2,y0,0,tir_par*3-3,tir_par*3);
153 copiar(y1,y0,0,0,3);
154 phi(x2,y2,g,mu,T0);
155 sist[6*(tir_par-1)+1]=x2[0]-x1[0];
156 sist[6*(tir_par-1)+2]=x2[1]-x1[1];
157 sist[6*(tir_par-1)+3]=x2[2]-x1[2];
158 sist[6*(tir_par-1)+4]=y2[0]-y1[0];
159 sist[6*(tir_par-1)+5]=y2[1]-y1[1];
160 sist[6*(tir_par-1)+6]=y2[2]-y1[2];

```



```

161
162     sist[1+2*dim]=x0[1];
163
164     g_value=0.0;
165     for (i = 0; i < 2*dim+2; i++) {
166         g_value+=sist[i]*sist[i];
167     }
168
169     T1=T0;
170     copiar(x0_aux,x0,0,0,dim);
171     copiar(y0_aux,y0,0,0,dim);
172     resol(d_sist,&T1,x0_aux,y0_aux,sist, 1+2*dim);
173     dif=(T1-T0)*(T1-T0)+(x0_aux[0]-x0[0])*(x0_aux[0]-x0[0])+(x0_aux
[1]-x0[1])*(x0_aux[1]-x0[1])+(x0_aux[2]-x0[2])*(x0_aux[2]-x0[2])+(
y0_aux[0]-y0[0])*(y0_aux[0]-y0[0])+(y0_aux[1]-y0[1])*(y0_aux[1]-y0
[1])+(y0_aux[2]-y0[2])*(y0_aux[2]-y0[2]);
174
175     /*Passem les noves coordenades i nou periode a les inicials per
fer un nou cicle*/
176     T0=T1;
177     copiar(x0,x0_aux,0,0,dim);
178     copiar(y0,y0_aux,0,0,dim);
179
180 }
181 if (contador==limit){
182     printf("El metode Newton no convergeix\n");
183     exit(1);
184 }
185 for (i = 0; i < tir_par; i++) { /*Pasem la orbita trobada a l'
arxiu de resultats*/
186     for (j = 0; j < 3000; j++){
187         copiar(x1, x0,0, 3*i, 3*i+3);
188         copiar(y1, y0,0, 3*i, 3*i+3);
189         phi(x1,y1,g,mu,(T0*j)/(3000-1));
190         fprintf(arxiu,"%+.10e %+.10e %+.10e %+.10e %+.10e
%+.10e %+.10e\n", (T0*j)/((3000-1)), x1[0],x1[1],x1[2],y1[0],y1
[1],y1[2],energia(x0,y0,mu));
191     }
192 }
193
194 }
195
196 /*Alliberem la memoria reservada i tanquem l'arxiu. No ho incloem*/
197 printf("Done!\n");
198
199 return 0;
200 }

```

■ Les funcions que em requerit són les següents:

```

1 void phi(double* x0, double* y0, int g, double mu, double T); /*
  Calcula les noves coordenades a traves de Taylor*/
2 void grau(int* g, double eps); /*Obte el grau del polinomi de Taylor
  necessari per obtenir certa precisió eps*/
3 void radi(int g, double* h, double **xdot, double** ydot); /*Calcula
  el radi de convergencia del polinomi de Taylor*/
4 void taylor(double* x0, double* y0, double** x,double** y,int g,
  double mu); /*Calcula el polinomi de les coordenades a partir de
  derivacio automatica fins a grau g*/
5 double energia(double *x, double *y, double mu); /*Calcula l'energia
  que de la partícula donades les coordenades*/
6 void resol(double **dg, double *T, double *x, double *y, double *g,
  int dim); /*Resol el sistema triangular per substitució enrere*/
7 void copiar(double* x, double* x0, int pos, int ini, int fin); /*
  Copia els elements d'un vector a partir d'una posició, d'un altre
  indicant ppi i final*/
8 void camp(double* xdot, double* ydot, double* x, double* y, double mu
  ); /*Calcula el camp (xdot,ydot) donades les coordenades*/
9 void triangular(double** dg, double* g, int* per, int fil, int col);
  /*Triangula una matriu aplicant trans. de Householder tant a la
  matriu com al vector de coef indep per no modificar el sistema
  original*/
10 void phi_nm(double* x0, double* y0, double** res, int g, double mu,
  double T); /*Calcula les noves coordenades i la matriu Dx(Phi(t))
  =(v1,v2,...) a traves de taylor_nm*/
11 void taylor_nm(double* x, double** xdot,double*** vdot, int g, double
  mu); /*Calcula el polinomi de Taylor a partir de diferenciació
  automatica de les coordenades i els vectors v_i*/
12 void radi_nm(int g, double* h,double** xdot,double ***v, int dim); /*
  Calcula el radi de convergencia tenint en compte tots el polinomis
  de Taylor, coordenades i vectors v_i*/
13
14 void resol(double **dg, double *T, double *x, double *y, double *g,
  int n){
15 /*Resol el sistema DG*y=G i realitza la nova variable y_(n+1)=y_n-y
16 El sistema es resol amb descomposició QR (via Householder)*/
17 int i,j;
18 int tir_par=(n-1)/6;
19 double tol,aux,alpha;
20 double *u;
21 int* per;
22
23 for (i = 0; i < n; i++) {
24     per[i]=i;
25 }
26 tol=1e-20;
27 alpha=1.0;
28 triangular(dg, g, per, n+1,n);
29 for (i = 0; i < n; i++){
30     aux=0;
31     for (j = 0; j < i; j++){
32         aux+=dg[n-1-i][n-1-j]*u[n-1-j];
33     }
34     u[n-1-i]=(g[n-1-i]-aux)/dg[n-1-i][n-1-i];
35 }
36
37 *T+/-alpha*u[per[n-1]];
38 for (i = 0; i < tir_par; i++) {
39     x[3*i+1]+/-alpha*u[per[6*i+1]];

```

```

40     x[3*i+2]+=-alpha*u[per[6*i+2]];
41     y[3*i+0]+=-alpha*u[per[6*i+3]];
42     y[3*i+1]+=-alpha*u[per[6*i+4]];
43     y[3*i+2]+=-alpha*u[per[6*i+5]];
44 }
45 return;
46 }
47
48 void phi(double* x0, double* y0, int g, double mu, double T){
49     int i,j;
50     double h,t;
51     double **xdot,**ydot; /*Definim matrius que contindran els els jets
52     de la serie solucio, per posicions i moments*/
53
54     t=0;
55     while(t<T){
56         /*Fem l'expansio de Taylor fins al ordre corresponent*/
57         taylor(x0,y0,xdot,ydot,g,mu);
58         /* Obtenim els valors del radi de convergencia*/
59         radi(g,&h,xdot,ydot);
60         /*Avaluem la serie a temps h=radi de convergencia. Apliquem la
61         regla de Horner*/
62         for (i = 0; i < 3; i++) {
63             x0[i]=xdot[g][i];
64             y0[i]=ydot[g][i];
65             for (j=1; j<g+1; j++) {
66                 if ((t+h)*(t+h)<T*T){
67                     x0[i]=x0[i]*h+xdot[g-j][i];
68                     y0[i]=y0[i]*h+ydot[g-j][i];
69                 }else{
70                     x0[i]=x0[i]*(T-t)+xdot[g-j][i];
71                     y0[i]=y0[i]*(T-t)+ydot[g-j][i];
72                 }
73             }
74         }
75         t+=h;
76     }
77     return;
78 }
79
80 void grau(int* g, double eps) {
81     *g=(int)ceil(-0.5*log(eps)+1);
82     return;
83 }
84
85 void radi(int g, double* h, double **x, double** y){
86     double aux,h1,h2,hmin;
87     /*Busquem el radi de convergencia utilitzant els dos ultims termes
88     de cada jet*/
89     aux=fmax(fabs(x[0][g-1]),fabs(x[1][g-1]));
90     aux=fmax(aux,fabs(x[2][g-1]));
91     aux=fmax(aux,fabs(y[0][g-1]));
92     aux=fmax(aux,fabs(y[1][g-1]));
93     aux=fmax(aux,fabs(y[2][g-1]));
94     h1=pow(1/aux,1/(g-1));
95
96     aux=fmax(fabs(x[0][g]),fabs(x[1][g]));
97     aux=fmax(aux,fabs(x[2][g]));
98     aux=fmax(aux,fabs(y[0][g]));
99     aux=fmax(aux,fabs(y[1][g]));
100    aux=fmax(aux,fabs(y[2][g]));

```

```

98     h2=pow(1/aux,1/g);
99
100    hmin=fmin(h1,h2);
101    *h=(hmin/(exp(1)*exp(1)))*exp(-0.7/(g-1));
102    return;
103 }
104
105 void radi_nm(int g, double* h, double **x, double*** y, int dim){
106     int i,j;
107     double aux,h1,h2,hmin;
108     /*Busquem el radi de convergencia utilitzant els dos ultims termes
109     de cada jet*/
109     aux=0;
110     for (i = 0; i < dim; i++) {
111         for (j = 0; j < dim; j++) {
112             aux=fmax(aux,fabs(y[i][j][g-1]));
113         }
114         aux=fmax(aux,fabs(x[i][g-1]));
115     }
116     h1=pow(1/aux,1/(g-1));
117
118     aux=0;
119     for (i = 0; i < dim; i++) {
120         for (j = 0; j < dim; j++) {
121             aux=fmax(aux,fabs(y[i][j][g]));
122         }
123         aux=fmax(aux,fabs(x[i][g]));
124     }
125     h2=pow(1/aux,1/g);
126
127     hmin=fmin(h1,h2);
128     *h=(hmin/(exp(1)*exp(1)))*exp(-0.7/(g-1));
129     return;
130 }
131
132 void taylor(double* x0, double* y0, double** x,double** y,int g,
133             double mu){
134     int i,j;
135     double **u,**v; /*Definim elements intermedis u,v per realitzar els
136     jets*/
137     /*Introduim les posicions i moments inicials*/
138     x[0][0]=x0[0];
139     x[0][1]=x0[1];
140     x[0][2]=x0[2];
141     y[0][0]=y0[0];
142     y[0][1]=y0[1];
143     y[0][2]=y0[2];
144
145     for (i=0 ; i < g; i++) {
146         /*Calcul de les primeres derivades normalitzades de les posicions
147         x_i*/
148         x[i+1][0]=(1.0/(i+1))*(y[i][0]+x[i][1]);
149         x[i+1][1]=(1.0/(i+1))*(y[i][1]-x[i][0]);
150         x[i+1][2]=(1.0/(i+1))*y[i][2];
151         /*Calcul de les primeres derivades normalitzades dels moments y_i
152         */
153         u[0][i]=x[i][0];
154         if (i==0){
155             u[0][i]=x[i][0]+mu;
156         }
157         for (j = 0; j < i+1; j++) {

```

```

154     u[1][i]+=u[0][i-j]*u[0][j];
155     u[2][i]+=x[i-j][1]*x[j][1];
156     u[3][i]+=x[i-j][2]*x[j][2];
157 }
158 u[4][i]=u[1][i]+u[2][i]+u[3][i];
159 for (j = 0; j < i; j++) {
160     u[5][i]+=(-3.0/2)*i+0.5*j)*u[4][i-j]*u[5][j];
161 }
162 u[5][i]=u[5][i]/(i*u[4][0]);
163 if (i==0){
164     u[5][i]=pow(u[4][i], -1.5);
165 }
166 for (j = 0; j < i+1; j++) {
167     u[6][i]+=u[0][i-j]*u[5][j];
168     u[7][i]+=x[i-j][1]*u[5][j];
169     u[8][i]+=x[i-j][2]*u[5][j];
170 }
171 u[6][i]=u[6][i]*(1.0-mu);
172 u[7][i]=u[7][i]*(1.0-mu);
173 u[8][i]=u[8][i]*(1.0-mu);
174 v[0][i]=x[i][0];
175 if (i==0){
176     v[0][i]=x[i][0]+mu-1;
177 }
178 for (j = 0; j < i+1; j++) {
179     v[1][i]+=v[0][i-j]*v[0][j];
180 }
181 v[2][i]=v[1][i]+u[2][i]+u[3][i];
182 for (j = 0; j < i; j++) {
183     v[3][i]+=(-3.0/2)*i+0.5*j)*v[2][i-j]*v[3][j];
184 }
185 v[3][i]=v[3][i]/(i*v[2][0]);
186 if (i==0){
187     v[3][i]=pow(v[2][i], -1.5);
188 }
189 for (j = 0; j < i+1; j++) {
190     v[4][i]+=v[0][i-j]*v[3][j];
191     v[5][i]+=x[i-j][1]*v[3][j];
192     v[6][i]+=x[i-j][2]*v[3][j];
193 }
194 v[4][i]=v[4][i]*mu;
195 v[5][i]=v[5][i]*mu;
196 v[6][i]=v[6][i]*mu;
197
198 y[i+1][0]=(1.0/(i+1))*(y[i][1]-u[6][i]-v[4][i]);
199 y[i+1][1]=(-1.0/(i+1))*(y[i][0]+u[7][i]+v[5][i]);
200 y[i+1][2]=(-1.0/(i+1))*(u[8][i]+v[6][i]);
201 }
202 /*Alliberem memoria de u,v auxiliars*/
203 return;
204 }
205
206 double energia(double *x, double *y, double mu){
207     double h;
208     h=0.5*(y[0]*y[0]+y[1]*y[1]+y[2]*y[2])+x[1]*y[0]-x[0]*y[1]-mu/sqrt
        ((-x[0]-mu+1)*(-x[0]-mu+1)+x[1]*x[1]+x[2]*x[2])-(1.0-mu)/sqrt((x
        [0]+mu)*(x[0]+mu)+x[1]*x[1]+x[2]*x[2]);
209     return h;
210 }
211
212 void copiar(double* x, double* x0, int pos, int ini, int fin){

```

```

213 int i;
214 for (i = 0; i < fin-ini; i++){
215     x[pos+i]=x0[ini+i];
216 }
217 return;
218 }
219
220 void camp(double* xdot, double* ydot, double* x, double*y, double mu)
    {
221     xdot[0]=y[0]+x[1];
222     xdot[1]=y[1]-x[0];
223     xdot[2]=y[2];
224     ydot[0]=y[1]-(1-mu)*(x[0]+mu)*pow((x[0]+mu)*(x[0]+mu)+x[1]*x[1]+x
        [2]*x[2], -1.5)-mu*(x[0]+mu-1)*pow((-x[0]-mu+1)*(-x[0]-mu+1)+x[1]*x
        [1]+x[2]*x[2], -1.5);
225     ydot[1]=-y[0]-x[1]*((1-mu)*pow((x[0]+mu)*(x[0]+mu)+x[1]*x[1]+x[2]*x
        [2], -1.5)+mu*pow((-x[0]-mu+1)*(-x[0]-mu+1)+x[1]*x[1]+x[2]*x
        [2], -1.5));
226     ydot[2]=-x[2]*((1-mu)*pow((x[0]+mu)*(x[0]+mu)+x[1]*x[1]+x[2]*x
        [2], -1.5)+mu*pow((-x[0]-mu+1)*(-x[0]-mu+1)+x[1]*x[1]+x[2]*x
        [2], -1.5));
227     return;
228 }
229
230 void triangular(double** dg, double* g, int* permuta, int n, int m){
    /*QR trans amb column pivoting*/
231     int i,j,k,l,a;
232     double tol,aux,norma_u,mod;
233     double *u,*v, *prod_g;
234     double **q, **prod_dg;
235
236     tol=1e-20;
237     for (i = 0; i < m; i++){ /*n fil, m col*/
238         k=i+1;
239         /*Calculem modul maxim de les columnes per fer column pivoting*/
240         l=i;
241         for (j = i; j < m; j++) {
242             aux=0;
243             for (k = i; k < n; k++) {
244                 aux+=dg[k][j]*dg[k][j];
245             }
246             if (aux>mod) {
247                 l=j;
248                 mod=aux;
249             }
250         }
251         if(l!=i){
252             a=permuta[i];
253             permuta[i]=permuta[l];
254             permuta[l]=a;
255             for (j = 0; j < n; j++) {
256                 aux=dg[j][i];
257                 dg[j][i]=dg[j][l];
258                 dg[j][l]=aux;
259             }
260         }
261         /*Canviem fila en cas de que el primer coef sigui nul*/
262         while(fabs(dg[i][i])<tol&& k<n){
263             for(j=i; j<m; j++){
264                 aux=dg[i][j];
265                 dg[i][j]=dg[k][j];

```

```

266         dg[k][j]=aux;
267     }
268     aux=g[i];
269     g[i]=g[k];
270     g[k]=aux;
271     k++;
272 }
273 norma_u=0;
274 for (j = i; j<n; j++){
275     norma_u+=dg[j][i]*dg[j][i];
276 }
277 for (j = i; j<n; j++){
278     u[j]=dg[j][i];
279     if (j==i){
280         u[j]=dg[j][i]-sqrt(norma_u);
281         norma_u=sqrt(norma_u-dg[j][i]*dg[j][i]+u[j]*u[j]);
282     }
283     v[j]=u[j]/norma_u;
284 }
285 if (norma_u<tol){
286     for (j=0; j<n+1; j++){
287         v[j]=0;
288     }
289 }
290
291 /*Generem la matriu Q que ens fa zeros a la columna per sota de (
i,i)*/
292 for (j=0; j<i; j++){
293     for (k=0; k<n; k++){
294         q[j][k]=0;
295         q[k][j]=0;
296     }
297     q[j][j]=1;
298 }
299 for (j = i; j< n; j++){
300     for (k=i; k<n; k++){
301         q[j][k]=-2*v[j]*v[k];
302     }
303     q[j][j]+=1.0;
304 }
305 /*Multipliquem la nova Q_i amb la anterior aux matriu i vector de
termes indep.*/
306 for (j = 0; j < n; j++){
307     for (k = 0; k<m; k++){
308         prod_dg[j][k]=0;
309         for (l = 0; l<n ; l++){
310             prod_dg[j][k]+=q[j][l]*dg[l][k];
311         }
312     }
313 }
314 for (j = 0; j < n; j++){
315     prod_g[j]=0;
316     for (k = 0; k<n; k++){
317         prod_g[j]+=q[j][k]*g[k];
318     }
319 }
320
321 /*Passem els valors del producte anterior al inicial per tornar
al cicle*/
322 for (j = 0; j < n; j++){
323     for (k = 0; k<m; k++){

```

```

324         dg[j][k]=prod_dg[j][k];
325     }
326     g[j]=prod_g[j];
327 }
328 }
329 /*Alliberem memoria*/
330 return;
331 }
332
333 void taylor_nm(double* x, double** xdot,double*** vdot, int g, double
mu){
334 int i,j,dim,k;
335 /*Definim elements intermedis u,v per calcular els jets de
derivades*/
336 double **u,**v,**aux_x1,**aux_x2,**aux_x3,**aux_y1,**aux_y2,**
aux_y3,**aux_z1,**aux_z2,**aux_z3;
337
338 /*Introduim les posicions i moments inicials*/
339 xdot[0][0]=x[0];
340 xdot[1][0]=x[1];
341 xdot[2][0]=x[2];
342 xdot[3][0]=x[3];
343 xdot[4][0]=x[4];
344 xdot[5][0]=x[5];
345
346 for (i=0 ; i < g; i++) {
347     /*Calcul de les primeres derivades normalitzades de les posicions
x_i i=1,2,3*/
348     xdot[0][i+1]=(1.0/(i+1))*(xdot[3][i]+xdot[1][i]);
349     xdot[1][i+1]=(1.0/(i+1))*(xdot[4][i]-xdot[0][i]);
350     xdot[2][i+1]=(1.0/(i+1))*xdot[5][i];
351     /*Calcul de les primeres derivades normalitzades dels moments y_i
i=1,2,3*/
352     u[0][i]=xdot[0][i];
353     if (i==0){
354         u[0][i]=xdot[0][i]+mu;
355     }
356
357     for (j = 0; j < i+1; j++) {
358         u[1][i]+=u[0][i-j]*u[0][j];
359         u[2][i]+=xdot[1][i-j]*xdot[1][j];
360         u[3][i]+=xdot[2][i-j]*xdot[2][j];
361     }
362     u[4][i]=u[1][i]+u[2][i]+u[3][i]; /*r1*/
363     for (j = 0; j < i; j++) {
364         u[5][i]+=(-1.5*i+0.5*j)*u[4][i-j]*u[5][j];
365     }
366     u[5][i]=u[5][i]/(i*u[4][0]);
367     if (i==0){
368         u[5][i]=pow(u[4][i],-1.5); /*r1 -3/2*/
369     }
370     for (j = 0; j < i+1; j++) {
371         u[6][i]+=u[0][i-j]*u[5][j];
372         u[7][i]+=xdot[1][i-j]*u[5][j];
373         u[8][i]+=xdot[2][i-j]*u[5][j];
374     }
375     u[6][i]=u[6][i]*(1.0-mu);
376     u[7][i]=u[7][i]*(1.0-mu);
377     u[8][i]=u[8][i]*(1.0-mu);
378     v[0][i]=xdot[0][i];
379     if (i==0){

```



```

380     v[0][i]=xdot[0][i]+mu-1;
381 }
382 for (j = 0; j < i+1; j++) {
383     v[1][i]+=v[0][i-j]*v[0][j];
384 }
385 v[2][i]=v[1][i]+u[2][i]+u[3][i]; /*r2*/
386 for (j = 0; j < i; j++) {
387     v[3][i]+=(-1.5)*i+0.5*j)*v[2][i-j]*v[3][j];
388 }
389 v[3][i]=v[3][i]/(i*v[2][0]);
390 if (i==0){
391     v[3][i]=pow(v[2][i],-1.5); /*r2 -3/2*/
392 }
393 for (j = 0; j < i+1; j++) {
394     v[4][i]+=v[0][i-j]*v[3][j];
395     v[5][i]+=xdot[1][i-j]*v[3][j];
396     v[6][i]+=xdot[2][i-j]*v[3][j];
397 }
398 v[4][i]=v[4][i]*mu;
399 v[5][i]=v[5][i]*mu;
400 v[6][i]=v[6][i]*mu;
401
402
403 xdot[3][i+1]=(1.0/(i+1))*(xdot[4][i]-u[6][i]-v[4][i]);
404 xdot[4][i+1]=(-1.0/(i+1))*(xdot[3][i]+u[7][i]+v[5][i]);
405 xdot[5][i+1]=(-1.0/(i+1))*(u[8][i]+v[6][i]);
406
407 /*Calcul de V_i a partir de xdot i Dx(X(x)) (inicia amb u[9])*/
408 for (j = 0; j < i; j++) {
409     u[9][i]+=(-2.5)*i+1.5*j)*u[4][i-j]*u[9][j];
410 }
411 u[9][i]=u[9][i]/(i*u[4][0]);
412 if (i==0){
413     u[9][i]=pow(u[4][i],-2.5); /*r1 -5/2*/
414 }
415 for (j = 0; j < i; j++) {
416     u[10][i]+=(-2.5)*i+1.5*j)*v[2][i-j]*u[10][j];
417 }
418 u[10][i]=u[10][i]/(i*v[2][0]);
419 if (i==0){
420     u[10][i]=pow(v[2][i],-2.5); /*r2 -5/2*/
421 }
422 u[11][i]=-2.0*u[1][i]+u[2][i]+u[3][i];
423 u[12][i]=-2.0*v[1][i]+u[2][i]+u[3][i];
424 for (j = 0; j < i+1; j++){
425     u[13][i]+=(mu-1.0)*u[11][j]*u[9][i-j];
426 }
427 for (j = 0; j < i+1; j++){
428     u[14][i]+=-mu*u[12][j]*u[10][i-j];
429 }
430 u[15][i]=u[13][i]+u[14][i];
431 for (j = 0; j < i+1; j++){
432     u[16][i]+=(1-mu)*u[0][j]*u[9][i-j];
433 }
434 for (j = 0; j < i+1; j++){
435     u[17][i]+=mu*v[0][j]*u[10][i-j];
436 }
437 for (j = 0; j < i+1; j++){
438     u[18][i]+=3*xdot[1][j]*(u[16][i-j]+u[17][i-j]);
439 }
440 for (j = 0; j < i+1; j++){

```

```

441     u[19][i]+=3*xdot[2][j]*(u[16][i-j]+u[17][i-j]);
442 }
443 u[20][i]=-2*u[2][i]+u[1][i]+u[3][i];
444 for (j = 0; j < i+1; j++){
445     u[21][i]+=(mu-1)*u[20][j]*u[9][i-j];
446 }
447 u[22][i]=-2*u[2][i]+v[1][i]+u[3][i];
448 for (j = 0; j < i+1; j++){
449     u[23][i]+=-mu*u[22][j]*u[10][i-j];
450 }
451 u[24][i]=(1-mu)*u[9][i]+mu*u[10][i];
452 for (j = 0; j < i+1; j++){
453     u[25][i]+=u[24][j]*xdot[2][i-j];
454 }
455 for (j = 0; j < i+1; j++){
456     u[26][i]+=3*u[25][j]*xdot[1][i-j];
457 }
458 u[27][i]=-2*u[3][i]+u[1][i]+u[2][i];
459 for (j = 0; j < i+1; j++){
460     u[28][i]+=(mu-1)*u[27][j]*u[9][i-j];
461 }
462 u[29][i]=-2*u[3][i]+v[1][i]+u[2][i];
463 for (j = 0; j < i+1; j++){
464     u[30][i]+=-mu*u[29][j]*u[10][i-j];
465 }
466 for (j = 0; j < 6; j++){
467     for (k = 0; k < i+1; k++){
468         aux_x1[j][i]+=u[15][k]*vdot[0][j][i-k];
469     }
470 }
471 for (j = 0; j < 6; j++){
472     for (k = 0; k < i+1; k++){
473         aux_x2[j][i]+=u[18][k]*vdot[1][j][i-k];
474     }
475 }
476 for (j = 0; j < 6; j++){
477     for (k = 0; k < i+1; k++){
478         aux_x3[j][i]+=u[19][k]*vdot[2][j][i-k];
479     }
480 }
481 for (j = 0; j < 6; j++){
482     for (k = 0; k < i+1; k++){
483         aux_y1[j][i]+=u[18][k]*vdot[0][j][i-k];
484     }
485 }
486 for (j = 0; j < 6; j++){
487     for (k = 0; k < i+1; k++){
488         aux_y2[j][i]+=(u[21][k]+u[23][k])*vdot[1][j][i-k];
489     }
490 }
491 for (j = 0; j < 6; j++){
492     for (k = 0; k < i+1; k++){
493         aux_y3[j][i]+=u[26][k]*vdot[2][j][i-k];
494     }
495 }
496 for (j = 0; j < 6; j++){
497     for (k = 0; k < i+1; k++){
498         aux_z1[j][i]+=u[19][k]*vdot[0][j][i-k];
499     }
500 }
501 for (j = 0; j < 6; j++){

```

```

502     for (k = 0; k < i+1; k++){
503         aux_z2[j][i]+=u[26][k]*vdot[1][j][i-k];
504     }
505 }
506 for (j = 0; j < 6; j++){
507     for (k = 0; k < i+1; k++){
508         aux_z3[j][i]+=(u[28][k]+u[30][k])*vdot[2][j][i-k];
509     }
510 }
511 /*Calculem els nous termes i+1 del polinomi dels vectors v_j*/
512 for (j = 0; j < 6; j++){
513     vdot[0][j][i+1]=(vdot[1][j][i]+vdot[3][j][i])/(i+1);
514     vdot[1][j][i+1]=(-vdot[0][j][i]+vdot[4][j][i])/(i+1);
515     vdot[2][j][i+1]=vdot[5][j][i]/(i+1);
516
517     vdot[3][j][i+1]=(aux_x1[j][i]+aux_x2[j][i]+aux_x3[j][i]+vdot
518 [4][j][i])/(i+1);
519     vdot[4][j][i+1]=(aux_y1[j][i]+aux_y2[j][i]+aux_y3[j][i]-vdot
520 [3][j][i])/(i+1);
521     vdot[5][j][i+1]=(aux_z1[j][i]+aux_z2[j][i]+aux_z3[j][i])/(i+1);
522 }
523 /*Alliberem memoria de u,v auxiliars*/
524 return;
525 }
526
527 void phi_nm(double* x0, double* y0, double** res, int g, double mu,
528 double T){
529     int i,j,k;
530     double h,t;
531     double *x;
532     double **xdot;
533     double ***v;
534     double **aux1,**prod;
535
536     /*Definim els vectors que contindran els coeficients de la serie
537     solucio, per posicions i moments. Obtenim
538     tambe de l'arxiu les condicions inicials*/
539     x=(double*) calloc(6,sizeof(double)); /*Posicions i moments*/
540     xdot=(double**) calloc(6, sizeof(double*)); /*Matriu de jets*/
541     v=(double***) calloc(6,sizeof(double**)); /*Matriu dels jets de cada
542     v_i*/
543     /*Condicio inicial Dx(Phi(0,x_0))=Id*/
544     for (i = 0; i < 6; i++){
545         v[i][i][0]=1.0;
546     }
547     t=0;
548     while(t<T){
549         /*Fem l'expansio de Taylor fins al ordre corresponent*/
550         copiar(x,x0,0,0,3);
551         copiar(x,y0,3,0,3);
552         taylor_nm(x,xdot,v,g,mu);
553         /* Obtenim el valor del radi de convergencia*/
554         radi_nm(g,&h,xdot,v,6);
555         /*Avaluem els polinomis de Taylor a temps h=radi de convergencia.
556         Apliquem la regla de Horner*/
557         for (i = 0; i < 3; i++) {
558             x0[i]=xdot[i][g];
559             y0[i]=xdot[i+3][g];
560             for (j=1; j<g+1; j++) {

```

```

557     if ((t+h)*(t+h)<T*T){
558         x0[i]=x0[i]*h+xdot[i][g-j];
559         y0[i]=y0[i]*h+xdot[i+3][g-j];
560     }else{
561         x0[i]=x0[i]*(T-t)+xdot[i][g-j];
562         y0[i]=y0[i]*(T-t)+xdot[i+3][g-j];
563     }
564 }
565 }
566 for (i = 0; i < 6; i++){
567     for (j = 0; j < 6; j++){
568         res[i][j]=v[i][j][g];
569         for (k=1; k < g+1; k++){
570             if ((t+h)*(t+h)<T*T){
571                 res[i][j]=res[i][j]*h+v[i][j][g-k];
572             }else{
573                 res[i][j]=res[i][j]*(T-t)+v[i][j][g-k];
574             }
575         }
576         /*Guardem la nova matriu Dx(Phi(h,x_0)) com a condicio
inicial pel següent cicle*/
577         v[i][j][0]=res[i][j];
578     }
579 }
580 t+=h;
581 }
582 /*Alliberem memoria de la serie de derivades*/
583 return;
584 }

```