Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ATRACTORS ESTRANYS NO CAÒTICS EN SISTEMES FORÇATS QUASIPERIÒDICAMENT

Autor: Manel Caireta i Planes

Director: Dr. Àngel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

Strange attractors are a large study area in dynamical systems. We will study a small portion of these atractors: those which are nonchaotic. Although the study of nonchaotic systems is generally simpler than the study of chaotic ones, the results known to this day are still very superficial. Here, we present a strange nonchaotic attractor and discuss the difficulties of strange nonchaotic attractors' proper classification.

Resum

Els atractors estranys són una àmplia àrea d'estudi dins dels sistemes dinàmics. Nosaltres estudiarem una petita part d'aquests atractors estranys: els que no són caòtics. Malgrat que els sistemes no caòtics generalment són més senzills d'estudiar que els caòtics, els resultats que coneixem actualment segueixen sent molt superficials. En aquest treball veurem un atractor estrany no caòtic i discutirem la dificultat de la seva classificació.

2020 Mathematics Subject Classification. 37C60, 37D25, 37D45

Índex

1 Introducció

A mitjans del segle passat es van començar a descobrir sistemes dinàmics amb un atractor amb una estructura que no és ni un conjunt de punts aïllats ni una estructura diferenciable a trossos i per tant, es sol dir que la seva estructura és estranya. Alguns cassos famossos podríen ser l'atractor de Lorenz [14] o l'atractor d'Hénon [6]. Una característica comuna de tots aquests atractors famossos és que presenten un comportament caòtic, és a dir, que les òrbites de dos punts depenen molt sensiblement de les circumstàncies inicials. No obstant això, en aquest treball nosaltres estudiarem atractors amb estructura estranya que no són caòtics. El primer d'aquests atractors no caòtics va ser descrit per Grebogi *et al.* [4]. A partir d'aquest punt, van començar a apareixer altres autors amb proves formals o evidències numèriques de sistemes amb atractors estranys no caòtics.

Per estudiar atractors estranys no caòtics haurem d'introduir alguns conceptes clau que utilitzarem reiteradament durant el treball. Comencem amb els **sistemes dinàmics forçats quasiperiòdicament**, aquests són sistemes del tipus

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & f(x,\theta), \\ \bar{\theta} & = & \theta+\omega, \qquad \bmod 2\pi. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

on $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ és una funció qualsevol i $\omega \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Aprofitem per comentar que en aquest treball $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i que per facilitat d'escriptura ometrem el terme "mod 2π"quan no hi hagi risc de confusió. De vegades enlloc d'estudiar el sistema (1.1) estudiarem la funció $T(x,\theta) = (f(x,\theta), \theta+\omega)$ que genera (1.1) en ser iterada. Tots els sistemes que considerarem en aquest treball seran quasiperiòdicament forçats.

També introduïm la idea de **funció de gràfica invariant**. Una funció mesurable $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ és invariant per (1.1) o invariant per T si

$$\psi(\theta+\omega) = f(\psi(\theta), \theta), \qquad \text{gairebé per a tot } \theta \in \mathbb{T}.$$

Notem que si ψ és de gràfica invariant gairebé tot punt de la gràfica de ψ no es mou de la gràfica de ψ en fer avançar el sistema (1.1). Per facilitat de llenguatge direm que ψ és invariant per referir-nos a que la seva gràfica és invariant. A més, si ψ és una funció de classe C^r, $r \geq 0$, invariant per (1.1) direm que ψ és una corba invariant de classe C^r.

Acabem introduïnt el concepte d'**exponent de Lyapunov**. Aquests exponents són una forma de "mesurar el caos". Malgrat que un sistema com (1.1) té sempre dos exponents de Lyapunov, un en el sentit de les x i l'altre en el sentit de les θ, l'exponent en el sentit de les θ serà sempre zero. Així doncs, només té sentit considerar els exponents de Lyapunov en els sentit de les x, és a dir,

$$\bar{\lambda}(x,\theta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \ln \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,\theta) \right|.$$

En el cas que aquest límit superior sigui un límit, denotarem l'exponent de Lyapunov per λ. Notem que per a l'existència dels exponents de Lyapunov haurem de suposar que f és diferenciable respecte de x.

Observem que l'exponent de Lyapunov mesura la sensibilitat del sistema respecte de les circumstàncies inicials. Si l'exponent de Lyapunov d'un punt x és negatiu aleshores punts propers a x segueixin propers a x en avançar el temps i si l'exponent és positiu aleshores punt propers a x s'allunyen de x en avançar el temps (caos).

El projecte

Aquest treball té dos objectius. El primer objectiu és mostrar l'existència dels atractors estranys no caòtics, concretament, veurem una família de sistemes dinàmics en la qual podem assegurar l'existència d'un atractor estrany no caòtic.

El segon objectiu és emular el comportament d'un atractor estrany no caòtic amb una funció regular. En particular, presentarem un cas en el qual una corba invariant es fractalitza sense perdre regularitat. Amb aquest exemple deixarem palesa la complexitat de classificar correctament un atractor estrany no caòtic.

Estructura de la Memòria

Començarem el treball amb la Secció 2 presentant un seguit de resultats que utilitzarem a la resta del treball. Després, a la Secció 3, veurem que efectivament existeixen els atractors estranys no caòtics trobant-ne un. La Secció 4 farà una introducció als productes esbiaixats lineals que utilitzarem a la Secció 5 per a estudiar la continuació de corbes invariants. Acabarem amb la Secció 6 on trobarem una família de sistemes dinàmics en la qual l'atractor es fractalitza sense perdre regularitat emulant el comportament d'un atractor estrany no caòtic.

2 Preliminars

Pel desenvolupament d'aquest treball necessitarem utilitzar alguns resultats que no hem vist al grau, aquesta secció està dedicada a presentar aquests resultats.

2.1 Conjunts escassos i conjunts residuals

Com que a la Secció 3 haurem de veure que l'estructura d'un atractor és estranya, aquí introduïm alguns conceptes sobre topologia que utilitzarem a l'hora de definir l'estructura dels atractors.

Definició 2.1. *Direm que un subconjunt A d'un espai topològic X és* ***enlloc dens*** *si la seva clausura, $\bar{A}$ té interior buit.*

Exemples 2.2.

(a) El conjunt buit, $\emptyset$ sempre és enlloc dens.

(b) Els nombres racionals, $\mathbb{Q}$, no són enlloc densos en $\mathbb{R}$. Els enters, $\mathbb{Z}$, sí que ho són.

Teorema 2.3. *En un espai topològic:*

(a) $A \subseteq X$ té interior buit si, i només si, $X \setminus A$ és dens.

(b) $A \subseteq X$ és enlloc dens si, i només si, $X \setminus \bar{A}$ és dens.

(c) $A \subseteq X$ és enlloc dens si, i només si, tot subconjunt obert no buit G de X conté un subconjunt no buit U tal que $A \cap U = \emptyset$.

La prova d'aquest teorema es pot trobar a [11].

Definició 2.4. *Direm que un subconjunt A d'un espai topològic X és* ***escàs*** *si es pot escriure com una unió numerable de conjunts enlloc densos. El complementari d'un conjunt escàs l'anomenarem* ***residual****.*

Exemples 2.5.

(a) Tot conjunt enlloc dens és escàs.

(b) $\mathbb{Q}$ és un conjunt escàs en $\mathbb{R}$ i els nombres irracionals són residuals.

2.2 Funcions semicontínues

A la Secció 3 veurem que l'atractor del nostre sistema és una funció semicontínua, així doncs, cal introduir aquest concepte.

Definició 2.6. *Sigui X un espai topològic i $f : X \to \mathbb{R}$ una funció. Direm que f és* ***semicontínua inferiorment*** *si*

$$f^{-1}(\alpha, +\infty) = \{x : f(x) > \alpha\}$$

és un obert de X per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. Direm que f és ***semicontínua superiorment*** *si*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x : f(x) < \alpha\}$$

és un obert de X per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

La intuïció darrera d'aquesta definició és denotar funcions discontínues que només tenen discontinuïtats de salt o evitables tals que els salts són sempre cap a valors més baixos (inferiorment) o més alts (superiorment). Notem que si f és semicontínua inferiorment i superior aleshores f és contínua.

Proposició 2.7. *El suprem d'una col·lecció de funcions semicontínues inferiorment és semicontínua inferiorment. L'ínfim d'una col·lecció de funcions semicontínues superiorment és semicontínua superiorment.*

2.3 Teoria ergòdica

En aquest treball estudiarem sistemes forçats quasiperiòdicament. Això implica que utilitzarem repetidament la transformació

$$\theta \mapsto \theta + \omega.$$

Per això, ens interessarà saber com està distribuïda la successió generada en iterar aquest procés. En altres paraules, haurem de conèixer l'ergodicitat de les rotacions. Les demostracions dels següents resultats es poden trobar a [8].

Definició 2.8. *Sigui $(X, \mathcal{F})$ un espai de mesura i $T : X \to X$ una transformació mesurable. Si μ és una mesura en $(X, \mathcal{F})$, tal que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ direm que μ és **invariant** per T o, equivalentment, que T **preserva la mesura** μ.*

Teorema 2.9 (Teorema Ergòdic de Birkhoff). *Sigui $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ una transformació que preservi la mesura d'un espai de probabilitat i $\varphi \in L^1(X, \mu)$. Aleshores el límit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(T^k(x)\right)$$

existeix gairebé per a tot $x \in X$.

Definició 2.10. *Direm que una mesura μ invariant per una transformació T és **ergòdica** respecte de T si per a cada conjunt mesurable $A \subseteq X$ tal que $T(A) = A$ o bé $\mu(A) = 0$ o bé $\mu(X \setminus A) = 0$. També direm que T és ergòdica respecte de μ amb el mateix significat.*

Corol·lari 2.11. *Si $T : X \to X$ és una transformació ergòdica i que preserva la mesura μ, $\mu(X) = 1$ i $\varphi \in L^1(X, \mu)$ aleshores gairebé per a tot $x \in X$ es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(T^k(x)\right) = \int_X \varphi \; d\mu.$$

Definició 2.12. *Una funció contínua $f : X \to X$ d'un espai metritzable (un espai topològic homeomorf a un espai mètric) compacte X direm que és **únicament ergòdic** si només existeix una mesura de probabilitat de Borel invariant per f.*

Proposició 2.13. *Si $f : X \to X$ és únicament ergòdica llavors per a tota funció contínua φ la successió*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(f^k(x)\right)$$

convergeix uniformement.

Acabem els resultats de teoria ergòdica amb un teorema que utilitzarem reiteradament a la resta del treball:

Teorema 2.14 (Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució). *Les rotacions irracionals són únicament ergòdiques.*

2.4 Anàlisi funcional

A la Secció 5 utilitzarem l'operador de transferència. Per estudiar el seu espectre, haurem d'utilitzar algunes eines d'anàlisi funcional.

2.4.1 Teoremes fonamentals

Les demostracions d'aquests teoremes es poden trobar a [12].

Teorema 2.15 (Teorema de Banach-Steinhauss). *Sigui X un espai de Banach, Y un espai normat i $(\Lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ una col·lecció d'operadors lineals acotats de X en Y. Aleshores, o bé existeix un valor $M < \infty$ tal que*

$$||\Lambda_\alpha|| \leq M, \quad \text{per a tot } \alpha \in A,$$

o bé

$$\sup_{\alpha \in A} ||\Lambda_\alpha x|| = \infty$$

per a tot x en un subconjunt dens en X.

Teorema 2.16 (Teorema de l'aplicació oberta). *Siguin X i Y dos espais de Banach i sigui $U \subseteq X$ la bola unitat en X. Aleshores, per a cada operador lineal exhaustiu Λ de X en Y existeix $\delta > 0$ tal que*

$$\{y \in Y : ||y|| < \delta\} \subseteq \Lambda(U).$$

Notem que combinant aquest teorema i la linealitat de Λ obtenim que la imatge de tota bola oberta centrada en x de X conté una bola oberta de Y centrada en Λx_0. És a dir, que Λ és una funció oberta.

Corol·lari 2.17. *Si X i Y són dos espais de Banach i Λ és un operador acotat bijectiu de X en Y, aleshores Λ^{-1} és un operador acotat de Y en X.*

2.4.2 Resolvents

Els següents resultats es poden trobar a [10].

Definició 2.18. *Sigui $X \neq \{0\}$ un espai normat sobre els complexos, U un subconjunt de X i $T : U \to X$ un operador lineal acotat. Considerem la família d'operadors*

$$\lambda \mathrm{Id} - T, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si $\lambda \mathrm{Id} - T$ és invertible, aleshores direm que $(\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$ és una ***resolvent*** *de T. Habitualment les resolvents es denoten per $R_\lambda(T)$ o simplement per R_λ quan no hi ha risc de confusió.*

Definició 2.19. *Sigui $X \neq \{0\}$ un espai normat sobre els complexos, U un subconjunt de X i $T : U \to X$ un operador lineal acotat aleshores $\lambda \in \mathbb{C}$ és un **valor regular** si*

1. *$R_\lambda(T)$ existeix,*
2. *$R_\lambda(T)$ està acotat,*
3. *$R_\lambda(T)$ està definit en un conjunt dens en X.*

*El conjunt format per tots els valors regulars és el **conjunt resolvent** de T. El conjunt complementari del conjunt resolvent és l'**espectre** de T i els seus elements són els valors espectrals de T.*

Teorema 2.20. *Sigui X un espai de Banach i $T : X \to X$ un operador lineal acotat. Si $||T|| < 1$, aleshores la resolvent $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$ existeix i és un operador acotat de X en X. A més*

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \mathrm{Id} + T + T^2 + \dots$$

A aquesta sèrie l'anomenarem la sèrie de Newmann de T.

Teorema 2.21 (Teorema de Representació per a la Resolvent)**.** *Sigui X un espai de Banach i T un operador lineal acotat actuant en X. Si λ_0 pertany al conjunt resolvent de T, aleshores tenim la representació*

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1},$$

on la sèrie convergeix absolutament per a cada λ en el disc obert

$$|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||},$$

a més, aquest disc es un subconjunt del conjunt resolvent.

Teorema 2.22. *Donat un operador lineal acotat $T : X \to X$ en un espai de Banach X, aleshores l'espectre de T, $\mathrm{Spec}(T)$ és compacte i està contingut al disc*

$$|\lambda| \leq ||T||.$$

2.5 Altres resultats

Teorema 2.23 (Teorema de Preparació de Malgrange)**.** *Sigui $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunt obert que conté l'origen i $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ una funció tal que*

$$f(t, 0) = t^k g(t)$$

on g és suau en un entorn del zero i $g(0) \neq 0$. Aleshores, existeix una funció q suau en un entorn V del zero de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i funcions $a_0(x), \dots, a_{k-1}(x)$ suaus en un entorn del zero en $\mathbb{R}^n$ tals que $q(0,0) \neq 0$ i que

$$q(t,x)f(t,x) = t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \dots + a_1(x)t + a_0(x), \quad \textit{per a tot } (t,x) \in V.$$

Una prova d'aquest teorema es pot trobar a [2]

2.6 Càlcul diferencial en espais de Banach

En aquesta secció veurem quina és la generalització de la derivada per a funcions entre dos espais de Banach. Utilitzarem els coneixements d'aquesta secció a la Secció 5 per a trobar la derivada d'un funcional i aplicar el Teorema de la Funció Implícita.

Començarem presentant alguns resultats que provarem ja que són molt fonamentals i ens donen una bona introducció als espais de Banach, que és on treballarem a la Secció 5. Els resultats més avançats no els demostrarem ja que aquest no és l'objectiu del treball. Seguirem la mateixa introducció que s'utilitza a [1].

2.6.1 Diferenciació en espais de Banach

Durant tota la secció suposarem que X i Y són dos espais de Banach i que U és un obert no buit de X.

Definició 2.24. *Donats dos espais de Banach, X i Y i un obert $U \subseteq X$ direm que dues aplicacions $f_1, f_2 : U \to Y$ són* ***tangents*** *en un punt $x_0 \in X$ si la funció definida per a $r > 0$ prou petita (x i x_0 han de ser a U),*

$$m(r) = \sup_{||x-x_0|| \leq r} ||f_1(x) - f_2(x)||$$

és $o(r)$, és a dir que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m(r)}{r} = 0.$$

És fàcilment verificable que la tangència és una relació d'equivalència.

Observació 2.25. Notem que si dues aplicacions f_1 i f_2 són tangents en un punt $x_0 \in X$ aleshores com que $m(r) = o(r)$ l'aplicació $f_1 - f_2$ és contínua en x_0 i $\big(f_1 - f_2\big)(x_0) = 0$. Així doncs, si una de les aplicacions és contínua en x_0 llavors l'altre també haurà de ser contínua en x_0.

Definició 2.26. *Direm que una aplicació $f : U \to Y$ és* ***diferenciable*** *en $x_0 \in U$ si es verifiquen les condicions següents:*

i) f és contínua en x_0.

ii) existeix una aplicació lineal $g : X \to Y$ tal que les aplicacions $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ i $x \mapsto g(x - x_0)$ són tangents en x_0, és a dir que

$$||f(x) - f(x_0) - g(x - x_0)|| = o(||x - x_0||). \tag{2.1}$$

Notem que si f és diferenciable en x_0 aleshores per l'Observació 2.25 g serà contínua en x_0, per tant $g \in \mathscr{L}(X, Y)$. A aquest element de $\mathscr{L}(X, Y)$ l'anomenarem la ***derivada*** de f en x_0 i el notarem per $f'(x_0)$.

Observació 2.27. En utilitzar de nou l'Observació 2.25 podem extreure una defineció equivalent de diferenciabilitat:

Una funció $f : X \to Y$ és diferenciable en un punt $x_0 \in U$ si existeix una aplicació $g \in \mathscr{L}(X, Y)$ tal que se satisfà la igualtat (2.1).

Definició 2.28. *Una aplicació $f : U \to Y$ és* ***diferenciable*** *en U si f és diferenciable en tot punt de U.*

Si f és diferenciable en U podem definir una aplicació tal que a cada punt x_0 li assigna $f'(x_0)$. Aquesta aplicació l'anomenarem f', notem que f' envia punts de l'obert U a $\mathscr{L}(X, Y)$.

Definició 2.29. *Direm que una aplicació $f : U \to Y$ és* ***contínuament diferenciable*** *o de classe C^1 si:*

i) f és diferenciable en U.

ii) l'aplicació derivada $f' : U \to \mathscr{L}(X, Y)$ és contínua (utilitzant la topologia induïda per la norma de $\mathscr{L}(X, Y)$).

Exemple 2.30. Si $f : X \to Y$ és una aplicació constant aleshores f és diferenciable i la seva aplicació derivada és constant i igual a 0.

Efectivament, si $f \equiv C$ on $C \in X$ és una constant aleshores per a tot $x_0 \in X$

$$||f(x) - f(x_0)|| = ||C - C|| = 0.$$

Per tant, com que l'aplicació constant i igual a zero és lineal i contínua l'Observació 2.27 ens diu que f és diferenciable en x_0 i que $f'(x_0) = 0$.

Exemple 2.31. Si $f : X \to Y$ és una aplicació lineal i contínua aleshores f és diferenciable i la seva aplicació derivada és

$$f'(x) = f \quad \text{per a tot } x \in X.$$

Efectivament, notem que per a tot $x_0 \in X$

$$||f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)|| = 0.$$

Per tant, com que $f \in \mathscr{L}(X, Y)$ l'Observació 2.27 ens diu que f és diferenciable en x_0 i que $f'(x_0) = f$.

Cal remarcar que en aquest exemple, malgrat que f és una aplicació lineal, l'estem considerant com un punt de $\mathscr{L}(X, Y)$ i per tant l'aplicació derivada f' és constant.

Teorema 2.32 (Regla de la cadena)**.** *Siguin X, Y i Z espais de Banach, U un obert de X i V un obert de Y. Considerem dues aplicacions contínues*

$$f : U \to X, \quad g : V \to Z$$

i un punt $x_0 \in U$. Suposem que $f(x_0) \in V$ i per tant existeix algun obert U' tal que l'aplicació composada

$$h = g \circ f : U' \to Z$$

està ben definida.

Aleshores, si f és diferenciable en x_0 i g és diferenciable en $f(x_0)$ l'aplicació h és diferenciable en x_0 i la seva derivada en x_0 és

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

És a dir que $h'(a) \in \mathscr{L}(X, Z)$ és la composició de l'aplicació $f(x_0) \in \mathscr{L}(X, Y)$ amb l'aplicació $g(f(x_0)) \in \mathscr{L}(Y, Z)$.

Demostració. Anomenem $\tilde{f} = f'(x_0)$ i $\tilde{g} = g'(f(x_0))$. Notem que podem reescriure f i g de la següent manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \tilde{f}(x - x_0) + \varphi(x - x_0) \\ g(y) &= g(f(x_0)) + \tilde{g}(y - f(x_0)) + \psi(y - f(x_0)), \end{aligned}$$

on, per la diferenciablitat de f i de g, $||\varphi(x - x_0)|| = o(||x - x_0||)$ i $||\psi(y - f(x_0))|| = o(||y - f(x_0)||)$. Així doncs,

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) &= \tilde{g}(f(x) - f(x_0)) + \psi(f(x) - f(x_0)) \\ &= \tilde{g}\big[\tilde{f}(x - x_0) + \varphi(x - x_0)\big] + \psi(f(x) - f(x_0)) \\ &= \tilde{g}\big[\tilde{f}(x - x_0)\big] + \tilde{g}\big[\varphi(x - x_0)\big] + \psi(f(x) - f(x_0)). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.33. *Siguin X i Y espais de Banach i U un obert de X. Si $f : U \to Y$ és una aplicació diferenciable en $x_0 \in U$ aleshores per a cada $\lambda \in X$ l'aplicació $k(x) = \lambda f(x)$ també és diferenciable en x_0 i la seva derivada és*

$$k'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

A més, si $g : U \to Y$ és una altra aplicació diferenciable en x_0 aleshores l'aplicació $h(x) = f(x) + g(x)$ també és diferenciable en x_0 amb derivada

$$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

En altres paraules, el conjunt de les funcions diferenciables en x_0, V_{x_0} és un subespai de l'espai de funcions de U en Y, i la derivació és una aplicació lineal entre V_{x_0} i $\mathscr{L}(X, Y)$.

Demostració. Tenim que

$$||f(x) - f(x_0) - [f'(x_0)](x - x_0)|| = o(||x - x_0||)$$

i que

$$||g(x) - g(x_0) - [g'(x_0)](x - x_0)|| = o(||x - x_0||).$$

Així doncs, k és diferenciable en x_0 amb derivada $\lambda f'(x_0)$ ja que

$$\begin{aligned} ||\lambda f(x) - \lambda f(x_0) - \lambda[f'(x_0)](x - x_0)|| &= |\lambda| \, \big|\big|f(x) - f(x_0) - [f'(x_0)](x - x_0)\big|\big| \\ &= o(||x - x_0||). \end{aligned}$$

A més, h és diferenciable en x_0 amb derivada $f'(x_0) + g'(x_0)$ ja que per la desigualtat triangular tenim que

$$||f(x) + g(x) - f(x_0) + g(x_0) + [f'(x_0) + g'(x_0)](x - x_0)||$$

està acotat per

$$||f(x) - f(x_0) - [f'(x_0)](x - x_0)|| + ||g(x) - g(x_0) - [g'(x_0)](x - x_0)||,$$

que és una suma de termes que són $o(||x - x_0||)$. □

2.6.2 Derivades parcials en un producte d'espais de Banach

Ara presentem el concepte de derivada parcial d'una funció amb diverses variables. Durant la resta de la secció suposarem que X és un producte d'espais de Banach:

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

i que U és un obert de X.

Definició 2.34. *Sigui $f : U \to Y$ una aplicació contínua i per a cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ considerem la injecció $\lambda_i : X_1 \to X$ definida per*

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

*La composició $f \circ \lambda_i$ definida a l'obert $(\lambda_i)^{-1}(U) \subseteq X_i$ que conté a_i s'anomena la **i-ésima aplicació parcial** de f en el punt a.*

Proposició 2.35. *Sigui $f : U \to Y$ una aplicació diferenciable en un punt a aleshores l'aplicació parcial $f \circ \lambda_i$ és diferenciable en a per a tot $1 \leq i \leq n$. A més, si denotem la derivada de $f \circ \lambda_i$ en a per $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ tenim que*

$$\left[f'(a)\right](h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)\right](h_i) \tag{2.2}$$

Demostració. Notem que la inclusió canònica $\iota_i : X_i \to X$ definida com

$$\iota_i(x_i) = (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$$

és lineal i contínua. A més, podem expressar les injeccions λ_i's a partir de les ι_i's

$$\lambda_i(x_i) = a + \iota_i(x_i - a_i).$$

En combinar aquesta última expressió amb els Exemples 2.30 i 2.31 obtenim que, per a tot $x_i \in X_i$,

$$\lambda_i'(x_i) = \iota_i.$$

Ara com que f és diferenciable en a per la regla de la cadena tenim que $f \circ \lambda_i$ és diferenciable en a_i i la seva derivada és $f'(a) \circ \iota_i$.

Per acabar, si denotem per π_i les projeccions canòniques tenim la igualtat següent:

$$\sum_{i=1}^{n} \iota_i \circ \pi_i = \mathrm{Id}_X$$

i per la linealitat de $f'(a)$ tenim que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f'(a) \circ \iota_i\right) \circ \pi_i = f'(a).$$

D'on clarament es desprèn la fórmula (2.2). $\square$

Definició 2.36. *Sigui f una aplicació diferenciable en un punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Llavors, anomenarem a les derivades de les aplicacions parcials $f \circ \lambda_i$ les **derivades parcials** de f respecte de x_i. Malgrat que hi ha moltes formes de denotar les derivades parcials, nosaltres utilitzarem únicament les formes $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ i $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, \ldots, a_n)$.*

Acabem aquesta secció presentant dos teoremes, la demostració dels quals es pot trobar a [1].

Teorema 2.37. *Sigui* $X_1, \ldots, X_n$ *i* Y *espais de Banach,* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$*,* U *un obert de* X *i* $f : U \to Y$ *una aplicació contínua. Aleshores per tal que* f *sigui de classe* C^1 *és suficient que existeixin totes les derivades parcials*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f : U \to \mathscr{L}(X_i, Y), \quad 1 \leq i \leq n,$$

i que siguin funcions contínues.

Teorema 2.38 (Teorema de la Funció Implícita)**.** *Siguin* X, Y *i* Z *tres espais de Banach,* U *un obert de* $X \times Y$ *i* $f : U \to Z$ *una aplicació de classe* C^1 *de dues variables* $f = f(x, y)$ *on* $x \in X$ *i* $y \in Y$*. Si en un punt* $(a, b) \in U$ *es compleix que*

a) $f(a, b) = 0$,

b) la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial y} f(a, b) \in \mathscr{L}(Y, Z)$ *és un isomorfisme de* Y *en* Z*.*

Aleshores existeix un entorn obert V *de* (a, b) *en* $X \times Y$ *contingut en* U*, un entorn obert* W *de* a *en* X *i una aplicació* $g : W \to Y$ *de classe* C^1 *tals que si* $x \in W$ *aleshores* $(x, g(x)) \in V$ *i* $f(x, g(x)) = 0$*.*

Notació 1. *Com que si* $f : X \to Y$ *és una aplicació entre espais de Banach diferenciable en* a*,* $f'(a) \in \mathscr{L}(X, Y)$ *aleshores a la resta del treball utilitzarem la notació usual per a aplicacions lineals de denotar* $f'(a)x$ *per referir-nos a* $f'(a)(x)$*.*

3 Un exemple d'atractor estrany no caòtic

En aquesta secció veurem que existeixen sistemes dinàmics en els quals apareixen atractors que no són caòtics tals que la seva estructura és "estranya". Comencem per deixar clar a què ens referim al parlar d'un atractor estrany no caòtic (utilitzem la mateixa definició que a [4]).

- Direm que un conjunt compacte $\overline{\Gamma}$ és un **atractor** si existeix algun entorn de $\overline{\Gamma}$ on tot punt tendeix a $\overline{\Gamma}$ quan el temps tendeix a infinit.

  La **conca d'atracció** d'un atractor és la clausura del conjunt de condicions inicials que tendeixen a l'atractor quan el temps tendeix a infinit.

- Direm que un atractor és **caòtic** si l'exponent de Lyapunov més gran en la conca d'atracció és positiu. Aquí estem suposant que l'exponent de Lyapunov més gran és el mateix gairebé per a totes les condicions inicials.

- Direm que un atractor és **estrany** si no és ni un conjunt finit de punts ni una corba diferenciable a trossos.

Ara veurem l'exemple proposat a [9]. Considerem el sistema dinàmic generat en iterar una funció $T : [0, \infty) \times \mathbb{T} \to [0, \infty) \times \mathbb{T}$ definida per l'expressió:

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto f(x)g(\theta), \\ \theta \mapsto \theta + \omega, \end{array}\right\}$$

on $\omega \notin 2\pi\mathbb{Q}$, $g : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ és una funció contínua i $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ és una funció de classe C^1 acotada tal que $f(0) = 0$. També demanarem que f sigui estrictament còncava, és a dir, que $f'(x)$ sigui una funció positiva estrictament decreixent.

Si no hi ha risc de confusió denotarem $(x_n, \theta_n) = T^n(x, \theta)$, és a dir, que si π_1 i π_2 denoten les projeccions canòniques de $[0, \infty) \times \mathbb{T}$ en $[0, \infty)$ i $\mathbb{T}$ respectivament, aleshores

$$x_n = x_n(x, \theta) = \pi_1 \circ T^n(x, \theta) \qquad \text{i} \qquad \theta_n = \theta_n(x, \theta) = \pi_2 \circ T^n(x, \theta).$$

A més, com que T es diferenciable respecte de x i π_1 és diferenciable, fixat n té sentit pensar en la derivada parcial de x_n respecte de x que denotarem per

$$L_n(x, \theta) := \frac{\partial}{\partial x} x_n = \prod_{k=0}^{n-1} f'(x_k) g(\theta + k\omega).$$

Aquesta última igualtat és fàcilment demostrable per inducció, ja que si $n > 0$

$$x_n = f(x_{n-1}) g(\theta_{n-1})$$

i, per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x} x_n = f'(x_{n-1}) g(\theta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x} x_{n-1}.$$

Observem que $L_n(x, \theta)$ està íntimament relacionat amb l'exponent de Lyapunov ja que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(x, \theta) &:= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln L_n(x, \theta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(x_k) \cdot g(\theta + k\omega) \right) \\ &= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big[\ln f'(x_k) + \ln g(\theta + k\omega) \big]. \end{aligned}$$

Per a cada funció mesurable $\psi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$, definim el valor

$$\lambda_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\ d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta.$$

Observem que λ_ψ està ben definida (malgrat que pot valer $-\infty$) ja que tant g com $f' \circ \psi$ són funcions acotades i no es podrà donar la indeterminació $\lambda_\psi = \infty - \infty$.

Notem que si ψ és invariant per T, és a dir, si

$$\psi(\theta + \omega) = f(\psi(\theta))g(\theta), \quad \text{gairebé per a tot } \theta \in \mathbb{T},$$

i suposem que $\lambda(\theta, \psi(\theta))$ existeix gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$, aleshores

$$\begin{aligned} \lambda(\theta, \psi(\theta)) &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ln f'(\psi(\theta + k\omega)) + \ln g(\theta + k\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\ d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta = \lambda_\psi \end{aligned}$$

gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ degut al Teorema Ergòdic de Birkhoff.

Observació 3.1. Notem que la funció $\psi(\theta) = 0$ per a tot θ sempre és invariant per T ja que $f(0) = 0$. Ara bé, nosaltres estarem més interessats en funcions invariants que no valgin 0 en algun conjunt de mesura positiva.

Finalment, definim el valor

$$\sigma := f'(0) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta \right).$$

Notem que per ser g una funció acotada, la integral està ben definida, malgrat que potser val $-\infty$ (per exemple, si $g(\theta) = 0$ en un conjunt de mesura positiva). En aquest cas, és natural definir $\sigma = 0$.

Ara començarem a decriure el comportament de les funcions invariants. Primer, veurem un lema de teoria de la mesura que utilitzarem més endavant. Després, veurem condicions suficients per assegurar que una funció invariant és atractora i amb exponent de Lyapunov negatiu.

Lema 3.2. *Sigui $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espai de probabilitat, $T : X \to X$ una transformació que preserva la mesura μ i $f : X \to \mathbb{R}$ una funció mesurable. Si la funció $f \circ T - f$ té algun minorant $g \in L^1_\mu(X)$, aleshores $f \circ T - f \in L^1_\mu(X)$ i*

$$\int (f \circ T - f)\ d\mu = 0.$$

Demostració. Sigui $f_n := \max(\min(f, n), -n)$. Clarament

$$\begin{aligned} 0 \le f_n \circ T - f_n \le f \circ T - f \quad &\text{al conjunt } \{f \circ T - f \ge 0\} \text{ i} \\ 0 \ge f_n \circ T - f_n \ge f \circ T - f \quad &\text{al conjunt } \{f \circ T - f \le 0\}. \end{aligned}$$

Així doncs, $(f_n \circ T - f_n)_{n>0}$ és una successió de funcions acotades amb un minorant comú $\min(g, 0)$ (ja que g és minorant de f) i convergeix a la funció $f \circ T - f$. Com que T preserva μ, en aplicar el Lema de Fatou obtenim que

$$\int (f \circ T - f)\ d\mu \le \liminf_{n \to \infty} \int (f_n \circ T - f_n)\ d\mu = 0.$$

Això implica que $f \circ T - f \in L^1_\mu(X)$. Finalment, com que per la definició de f_n, $|f_n \circ T - f_n| \leq |f \circ T - f|$, el Teorema de la Convergència Dominada implica que $\int (f \circ T - f)\, d\mu = 0$. $\square$

Lema 3.3. *Sigui $\psi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ una funció mesurable de gràfica invariant per T. Aleshores*

1) ψ està acotada i, o bé $\psi(\theta) = 0$ gairebé pertot, o bé $\psi(\theta) > 0$ gairebé pertot.

2) Si $\psi(\theta) = 0$ gairebé pertot i existeix una successió decreixent i acotada de funcions mesurables $\psi_n : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ tals que $\psi_n(\theta) > 0$ gairebé pertot, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(\theta) = \psi(\theta)$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i tals que $\psi_{n+1}(\theta + \omega) = f(\psi_n(\theta))g(\theta)$ aleshores $\lambda_\psi \leq 0$.

3) Si $\psi(\theta) > 0$ gairebé per a tot θ, aleshores $\lambda_\psi < 0$.

Demostració. Comencem per veure *1)*. En ser f i g funcions acotades deduïm que ψ és una funció acotada. A més, com que $f(0) = 0$ si per a algun $\theta_0 \in \mathbb{T}$ tenim que $\psi(\theta_0) = 0$ aleshores $\psi(\theta_n) = 0$ per a tot $n > 0$. Això implica que el conjunt $E = \{\theta \in \mathbb{T} : \psi(\theta) = 0\}$ és invariant per translacions de longitud ω. Com que ω és irracional, el Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució ens diu que la mesura de E és o bé 0 o bé total.

Pasem a provar *2)*. Observem que la successió de funcions mesurables $(\ln f'(\psi_n(\theta))_n$ és creixent (per la concavitat de f) i convergeix puntualment a $\ln f'(\psi(\theta))$. Així doncs, pel Teorema de la Convergència Monòtona

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f'(\psi_n(\theta))\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\, d\theta.$$

Ara bé, com que $\int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta$ no depèn de ψ si $\lambda_{\psi_n} < 0$ gairebé per a tot θ i tot n, aleshores $\lambda_\psi = \lim_{n\to\infty} \lambda_{\psi_n} \leq 0$. Per tant, només cal veure que $\lambda_{\psi_n} < 0$. Distingim dos cassos.

Si $g(\theta) = 0$ en algun conjunt de mesura positiva aleshores $\lambda_{\psi_n} = -\infty < 0$ per a tot n.

Si $g(\theta) \neq 0$ gairebé per a tot θ, aleshores té sentit escriure $f(\psi_n(\theta)) = \psi_{n+1}(\theta + \omega)/g(\theta)$. A més, com que $f(0) = 0$ i f és estrictament còncava es compleix que $xf'(x) < f(x)$ per a tot $x > 0$. Així doncs, fixat $n \in \mathbb{N}$, com que$\psi_n(\theta) > 0$ gairebé per a tot θ tenim que

$$f'(\psi_n(\theta)) < \frac{f(\psi_n(\theta))}{\psi_n(\theta)} = \frac{\psi_{n+1}(\theta + \omega)/g(\theta)}{\psi_n(\theta)} \leq \frac{\psi_n(\theta + \omega)}{\psi_n(\theta)g(\theta)} \quad \text{gairebé per a tot } \theta.$$

Per tant, en prendre logaritmes obtenim que

$$\ln(f'(\psi_n(\theta))g(\theta) < \ln \frac{\psi_n(\theta + \omega)}{\psi_n(\theta)} \quad \text{gairebé per a tot } \theta.$$

Aquesta acotació ens diu que $\ln(\psi_n(\theta + \omega)/\psi_n(\theta))$ és integrable i que la seva integral val 0 pel Lema 3.2. Finalment obtenim la cota

$$\begin{aligned}
\lambda_{\psi_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f'(\psi_n(\theta))\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta \\
&< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_n(\theta + \omega)}{\psi_n(\theta)}\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\psi_n(\theta + \omega)}{\psi_n(\theta)}\, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Per veure *3)* podem utilitzar el mateix raonament que hem utilitzat en *2)* amb la modificació $\psi_n = \psi$ per a tot n obtenint que $\lambda_\psi < 0$ (ho podem fer ja que $\ln \psi(\theta) > -\infty$ gairebé per a tot θ). $\square$

Observació 3.4. Notem que si ψ és invariant per T i $\psi(\theta) = 0$ gairebé per a tot θ aleshores

$$\begin{aligned}\lambda_\psi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\ d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta = \ln f'(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta \\ &= \ln\left(f'(0) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\ d\theta\right)\right) = \ln \sigma.\end{aligned}$$

És a dir, que en el cas *2)* del lema anterior s'ha de complir que $\sigma \le 1$.

Lema 3.5. *Suposem que $\psi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ és una funció de gràfica invariant per T. Aleshores*

1) *Si $\lambda_\psi < 0$, aleshores $|x_n - \psi(\theta_n)| \to 0$ amb velocitat exponencial gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i per a tot $x > 0$.*

2) *Si $\lambda_\psi = 0$, aleshores $\psi(\theta) = 0$ gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i es compleix que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0,$$

gairebé per a tot θ i per a tot $x \ge 0$.

Demostració. Comencem per veure *1)*. Observem que fixat (x_0, θ_0), si $x \ge \psi(\theta)$ aleshores pel teorema del valor mitjà i la concavitat de f tenim l'acotació

$$\begin{aligned}|x_n - \psi(\theta_n)| &= |f(x_{n-1})g(\theta_{n-1}) - f(\psi(\theta_{n-1}))g(\theta_{n-1})| \\ &= g(\theta_{n-1})\,|f(x_{n-1}) - f(\psi(\theta_{n-1}))| \\ &= g(\theta_{n-1})f'(c_n)|x_{n-1} - \psi(\theta_{n-a})| \\ &\le g(\theta_{n-1})f'(\psi(\theta_{n-1}))|x_{n-1} - \psi(\theta_{n-1})|.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Per tant, inductivament obtenim que

$$|x_n - \psi(\theta_n)| \le |x_0 - \psi(\theta_0)| \prod_{k=0}^{n-1} f'(\psi(\theta_k))g(\theta_k) = L_n(\psi(\theta_0), \theta_0)|x_0 - \psi(\theta_0)|$$

i com que $\lim_{n\to\infty}(1/n)\ln L_n(\psi(\theta_0), \theta_0) = \lambda_\psi < 0$ aleshores $L_n(\psi(\theta_0), \theta_0)$ ha de tendir cap a 0 amb velocitat com a mínim exponencial.

L'argument anterior prova immediatament l'enunciat si $\psi(\theta) = 0$ gairebé per a tot θ. Cal veure que també es compleix si $\psi > 0$ gairebé per a tot θ, només ens resta veure-ho per a $0 < x < \psi(\theta)$. Definim

$$q(x) \coloneqq \frac{xf'(x)}{f(x)}, \quad \text{per a tot } x > 0.$$

Notem que $q : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ és positiva i és contínua per ser quocient de dues funcions contínues i positives. A més, com que

$$\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 0}{f(x) - f(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{f'(0)} = 1$$

podem estendre de forma contínua $q(0) = 1$. Observem que per la concavitat de f es compleix que $f(x) > xf'(x)$, per tant, $0 < q(x) < 1$ per a tot $x > 0$. A més, per la concavitat de f i el teorema del valor mitjà es compleix que

$$\begin{aligned}\frac{\psi(\theta_n) - x_n}{\psi(\theta_{n-1}) - x_{n-1}} &= \frac{f(\psi(\theta_{n-1})) - f(x_{n-1})}{\psi(\theta_{n-1}) - x_{n-1}} g(\theta_{n-1}) \\ &= f'(c_{n-1})g(\theta_{n-1}) \leq f'(x_{n-1})g(\theta_{n-1}) \\ &= q(x_{n-1})\frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}})g(\theta_{n-1}) = q(x_{n-1})\frac{x_n}{x_{n-1}}.\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\frac{\psi(\theta_n) - x_n}{x_n} \leq q(x_{n-1})\frac{\psi(\theta_{n-1}) - x_{n-1}}{x_{n-1}}$$

i inductivament obtenim que

$$|\psi(\theta_n) - x_n| \leq |x_n| \left|\frac{\psi(\theta_0) - x_0}{x_0}\right| \prod_{i=0}^{n-1} q(x_i).$$

Ara bé, si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ llavors $\lim_{n\to\infty} |\psi(\theta_n) - x_n| = 0$, i si $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ aleshores $q(x_n) < 1$ per a tot n, per tant, $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} q(x_i) = 0$ i $|\psi(\theta_n) - x_n|$ també tendeix a 0. Pel que fa a la velocitat exponencial, per la continuïtat de $x \mapsto \ln f'(x)$ i pel Teorema Ergòdic de Birkhoff tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f'(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f'(\psi(\theta_k)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\, d\theta.$$

Per tant,

$$\frac{1}{n}\ln L(x_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f'(\psi(\theta))\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln g(\theta)\, d\theta = \lambda_\psi < 0.$$

Així doncs, podem repetir el mateix procés que en (3.1) canviant el minorant de $f'(c_n)$ per $f'(x_n)$ i obtenint el mateix resultat.

Passem a provar *2)*. Pel Lema 3.3 si $\lambda_\psi = 0$ aleshores $\psi(\theta) = 0$ gairebé per a tot θ. Així doncs, només cal veure que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0,$$

girebé per a tot θ i per a tot $x \geq 0$. Notem que, donat $x_0 \geq 0$, la successió $(x_n)_{n\geq 0}$ està acotada ja que f i g també ho estan, per tant, sigui $M = \max_{n\geq 0} |x_n|$ tenim que per a tot $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M &= \frac{M}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k > \varepsilon\}} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k \leq \varepsilon\}}\right) \\ &\leq \frac{M}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k > \varepsilon\}} + n\varepsilon\right) = \frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k > \varepsilon\}} + M\varepsilon.\end{aligned}$$

Llavors, en definir

$$Z_n = Z_n(\varepsilon) \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k > \varepsilon\}}$$

serà suficient veure que per a tot $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n(\varepsilon)}{n} = 0.$$

Comencem per definir la funció

$$\kappa(x) = \frac{f(x)}{xf'(0)}, \quad \text{per a tot } x > 0.$$

Igual que amb q, podem estendre $\kappa(0) = 1$ de forma contínua i $\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ serà una funció contínua i positiva. A més, per la concavitat estricta de f tenim que $\kappa(x)$ és estrictament decreixent i acotada per 1.

Fixem $\delta > 0$ i definim el conjunt $A_\delta \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : Z_n/n > \delta\}$. Observem que si $n \in A_\delta$ aleshores $Z_n > n\delta$, és a dir, que $\#\{k : x_k > \varepsilon\} > n\delta$. Així doncs, si prenem $n \in A_\delta$, com que κ és decreixent i acotada per 1, tenim que

$$\prod_{i=0}^{n-1} \kappa(x_i) < \kappa(\varepsilon)^{n\delta}. \tag{3.2}$$

Notem que per a qualsevol (x_0, θ_0)

$$x_n = f(x_{n-1})g(\theta_{n-1}) = x_{n-1}\big(\kappa(x_{n-1})f'(0)g(\theta_{n-1})\big),$$

per tant,

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} \kappa(x_i) \prod_{k=0}^{n-1} f'(0)g(\theta_k),$$

i si $n \in A_\delta$ en aplicar (3.2) obtenim que

$$x_n = x_0 \prod_{i=0}^{n-1} \kappa(x_i) \prod_{k=0}^{n-1} f'(0)g(\theta_k) < x_0 \kappa(\varepsilon)^{n\delta} L_n(0,\theta_0).$$

Com que per hipòtesi $\lambda(0,\theta) = \lambda_\psi = 0$ gairebé per a tot θ, aleshores el creixement (o decreixement) de $L_n(0,\theta)$ no és exponencial. No obstant això, $\kappa(\varepsilon)^{n\delta}$ decreix exponencialment ja que $\kappa(\varepsilon)^\delta < 1$, per tant,

$$\lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} x_n = 0.$$

A més, com que f i g són contínues i g està acotada

$$\begin{aligned}\lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} f(x_n)g(\theta_n) \le \lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} f(x_n) \max_{\theta\in\mathbb{T}} g(\theta) \\ &= f\left(\lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} x_n\right) \max_{\theta\in\mathbb{T}} g(\theta) = f(0) \max_{\theta\in\mathbb{T}} g(\theta) = 0.\end{aligned}$$

Repetint aquest procés i tenint en compte que max és una funció contínua, fixat $N \in \mathbb{N}$ tenim que

$$\lim_{n\in A_\delta, n\to\infty} \max_{0\le j\le N} x_{n+j} = 0.$$

En particular, el límit anterior també és cert per a $N = [\delta^{-1}]$, per tant, existeix algun $n_0 = n_0(x_0, \theta_0, \delta)$ tal que si $n \geq n_0$ i $n \in A_\delta$ aleshores $\max_{0\leq j\leq N} x_{n+j} < \varepsilon$, és a dir, que $Z_{n+j} = Z_n$ per a tot $j \leq N$.

Notem que existeix algun $m \geq n_0$ tal que $m \notin A_\delta$. Efectivament, en cas contrari $n_0 + N \in A_\delta$, cosa que implica que $Z_{n_0+N+j} = Z_{n_0}$ per a tot $j \leq N$. En repetir aquest procés amb $n_0 + kN$ per a tot k obtenim que $Z_n = Z_{n_0}$ per a tot $n \geq n_0$. Això és una contradicció ja que si agafem $m = [Z_{n_0}/\delta] + 1$ aleshores $m\delta > Z_{n_0} = Z_m$ i $m \notin A_\delta$.

Finalment, prenem $n_1 \geq n_0 + N$ tal que $n_1 \in A_\delta$ i $(n_1 - 1) \notin A_\delta$ (si no n'hi ha cap ja hem acabat), i obtenim que

$$Z_{n_1+j} = Z_{n_1} = Z_{n_1-1} + 1 \leq (n_1 - 1)\delta + 1 \leq \begin{cases} 2(n_1 + j)\delta, & \text{si } 0 \leq j < N, \\ (n_1 + j)\delta, & \text{si } j = N. \end{cases}$$

D'aquesta desigualtat podem deduir que per a tot $0 \leq j \leq N$, $Z_{n_1+j} \leq 2(n_1 + j)\delta$. A més, la desigualtat també ens diu que $(n_1 + N) \notin A_\delta$, per tant, podem repetir inductivament aquest argument per a tot $m \in A_\delta$ tal que $m \geq n + N$. Tot plegat, hem vist que per a tot $n \geq n_1$ es compleix que $Z_n \leq 2n\delta$. En conclusió, per a tot $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x_k > \varepsilon\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} \leq 2\delta.$$

□

Observació 3.6. Hem vist que si ψ és una funció invariant per T i $\psi(\theta) > 0$ gairebé per a tot θ aleshores $\lambda_\psi < 0$. No obstant això, la funció $\tilde{\psi}(\theta) = 0$ sempre és de gràfica invariant, per tant, el lema ens diu que $\lambda_{\tilde{\psi}} > 0$. Ara bé, l'Observació 3.4 ens diu que $\lambda_{\tilde{\psi}} = \ln \sigma$, així doncs, si existeix ψ invariant i positiva gairebé pertot llavors $\sigma > 1$.

3.1 Existència d'un atractor estrany no caòtic

Lema 3.7. *Sigui ψ una funció de gràfica invariant per T tal que $\lambda_\psi \leq 0$. Aleshores $\lambda(x, \theta) = \lambda_\psi$ gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i tot $x > 0$. A més, si $\tilde{\psi}$ és una altra funció de gràfica invariant aleshores $\tilde{\psi}(\theta) = 0$ o $\tilde{\psi}(\theta) = \psi$ gairebé per a tot θ.*

Demostració. Pel Lema 3.5, si $x > 0$ llavors $|x_n - \psi(\theta_n)| \to 0$ gairebé per a tot θ, per tant, com que $\ln f'(x)$ és una funció contínua tenim que

$$\lambda(x, \theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln L(x, \theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln L(\psi(\theta), \theta) = \lambda_\psi$$

gairebé per a tot θ i tot $x > 0$.

Sigui ara $\tilde{\psi}$ una funció invariant per T i tal que $\tilde{\psi} \neq 0$ en algun conjunt de mesura positiva, pel Lema 3.3 sabem que $\tilde{\psi} > 0$ gairebé per a tot θ. En utilitzar de nou el Lema 3.5 i el Teorema Ergòdic de Birkhoff obtenim la igualtat, vàlida gairebé per a tot θ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{\psi}(\theta) - \psi(\theta)| \, d\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{\psi}(\theta_k) - \psi(\theta_k)| = 0.$$

És a dir que $\tilde{\psi} = \psi$ gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$. □

Teorema 3.8. *Existeix una funció semicontínua superiorment $\phi : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ invariant per T tal que:*

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_k - \phi(\theta_k)| = 0 \quad \textit{gairebé per a tot } \theta \textit{ i tot } x > 0.$$

(ii) Si $\sigma \leq 1$, aleshores $\phi \equiv 0$ i $\lambda(x,\theta) = \lambda_\phi$ gairebé per a tot θ i tot $x \geq 0$.

(iii) Si $\sigma > 1$, aleshores $\phi(\theta) > 0$ i $\lambda(x,\theta) = \lambda_\phi$ gairebé per a tot θ i tot $x > 0$. A més,

(a) Si existeix un $\theta_0 \in \mathbb{T}$ tal que $g(\theta_0) = 0$, aleshores el conjunt $\{\theta : \phi(\theta) > 0\}$ és escàs i ϕ és discontinua gairebé per a tot θ,

(b) Si $g(\theta) > 0$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$, aleshores $\phi(\theta) > 0$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$. En aquest cas, ϕ és contínua.

(iv) Si $\sigma \neq 1$, aleshores $|x_n - \phi(\theta_n)| \to 0$ amb velocitat exponencial gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i tot $x > 0$.

Demostració. Comencem per veure que existeix una funció ϕ semicontínua superiorment i de gràfica invariant. Denotem $M = \sup_{(x,\theta)} f(x)g(\theta)$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$ definim la funció $\psi_n : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ com

$$\phi_n(\theta) = \pi_1 \circ T^n(M, \theta - n\omega).$$

Notem que per ser f i g funcions contínues aleshores T és contínua respecte de x, per tant, ϕ_n és una funció contínua.

Observem que $\pi_1 \circ T^n$ respecta l'ordre de la primera variable, és a dir, que fixat θ_0 si $x \geq y$ aleshores $\pi_1 \circ T^n(x,\theta) \geq \pi_1 \circ T^n(y,\theta)$. Veiem-ho per inducció. Si $n = 0$ és trivialment cert i si $n > 0$

$$\pi_1 \circ T^{n+1}(x,\theta_0) = \pi_1 \circ T^n(f(x)g(\theta_0), \theta_0 + \omega)$$

i com que f és estrictament creixent ja estem.

Ara construirem la funció ϕ desitjada com a límit de la successió $(\phi_n)_n$, però primer hem de comprovar que convergeixi. Per a tot $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n compleix que

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1} &= \pi_1 \circ T^{n+1}(M, \theta - (n+1)\omega) \\
&= \pi_1 \circ T^n(T(M, \theta - (n+1)\omega)) \\
&= \pi_1 \circ T^n(f(M)g(\theta - (n+1)\omega), \theta - n\omega).
\end{aligned}$$

Notem que per l'elecció de M, tenim que $f(M)g(\theta - (n+1)\omega) \leq M$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$. Així doncs, com que $\pi \circ T^n$ respecta l'ordre de la primera variable tenim que

$$\phi_{n+1}(\theta) = \pi_1 \circ T^n(f(M)g(\theta - (n+1)\omega), \theta - n\omega) \leq \pi_1 \circ T^n(M, \theta - n\omega) = \phi_n.$$

Per tant, com que $(\phi_n)_n$ és una successió decreixent de funcions contínues acotada inferiorment aleshores ha de convergir puntualment. Per tant, definim

$$\phi(\theta) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \phi_n(\theta) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(\theta)$$

i com que ϕ és l'ínfim d'una successió decreixent de funcions contínues haurà de ser semicontínua superiorment.

Per acabar, observem que ϕ és invariant per T ja que

$$\begin{aligned} f(\phi(\theta))g(\theta) &= \lim_{n\to\infty} f(\phi_n(\theta))g(\theta) = \lim_{n\to\infty} \pi_1 \circ T(\phi_n(\theta), \theta) \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi_1 \circ T(T^n(M, \theta - n\omega)) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(\theta + \omega) \\ &= \phi(\theta + \omega). \end{aligned}$$

L'afirmació *(i)* és clara ja que el Lema 3.3 implica que $\lambda_\phi \le 0$. Ara el Lema 3.5 ens diu que si $\lambda_\phi < 0$ aleshores $|x_n - \phi(\theta_n)| \to 0$ amb velocitat exponencial, per tant, la sèrie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |x_k - \phi(\theta_k)|$$

és convergent, i si $\lambda_\phi = 0$ (cosa que passa només si $\phi(\theta) = 0$ gairebé pertot) el propi Lema 3.5 ens diu que *(i)* es compleix. Per a provar la resta d'afirmacions distingirem cassos en funció de σ.

Si $\sigma \le 1$ l'Observació 3.6 ens diu immediatament que $\phi(\theta) = 0$ gairebé per a tot θ i com que ϕ és semicontínua $\phi \equiv 0$. A més, el Lema 3.7 implica que $\lambda(x, \theta) = \lambda_\phi$ gairebé per a tot θ i tot $x > 0$. Òbviament $\lambda(x, \theta) = \lambda_\phi$ també és cert si $x = 0$.

Si $\sigma > 1$ i si $\phi(\theta)$ fos 0 gairebé per a tot θ aleshores el Lema 3.3 implicaria que $\lambda_\phi < 0$, però llavors l'Observació 3.4 ens diria que $\lambda_\phi = \ln \sigma \le 1$, cosa que és una contradicció. Així doncs, $\phi(\theta) > 0$ gairebé per a tot θ. Igual que abans, el Lema 3.7 també implica que $\lambda(x, \theta) = \lambda_\phi$ gairebé per a tot θ i tot $x > 0$.

El cas *(a)* el podem deduir del fet que ϕ és semicontínua superiorment, per tant, per a tot $\varepsilon > 0$ els conjunts de la forma $\phi^{-1}[0, \varepsilon)$ han de ser oberts. Així doncs, el conjunt $\phi^{-1}(0)$ és una intersecció d'oberts. Si $g(\theta_0) = 0$ per a algun θ_0 aleshores per a tot $n \ge 1$ tenim que $\phi(\theta_n) = 0$ (ja que $f(0) = 0$). Però com que $(\theta_n)_n$ és una successió densa en $\mathbb{T}$ i per a cada $\varepsilon > 0$, $\theta_n \in \phi^{-1}[0, \varepsilon)$ aleshores els conjunts $\phi^{-1}[0, \varepsilon)$ són tots densos en $\mathbb{T}$. Així doncs, $\phi^{-1}(0) = \{\theta : \phi(\theta) = 0\}$ es pot escriure com una intersecció numerable d'oberts densos, això implica que el seu complementari, $\mathbb{T} \setminus \{\theta : \phi(\theta) = 0\} = \{\theta : \phi(\theta) > 0\}$ és una unió numerable de conjunts enlloc densos. És a dir, que $\{\theta : \phi(\theta) > 0\}$ és escàs.

Que ϕ és totalment discontinua és clar a partir del fet que $\phi(\theta) > 0$ gairebé pertot però val 0 en un conjunt dens.

Anem a veure *(b)*. Suposem que $g(\theta) > 0$ per a tot θ cosa que implica que $\theta \mapsto \ln g(\theta)$ és contínua. Així doncs, el Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln L_n(0, \theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\big(f'(0)g(\theta_k)\big) = \lambda(0, \theta) = \ln \sigma > 0$$

i la convergència és uniforme. Per tant, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n_0}(0, \theta) > \sigma^{n_0/2} > 1$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i per continuïtat existeix $\delta > 0$ tal que $L_{n_0}(x, \theta) > \sigma^{n_0/2} > 1$ per a tot $0 \le x \le \delta$. Ara podem utilitzar el teorema del valor mitjà per obtenir que existeix $0 \le c_\delta \le \delta$ tal que

$$|\pi_1 \circ T^{n_0}(\delta, \theta) - \pi_1 \circ T^{n_0}(0, \theta)| = L_{n_0}(c_\delta, \theta)|\delta - 0|.$$

Tot plegat obtenim que $\pi_1 \circ T^{n_0}(\delta, \theta) > \delta$.

Igual que hem fet abans, per a tot $n \geq 0$ definim les funcions $\psi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$, tals que

$$\psi_n(\theta) = \pi_1 \circ T^n(\delta, \theta - n\omega).$$

Hem vist que $\psi_{n_0}(\theta) > \delta = \psi_0$ i com que $\pi_1 \circ T$ respecta l'ordre de la primera variable, $(\psi_{jn_0})_{j \geq 0}$ és una successió creixent de funcions acotades superiorment per M. Pel mateix raonament que hem utilitzat per definir ϕ, la funció

$$\psi(\theta) = \lim_{j \to \infty} \psi_{jn_0}(\theta)$$

és positiva gairebé per a tot θ i invariant per T. De fet, si fixem k i considerem la successió $(\psi_{k+jn_0})_{j \geq 0}$ tenim que

$$\psi_{k+jn_0}(\theta) \coloneqq \pi_1 \circ T^k(\psi_{jn_0}(\theta - k\omega), \theta - k\omega),$$

però com que T^k és una funció contínua la successió $(\psi_{k+jn_0})_{j \geq 0}$ convergeix puntualment a ψ. Així doncs, hem vist que

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(\theta) = \psi(\theta).$$

Aquest límit implica que existeix $N > n_0$ tal que $|\lambda_\psi - \lambda_{\psi_N}| < \frac{1}{2}\lambda_\psi$. Utilitzant de nou el Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució obtenim que existeix $n_1 > N$ tal que per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i $x \geq \psi(\theta)$,

$$\frac{1}{n} \ln L(x, \theta) \leq \frac{1}{n} \ln L(\psi_N(\theta), \theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(f'(\psi_N(\theta_k)) g(\theta_k) \right) < \frac{1}{2}\lambda_\psi < 0.$$

Per tant, la successió de funcions contínues $(\psi_n)_{n \geq n_1}$ convergeix uniformement a ψ i ψ ha de ser contínua. Finalment, el Lema 3.7 implica que $\psi(\theta) = \phi(\theta)$ gairebé per a tot θ, però com que ϕ és semicontínua i ψ és contínua aleshores ϕ ha de ser contínua.

Finalment, si $\sigma \neq 1$ aleshores podem deduir que $\lambda_\phi < 0$ del Lema 3.3 i de l'Observació 3.4 i del Lema 3.5 en podem extreure *(iv)*. □

3.2 Aplicació

El cas que més ens interessa del Teorema 3.8 és *3(a)*. En aquest cas designem per ϕ la funció invariant per T i Γ la gràfica de ϕ. Aleshores, $\overline{\Gamma}$ és un atractor ja que conté el conjunt $\{(\theta, x) : x = 0\}$ i gairebé per a tot θ i per a tot $x > 0$ tenim que $|x_n - \phi(\theta_n)| \to 0$, és a dir, que $\overline{\Gamma}$ és el ω-límit gairebé pertot. També sabem que el comportament en Γ no és caòtic ja que gairebé per a tot $(x, \theta) \in \Gamma$ l'exponent de Lyapunov en la direcció θ és 0 i en la direcció x és $\lambda(x, \theta) = \lambda_\phi < 0$. Finalment, com que $\phi(\theta)$ és una funció discontínua gairebé per a tot θ, l'estructura de Γ és estranya. Així doncs, $\overline{\Gamma}$ és un atractor estrany no caòtic.

Ara posarem en pràctica el Teorema 3.8 amb un cas concret. Considerem el sistema

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha \tanh(x) \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

on $x \in [0, \infty)$, $\theta \in \mathbb{T}$ i $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Notem que en aquest cas $\alpha \tanh(x)|_{[0,\infty)} [0, \infty) \to [0, \infty)$ és una funció C^∞ acotada i còncava i que $\sin(\theta/2) : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ és contínua (malgrat que no és diferenciable), per tant podem aplicar el Teorema 3.8. Per saber en quin cas estem, hem de calcular

$$\sigma = \alpha \tanh'(0) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\, d\theta\right).$$

Observem que $\tanh'(0) = 1 - \tanh(0)^2 = 1$ i que la integral és convergent. Ara calculem la integral, notem que

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\, d\theta = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\ 2dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ dt.$$

Ara bé,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\ dt.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cos t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2\sin t\cos t}{2}\right)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) - \ln 2\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t')\ dt' - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t')\ dt' - \frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Així doncs, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ i $\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\ d\theta = -2\pi \ln 2$, és a dir que

$$\sigma = \alpha \exp\left(\frac{1}{2\pi}(-2\pi\ln 2)\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

En conclusió, el Teorema 3.8 ens diu que:

- si $\alpha < 2$, l'origen és un atractor global (amb velocitat exponencial),
- si $\alpha = 2$, l'origen és un atractor global (no sabem amb quina velocitat),
- si $\alpha > 2$, el sistema presenta un atractor estrany no caòtic (amb velocitat exponencial).

A continuació dibuixarem l'atractor $\phi(\theta)$ en cada cas ($\alpha = 1.99, 2, 2.01$).

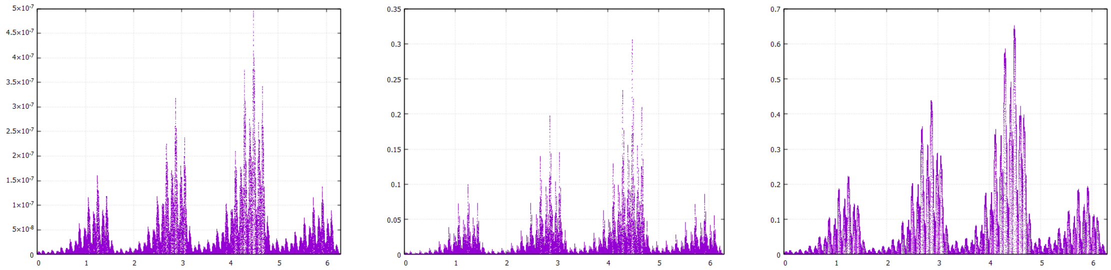
Notem que $\alpha \tanh(x)\sin(\theta/2) \in [0, \alpha)$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ i tot $x \geq 0$, per tant, el valor de x que està més a prop de tots els altres punts és $\alpha/2$ amb el qual podem acotar la distància a $\phi(\theta)$ per $\alpha/2$ (que és aproximadament 1).

Com que si $\alpha < 2$ l'exponent de Lyapunov és $\ln\sigma$ aleshores podem acotar el nombre d'iteracions per a assegurar que els nostres punts estan a una distància controlada de l'atractor. Així doncs, si $\alpha = 1.99$ aleshores $\lambda_\phi = \ln(0.995)$, és dir, que de mitjana, la distància entre punts es multiplica per $e^{\ln(0.995)} = 0.995$. Per tant, podem predir que per a una tolerància de 10^{-6} el nombre d'iteracions necessari sigui

$$\log_{0.995}(10^{-6}) = \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(0.995)} \approx 2756.19,$$

que aproximarem a 3000 iteracions.

En el cas $\alpha > 2$ no sabem explícitament l'exponent de Lyapunov. No obstant, sabem que gairebé per a totes les circumstàncies inicials l'exponent de Lyapunov és el mateix, per tant, el podem computar. Prenem $\alpha = 2.01$ i numèricament obtenim que $\lambda_\phi \approx -0.01$, és a dir, que a cada iteració la distància es multiplica per $e^{-0.01} \approx 0.99$. Com que aquest exponent és inferior al del cas anterior seguirem amb 3000 iteracions.



(a) $\alpha = 1.99$ (b) $\alpha = 2$ (c) $\alpha = 2.01$

Figura 1: Gràfica de ϕ (eix y) en funció de θ (eix x) per a diferents valors de α. En els tres cassos hem pres 10^5 punts distribuïts uniformement a $[0, 2\pi)$ i hem descartat les primeres 3000 iteracions.

A la Figura 1 podem veure que les tres gràfiques són molt semblants malgrat que les unitats de la gràfica (a) són molt més petites que les de les gràfiques (b) i (c). En aquest punt recalquem que el Teorema 3.8 implica que l'atractor de (a) i de (b) és l'origen mentre que (c) presenta un atractor estrany no caòtic.

Aquest exemple mostra clarament la dificultat de catalogar correctament un atractor estrany no caòtic.

4 Productes esbiaixats lineals

Un dels mètodes per a arribar a un atractor estrany no caòtic és que una corba atractora que depèn d'un paràmetre s'arrugui en fer tendir aquest paràmetre a un valor límit en el qual la corba perd la seva regularitat i es converteixi en un atractor estrany no caòtic, a aquest procés el denominarem fractalització. Nosaltres voldrem emular aquest comportament trobant un exemple en el qual una corba atractora es fractalitza en variar un paràmetre amb la diferència que la nostra corba no perdrà la regularitat al passar de atractora a repulsora (no deixarà pas a un atractor estrany no caòtic). El problema més important a discutir és sota quines condicions podem assegurar que la corba atractora no ha perdut la seva regularitat, és a dir, sota quines condicions podem continuar la corba.

En aquesta secció farem el primer pas en l'estudi de la continuació de corbes: estudiarem els sistemes forçats quasiperiòdicament lineals. La importància d'aquests sistemes és que descriuen el comportament local de sistemes més generals. Els resultats d'aquesta secció els utilitzarem a la Secció 5 on discutirem la continuació de corbes atractores. Els resultats d'aquesta secció i de les següents provenen de [3] i de [7].

4.1 Conjugacions lineals i reduïbilitat

Comencem per definir el concepte clau d'aquesta secció, els productes esbiaixats lineals, que són les funcions que en ser iterades generen sistemes forçats quasiperiòdicament lineals.

Definició 4.1. *Un* ***producte esbiaixat lineal*** *és una funció $T_a : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ de la forma*

$$\left.\begin{aligned} x &\mapsto a(\theta)x, \\ \theta &\mapsto \theta + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

on suposarem que $a : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ és una funció prou regular i que $\omega \notin 2\pi\mathbb{Q}$. En aquest treball no considerarem el cas trivial, $a \equiv 0$.

Definició 4.2. *Dos productes esbiaixats lineals T_a i T_b es diu que són* ***linealment conjugats*** *si, i només si, existeix un canvi de variables (potser complex)*

$$H(x, \theta) = (c(\theta)x, \theta)$$

on $c(\theta)$ és una funció contínua i diferent de 0 per a tot θ i tal que

$$H^{-1} \circ T_a \circ H = T_b.$$

Per facilitat de llenguatge ens referirem a $c(\theta)$ com a canvi de varibles per referir-nos a $H(x, \theta)$.

Definició 4.3. *Si un producte esbiaixat lineal T_a està linealment conjugat amb un altre producte esbiaixat de la forma $T_b(x, \theta) = (bx, \theta + \omega)$ on b no depèn de θ direm que T_a és* ***reduïble****.*

Proposició 4.4. *Donats dos productes esbiaixat lineals T_a i T_b tals que a i b són funcions de classe C^∞ i assumint la condició diofàntica: existeixen $\gamma > 0$ i $\tau \geq 1$ tals que*

$$|q\omega - 2\pi p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau}, \quad \textit{per a tot } (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{4.2}$$

Aleshores existeix una funció c de classe C^∞ estrictament positiva tal que el canvi de variables $x = c(\theta)y$ conjuga linealment T_a amb T_b si, i només si, es compleix que

1) $\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$ *es pot estendre a una funció de classe C^∞ estrictament positiva per a tot $\theta \in \mathbb{T}$,*

2)
$$\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)}\, d\theta = 0.$$

Demostració. Suposem que *1)* i *2)* es compleixen. Considerem la sèrie de Fourier de $\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\theta},$$

on
$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} e^{-ik\theta}\, d\theta.$$

Notem que *2)* implica que $\alpha_0 = 0$. Com que $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ és C^∞ aleshores $\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ també ho és. Això vol dir que els coeficients α_k han de tenir un decaïment ràpid, és a dir, que per a tot $r \geq 0$ existeix $\varepsilon_r \in \mathbb{R}$ tal que
$$|\alpha_k| \leq \frac{\varepsilon_r}{|k|^r}.$$

Ara definim els nous coeficients

$$c_k = \frac{\alpha_k}{\exp(ik\omega) - 1},$$

com que c_0 no està ben definit prenem $c_0 = 0$. Per la condició diofàntica (4.2) sabem que els coeficients c_k compleixen que

$$|c_k| \leq |\alpha_k| \frac{|k|^\tau}{\gamma},$$

i clarament el ràpid decaïment dels coeficients α_k implica un ràpid decaïment dels coeficients c_k. Així doncs, la sèrie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| e^{ik\theta}$ convergeix uniformement i podem definir la funció 2π-periòdica
$$L(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta}.$$

Notem que el decaïment dels coeficients c_k també implica que $L \in C^\infty$. Ara fixem-nos que per construcció
$$\alpha_k = c_k e^{ik\omega} - c_k$$
i per tant (la sèrie α_k convergeix ja que $\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} \in C^\infty(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$)

$$\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = L(\theta + \omega) - L(\theta).$$

Finalment prenem $c(\theta) = \exp(L(\theta))$ que és una funció de classe C^∞ i estrictament positiva i tenim que
$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \exp(L(\theta + \omega) - L(\omega)) = \frac{c(\theta + \omega)}{c(\theta)}.$$

Per tant, $c(\theta)$ és la funció que volíem.

Ara suposem que $c : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ és una funció estrictament positiva i de classe C^∞ tal que el canvi de variables $c(\theta)$ és una conjugació lineal T_a amb T_b. Notem que això implica que la conjungació $H(x, \theta) = (c(\theta), \theta)$ compleix que

$$T_a \circ H = H \circ T_b,$$

és a dir que

$$(a(\theta)c(\theta)x, \theta + \omega) = (c(\theta + \omega)b(\theta)x, \theta + \omega),$$

i podem deduir que

$$b(\theta) = a(\theta)\frac{c(\theta)}{c(\theta + \omega)}.$$

Com que c no s'anul·la a i b comparteixen els mateixos zeros i té sentit considerar el quocient $a(\theta)/b(\theta)$. Per tant tenim la igualtat

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \frac{c(\theta + \omega)}{c(\theta)}. \tag{4.3}$$

Notem que aquesta igualtat prova directament *1)* ja que el terme de la dreta és una funció de classe C^∞ a tot $\mathbb{T}$. A més, en prendre logaritmes obtenim que

$$\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \ln c(\theta + \omega) - \ln c(\theta) \tag{4.4}$$

cosa que prova *2)* ja que la integral de $\ln c(\theta + \omega)$ i de $\ln c(\theta)$ coincideixen. $\square$

Corol·lari 4.5. *Suposem que ω satisfà la condició diofàntica* (4.2) *i que a és de classe C^∞. Aleshores el producte esbiaixat T_a és reduïble si, i només si, a no té cap zero.*

Demostració. Si T_a és reduïble aleshores existeix un canvi de variables $x = c(\theta)y$ que transforma T_a en

$$\left.\begin{aligned} y &\mapsto by, \\ \theta &\mapsto \theta + \omega. \end{aligned}\right\}$$

Com ja hem vist a la proposició anterior això implica que

$$b = a(\theta)\frac{c(\theta)}{c(\theta + \omega)}.$$

Concloem que a no pot tenir zeros ja que si en tingués algun, b seria 0 i a seria idènticament igual a zero.

Ara suposem que a no té zeros i prenem

$$b = \operatorname{sign}(a) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\, d\theta\right).$$

Notem que com que a no s'anul·la, $\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)| > -\infty$ i per tant $b \neq 0$. Observem que

$\frac{a(\theta)}{b}$ és una funció C^∞ positiva. A més,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{b}\ d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln \left|\frac{a(\theta)}{b}\right|\ d\theta = \int_0^{2\pi} \big[\ln|a(\theta)| - \ln|b|\big]\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta - \int_0^{2\pi} \ln|b|\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta - \int_0^{2\pi} \ln\left[\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(t)|\ dt\right)\right]\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta - \int_0^{2\pi} \ln|a(t)|\ dt = 0.
\end{aligned}$$

Així doncs, en aplicar la Proposició 4.4 obtenim que T_a és pot transformar en T_b amb $b(\theta) = b$ per a tot θ, és a dir, que T_a és reduïble.

□

4.2 Forma normal i exponents de Lyapunov

Proposició 4.6. *Suposem que ω satisfà la condició diofàntica* (4.2) *i que a és una funció de classe C^∞ amb una quantitat finita de zeros amb multiplicitat finita. Llavors, si n_0 denota el nombre total de zeros de a comptats amb multiplicitat, existeix un únic polinomi trigonomètric p de grau n_0 tal que el producte esbiaixat lineal T_a està linealment conjugat per un canvi de variables de classe C^∞ a*

$$\left.\begin{aligned} x &\mapsto p(\theta)x, \\ \theta &\mapsto \theta + \omega. \end{aligned}\right\}$$

*Aquest producte esbiaixat és la **forma normal** de T_a.*

Demostració. Sigui p un polinomi de grau n_0 amb els mateixos zeros que a, incloent multiplicitats. Notem que tots els polinomis d'aquest tipus es poden escriure com λp, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Com que a i p comparteixen zeros (amb multiplicitats) podem prendre p tal que $p(\theta)a(\theta) \geq 0$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$. Així doncs, per a tot $\lambda > 0$ el quocient

$$\frac{a(\theta)}{\lambda p(\theta)}$$

es pot estendre a una funció estrictament positiva de classe C^∞ per a tot θ. Això vol dir que si $\lambda > 0$ es compleix la condició *1)* de la Proposició 4.4. Finalment, si volem que es compleixi la condició *2)*, hem de prendre λ tal que

$$\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{\lambda p(\theta)}\ d\theta = \int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{p(\theta)}\ d\theta - 2\pi \ln \lambda = 0.$$

Per tant, per la Proposició 4.4 el canvi de variables que busquem existeix si, i només si,

$$\lambda = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{p(\theta)}\ d\theta\right].$$

□

Ara que ja tenim una idea de com es comporten els productes esbiaixats lineals, fixem-nos en els exponents de Lyapunov. Notem que l'exponent de Lyapunov en un punt (x,θ) del producte esbiaixat T_a és

$$\bar{\lambda}(x,\theta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=0}^{n-1} a(\theta + j\omega) \right|.$$

Ara bè, és clar que en aquest cas $\bar{\lambda}$ no depèn de x i que si el límit superior és un límit, aleshores el Teorema Ergòdic de Birkhoff implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=0}^{n-1} a(\theta + j\omega) \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a(\theta)| \, d\theta$$

gairebé per a tot θ. D'aquí ve la següent definició:

Definició 4.7. *Sigui T_a un producte esbiaixat lineal. Definim **l'exponent de Lyapunov de T_a** com*

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a(\theta)| \, d\theta.$$

Notem que si $a(\theta)$ no s'anul·la, $\ln |a(\theta)|$ és una funció contínua, per tant el Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució ens diu que $\lambda(\theta)$ convergeix uniformement a Λ.

A continuació estudiarem una família de productes esbiaixats lineals T_{a_μ}, l'objectiu és veure com es comporta Λ en funció de μ. El Teorema 4.10 ens dirà que si a és prou suau en funció de μ, aleshores $\Lambda(\mu)$ també és suau en funció de μ excepte quan a presenta algun zero doble, cas on només podem assegurar que Λ és contínua.

En els propers lemes suposarem que $a(\theta,\mu) = a_\mu(\theta)$ és una funció C^∞ respecte de θ i de μ. També suposarem que per a cada $\mu \in \mathbb{R}$ la funció $a(\cdot,\mu)$ té una quantitat finita de zeros, tots simples excepte com a molt un de multiplicitat 2 i anomenarem M al conjunt de valors de μ pels quals $a(\cdot,\mu)$ només té zeros simples.

Lema 4.8. *Suposem que $\mu_0 \in M$. Aleshores existeix $\delta > 0$ tal que si $|\mu - \mu_0| < \delta$, podem escriure a com*

$$a(\theta,\mu) = b(\theta,\mu) \prod_{j=1}^{n} [\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu))],$$

on $2n$ és el nombre de zeros de $a(\cdot,\mu)$ i, si $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, aleshores

1) les funcions ν_j i ϕ_j són de classe C^∞ per a tot j,

2) $|\nu_j(\mu)| < 1$,

3) b és de classe C^∞ per a tot μ i θ,

4) $b(\cdot,\mu)$ no té cap zero.

Demostració. Primer de tot, observem que per a cada parell de valors diferents θ_1 i θ_2 de $\mathbb{T}$ l'expressió

$$\cos\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right) + \cos\left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \pi\right) \tag{4.5}$$

s'anul·la únicament en θ_1 i en θ_2. Així doncs, si definim $\nu_0 = \cos\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right)$ i $\phi_0 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \pi$ la funció $\nu_0 + \cos(\theta - \phi_0)$ només s'anul·la en θ_1 i θ_2. Encara més, si $\theta_1 = \theta_1(\mu)$ i $\theta_2 = \theta_2(\mu)$ són funcions de classe C^∞ aleshores $\nu_0 = \nu_0(\mu)$ i $\phi_0 = \phi_0(\mu)$ també han de ser funcions de classe C^∞.

Ara notem que si θ_0 és un zero de $a(\cdot, \mu_0)$ aleshores com que θ_0 és un zero simple pel Teorema de la Funció Implícita ha d'existir un interval $(\mu_0 - \delta_0, \mu_0 + \delta_0)$, on $\delta_0 > 0$, en el qual aquest zero roman simple. En particular, el zero és una funció de classe C^∞ de μ. Així doncs, M és un conjunt obert. També observem que per ser a contínua $\lim_{\theta \to 0^+} a(\cdot, \mu) = \lim_{\theta \to 2\pi^-} a(\cdot, \mu)$ i per tant el nombre de canvis de signe de $a(\cdot, \mu)$ en $\mathbb{T}$ ha de ser parell.

En ser M obert, podem prendre $\delta > 0$ tal que $I = (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta) \subseteq M$. Com que I és connex i en cap $\mu \in I$ hi ha un zero doble de a aleshores el nombre de zeros de a és constant i igual a un nombre parell, diguem-li $2n$. Agrupem els zeros de $a(\cdot, \mu)$ en n parelles (on la selecció explícita no és important) tals que cada parella és una funció C^∞ de μ. Com ja hem vist, per a cada parella de zeros podem prendre funcions $\nu_j(\mu)$ i $\phi_j(\mu)$ que transformen aquests zeros en zeros de (4.5). Això vol dir que la funció

$$d(\theta, \mu) = \prod_{j=1}^{n} [\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu))]$$

té els mateixos zeros que a i també és C^∞ respecte de μ.

Per últim, definim la funció b com

$$b(\theta, \mu) = \frac{a(\theta, \mu)}{d(\theta, \mu)}.$$

Com que les funcions ν_j i ϕ_j compleixen *1)* i *2)* (els zeros de a son simples per tant $\left|\cos\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right)\right| < 1$) i com que per construcció b compleix *3)* i *4)* ja hem acabat.

□

Lema 4.9. *Suposem que $\mu_0 \notin M$, que el zero doble de $a(\cdot, \mu_0)$ és a $\theta = \theta_0$ i que*

$$\frac{\partial}{\partial \mu} a(\theta_0, \mu_0) \neq 0.$$

Llavors existeix $\delta > 0$ tal que si $|\mu - \mu_0| < \delta$ aleshores

$$a(\theta, \mu) = b(\theta, \mu)\left(\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))\right).$$

A més, per a tot $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, tenim que

1) b és una funció de classe C^∞ de μ i de θ amb zeros simples,

2) les funcions ν i ϕ són de classe C^∞,

3) $\nu(\mu_0) = 1$, $\frac{d}{d\mu}\nu(\mu_0) \neq 0$.

Demostració. Pel Teorema de Preparació de Malgrange ha d'existir una funció q de classe C^∞ en un entorn obert de (θ_0, μ_0) i funcions d_0 i d_1 de classe C^∞ en un entorn de μ_0 tals que $q(\theta_0, \mu_0) \neq 0$, $d_0(\mu_0) = d_1(\mu_0) = 0$ i

$$a(\theta, \mu) = q(\theta, \mu)\left(d_0(\mu) + d_1(\mu)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2\right).$$

Notem que, fixat μ, els zeros de $d_0(\mu) + d_1(\mu)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2$ són a

$$\theta_\pm = \frac{1}{2}\left(-d_1(\mu) \pm \sqrt{d_1(\mu)^2 - 4d_0(\mu)}\right) + \theta_0.$$

Per a ajustar aquests zeros a l'expressió $\nu(\mu)+\cos(\theta-\phi(\mu))$ haurem de definir les funcions

$$\begin{aligned} \nu(\mu) &= \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{d_1(\mu)^2 - 4d_0(\mu)}\right), \\ \phi(\mu) &= \theta_0 - \frac{1}{2}d_1(\mu) - \pi. \end{aligned}$$

Notem que malgrat que $\cos(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\nu(\mu)$ només pren valors reals. Clarament aquestes dues funcions anul·len $\nu(\mu)+\cos(\theta-\phi(\mu))$ en $\theta_\pm$ i en cap altre θ. A més, per ser composició de funcions C^∞ tant $\nu(\mu)$ com $\phi(\mu)$ han de ser C^∞. Ara definim la funció

$$b(\theta, \mu) = \frac{a(\theta, \mu)}{\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))}$$

que és de classe C^∞ i en algun entorn de μ_0 té els mateixos zeros que a llevat del de multiplicitat 2.

Hem vist que *1)* i *2)* es compleixen. Passem a provar *3)*, notem que

$$\frac{\partial}{\partial\mu}a(\theta,\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}b(\theta,\mu)(\nu(\mu)+\cos(\theta-\phi(\mu))) + b(\theta,\mu)\left(\frac{d}{d\mu}\nu(\mu) + \sin(\theta-\phi(\mu))\frac{d}{d\mu}\phi(\mu)\right).$$

Ara bé, per les definicions de ν i de ϕ, sabem que $\nu(\mu_0) + \cos(\theta_0 - \phi(\mu_0)) = 0$ i que $\sin(\theta_0 - \phi(\mu_0)) = 0$. Per tant, en evaluar en $\theta = \theta_0$ i $\mu = \mu_0$ tenim que

$$\frac{\partial}{\partial\mu}a(\theta_0,\mu_0) = b(\theta_0,\mu_0)\frac{d}{d\mu}\nu(\mu_0)$$

i podem concloure que $\frac{d}{d\mu}\nu(\mu_0) \neq 0$. Que $\nu(\mu_0) = 1$ és immediat a partir de la definció de ν. $\square$

El següent teorema ens dirà el comportament de l'exponent de Lyapunov del sistema en funció de μ. Essencialment, Λ és una funció de classe C^∞ de μ exepte quan a té algun zero doble, cas en que només podem assegurar que Λ és C^0.

Teorema 4.10. *Considerem la familia uniparamètrica de sistemes forçats quasiperiòdicament generada al iterar T_{a_μ},*

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= a(\theta,\mu)x, \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned}\right\}$$

on ω compleix la condició diofàntica (4.2), μ pertany a un conjunt obert de $\mathbb{R}$ i a és una funció C^∞ respecte de θ i de μ. També assumim que:

1. *Per a cada μ, $a(\cdot,\mu)$ té un nombre finit de zeros, tots simples llevat de, com a molt, un zero de multiplicitat 2.*

   Anomenarem M al conjunt de valors de μ pel qual tots els zeros de $a(\cdot,\mu)$ son simples.

2. *Si $a(\cdot,\mu)$ té un zero de multiplicitat 2 a $\theta = \theta_0$ quan $\mu = \mu_0$ aleshores*

$$\frac{\partial}{\partial\mu}a(\theta_0,\mu_0) \neq 0.$$

Llavors, l'exponent de Lyapunov $\Lambda(\mu)$ és una funció contínua tal que:

1) Λ és C^∞ en M.

2) Si $\mu_0 \notin M$, aleshores

(a) Si el nombre de zeros de $a(\cdot,\mu)$ creix en passar per μ_0 tenim que

$$\lim_{\mu\to\mu_0^-} \Lambda'(\mu) = -\infty, \qquad i \qquad \lim_{\mu\to\mu_0^+} \Lambda'(\mu) \text{ existeix i és finit.}$$

(b) Si el nombre de zeros de $a(\cdot,\mu)$ decreix en passar per μ_0 tenim que

$$\lim_{\mu\to\mu_0^+} \Lambda'(\mu) \text{ existeix i és finit,} \qquad i \qquad \lim_{\mu\to\mu_0^-} \Lambda'(\mu) = +\infty.$$

Demostració. Sigui $\mu_0 \in M$. Pel Lema 4.8 existeix un entorn de μ_0 on podem escriure a com

$$a(\theta,\mu) = b(\theta,\mu)\prod_{j=1}^{n}[\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu))].$$

Així doncs, l'exponent de Lyapunov del producte esbiaixat ve donat per l'expressió

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|\, d\theta + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu))|\, d\theta.$$

Notem que, per a cada $\tau_2 \in \mathbb{R}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\tau_1 + \cos(\theta-\tau_2)|\, d\theta = \begin{cases} -\ln 2, & \text{si} \quad |\tau_1| \le 1, \\ -\ln 2 + \operatorname{arccosh}|\tau_1|, & \text{si} \quad |\tau_1| \ge 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

En aquest cas el Lema 4.8 també diu que $|\nu_j(\mu)| < 1$, és a dir, que totes les integrals del sumatori valen $-\ln 2$. Observem que $b(\theta,\mu)$ no té cap zero, per tant, $\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|\, d\theta$ convergeix uniformement a una funció C^∞ de μ. Així doncs, ja hem vist que *1)* es compleix.

Ara suposem que $\mu \notin M$. Pel Lema 4.9 existeix un entorn de μ_0 on podem escriure a com

$$a(\theta,\mu) = b(\theta,\mu)[\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))].$$

Per tant, l'exponent de Lyapunov és

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))|\, d\theta.$$

Com que els zeros de b són simples podem aplicar el cas anterior a b per obtenir que $\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|\, d\theta$ ha de ser una funció C^∞ de μ. Observem que el Lema 4.9 també ens diu que $|\nu(\mu)|$ creua 1 quan μ passa per μ_0. Ara bé, la igualtat (4.6) ens diu que Λ és continua però no és diferenciable en μ_0 ja que si prenem $h(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))|\, d\theta$ tenim que

$$\lim_{\nu\to 1^-} \frac{d}{d\nu}h(\mu) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{\nu\to 1^+} \frac{d}{d\nu}h(\mu) = \lim_{\nu\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{\nu(\mu)^2 - 1}} = +\infty$$

Així doncs, el límit quan ν s'apropa a 1 per la dreta de $\frac{d}{d\nu}\Lambda$ ha de ser $+\infty$ mentre que el límit quan ν s'apropa per l'esquerra ha de ser finit. Notem que per la regla de la cadena $\Lambda' = \frac{d\Lambda}{d\nu}\frac{d\nu}{d\nu}$ i que per construcció ν creix quan els zeros de a decreixen i ν decreix quan els zeros de a creixen. Per tant, concloem que es compleix *2)*.

$\square$

Corol·lari 4.11. *Considerem una família de productes esbiaixats T_{a_μ} i suposem que*

1. $a(\cdot, \mu)$ *és reduïble si* $\mu < \mu_0$,
2. $a(\cdot, \mu)$ *té un zero doble a* θ_0 *quan* $\mu = \mu_0$,
3. $\frac{d}{d\mu} a(\theta_0, \mu_0) \neq 0$.

Aleshores existeix un entorn de μ_0 *i una conjugació de classe* C^∞,

$$\begin{aligned} y &= c(\theta, \mu) x \\ \varphi &= \theta - \phi(\mu) \\ \nu &= \nu(\mu), \end{aligned}$$

tal que $\nu(\mu_0) = 1$ *i* $\phi(\mu_0) = \theta_0$ *i que converteix* T_{a_μ} *en*

$$\left. \begin{aligned} &y \mapsto h(\nu)(\nu + \cos\varphi) y, \\ &\varphi \mapsto \varphi + \omega, \end{aligned} \right\} \tag{4.7}$$

on h *és una funció suau que no s'anul·la.*

Demostració. En aplicar el Lema 4.9 i la transformació $\theta = \varphi + \phi(\mu)$ la família obté la forma

$$\left. \begin{aligned} &x \mapsto b(\varphi, \mu)(\nu(\mu) + \cos\varphi) x, \\ &\varphi \mapsto \varphi + \omega, \end{aligned} \right\} \tag{4.8}$$

on la funció $b(\cdot, \mu)$ no té cap zero per a μ's propers a μ_0. A més, el Lema 4.9 també ens proporciona condicions suficients per aplicar el Teorema de la Funció Inversa i definir la funció ν^{-1} (que és C^∞). Així doncs, la transformació $\nu = \nu(\mu)$ és un canvi de variables i obtenim que T_{a_μ} està conjugat amb

$$\left. \begin{aligned} &x \mapsto b(\varphi, \nu)(\nu + \cos\varphi) x, \\ &\varphi \mapsto \varphi + \omega. \end{aligned} \right\}$$

Finalment, per a cada ν utilitzem la Proposició 4.4 per a transformar (4.8) en (4.7) on

$$h(\nu) = \operatorname{sign}(b) \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |b(\varphi, \nu)| \, d\varphi \right].$$

El fet que h és una funció C^∞ es desprèn de l'expressió anterior. Que el canvi de variables és suau ve de la mateixa Proposició 4.4, tenint en compte la dependència amb ν. $\square$

5 Continuació de corbes invariants

Ara deixem els sistemes lineals per estudiar sistemes més generals. Aquí discutirem un mecanisme per continuar corbes invariants sense perdre regularitat. En particular, suposarem que tenim una corba invariant que depèn d'un paràmetre μ i utilitzarem el Teorema de la Funció Implícita (TFI) per a continuar-la.

Considerem la família de sistemes dinàmics forçats quasiperiòdicament

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= f_\mu(x, \theta), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

on $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}$, $\mu \in \mathbb{R}$, ω és tal que $\omega \notin 2\pi\mathbb{Q}$ i $f_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ és una familia de funcions. Malgrat que $f_\mu(x, \theta)$ es referix a una família de funcions de vegades ens serà més fàcil pensar-ho com una funció de tres variables, $f(x, \theta, \mu)$. A més, demanarem que $f(x, \theta, \mu)$ sigui prou regular com per a satisfer totes les condicions que anem demanant.

A l'estudi del sistema (5.1) ens interessarà estudiar corbes de classe C^r invariants, és a dir, corbes tals que

$$u(\theta + \omega) = f_\mu(u(\theta), \theta), \qquad \text{gairebé per a tot } \theta \in \mathbb{T}.$$

Notem que per a cada μ les corbes invariants de classe C^r poden variar.

Aquí incloem un teorema sobre la diferenciablitat de u la prova del qual es pot trobar a [13]. Aquest teorema ens serà important ja que podrem suposar tanta suavitat a u com ens sigui necessària.

Teorema 5.1. *Suposem que el sistema (5.1) conté una corba invariant contínua $u(\theta)$ tal que el seu exponent de Lyapunov més gran en la direcció de les x és negatiu. Llavors, si f és de classe C^r, u també és de classe C^r.*

Finalment, per a estudiar la relació entre les corbes invariants i el paràmetre μ considerem el funcional $F : C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ definit per

$$F(u, \mu)(\theta) = f_\mu(u(\theta), \theta) - u(\theta + \omega). \tag{5.2}$$

Suposarem que en algun punt $\mu = \mu_0$ el sistema (5.1) admet una corba invariant u_{μ_0}. De fet, podem suposar sense perdre generalitat que $\mu_0 = 0$. Notem que per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ es compleix que

$$F(u_0, 0)(\theta) = f_0(u_0(\theta), \theta) - u(\theta + \omega) = 0.$$

En particular, tenim que $(u_0, 0)$ és una solució de l'equació funcional $F(u, \mu) = 0$. Ens interessarà trobar condicions suficients per a poder aplicar el TFI i continuar la corba, és a dir, obtenir una funció $\mu \mapsto u_\mu$ definida en algun entorn obert de $\mu = 0$ tal que $F(u_\mu, \mu) = 0$.

5.1 Diferenciabilitat del funcional F

Per poder aplicar el TFI a F en l'espai de Banach $C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ haurem de comprovar que F és contínuament diferenciable i que $\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, 0)$ és un automorfisme de $C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. A continuació discutim la diferenciablitat de F.

Proposició 5.2. *Els dos funcionals* $G, H : C^r(\mathbb{T},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C^r(\mathbb{R},\mathbb{T})$ *definits per*

$$G(u,\mu)(\theta) = f_\mu(u(\theta),\theta) \quad i \quad H(u,\mu)(\theta) = -u(\theta-\omega)$$

són de classe C^1.

Demostració. Només provarem el resultat per a $r = 0$. Notem que pel Teorema 2.37 només hem de veure que les derivades parcial respecte de u i respecte de μ existeixen per a tot $(u,\mu) \in C^0(\mathbb{T},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ i són contínues.

Comencem per veure la derivada parcial de G respecte de μ. Notem que donat un punt $(u_0,\mu_0) \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ tenim que

$$||G(u_0,\mu)(\theta) - G(u_0,\mu_0)(\theta) - \frac{\partial}{\partial\mu} f(u_0(\theta),\theta,\mu_0)(\mu-\mu_0)|| =$$
$$= ||f(u_0(\theta),\theta,\mu) - f(u_0(\theta),\theta,\mu_0) - \frac{\partial}{\partial\mu} f(u_0(\theta),\theta,\mu_0)(\mu-\mu_0)||,$$

i com que per a cada θ l'expressió anterior és $o(||\mu-\mu_0||)$ (ja que és l'expressió de la derivada parcial de f respecte de μ) ja hem vist que G té derivada parcial respecte de μ. De fet, hem vist que per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mu} G(u_0,\mu_0)\alpha\right](\theta) = \frac{\partial}{\partial\mu} f(u_0(\theta),\theta,\mu_0)\alpha.$$

Aquesta última igualtat ens diu que la derivada parcial de G respecte de μ és contínua si ho és la derivada parcial de f respecte de μ. Pel que fa a la parcial respecte de u, podem trobar-la de forma molt semblant, ja que per a tot punt (u_0,μ_0) tenim que

$$||f(u(\theta),\theta,\mu_0) - f(u_0(\theta),\theta,\mu_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(u_0(\theta),\theta,\mu_0)(u(\theta)-u_0(\theta))||$$

també és $o(||u(\theta)-u_0(\theta)||)$ per a tot θ. Això ens diu que per a tota funció $\psi \in C^0(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tenim que

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} G(u_0,\mu_0)\psi\right](\theta) = \frac{\partial}{\partial x} f(u_0(\theta),\theta,\mu_0)\psi(\theta).$$

Igual que amb μ, d'aquesta igualtat podem deduir que la derivada parcial de G respecte de u és contínua si ho és la derivada parcial de f respecte de x. En conclusió, G serà de classe C^1 si f és prou regular.

El segon funcional, H, clarament és lineal i acotat com a funció de u. Aleshores, l'Exemple 2.31 ens diu que la parcial de H respecte de u aplicada a u_0 és H per a tot $u_0 \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$. A més, H no depèn de μ, és a dir, que H és constant com a funció de μ. Així doncs, l'Exemple 2.30 ens diu que la derivada parcial existeix i és idènticament 0. En conclusió, H és de classe C^1. □

Notem que

$$F = G + H.$$

Ara bé, com que G i H són de classe C^1 i la derivada és lineal aleshores podem concloure que F és de classe C^1.

Concloem doncs, que si f és prou regular F és diferenciable i la seva derivada parcial respecte de u és l'aplicació que, donat un punt $(u_0,\mu_0) \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ i una funció $\psi \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$, ve donada per

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} F(u_0,\mu_0)\psi\right](\theta) = \frac{\partial}{\partial x} f_{\mu_0}(u_0(\theta),\theta)\psi(\theta) - \psi(\theta+\omega).$$

5.2 Comportament a prop d'una corba invariant

Per a poder aplicar el TFI només cal veure sota quines condicions $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0)$ és un isomorfisme. Ara bè, com que $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0) \in \mathscr{L}(C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R}))$ serà suficient veure que $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0)$ és invertible, és a dir, que $0 \notin \operatorname{Spec}(\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0))$. Per a estudiar l'espectre de $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0)$ considerarem el comportament local del sistema (5.1) al voltant de u_0.

Notem que per ser f prou regular, si prenem $h \in \mathbb{R}$ de mòdul prou petit tenim que

$$f_0(u_0(\theta) + h, \theta) = f_0(u_0(\theta), \theta) + \frac{\partial}{\partial x} f_0(u_0(\theta), \theta)h + o(|h|),$$

és a dir que

$$f_0(u_0(\theta) + h, \theta) - f_0(u_0(\theta), \theta) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(u_0(\theta), \theta)h + o(|h|).$$

Per tant, podem considerar un nou sistema per a estudiar el caràcter atractor o repulsor de u_0 en funció de h, tenint en compte que a cada iteració el punt $u_0(\theta) + h$ va a parar a distància $\frac{\partial}{\partial x} f_0(u_0(\theta), \theta)h$ del punt $u_0(\theta)$. D'aquí ve la següent definició:

Definició 5.3. *Suposem que u_0 és una corba invariant de classe C^r del sistema* (5.1) *quan $\mu = 0$, aleshores definim el seu* ***comportament normal linealitzat*** *com el sistema dinàmic*

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & a(\theta)x, \\ \bar{\theta} & = & \theta + \omega, \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

on $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}$ i $a(\theta) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(u_0(\theta), \theta)$.

Com que la funció iterada en aquest sistema és un producte esbiaixat lineal, T_a, per a estudiar el comportament normal linealitzat podem aplicar tots els resultats de la Secció 4. També notem que el comportament atractor o repulsor de u_0 ve donat per l'estabilitat de l'origen, és a dir, per l'exponent de Lyapunov del comportament normal linealitzat.

5.3 L'operador de transferència

Definició 5.4. *Sigui $a \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Definim l'operador de transferència associat a a, $\mathcal{L} : C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \to C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, per l'expressió*

$$(\mathcal{L}\psi)(\theta) = a(\theta - \omega)\psi(\theta - \omega), \quad \forall \theta \in \mathbb{T}.$$

Notem que si $a(\theta) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(u_0(\theta), \theta)$ aleshores és fàcilment comprovable que 0 és a l'espectre de $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0, 0)$ si, i només si, 1 és a l'espectre de $\mathcal{L}$.

L'operador de transferència és un operador molt rellevant. Ara bé, com que l'objectiu d'aquest treball no és desenvolupar la teoria de l'operador de transferència, només veurem resultats directament relacionats amb la reduïbilitat i els exponents de Lyapunov. Així doncs, suposarem conegut que l'espectre de $\mathcal{L}$ és invariant per rotacions, que si λ és un valor propi de $\mathcal{L}$ aleshores per a tot $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \exp(ik\omega)$ també és un valor propi de $\mathcal{L}$ i que $\operatorname{Spec}(\mathcal{L})$ és invariant per canvis de variables en el producte esbiaixat. Una prova d'aquests resultats es pot trobar a [5].

Proposició 5.5. *Si existeix un interval tancat no trivial I en el qual $a_{|I} \equiv 0$, aleshores* 0 *és un valor propi de $\mathcal{L}$ i* $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{0\}$. *Si* 0 *és un valor propi de $\mathcal{L}$, aleshores existeix un interval tancat no trivial I tal que $a_{|I} \equiv 0$ i, per tant,* $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{0\}$.

Demostració. Suposem que a s'anul·la en un interval no trivial I. Si ψ és una funció C^r que no s'anul·la en I però és idènticament zero fora de I, aleshores $\mathcal{L}\psi = 0$ i per tant ψ és una funció pròpia de valor propi 0. A més, $\mathrm{Spec}(\mathcal{L})$ no té cap altre valor. Efectivament, si ψ és una funció pròpia de valor propi $\lambda \neq 0$ aleshores $\mathcal{L}^n\psi \equiv \lambda^n\psi$, és a dir que per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim que $\psi \equiv 0$ en $I - n\omega$. Així doncs, ψ és contínua i idènticament 0 en un conjunt dens, per tant, $\psi \equiv 0$ en tot $\mathbb{T}$.

Ara suposem que 0 és un valor propi de $\mathcal{L}$. Sigui ψ una funció pròpia de valor propi 0, i sigui I un interval tancat i no trivial contingut en el suport de ψ (existeix ja que ψ és contínua). Aleshores a s'ha d'anul·lar en I. □

Proposició 5.6. *Son equivalents*

(a) El producte esbiaixat lineal T_a és reduïble.

(b) L'espectre de $\mathcal{L}$ no conté el 0 i coincideix amb la clausura del conjunt de valors propis.

(c) $\mathcal{L}$ té algun valor propi diferent de 0.

(d) $\mathcal{L}$ té algun valor propi diferent de 0 real.

Demostració. Comencem per veure que *(a)* implica *(b)*. Observem que si $b(\theta)$ és constant i igual a $b \neq 0$ aleshores l'espectre de l'operador de transferència relatiu a b és un cercle de radi $|b| > 0$, que és la clausura del conjunt de valors propis. A més, com que l'espectre de l'operador de transferència és invariant per canvis de variable i T_a està conjugat amb T_b aleshores $\mathrm{Spec}(\mathcal{L})$ és un cercle de radi $|b| > 0$ i coincideix amb la clausura del conjunt de valors propis.

Clarament *(b)* implica *(c)*. Per veure que *(c)* implica *(d)* només cal prendre un valor propi $\lambda \in \mathbb{C}$ amb la corresponent funció pròpia $\psi(\theta)$. Aleshores $\mathrm{sign}(a)|\lambda|$ és un valor propi amb funció pròpia $|\psi(\theta)|$.

Finalment cal veure que *(d)* implica *(a)*. Suposem que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ és un valor propi de funció pròpia $\psi(\theta)$. Per la definició de $\mathcal{L}$ això vol dir que

$$a(\theta - \omega)\psi(\theta - \omega) = \lambda\psi(\theta).$$

D'aquesta equació podem extreure que $\psi(\theta) \neq 0$ per a tot θ (si no ho fos seria zero en un conjunt dens i per tant en tot $\mathbb{T}$). Així doncs, $\psi(\theta)$ és un canvi de variables que transforma T_a en T_b on $b(\theta) \equiv \lambda$, per tant T_a és reduïble. □

5.4 Exponents de Lyapunov i l'espectre de l'operador de transferència

Ara relacionarem l'espectre de l'operador de transferència amb l'exponent de Lyapunov del comportament normal linealitzat, és a dir, amb el comportament atractor o repulsor de u_0.

Notem que si $a \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ és una funció sense zeros, aleshores el Teorema de Kronecker-Weyl d'Equidistribució ens diu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta - j\omega)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta$$

i que, a més, la convergència és uniforme. Això implica que si $(\theta_n)_n$ és una successió de punts en $\mathbb{T}$, llavors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta.$$

Ara bé, si suposem que a té algun zero aleshores no podem assegurar la igualtat.

Lema 5.7. *Sigui $(\theta_n)_n$ una successió de punts de $\mathbb{T}$. Aleshores,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta.$$

Demostració. Comencem per definir

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)|, \qquad S_n^{(N)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \max\{\ln|a(\theta_n - j\omega)|, -N\},$$

i

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\ d\theta, \qquad \Lambda^{(N)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\ln|a(\theta)|, -N\}\ d\theta.$$

En aplicar el Teorema Ergòdic de Birkhoff a la funció contínua $\max\{\ln|a(\theta)|, -N\}$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} = \Lambda_n^{(N)} \quad \text{per a tot } N \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Ara definim

$$M = \max_{\theta\in\mathbb{T}}\{\ln|a(\theta)|\}, \quad F(\theta) = M - \ln|a(\theta)|, \quad F_N(\theta) = M - \max\{\ln|a(\theta)|, -N\}.$$

Notem que, $F_N(\theta) \geq 0$ per a tot θ i que $F_N(\theta) \nearrow F(\theta)$. Així doncs, pel Teorema de la Convergència Monòtona tenim que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} F_N(\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} F(\theta)\ d\theta,$$

cosa que implica que

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda^{(N)} = \Lambda, \tag{5.5}$$

on estem incloent el cas $\Lambda = -\infty$. Ara si Λ és finit, aleshores les equacions (5.4) i (5.5) ens diuen que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix N_0 tal que, per a $N \geq N_0$, tenim que

$$\Lambda - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \leq \Lambda + \varepsilon$$

i com que, per a cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq S_n^{(N)}$ aleshores tenim la desigualtat

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \leq \Lambda + \varepsilon,$$

que prova el cas $\Lambda > -\infty$.

Vegem ara el cas $\Lambda = -\infty$ (és a dir que $\lim_{N\to\infty} \Lambda^{(N)} = -\infty$). Les equacions (5.4) i (5.5) impliquen que per a cada $E \geq 0$ existeix N_0 tal que si $N \geq N_0$ aleshores

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \leq -E.$$

Així doncs

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \leq -E.$$

De fet, això prova que $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$. □

Teorema 5.8. *Suposem que $a \in C^r$, $0 \leq r < \infty$ i considerem l'operador de transferència $\mathcal{L} : C^r \to C^r$. Sigui Λ l'exponent de Lyapunov de T_a. Aleshores*

$$\rho(\mathcal{L}) = \exp(\Lambda),$$

on $\rho(\mathcal{L})$ denota el radi espectral de $\mathcal{L}$.

Demostració. Si prenem $0 \leq s \leq r$, podem estendre l'operador de transferència $\mathcal{L}$ a C^s de forma natural: per a cada $\psi \in C^s$, $(\mathcal{L}\psi)(\theta) = a(\theta - \omega)\psi(\theta - \omega)$. A més, un resultat en [5] diu que l'espectre de $\mathcal{L}$ no depèn de s. Així doncs, ens serà suficient provar l'enunciat del teorema per a $s = 0$.

Com que $\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty} ||\mathcal{L}^n||_\infty^{\frac{1}{n}}$, aleshores

$$\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{\theta\in\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} |a(\theta - j\omega)| \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} |a(\theta_n - j\omega)| \right)^{\frac{1}{n}}$$

on θ_n és un valor per al qual s'assoleix el màxim.

D'altra banda, el Lema 5.7 ens diu que per a tot $\theta \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln |a(\theta - j\omega)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln |a(\theta_n - j\omega)| \leq \Lambda.$$

Si $\Lambda = -\infty$, en la demostració del Lema 5.7 podem veure que aquesta desigualtat és una igualtat. Si $\Lambda > -\infty$, aleshores el Teorema Ergòdic de Birkhoff implica que gairebé per a tot θ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln |a(\theta - j\omega)| = \Lambda.$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln |a(\theta_n - j\omega)| = \Lambda.$$

Així doncs, tenim la igualtat

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln |a(\theta_n - j\omega)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{j=1}^{n} |a(\theta_n - j\omega)| \right) = \ln \rho(\mathcal{L}),$$

o, equivalentement, $\rho(\mathcal{L}) = \exp(\Lambda)$. □

Teorema 5.9. *Suposem que el producte esbiaixat T_a no és reduïble i considerem l'operador de transferència $\mathcal{L} : C^r \to C^r, 0 \le r < \infty$. Aleshores*

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \exp(\Lambda)\}.$$

Demostració. Igual que en el Teorema 5.8, serà suficient provar la propietat per a $\mathcal{L}$ actuant en C^0. Notem que si $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{0\}$ aleshores pel Lema 5.6 l'enunciat és cert. Suposem que $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) \neq \{0\}$. Com que l'espectre és invariant per rotacions, aleshores només cal veure que $[0, \exp(\Lambda)] \subseteq \operatorname{Spec}(\mathcal{L})$, és a dir, que $\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L}$ no és invertible per a $\lambda \le \exp(\Lambda)$ real i positiu.

Suposem que per a algun valor $0 < \lambda < \exp(\Lambda)$ tenim que $\lambda \notin \operatorname{Spec}(\mathcal{L})$ (el cas $\exp(\Lambda)$ és immediat a partir del Teorema 5.8 i que l'espectre de $\mathcal{L}$ és compacte i invariant per rotacions). Aleshores el Teorema de l'Aplicació Oberta implica que $\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L}$ actuant en l'espai de funcions contínues amb la norma infinit té una inversa acotada.

Prenem $A \subseteq \mathbb{T}$, un conjunt de valors per als quals es compleix el Teorema Ergòdic de Birkhoff, és a dir, valors tals que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta + j\omega)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\, d\theta = \Lambda. \tag{5.6}$$

En particular, les òrbites de $\theta \mapsto \theta + \omega$ que passen per algun zero de a no són a A.

Per a tota funció $b \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tal que $||b|| \le 1$ definim la funció $\psi_b = (\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1} b$. Notem que $||\psi_b|| \le ||(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}||$. Per la definició de ψ_b s'ha de complir que

$$\psi_b(\theta + \omega) = \frac{1}{\lambda}\big(a(\theta)\psi_b(\theta) + b(\theta + \omega)\big), \qquad \text{per a tot } \theta \in \mathbb{T}.$$

Per tant, per inducció obtenim que

$$\begin{aligned} \psi_b(\theta + n\omega) \;&=\; \frac{1}{\lambda^n} a(\theta) \cdots a(\theta + (n-1)\omega)\psi_b(\theta) + \frac{1}{\lambda^n} a(\theta + \omega) \cdots a(\theta + (n-1)\omega) b(\theta + \omega) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{\lambda^2} a(\theta + (n-1)\omega) b(\theta + (n-1)\omega) + \frac{1}{\lambda} b(\theta + n\omega). \end{aligned}$$

Notem que per a tot $\theta \in A$, podem reescriure aquesta igualtat com

$$\begin{aligned} \psi_b(\theta) \;&=\; -\frac{b(\theta+\omega)}{a(\theta)} - \lambda \frac{b(\theta + 2\omega)}{a(\theta)a(\theta+\omega)} - \cdots - \lambda^{n-1} \frac{b(\theta + n\omega)}{a(\theta) \cdots a(\theta + (n-1)\omega)} \\ &\quad + \lambda^n \frac{\psi_b(\theta + n\omega)}{a(\theta) \cdots a(\theta + (n-1)\omega)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

D'altra banda, com que en A es compleix la igualtat (5.6) tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \big(a(\theta)a(\theta+\omega) \cdots a(\theta + (n-1)\omega)\big)^{\frac{1}{n}} = \exp(\Lambda).$$

Per tant, com que $\lambda < \exp(\Lambda)$ obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{a(\theta)a(\theta+\omega) \cdots a(\theta + (n-1)\omega)} = 0. \tag{5.8}$$

Sigui ara θ_* un zero de a, i sigui $(\theta_k)_k$ una successió d'elements de A tal que $\theta_k \to \theta_*$ i tal que $|a(\theta_k)| \leq \frac{1}{k}$. Notem que per a cada k la igualtat (5.8) implica l'existència d'un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n_k - 1)\omega)|}{\lambda^{n_k}} > ||(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}||. \tag{5.9}$$

Per a cada k, prenem una funció $b_k \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tal que $||b|| = 1$ i tals que per a $n \leq n_k$ els termes amb signe negatiu en (5.7) siguin tots negatius, és a dir, b_k tals que

$$\begin{aligned}
b_k(\theta_k + \omega) &= -\mathrm{sign}(a(\theta_k)), \\
b_k(\theta_k + 2\omega) &= -\mathrm{sign}(a(\theta_k)a(\theta_k + \omega)) \\
&\cdots \\
b_k(\theta_k + n_k\omega) &= -\mathrm{sign}(a(\theta_k)a(\theta_k + \omega) \cdots a(\theta_k + (n_k - 1)\omega)).
\end{aligned}$$

Cada funció b_k clarament existeix malgrat que la successió de funcions $(b_k)_k$ potser no convergeix en $C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Observem que, combinant la desigualtat (5.9) i el fet que $||b_k|| = 1$ obtenim que

$$\left| \frac{\lambda^{n_k} \psi_{b_k}(\theta + n_k\omega)}{a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n_k - 1)\omega)} \right| \leq 1.$$

Finalment, per a cada k, considerem la igualtat (5.7) aplicada a $\theta = \theta_k$ i $b = b_k$ i notem que

$$\begin{aligned}
|\psi_{b_k}(\theta_k)| &= \left| \frac{1}{|a(\theta_k)|} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{|a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n-1)\omega)|} + \frac{\lambda^{n_k} \psi_{b_k}(\theta_k + n_k\omega)}{a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n_k - 1)\omega)} \right| \\
&\geq \left| \frac{1}{|a(\theta_k)|} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{|a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n-1)\omega)|} \right| - \left| \frac{\lambda^{n_k} \psi_{b_k}(\theta + n_k\omega)}{a(\theta_k) \cdots a(\theta_k + (n_k - 1)\omega)} \right| \\
&\geq \frac{1}{|a(\theta_k)|} - 1 \geq k - 1.
\end{aligned}$$

Però això és una contradicció ja que, si per a tot $k \in \mathbb{N}$,

$$k - 1 \leq |\psi_{b_k}(\theta_k)| \leq ||(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}||,$$

aleshores, $(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}$ no és un operador acotat.

□

5.5 Conclusions

Tornem a considerar la família de sistemes dinàmics forçats quasiperiòdicament

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= f_\mu(x, \theta), \\
\bar{\theta} &= \theta + \omega,
\end{aligned}\right\}$$

i suposem que per a $\mu_0 = 0$, u_0 és una corba invariant de classe C^r. Aleshores separem cassos en funció del comportament normal linealitzat de u_0, que ve donat al iterar el producte esbiaixat T_a on $a(\theta) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(u(\theta), \theta)$.

- Si T_a és reduïble i linealment conjugat a un sistema $(x, \theta) \mapsto (bx, \theta + \omega)$ on $|b| \neq 1$, aleshores la Proposició 5.6 ens permet dir que $1 \notin \mathrm{Spec}(\mathcal{L})$. Així doncs, podem aplicar el Teorema de la Funció Implícita. Això vol dir que per a μ's prou petits existeixen corbes u_μ de classe C^r invariants per f_μ.

- Si T_a no és reduïble i u_0 és una corba atractora (l'exponent de Lyapunov de T_a és negatiu), aleshores el Teorema 5.8 també implica que $1 \notin \mathrm{Spec}(\mathcal{L})$ i per tant també podem aplicar el Teorema de la Funció Implícita i assegurar l'existència de u_μ per μ's petits.

- Si T_a no és reduïble i u_0 no és una corba atractora (l'exponent de Lyapunov de T_a no és negatiu) aleshores pel Teorema 5.9 tenim que $1 \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L})$ i les hipòtesis del Teorema de la Funció Implícita no es compleixen, per tant, no podem assegurar l'existència de corbes invariants u_μ per a μ's diferents de 0.

Notem que en els cassos en els quals sí que podem assegurar l'existència de corbes invariants per a μ's prou petits, el comportament de l'exponent de Lyapunov en funció de μ ve donat pel Teorema 4.10.

Observació 5.10. Un ús d'aquestes conclusions es pot trobar a la secció final de [7] on es discuteix la família logística quasiperiòdicament forçada.

6 Cas particular: Sistemes afins

En aquesta secció posarem en pràctica els resultats obtinguts a la Secció 5. Presentarem una família de sistemes en la qual una corba invariant pateix un procés de fractalització però sense l'aparició de cap atractor estrany no caòtic. De fet, creiem que aquest fenomen podria sorgir en sistemes molt més complicats on provar la regularitat de les corbes invariants és molt més difícil.

Considerem una família de sistemes afins quasiperiòdicament forçats

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha a(\theta)x + b(\theta), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

on a i b són funcions C^r i α és un paràmetre real positiu. Recordem que no estem admetent el cas a idènticament zero i que estem suposant que $\omega \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

El primer objectiu serà trobar el conjunt de valors de α per al qual tenim una corba invariant atractora. La següent proposició ens dirà que aquest conjunt està format per tot $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha < \alpha_0 = \frac{1}{\rho(\mathcal{L})} = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|\, d\theta\right),$$

on l'última igualtat ve donada pel Teorema 5.8.

Proposició 6.1. *Si a i b són funcions de classe C^r i $\alpha < \alpha_0$, aleshores la sèrie*

$$\begin{aligned} u_\alpha(\theta) &= b(\theta-\omega) + \alpha a(\theta-\omega)b(\theta-2\omega) + \alpha^2 a(\theta-\omega)a(\theta-2\omega)b(\theta-3\omega) \\ &\quad + \alpha^3 a(\theta-\omega)a(\theta-2\omega)a(\theta-3\omega)b(\theta-4\omega)\dots \\ &= b(\theta-\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left(\prod_{j=1}^{n} a(\theta-j\omega)\right) b(\theta-(n+1)\omega) \end{aligned}$$

convergeix a l'única corba invariant de classe C^r de (6.1).

Demostració. Notem que per tal que una corba $u(\theta)$ sigui invariant per (6.1) s'ha de complir que per a tot θ

$$u(\theta+\omega) = a(\theta)u(\theta) + b(\theta).$$

Com que s'ha de complir per a tot θ en particular s'ha de complir per a $\theta-\omega$, per tant

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \alpha a(\theta-\omega)u(\theta-\omega) + b(\theta-\omega) \\ u(\theta) - \alpha a(\theta-\omega)u(\theta-\omega) &= b(\theta-\omega) \\ (\mathrm{Id} - \mathcal{L}_\alpha)u(\theta) &= b(\theta-\omega). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Tornem a introduir l'operador de transferència, però en aquest cas, si $\psi \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$ aleshores $\mathcal{L}_\alpha$ ve definit per

$$(\mathcal{L}_\alpha\psi)(\theta) = \alpha a(\theta-\omega)\psi(\theta-\omega).$$

També denotarem $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$. Notem que el radi espectral de $\mathcal{L}_\alpha$ compleix que

$$\rho(\mathcal{L}_\alpha) = \alpha\rho(\mathcal{L}).$$

Com que estem suposant que $\alpha\rho(\mathcal{L}) < 1$ aleshores $1 \notin \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_\alpha)$, per tant $\mathrm{Id} - \mathcal{L}_\alpha$ és invertible i existeix una única solució a l'equació funcional (6.2), és a dir, existeix una única corba invariant pel sistema (6.1).

Ara veurem que $u_\alpha(\theta)$ és una corba invariant per (6.1). Primer de tot, notem que si $u_\alpha(\theta)$ convergeix aleshores per a tot parell $(x = u(\theta_0), \theta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ tenim que

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \alpha a(\theta_0)x + b(\theta_0) \\
&= b(\theta_0) + \alpha a(\theta_0)\left(b(\theta_0 - \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left(\prod_{j=1}^{n} a(\theta_0 - j\omega)\right) b(\theta_0 - (n+1)\omega)\right) \\
&= b(\theta_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(\prod_{j=1}^{n} a(\theta_0 - j\omega)\right) b(\theta_0 - (n+1)\omega) = u(\theta_0 + \omega),
\end{aligned}$$

per tant, u_α descriurà una corba invariant.

Ara centrem-nos en la convergència de $u_\alpha(\theta)$. Pel criteri de l'arrel com que b és una funció acotada, u convergeix puntualment si, i només si,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\max_{\theta\in\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} |a(\theta - j\omega)|\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\alpha}.$$

Notem que podem acotar $|a(\theta)|$ per la seva norma infinit, per tant

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\max_{\theta\in\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} |a(\theta - j\omega)|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(||a||_\infty^n\right)^{\frac{1}{n}} = ||a||_\infty.$$

Ara bé, com que $\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty} ||\mathcal{L}^n||_\infty^{1/n}$ tenim que

$$\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{\theta\in\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} |a(\theta - j\omega)|\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Com que $\alpha < \dfrac{1}{\rho(\mathcal{L})}$ concloem que hi ha convergència. $\square$

Ara que ja hem vist que existeix una corba invariant per (6.1) u_α, podem considerar el seu comportament normal linealitzat (la derivada parcial es pot deduir dels Exemples 2.30 i 2.31):

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= a(\theta)x, \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Notem que les conclusions de la Secció 5 impliquen que si $\alpha < \alpha_0$, la corba u_α depèn continuament (i diferenciablement) del paràmetre μ.

6.1 Fractalització de corbes atractores contínues

Abans de provar que la nostra corba invariant pateix un procés de fractalització cal tenir una definició rigorosa de què considerem per fractalització.

Definició 6.2. *Considerem una família de corbes $u_\alpha \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$ que depèn de forma contínua d'un paràmetre α. Direm que u_α pateix un procés de* ***fractalització*** *quan $\alpha \to \alpha_0$ si existeix algun interval tancat i no trivial I tal que*

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0} \frac{||u'_\alpha||_{I,\infty}}{||u_\alpha||_\infty} = +\infty,$$

on $||\cdot||_{I,\infty}$ denota la norma infinit a l'interval I.

En els següents resultats anomenarem $u_\alpha(\theta)$ a l'única corba invariant de (6.1) quan $\alpha < \alpha_0$.

Proposició 6.3. *Suposem que $\alpha > \alpha_0$ i que $a \in C^r(\mathbb{T},\mathbb{R}), r \geq 0$. Aleshores existeix un conjunt residual $D_r \subseteq C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tal que, si $b \in D_r$, llavors*

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u_\alpha||_{C^r} = +\infty.$$

Demostració. Notem que $(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1}$ depèn contínuament de α quan $0<\alpha<\alpha_0$ i, per tant, $||u_\alpha||_{C^r}$ també ho fa. Així doncs, si prenem una successió $(\alpha_n)_{n>0}$ de nombres reals tals que $\alpha_n \to 0$ serà suficient provar que

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_n,\alpha_0)} ||u_\alpha||_{C^r} = +\infty, \qquad \text{per a tot } n>0.$$

Fixem $n>0$ i prenem $\alpha \in [\alpha_n,\alpha_0)$, clarament

$$(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Id}-\mathcal{L}\right)^{-1}.$$

Notem que $\frac{1}{\alpha}$ pertany al conjunt resolvent de $\mathcal{L}$, per tant, el Teorema de Representació per a la Resolvent ens diu que per a tot λ tal que

$$\left|\left|\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Id}-\mathcal{L}\right)^{-1}\right|\right| < \left|\lambda-\frac{1}{\alpha}\right|^{-1}$$

tenim que $\lambda\mathrm{Id}-\mathcal{L}$ és invertible. Ara bé, $\frac{1}{\alpha_0}$ és a l'espectre de $\mathcal{L}$ per tant, la desigualtat anterior ha de ser falsa quan $\lambda = \frac{1}{\alpha_0}$. És a dir, que

$$||(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1}|| = \frac{1}{\alpha}\left|\left|\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Id}-\mathcal{L}\right)^{-1}\right|\right| \geq \frac{1}{\alpha}\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_0}\right|^{-1}.$$

Per tant, com que el terme de la dreta no està acotat tenim que

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_n,\alpha_0)} ||(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1}|| = +\infty.$$

Ara bé, el Teorema de Banach-Steinhaus ens diu que si $||(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1}||$ no està acotat aleshores existeix un conjunt D_n dens en $C^r(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tal que si $b \in D_n$

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_n,\alpha_0)} ||(\mathrm{Id}-\mathcal{L}_\alpha)^{-1}b||_{C^r} = \sup_{\alpha\in[\alpha_n,\alpha_0)} ||u_\alpha||_{C^r} = +\infty.$$

Finalment, si $b \in D_r = \bigcap_{n>0} D_n$ aleshores la igualtat anterior es compleix per a tot $n>0$. Com que D_r és una intersecció numerable de conjunts densos només podem assegurar que és residual. $\square$

Corol·lari 6.4. *Per a tot interval tancat $I \subseteq \mathbb{T}$, no trivial si $b \in D_r$, aleshores*

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u_\alpha||_{I,C^r} = +\infty.$$

Demostració. Igual que en la proposició anterior el resultat que volem provar és equivalent a

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0)} ||u_\alpha||_{C^r}, \qquad \text{per a tot } \alpha > 0. \tag{6.4}$$

Suposem que existeix $b \in D_r$ i un interval no trivial I tals que el suprem (6.4) és finit. Aleshores, per ser u_α una corba invariant tenim que

$$|u_\alpha(\theta + \omega)| \leq ||a|| \big| u(\theta) \big| + ||b||,$$

per tant podem trobar una cota de $||u_\alpha||_{I+\omega, C^r}$ a partir de $||u_\alpha||_{I,C^r}$. Ara bé, com que ω és irracional els intervals $I + n\omega$ cobreixen tot $\mathbb{T}$. Més encara, existeix un n_0 finit tal que $\mathbb{T} = \bigcup_{n \leq n_0} (I + n\omega)$. Així doncs, si definim

$$M = \max_{n \leq n_0} ||u_\alpha||_{I+n\omega, C^r}$$

tenim que

$$||u_\alpha||_{C^r} \leq M.$$

Concloem doncs, que per la proposició anterior no existeixen tals b i I. $\square$

Finalment, presentem el teorema més important d'aquesta secció que ens donarà condicions suficients per tal que una corba fractalitzi.

Teorema 6.5. *Suposem que $a, b \in C^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ i que el sistema (6.3) no és reduïble. Aleshores,*

a) Si

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u_\alpha||_\infty < +\infty$$

i $b \in D_1$ on D_1 és el conjunt residual de la Proposició 6.3, aleshores tenim que

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u'_\alpha||_{I,\infty} = +\infty,$$

per a qualsevol interval tancat no trivial I.

b) Si

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u_\alpha||_\infty = +\infty,$$

aleshores, per a qualsevol interval no trivial $I \subseteq \mathbb{T}$, tenim que

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u_\alpha||_{I,\infty} = +\infty \qquad \textit{i que} \qquad \limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} \frac{||u'_\alpha||_{I,\infty}}{||u_\alpha||_\infty} = +\infty.$$

Demostració. Comencem pel cas *a)*. Suposem que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u_\alpha||_\infty < +\infty$ i que $b \in D_r$, clarament per a cada interval tancat no trivial $I \subseteq \mathbb{T}$ tenim que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u_\alpha||_{I,\infty} < +\infty$. Aleshores, pel Corol·lari 6.4 prenent la norma a C^1 obtenim que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u'_\alpha||_{I,\infty} = +\infty$.

Ara passem al cas *b)*. Suposem que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u_\alpha||_\infty = +\infty$, utilitzant el mateix raonament que al Corol·lari 6.4 (prenent la norma a C^0), es pot veure que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} ||u_\alpha||_{I,\infty} = +\infty$.

Prenem $\alpha < \alpha_0$ i apliquem el canvi de variables $x = ||u_\alpha||_\infty y$ al sistema (6.1) per a obtenir el sistema

$$\left.\begin{aligned} \bar{y} &= \alpha a(\theta) y + \frac{b(\theta)}{||u_\alpha||_\infty}, \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Observem que la corba $\tilde{u}_\alpha(\theta) = \frac{u_\alpha(\theta)}{||u_\alpha||_\infty}$ és invariant pel sistema (6.5).

Ara procedirem per reducció a l'absurd; suposem que existeix $I \subseteq \mathbb{T}$ tal que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0} ||\tilde{u}'_\alpha||_{I,\infty} < +\infty$. Acotem $||\tilde{u}'_\alpha||_\infty$ utilitzant $||\tilde{u}'_\alpha||_{I,\infty}$ tal com hem fet al Corol·lari 6.4 i obtenim que $\limsup_{\alpha\to\alpha_0} ||\tilde{u}'_\alpha||_\infty < +\infty$. Ara prenem una successió $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ tal que $\alpha_n \to \alpha_0$. Notem que per α_n prou proper a α_0 cada funció $\tilde{u}_{\alpha_n}(\theta)$ és Lipschitz i la seva constant de Lipschitz és inferior o igual a $\limsup_{\alpha\to\alpha_0} ||\tilde{u}'_\alpha||_\infty$. Així doncs, el Teorema de Arzelà-Ascoli ens diu que existeix una successió parcial $(\tilde{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergeix uniformement a una funció $\tilde{u}_{\alpha_0}$.

Finalment, notem que $\tilde{u}_{\alpha_0}(\theta + \omega) = \alpha_0 a(\theta) \tilde{u}_{\alpha_0}(\theta)$ per tant 1 és un valor propi de l'operador de transferència $\mathcal{L}_{\alpha_0}$. Per la Proposició 5.6 això és equivalent a que el sistema (6.1) sigui reduïble contradient les nostres hipòtesis. □

Corol·lari 6.6. *Si $b \in D_r$ on D_r és el conjunt residual de la Proposició 6.3 aleshores* (6.1) *pateix un procés de fractalització quan $\alpha \to \alpha_0$.*

Observació 6.7. El Teorema 6.5 no es compleix quan (6.3) és reduïble.

Demostració. Prenem el sistema afí

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha a x + b, \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

on a i b són constants reals positives. Notem que el comportament lineal normalitzat de (6.6) és clarament reduïble, a més, la " corba "

$$u_\alpha = b \sum_{n=0}^{\infty} (a\alpha)^n = \frac{b}{1 - \alpha a}$$

convergeix si (i només si) $\alpha < \alpha_0 = a^{-1}$ i és una corba invariant de (6.6). Ara bè,

$$\limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} |u_\alpha| = \limsup_{\alpha\to\alpha_0^-} \left| \frac{1}{1 - \alpha a} \right| = +\infty.$$

Però si $\alpha < \alpha_0$, aleshores $u'_\alpha(\theta) \equiv 0$, contradient el teorema. □

6.2 Inexistència de corbes repulsores contínues

En aquesta secció estudiarem el cas en què $\alpha > \alpha_0$. Immediatament notem que l'exponent de Lyapunov del comportament normal linealitzat (6.3) és positiu ja que

$$\Lambda = \ln \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a(\theta)| \, d\theta \;>\; \ln \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a(\theta)| \, d\theta = 0.$$

A més, que $\alpha > \alpha_0$ també implica que $a(\theta)$ és diferent de 0 gairebé per a tot $\theta \in \mathbb{T}$ (ja que en cas contrari $\alpha_0 = +\infty$).

Lema 6.8. *Suposem que per a tot $\theta \in \mathbb{T}, a(\theta) \geq 0$ i que existeix un valor θ_0 tal que $a(\theta_0) = 0$. Aleshores l'operador $T : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ definit per*

$$Tu(\theta) = u(\theta + \omega) - \alpha a(\theta) u(\theta),$$

no és exhaustiu. En particular, no existeix cap $u \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tal que $Tu \equiv 1$.

Demostració. Suposem que existeix una funció $u(\theta)$ contínua tal que $Tu \equiv 1$. Notem que $a(\theta_0) = 0$ implica que $u(\theta_0 + \omega) = 1$.

Ara prenem un valor θ_1 pel qual el Teorema Ergòdic de Birkhoff es pot aplicar a la funció $\ln(a(\theta))$. Com que l'exponent de Lyapunov és positiu aleshores si $u(\theta_1) > 0$ tenim que la successió $(u(\theta_1 + n\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ no està acotada, cosa que contradiu el fet que u sigui una funció contínua. Així doncs, $u(\theta_1) \leq 0$. Ara bé, el conjunt on el Teroema Ergòdic de Birkhoff és aplicable és dens en $\mathbb{T}$, per tant, $u(\theta) \leq 0$ en un conjunt dens. Com que u és contínua $u(\theta) \leq 0$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}$. Aquest últim fet contradiu que $u(\theta_0) = 1$. $\square$

Lema 6.9. *Suposem que $a \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $r \geq 0$ i que $a(\theta)$ pot prendre valors negatius. Aleshores, existeix una funció $b \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ per a la qual no existeix cap $u \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tal que $u(\theta + \omega) = \alpha a(\theta) + b(\theta)$.*

Demostració. Pel mateix procediment que hem utilitzat a la Proposició 6.1 l'equació $u(\theta + \omega) = \alpha a(\theta) + b(\theta)$ es pot esciure com

$$(\mathrm{Id} - \mathcal{L}_\alpha) u(\theta) = b(\theta - \omega).$$

Utilitzant les mateixes tècniques que a la Proposició 6.1 també podem veure que

$$\rho(\mathcal{L}_\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha_0} > 1.$$

Notem que el Teorema 5.9 implica que $1 \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_\alpha)$. De fet, la Proposició 5.6 ens diu que 1 és un valor espectral però no és un valor propi ja que estem assumint que el sistema no és reduïble. Així doncs, l'operador $\mathrm{Id} - \mathcal{L}_\alpha$ és injectiu però no és exhaustiu. Concloem doncs que existeixen algunes funcions b per a les quals no hi ha cap $u \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ satisfent $u(\theta + \omega) = \alpha a(\theta) u(\theta) + b(\theta)$. $\square$

Ara ja tenim tot el necessari per a provar un cas concret en què la corba atractora $u_\alpha(\theta)$ pateix un procés de fractalització fins a arribar al valor límit α_0 en el qual el comportament del sistema canvia d'atractor a repulsor i la corba es destrueix.

Aquest comportament és molt semblant al dels atractors estranys no caòtics però no n'és un ja que per a tot $\alpha < \alpha_0$ la corba $u_\alpha(\theta)$ és diferenciable.

Teorema 6.10. *Suposem que en el sistema* (6.1) $a, b \in C^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$*,* $a \geq 0$ *per a tot* $\theta \in \mathbb{T}$*, que existeix un valor* θ_0 *tal que* $a(\theta_0) = 0$ *i que* $b(\theta)$ *no s'anul·la mai. Llavors*

1) Si $a, b \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$*,* $r \geq 1$ *aleshores* $u_\alpha \in C^r(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *quan* $0 < \alpha < \alpha_0$*.*

2) Per a qualsevol interval no trivial $I \subseteq \mathbb{T}$*, tenim que*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0^-} ||u_\alpha||_{I,\infty} = +\infty, \qquad i \qquad \lim_{\alpha \to \alpha_0^-} \frac{||u'_\alpha||_{I,\infty}}{||u_\alpha||_\infty} = +\infty.$$

3) Si $\alpha > \alpha_0$ *aleshores no existeix cap* $u \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *tal que* $u(\theta + \omega) = \alpha a(\theta) u(\theta)$*.*

Demostració. Notem que la Proposició 6.1 implica *1)*. Passem a provar *2)*, per a cada n prenem θ_n tal que

$$\max_{\theta \in \mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} a(\theta - j\omega) = \prod_{j=1}^{n} a(\theta_n - j\omega).$$

Considerem la sèrie de Neumann de $\mathcal{L}_{\alpha_0} = \alpha_0 \mathcal{L}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n \mathcal{L}^n.$$

Notem que utilitzant la successió $(\theta_n)_n$ podem acotar la norma de la sèrie,

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n \mathcal{L}^n\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n ||\mathcal{L}^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n \prod_{j=1}^{n} a(\theta_n - j\omega).$$

Ara bé, $1 \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_{\alpha_0})$ per tant la sèrie anterior no pot convergir. Així doncs, hem vist que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n \prod_{j=1}^{n} a(\theta_n - j\omega) = +\infty.$$

D'altra banda, si $0 < \alpha < \alpha_0$ aleshores per la Proposició 6.1 tenim que

$$u_\alpha(\theta) = b(\theta - \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left(\prod_{j=1}^{n} a(\theta - j\omega) \right) b(\theta - (n+1)\omega).$$

Notem que per ser a positiva i b no canviar mai de signe aleshores tots els sumands tenen el mateix signe. Per tant, si prenem una cota inferior de $|b(\theta)|$, β, tenim que

$$||u_\alpha||_\infty \geq \beta + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 \left(\prod_{j=1}^{n} a(\theta_n - j\omega) \right) \beta,$$

i obtenim que $\lim_{\alpha \to \alpha_0} ||u_\alpha||_\infty = +\infty$. Ara prenem un interval no trivial $I \subseteq \mathbb{T}$. Pel Teorema 6.5 tenim que

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} \frac{||u'_\alpha||_{I,\infty}}{||u_\alpha||_\infty} = +\infty. \tag{6.7}$$

De fet, com que per a la norma de u_α tenim un límit enlloc d'un límit superior aleshores no és difícil de veure que el límit superior (6.7) és un límit.

Finalment, passem a provar *3)*, com que b no s'anul·la podem fer el canvi de variables $x = b(\theta-\omega)y$ en el sistema (6.1) per obtenir el sistema transformat

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{y} &=& \alpha\frac{b(\theta-\omega)}{b(\theta)}a(\theta)y+1, \\ \bar{\theta} &=& \theta+\omega. \end{array}\right\}$$

Observem que el Lema 6.8 ens diu que en aquest sistema no hi pot haver cap corba contínua invariant, cosa que prova *3)*. $\square$

6.3 Aplicació

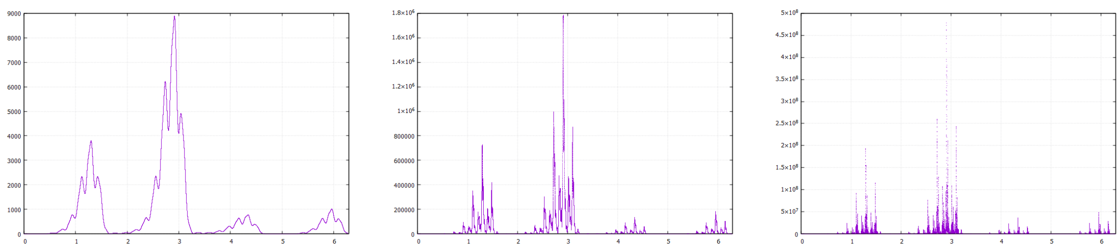
Ara que ja hem vist condicions suficients per a que una corba invariant en una família de sitstemes afins pateixi un procés de fractalització, vegem un exemple. Considerem la família de sistemes

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{x} &=& \alpha(1+\sin(\theta))x+1, \\ \bar{\theta} &=& \theta+\omega. \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

Notem que si $a(\theta) = 1+\sin(\theta)$ aleshores el Teorema 5.8 ens diu que

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}) = \exp(\Lambda) &= \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1+\sin(\theta)|\ d\theta\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1+\cos(\theta)|\ d\theta\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\ d\theta\right) = \exp\left(\ln 2 + 2\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\ d\theta\right)\right) \\ &= \exp(-\ln 2) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

on l'última igualtat s'obté igual que a la Secció 3.2. Clarament la funció $1+\sin(\theta)$ i la funció idènticament 1 són de classe C^∞, per tant, el Teorema 6.10 diu que si $\alpha < \alpha_0 = 2$ aleshores el sistema (6.8) presenta una corba invariant u_α de classe C^∞. A la Figura 2 hem dibuixat la corba u_α per a valors propers al valor límit.



(a) $\alpha = 1.9$ (b) $\alpha = 1.99$ (c) $\alpha = 1.999$

Figura 2: Gràfica de l'atractor del sistema (6.8) (eix y) en funció de θ (eix x) per a valors de α propers a α_0. Observem que malgrat que sabem que les tres gràfiques descriuen corbes de classe C^∞ les gràfiques (b) i (c) es podrien confondre per un fractal.

Acabem la secció comentant que si $\alpha > 2$ aleshores el sistema (6.8) no té cap corba invariant. Això ens permet construir un sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{x} &=& 3(1+\sin(\theta))x+\mu, \\ \bar{\theta} &=& \theta+\omega, \end{array}\right\} \tag{6.9}$$

que té una corba invariant si, i només si, $\mu = 0$ ($u \equiv 0$) amb la curiositat que qualsevol petita pertorbació de μ destrueix la corba.

Referències

[1] Cartan, H.: *Cálculo Diferencial*, 2a edició, Editorial Omega, 1978.

[2] Chow, S. N.; Hale, J. K.: *Methods of bifurcation theory*, Springer, 1982.

[3] Fagella, N.; Jorba, À.; Jorba-Cuscó, M.; Tatjer, J. C.: Classification of linear skew-products of the complex plane and an affine route to fractalization. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 39(7): 3767-3787, 2019.

[4] Grebogi, C.; Ott, E.; Pelikan, S.; Yorke, J. A.: Strange attractors that are not chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 13(1-2), 261-268, 1984.

[5] Haro, À.; de la Llave, R.: *Spectral theory and dynamical systems*, preimpressió disponible a `http://www.maia.ub.es/~alex/spectrum-dynamics/spectrum-dynamics.pdf`, 2006.

[6] Hénon, M.: A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communication in Mathematical Physics*, 50(1), 69-77, 1976.

[7] Jorba, À.; Tatjer, J. C.: A mechanism for the fractalization of invariant curves in quasi-periodically forced 1-D maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 10(2-3): 537-567, 2008.

[8] Katok, A.; Hasselblatt, B: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, No. 54, Cambridge university press, 1995.

[9] Keller, G.: A note on strange nonchaotic attractors. *Fundamenta Mathematicae*, 151(2): 139-148, 1996.

[10] Kreyszig, E.: *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1989.

[11] Narici, L.; Beckstein, E.: *Topological vector spaces*, Chapman & Hall/CRC, 2010.

[12] Rudin, W.: *Real and complex analysis*, 3a edició, McGraw-Hill, 1987.

[13] Stark, J.: Invariant graphs for forced systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 109(1-2), 163-179, 1997.

[14] Tucker, W.: A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem. *Foundations of Computational Mathematics*, 2(1), 53-117, 2002.