



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# LA CORBA DE SZEGŐ

---

Autor: Emma Dalmau Ribas

Director: Dr. Xavier Massaneda  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de gener de 2023

## Abstract

Around the year 1924, Hungarian mathematician Gábor Szegő found that the zeros of the  $n$ th partial sums of the exponential series, rescaled by  $n$ , accumulate on the curve  $S = \{z \in \mathbb{D} : |e^{1-z}z| = 1\}$ . Not only that, but he showed that these zeros are uniformly distributed around  $S$  according to the variation of the argument of the entire function  $h(z) = e^{1-z}z$ . In this thesis we show these results and other later discoveries that specify the velocity of convergence and the distance from the zeros to  $S$ .

## Resum

Vora l'any 1924, el matemàtic hongarès Gábor Szegő va descobrir que els zeros dels polinomis truncats de grau  $n$  de la sèrie en potències de la funció exponencial, reescalats per  $n$ , s'acumulen a la corba  $S = \{z \in \mathbb{D} : |e^{1-z}z| = 1\}$ . A més, també va veure que aquests zeros es distribueixen al voltant de  $S$  de manera uniforme en relació amb la variació de l'argument de la funció entera  $h(z) = e^{1-z}z$ . En aquest treball mostrem aquests resultats i altres treballs posteriors que precisen la velocitat de convergència i la distància dels zeros a  $S$ .

## Agraïments

Vull agrair al Dr. Xavier Massaneda les ganes i la motivació que ha mostrat en tot moment; gràcies a això i a l'interessant tema que em va proposar, he tingut la sort de gaudir enormement fent aquest treball. També vull agrair-li el seu suport constant i la paciència que ha mostrat durant tot el procés d'elaboració d'aquesta memòria.

També vull donar gràcies a la meva família i amics, per no haver deixat d'interessar-se per la meva feina (fins i tot quan creien que parlava en una altra llengua).

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminars</b>	<b>5</b>
2.1	La Fórmula de Stirling . . . . .	5
2.2	Ordre d'una funció entera . . . . .	6
2.3	El Teorema de Factorització de Hadamard . . . . .	11
2.4	El Teorema de Hurwitz . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Els zeros dels polinomis truncats <math>P_n</math></b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Prova del Teorema de Szegő</b>	<b>20</b>
4.1	La funció $h(z) = e^{1-z}z$ . . . . .	21
4.2	Prova de la inclusió $Z' \subseteq S$ . . . . .	26
4.3	Prova de la inclusió $S \subseteq Z'$ i del segon apartat del Teorema de Szegő . . .	32
<b>5</b>	<b>Posició dels zeros de <math>Q_n</math> respecte <math>S</math></b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>47</b>

# 1 Introducció

Considerem la funció exponencial:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

i els corresponents polinomis truncats:

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

La funció  $e^z$  és entera i no s'anul·la mai. Per altra part, és ben conegut que, per a cada  $n \geq 0$ , el polinomi  $P_n$  té exactament  $n$  arrels en el pla complex (Teorema fonamental de l'àlgebra). Així doncs, on van els zeros d'aquests polinomis quan  $n$  creix, si la sèrie no s'anul·la mai?

Utilitzant el Teorema de Rouché, es veu de seguida que l'única possibilitat és que els zeros de  $P_n$  se'n vagin a infinit. Això ens dona el comportament qualitatiu dels zeros de  $P_n$ , però no diu res del seu comportament quantitatiu. De quina manera van a infinit? A quina velocitat? Com es reparteixen?

L'objectiu d'aquest treball és precisament estudiar el comportament asimptòtic dels zeros dels polinomis truncats  $P_n$ . El primer resultat que veurem és el Teorema de Iyengar [Iyen], que mostra que, per  $n$  gran, aquests zeros viuen a un anell  $\{z \in \mathbb{C} : n\alpha_n < |z| < n\}$ , per cert  $\alpha_n \in (0, 1)$ .

**Teorema de Iyengar.** [Iyen] Per  $n > 0$  gran, existeixen nombres  $\alpha_n \in (0, 1)$  tals que

$$Z(P_n) \subseteq \mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{C} : n\alpha_n < |z| < n\}.$$

A més,  $\{\alpha_n\}_n$  és una successió monòtona creixent amb  $\alpha_n < \alpha$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ , on  $\alpha \in \mathbb{R}$  és l'únic zero de la funció  $f(t) = 1 + t + \log(t)$ ,  $t \in (0, 1]$ .

En particular, els zeros de  $P_n$  tenen mòdul de l'ordre de  $n$  i, per tant, se'n van a infinit a aquest ordre de velocitat. Aquesta característica, que els zeros dels polinomis truncats de la sèrie de Taylor d'una funció entera tinguin mòdul d'ordre  $n$ , només es produeix si la funció és exponencial. Aquest és el resultat del Teorema de Buckholtz 1 [Buck1, Theorem 1], que veurem a la Secció 3.

Donat que, per  $n$  gran, les regions on viuen els zeros de  $P_n$  són anells d'escala  $n$ , és natural reescalar aquests polinomis. Definim

$$Q_n(z) = P_n(nz), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Com a conseqüència del Teorema de Iyengar, per  $n > 0$  gran, els zeros de  $Q_n$  viuen a un anell  $\{z \in \mathbb{C} : \alpha_n < |z| < 1\}$ . Com que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$  i  $\alpha_n < \alpha$ , deduïm que els zeros dels  $Q_n$  pels diferents  $n$  s'acumularen forçosament a l'anell

$$\bar{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq |z| \leq 1\}.$$

Vora l'any 1924, el matemàtic Gábor Szegő va estudiar amb més precisió el comportament dels zeros del polinomis  $Q_n$ . El punt de partida de la seva investigació, segons s'explica en [Cal, Car], és la fórmula de Taylor amb terme de resta integral, que dona la igualtat

$$e^z = P_n(z) + \frac{e^z}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt, \quad n \geq 0. \quad (1.1)$$

Aleshores, els zeros de  $P_n$  equivalen a les solucions de l'equació:

$$1 = \frac{1}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt.$$

Fent el canvi de variable  $t = nu$ , s'obté l'expressió

$$1 = \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \int_0^{z/n} e^{n(1-u)} u^n du,$$

de manera que les solucions de  $P_n(nz) = Q_n(z) = 0$  són exactament les solucions de l'equació:

$$1 = \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \int_0^z (e^{1-u} u)^n du. \quad (1.2)$$

A més, per la Fórmula de Stirling, aquesta darrera igualtat és de la forma

$$\int_0^z (e^{1-u} u)^n du = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 + \epsilon_n), \quad (1.3)$$

amb  $\{\epsilon_n\}_n$  successió que tendeix a zero.

Estudiem el comportament qualitatiu de les dues bandes d'aquesta igualtat quan  $n$  tendeix a infinit, depenent de la posició de  $z$ .

En primer lloc, observem que la part dreta de (1.3) decreix de manera polinomial, amb ordre  $1/\sqrt{n}$ . Pel que fa a la integral de la part esquerra, com que  $h(u) = e^{1-u}u$  és entera, no importa el camí que es recorri per anar de 0 a  $z$ . Aleshores:

- Si  $|e^{1-z}z| < 1$ , podem triar un camí que estigui tot dins la regió  $|e^{1-u}u| < 1$ ; aleshores l'integrand tendirà a zero exponencialment. Per tant, la part esquerra de (1.3) es farà molt petita i no podrà arribar mai a  $1/\sqrt{n}$ .
- Si  $|e^{1-z}z| > 1$ , podem triar un camí de manera que una part estigui inclosa en la regió  $|e^{1-u}u| > 1$ , aleshores tindrem una situació anàloga a l'anterior, però amb la part esquerra de (1.3) fent-se exponencialment gran.

Així doncs, d'entrada sembla que, per tal que es mantingui la igualtat (1.3), cal que  $z$  s'acosti a la corba definida per la igualtat  $|e^{1-z}z| = 1$ . Tenim com a corba candidata a ser el lloc límit dels zeros dels polinomis  $Q_n$  a l'anomenada **Corba de Szegő**:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z}z| = 1, |z| \leq 1\}.$$

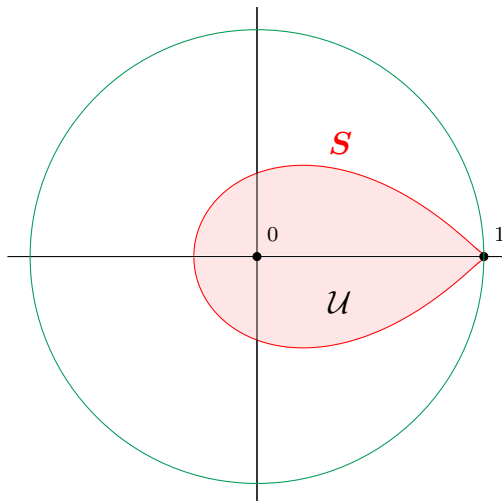


Figura 1: Corba de Szegő  $S$ , regió  $\mathcal{U}$  limitada per  $S$  i circumferència  $|z| = 1$ .

Els resultats de Szegő mostren que aquesta corba candidata és, efectivament, el lloc límit dels zeros de  $Q_n$ . No només això, sinó que els zeros es distribueixen al llarg de  $S$  d'una manera concreta [Sz].

L'objectiu principal d'aquest treball és provar el següent resultat.

**Teorema de Szegő.** *Siguin  $Q_n$  els polinomis reescalats definits anteriorment. Sigui  $Z(Q_n)$  el conjunt de zeros de  $Q_n$ . Sigui  $S$  la Corba de Szegő definida anteriorment. Aleshores,*

1. *La corba  $S$  és el conjunt format pels punts d'acumulació dels zeros dels polinomis  $Q_n$ . És a dir, si  $Z = \bigcup_{n>0} Z(Q_n)$ , aleshores*

$$Z' = S.$$

2. *Sigui  $\mathcal{U}$  la regió tancada per  $S$ , i sigui  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$  la representació conforme que envia l'eix real a l'eix real i 0 a 0. Aleshores, la distribució de  $Z(Q_n)$  tendeix a la mesura*

$$\mu = h^* \left( \frac{d\theta}{2\pi} \right),$$

*en el sentit que, sigui  $I \subseteq S$  interval, la proporció de zeros de  $Q_n$  propers a  $I$  tendeix a*

$$\mu(I) = \int_{h(I)} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

*Es diu que  $\mu$  és la mesura harmònica de  $\mathcal{U}$  al punt 0.*

La part 2 es troba enunciada amb més precisió a la Secció 4.3 (Teorema de Distribució). Per entendre una mica millor com el valor  $\mu(I)$  depèn de la posició de  $I$  en  $S$ , podem interpretar-lo com la probabilitat que un moviment brownià que comença en 0 surti de  $\mathcal{U}$  per  $I$ . Sense entrar en detalls, podem veure el moviment brownià com el límit del passeig aleatori quan el pas tendeix a zero. Com que el moviment brownià és isotròpic, és a dir, té el mateix comportament en totes les direccions, esperem que si  $I \subseteq S$  és proper a 0 el valor  $\mu(I)$  sigui més gran que si  $I$  és lluny de 0.

Això queda reflectit a la distribució de  $Z(Q_n)$ , tal i com podem veure a la Figura 2 extreta del Wolfram Demonstrations Project [Row].

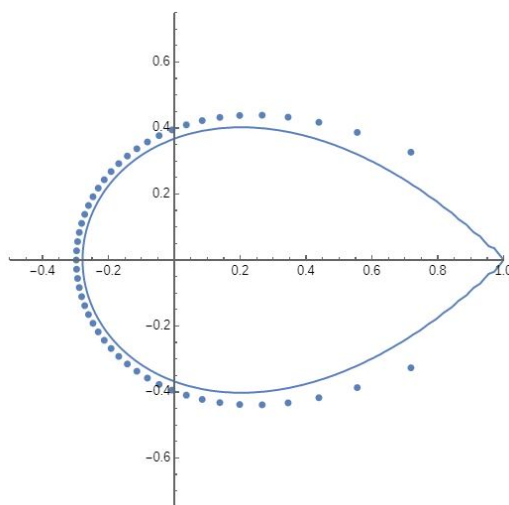


Figura 2: Distribució dels zeros de  $Q_{31}$  al voltant de  $S$ .

A banda d'aquests resultats, n'hi ha d'altres posteriors que descriuen altres aspectes del comportament de  $Z(Q_n)$ . Buckholtz demostra en [Buck1] i [Buck2] que els zeros de  $Q_n$  es troben fora de la regió  $\bar{U}$  delimitada per  $S$ , però a una distància de  $S$  menor que  $2e/\sqrt{n}$ . Per altra part, Walker prova en [Walk] que aquests zeros es troben a una distància de  $S$  major que  $(2^{1/n} - 1)/(2e^2)$ , que té ordre de velocitat  $1/n$ . Per tant, la distància que separa els zeros de  $S$  és controlada. La menor distància a la qual poden ser els zeros decreix amb ordre de velocitat  $1/n$ , més ràpid que la major distància a la qual poden ser, que decreix amb ordre de velocitat  $1/\sqrt{n}$ .

## Estructura de la Memòria

El treball seguirà el fil conductor mostrat durant la Introducció, afegint-hi una secció preliminar d'eines d'Anàlisi Complexa (Secció 2). Entre aquests preliminars, el paper més important el tindrà el concepte d'ordre d'una funció entera.

A la Secció 3 es presentarà l'estudi del comportament asimptòtic dels zeros dels polinomis  $P_n$ , amb l'ajuda del Teorema de Iyengar, i es mostrarà la caracterització de l'exponencial en relació amb els zeros dels polinomis truncats que s'ha comentat a la Introducció, amb el Teorema de Buckholtz 1.

La Secció 4, que és el cor del treball, mostra amb rigor el comportament asimptòtic dels zeros dels polinomis reescalats  $Q_n$ . Un pas fonamental en aquest estudi serà l'anàlisi de la funció entera  $h(z) = e^{1-z}z$ , que surt a la fórmula (1.3). Un cop fet això, es podran demostrar els dos apartats del Teorema de Szegő, que acabaran la Secció 4.

Per acabar, a la Secció 5, es presentaran uns resultats més recents, de Buckholtz i Walker, que mostren que els zeros de  $Q_n$  viuen fora de la regió tancada per  $S$  i que estan a una distància controlada d'aquesta corba.



## 2 Preliminars

En aquesta secció es presenta un recull de resultats d'Anàlisi Complexa que seran necessaris en els capítols pròpiament del treball.

Per començar, fem un aclariment sobre notació. D'ara endavant, per indicar que una funció  $f$  és holomorfa en un conjunt  $\Omega$ , denotarem  $f \in H(\Omega)$ .

El primer resultat que presentem és el ben conegut Teorema de Rouché, que serà necessari inicialment, a la Secció 3, per demostrar que els zeros dels polinomis  $P_n$  van a infinit. Més endavant, a la Secció 4, serà utilitzat per veure la distribució dels zeros dels polinomis  $Q_n$  al voltant de la Corba de Szegő. Finalment, també l'utilitzarem a la prova del Teorema de Hurwitz, al final d'aquest capítol.

**Teorema de Rouché.** *Sigui  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  obert. Sigui  $\mathcal{D} \subseteq \Omega$  un domini amb  $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \Omega$  i tal que  $\partial\mathcal{D}$  és una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos. Siguin  $f, g \in H(\Omega)$  amb  $Z(f) \cap \partial\mathcal{D} = Z(g) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$ . Si*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad z \in \partial\mathcal{D},$$

*aleshores*

$$\#(Z(f) \cap \mathcal{D}) = \#(Z(g) \cap \mathcal{D}).$$

### 2.1 La Fórmula de Stirling

La Fórmula de Stirling dona el comportament asimptòtic de  $n!$ . Normalment es troba en aquesta forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

De fet, es pot precisar més. Com es mostra en [Pri, Var],

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \dots$$

No utilitzarem aquest desenvolupament tan precís, però sí que utilitzarem que

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 + \epsilon_n, \tag{2.1}$$

on  $\{\epsilon_n\}_n$  és tal que  $\epsilon_n > 0$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ .

## 2.2 Ordre d'una funció entera

Els conceptes d'aquesta secció seran utilitzats durant la demostració del Teorema de Buckholtz 1 de caracterització de l'exponencial, en la Secció 3.

Aquí presentem una petita part de la teoria de funcions enteres (vegeu [Cal, Car] i [Lev, Chapter 1]). En concret, donarem el concepte d'ordre d'una funció entera, junt amb un parell de resultats característics d'aquesta mena de funcions.

Sigui  $f(z)$  una funció entera. Considerem la funció maximal associada:

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r \geq 0.$$

És clar que  $M_f$  és contínua i, pel Principi del mòdul màxim, creixent.

**Definició 2.1.** *Diem que  $f$  entera és una **funció d'ordre finit**, si existeixen una constant  $k > 0$  i un radi  $r_0(k)$  tals que, per tot  $r > r_0(k)$ ,*

$$M_f(r) < e^{r^k}.$$

*Diem **ordre de  $f$**  a l'ínfim de tots els  $k$  que verifiquen la desigualtat, i el denotem  $\rho_f$ .*

### Exemples 2.2.

- (a) Sigui  $f(z) = e^z$ . Com que  $M_f(r) = e^r$  per tot  $r \geq 0$ ,  $\rho_f = 1$ .
- (b) Els polinomis tenen ordre zero. Sigui  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \in \mathbb{C}[z]$ , i sigui  $C = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$ . Per tot  $r > 1$ ,

$$M_P(r) \leq |a_0| + |a_1|r + \dots + |a_n|r^n \leq Cr^n.$$

Aleshores, per tot  $\varepsilon > 0$  existeix  $r_0(\varepsilon)$  tal que, per tot  $r > r_0(\varepsilon)$ ,  $Cr^n < e^{r^\varepsilon}$  i, per tant,  $\rho_P = 0$ .

Utilitzant la definició, és possible caracteritzar l'ordre d'una funció entera d'ordre finit de la següent manera.

**Proposició 2.3.** *Sigui  $f$  una funció entera d'ordre finit. Llavors,*

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

*Demostració.* Sigui  $\rho_f$  l'ordre de la funció  $f$ . Sigui  $\varepsilon > 0$  un valor fix qualsevol. Per la definició d'ordre, existeix una  $r_0(\varepsilon)$  tal que, per tot  $r > r_0(\varepsilon)$ ,

$$M_f(r) < e^{r^{\rho_f + \varepsilon}}.$$

D'altra banda, per les propietats de l'ínfim  $\rho_f$ , existeix una successió  $\{r_n\}_n$  que tendeix a infinit i tal que

$$e^{r_n^{\rho_f - \varepsilon}} \leq M_f(r_n).$$

Prenent logaritmes de les desigualtats anteriors, obtenim que, per a  $r > r_0(\varepsilon)$ ,

$$\frac{\log \log M_f(r)}{\log r} < \rho_f + \varepsilon,$$

i, per a  $n$  gran,

$$\rho_f - \varepsilon < \frac{\log \log M_f(r_n)}{\log r_n}.$$

La combinació de les dues desigualtats mostra que  $\rho_f$  és el límit superior de l'enunciat.  $\square$

També és possible caracteritzar l'ordre d'una funció entera d'ordre finit utilitzant els coeficients del seu desenvolupament en sèrie de potències. De fet, aquesta és la versió que utilitzarem per demostrar que l'ordre d'una funció és menor o igual que 1, en el Teorema de Buckholtz 1 (Secció 3).

**Teorema 2.4.** *Una funció  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  entera és d'ordre finit, si i només si*

$$\tilde{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log |1/a_n|} < +\infty.$$

En aquest cas,  $\tilde{\rho}$  és igual a  $\rho_f$ , l'ordre de  $f$ .

*Demostració.* Demostrarem cada implicació per separat. A més, la prova de la primera implicació ens mostrarà que  $\tilde{\rho} \leq \rho_f$ , i la prova de l'altra implicació ens mostrarà que  $\tilde{\rho} \geq \rho_f$ ; així quedarà provada la segona part del teorema.

$\implies$ ] Suposem que  $f$  és una funció entera d'ordre finit  $\rho_f$ . Sigui  $\varepsilon > 0$ , definim  $a = \rho_f + \varepsilon$ . Per la definició d'ordre de  $f$ , existeix  $r(\varepsilon)$  tal que, per tot  $r > r(\varepsilon)$ ,

$$M_f(r) < e^{r^a}. \quad (2.2)$$

La intenció és veure que  $\tilde{\rho}$  és una cota inferior d' $a$ ; així, com que  $\varepsilon > 0$  pot ser tan petita com vulguem, tindrem que  $\tilde{\rho}$  és cota inferior de  $\rho_f$ . Aleshores, com que  $\rho_f$  és un valor finit,  $\tilde{\rho}$  serà també finit.

Per cercar una cota d' $a$ , primer acotem  $|a_n|$ . Donat que  $f$  és una funció entera, aplicant les desigualtats de Cauchy en qualsevol disc  $\overline{D}(0, r)$  amb  $r > 0$ , tenim que, per tot  $n \geq 0$ ,

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = |a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}.$$

Llavors, utilitzant la desigualtat (2.2), per tot  $r > r(\varepsilon)$  i tot  $n \geq 0$

$$|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < \frac{e^{r^a}}{r^n}.$$

Ara considerem la funció  $g(r) = e^{r^a}/r^n$  definida per  $r > 0$ . És fàcil veure que aquesta funció té un mínim en

$$r_n = \left(\frac{n}{a}\right)^{1/a}.$$

El valor de  $g$  en aquest punt és

$$g(r_n) = \left(\frac{ea}{n}\right)^{n/a},$$

i per tant, existeix  $n(\varepsilon)$  tal que, per tot  $n \geq n(\varepsilon)$ , es té  $r_n > r(\varepsilon)$ , i aleshores

$$|a_n| \leq \left(\frac{ea}{n}\right)^{n/a}.$$

Amb aquesta cota superior de  $|a_n|$  procedim a cercar una cota inferior d' $a$ . La igualtat anterior equival a

$$n^{n/a}|a_n| \leq (ea)^{n/a},$$

i, prenent logaritmes,

$$\frac{n}{a} \log n + \log |a_n| \leq \frac{n}{a} \log(ea).$$

Com que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  és entera, tenim que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . Aleshores, podem suposar que hem triat  $n(\varepsilon)$  prou gran, de manera que per tot  $n \geq n(\varepsilon)$  tenim  $|a_n| < 1$ . Així doncs, la desigualtat anterior equival a

$$\frac{n \log n}{\log |1/a_n|} - \frac{n}{\log |1/a_n|} \log(ea) \leq a.$$

Per ser  $f$  entera, es té que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$  i, per tant,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$ . La qual cosa implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |1/a_n|}{n} = \infty$ , és a dir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log |1/a_n|} = 0$ .

Aleshores, prenent el límit superior de la desigualtat anterior, obtenim que

$$a \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log |1/a_n|} = \tilde{\rho}.$$

Com que  $a = \rho_f + \varepsilon$ , i podem triar  $\varepsilon > 0$  tan petita com vulguem, llavors

$$\rho_f \geq \tilde{\rho},$$

i en particular  $\tilde{\rho} < \infty$ .

⟷] Suposem que  $\tilde{\rho} < \infty$ . Siguin  $\varepsilon > 0$  i  $k = \tilde{\rho} + \varepsilon$ , existeix  $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$  tal que, per tot  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{n \log n}{\log |1/a_n|} < k.$$

Com que  $f$  és entera, podem suposar que la  $n_0$  triada és tal que, per tot  $n \geq n_0$ , es compleix  $|a_n| < 1$ . Aleshores, per tot  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{n}{k} \log n < \log \frac{1}{|a_n|}.$$

Treient els logaritmes, obtenim que, per tot  $n \geq n_0$ ,

$$|a_n| < \frac{1}{n^{n/k}}. \tag{2.3}$$

A partir d'aquí, volem trobar una cota de  $M_f(r)$ . Sigui  $r > 0$ , considerem  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = r$ . Per l'acotació anterior, per tot  $n \geq n_0$ ,

$$|a_n z^n| < \frac{r^n}{n^{n/k}} = \left(\frac{r}{n^{1/k}}\right)^n.$$

Volem acotar els termes  $|a_n z^n|$  pel terme  $2^{-n}$  de la sèrie geomètrica. Observem que  $r/n^{1/k} < 1/2$  si i només si  $2r < n^{1/k}$ , que es té si i només si  $(2r)^k < n$ . Així doncs, si prenem l'enter  $n_1 = n_1(k, r) = \max(n_0, [(2r)^k])$ , tenim que, per tot  $n > n_1$ ,

$$|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}.$$

Aplicant la desigualtat anterior, obtenim

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{n_1} |a_n| r^n + \sum_{n>n_1} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{n_1} |a_n| r^n + 2^{-n_1}.$$

Considerem ara la funció,

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n, \quad r \geq 0.$$

Aleshores, la desigualtat anterior dona

$$M_f(r) \leq n_1 \mu(r) + 2^{-n_1}. \quad (2.4)$$

A continuació, veurem que l'índex  $n$  en el qual s'assoleix el màxim de  $\mu(r)$  és prou gran per poder aplicar la desigualtat (2.3). Així, obtindrem una cota de  $\mu(r)$ , que ens donarà una cota de  $M_f(r)$ .

Com que tot polinomi és una funció entera d'ordre finit 0 (Exemple 2.2), podem suposar que  $f$  no és un polinomi. El següent resultat permet descartar el creixement polinomial de  $M_f(r)$ .

**Lema 2.5.** *Sigui  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  una funció entera. Si existeix algun  $m \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M_g(r)}{r^m} < \infty,$$

*aleshores  $g$  és un polinomi de grau menor o igual que  $m$ .*

*Demostració.* Suposem que existeix  $m > 0$  com a l'enunciat. Volem veure que  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  és tal que, per tot  $n > m$ ,  $c_n = 0$ . En primer lloc, utilitzant les desigualtats de Cauchy, obtenim que, per tot  $n \geq 0$  i per tot  $r > 0$ ,

$$|c_n| = \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M_g(r)}{r^n} = \frac{M_g(r)}{r^m} \frac{1}{r^{n-m}}.$$

D'altra banda, per hipòtesi, existeix alguna constant  $C > 0$  i alguna successió creixent  $\{r_j\}_j$  de radis, que tendeix a infinit, tals que, per tot  $j \geq 0$ ,

$$\frac{M_g(r_j)}{r_j^m} \leq C.$$

Llavors, per tot  $j \geq 0$ , es té

$$|c_n| \leq \frac{M_g(r_j)}{r_j^m} \frac{1}{r_j^{n-m}} \leq \frac{C}{r_j^{n-m}}.$$

Conseqüentment, per  $n > m$ , fent tendir  $j$  a infinit, obtenim que  $|c_n| \leq 0$ , com volíem.  $\square$

Aquest lema ens permet afirmar que  $M_f(r)$  creix més que  $r^m$  per qualsevol  $m > 0$ . En particular, per la desigualtat (2.4),  $\mu(r)$  creix més que  $r^m$  per qualsevol  $m > 0$ .

Així doncs, per no contradir aquesta darrera afirmació, és necessari que l'índex  $n$  en el qual s'obté el màxim que defineix  $\mu(r)$  vagi a infinit a mesura que  $r$  tendeix a infinit. Per tant, podem aplicar la desigualtat (2.3) per acotar  $\mu(r)$ :

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n \leq \left( \frac{r}{n^{1/k}} \right)^n.$$

Optimitzem ara aquesta acotació. La funció  $\phi(n) = (r/n^{1/k})^n$ , definida per  $n \in (0, \infty)$  té un màxim en  $\tilde{n} = r^k/e$ , i el valor de la funció en aquest punt és, per tant,

$$\phi(\tilde{n}) = \left( \frac{r}{(r^k/e)^{1/k}} \right)^{r^k/e} = \exp \left( \frac{1}{ke} r^k \right).$$

Llavors,

$$\mu(r) \leq \exp \left( \frac{1}{ke} r^k \right),$$

la qual cosa implica, per la desigualtat (2.4),

$$M_f(r) \leq n_1 \exp \left( \frac{1}{ke} r^k \right) + 2^{-n_1}.$$

Finalment, utilitzant la caracterització de l'ordre de  $f$  en termes de  $M_f(r)$  (Proposició 2.3), veurem que  $\rho_f \leq \tilde{\rho}$ . Comencem prenent logaritmes de la desigualtat anterior:

$$\log M_f(r) \leq \log n_1 + \frac{1}{ke} r^k - n_1 \log 2.$$

Sigui  $C'$  una constant major o igual que  $(\log n_1 - n_1 \log 2)$ , aleshores

$$\log M_f(r) \leq r^k \left( \frac{1}{ke} + \frac{C'}{r^k} \right).$$

Prenent logaritmes de nou, i dividint per  $\log r$ , obtenim

$$\frac{\log \log M_f(r)}{\log r} \leq \frac{k \log r + \log(1/ke + C'/r^k)}{\log r} = k + \frac{\log(1/ke + C'/r^k)}{\log r}.$$

Per tant, fent el límit superior d'aquesta desigualtat, i aplicant la Proposició 2.3, arribem a la desigualtat

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( k + \frac{\log(1/ke + C'/r^k)}{\log r} \right) = k = \tilde{\rho} + \varepsilon.$$

Això prova que  $f$  és una funció entera d'ordre finit. A més, com que aquesta desigualtat val per  $\varepsilon > 0$  tan petit com vulguem, es té que  $\rho_f \leq \tilde{\rho}$ . □

### 2.3 El Teorema de Factorització de Hadamard

Tot seguit presentem breument el Teorema de Factorització de Hadamard (vegeu [Lev, Chapter 1]), que ens servirà en la prova del Teorema de Buckholtz 1 (Secció 3) per demostrar que una funció entera sense zeros d'ordre  $\rho_f$  és igual a una exponencial  $e^{g(z)}$ , on  $g(z)$  és un polinomi de grau menor o igual que  $\rho_f$ .

El Teorema de Factorització de Hadamard prova que per tota funció entera  $f$ , no idènticament nul·la i d'ordre finit  $\rho_f$ , existeix una factorització amb dues funcions d'ordre menor o igual que  $\rho_f$ : un producte canònic que conté els zeros de  $f$  i l'exponencial d'un polinomi de grau com a molt  $\rho_f$ .

Considerem  $f \in H(\mathbb{C})$  no idènticament nul·la, d'ordre finit  $\rho_f \geq 0$ , i amb  $f(0) \neq 0$ . Per ser  $f$  entera, o bé s'anul·la en un nombre finit de punts, o bé existeix una successió  $\{a_n\}_n$  dels zeros de  $f$  repetits segons la seva multiplicitat tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .

Per cercar la factorització, s'utilitza el fet general que les restriccions en el creixement d'una funció impliquen restriccions en la quantitat de zeros que pot tenir. En concret, a partir de la Fórmula de Jensen

$$\sum_{|a_n| \leq r} \log \left( \frac{r}{|a_n|} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|,$$

s'obté que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} \text{ convergeix per tot } s > \rho_f.$$

Aquesta darrera propietat permet construir un producte canònic

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_b \left( \frac{z}{a_n} \right),$$

on  $b = [\rho_f]$  i

$$E_b \left( \frac{z}{a_n} \right) = \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{(z/a_n)^1}{1} + \frac{(z/a_n)^2}{2} + \dots + \frac{(z/a_n)^b}{b} \right),$$

de manera que  $F$  és una funció entera que s'anul·la exactament en  $\{a_n\}_n$ .

Podem generalitzar el que hem vist per a  $f$  amb  $f(0) = 0$  afegint-li el factor  $z^m$ , on  $m$  indica la multiplicitat d'aquest zero:

$$F(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

A més, com que la quantitat de zeros de  $F$  és restringida, el seu creixement també és restringit, i en particular,  $F$  és d'ordre finit menor o igual que  $\rho_f$ .

D'aquesta manera, es pot veure que el quocient  $f/F$  és una funció entera d'ordre finit menor o igual que  $\rho_f$ , que no s'anul·la mai. Llavors és immediat (per a tota funció sense zeros  $h$  existeix una determinació de  $\log h$ ) que existeix una funció entera  $g$  tal que  $f/F = e^g$ .

D'altra banda, amb arguments similars al Lema 2.5, es pot demostrar que la funció  $g$  és un polinomi complex de grau menor o igual que l'ordre de  $f$ .

Tot això es recull en el següent Teorema.

**Teorema de Factorització de Hadamard.** *Siguin  $f, \rho_f, \{a_n\}_n, m$  definits anteriorment. Siguí  $b = [\rho_f]$ . Aleshores, existeix un polinomi  $g \in \mathbb{C}[z]$  tal que  $\deg(g) \leq \rho_f$  i*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_b\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

*En particular, en cas que  $f$  no s'anul·li mai, existeix un polinomi complex  $g \in \mathbb{C}[z]$  de grau menor o igual que  $\rho_f$  tal que  $f(z) = e^{g(z)}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .*

## 2.4 El Teorema de Hurwitz

Aquest teorema serà utilitzat, en la demostració del Teorema de Buckholtz 1 (Secció 3), per veure que una funció entera concreta no s'anul·la en cap punt.

**Teorema de Hurwitz.** *Siguí  $G \subseteq \mathbb{C}$  un domini i siguin  $f_k \in H(G)$ ,  $k \geq 0$ , tals que  $f_k \rightarrow f$  uniformement en compactes de  $G$ , on  $f \in H(G)$  no és idènticament nul·la en  $G$ . Suposem que  $f$  té un zero  $z_0 \in G$  d'ordre  $m$ . Aleshores, per tot  $\delta > 0$  prou petit i per tot  $k \in \mathbb{N}$  (dependent de  $\delta$ ) prou gran,  $f_k$  té exactament  $m$  zeros al disc  $\mathcal{D}(z_0, \delta)$ .*

*Demostració.* Per ser  $f$  no idènticament nul·la i holomorfa en  $G$ , els seus zeros són punts aïllats. Aleshores existeix  $\delta > 0$  tal que

$$\overline{\mathcal{D}(z_0, \delta)} \subseteq G \quad \text{i} \quad Z(f) \cap \overline{\mathcal{D}(z_0, \delta)} = \{z_0\}.$$

En particular,

$$\varepsilon = \min_{\partial \mathcal{D}(z_0, \delta)} |f(z)| > 0.$$

A més, com que per cada  $k \geq 0$  els zeros de  $f_k$  són aïllats, sense punts d'acumulació a  $G$ , el conjunt

$$\bigcup_{k \geq 0} Z(f_k)$$

és numerable. Llavors podem suposar que  $\delta$  és tal que, a més,

$$\bigcup_{k \geq 0} Z(f_k) \cap \partial \mathcal{D}(z_0, \delta) = \emptyset.$$

Per altra part, com que  $f_k \rightarrow f$  uniformement en compactes de  $G$ , i  $\partial \mathcal{D}(z_0, \delta)$  és compacte, existeix  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que per tot  $k \geq k_0$

$$\max_{\partial \mathcal{D}(z_0, \delta)} |f_k(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, per a tot  $z \in \partial \mathcal{D}(z_0, \delta)$ , i per a tot  $k \geq k_0$ ,

$$|f_k(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq |f(z)|.$$

Aleshores, aplicant el Teorema de Rouché a  $f_k$  i  $f$ , per  $k \geq k_0$  tenim

$$\#(Z(f_k) \cap \mathcal{D}(z_0, \delta)) = \#(Z(f) \cap \mathcal{D}(z_0, \delta)) = m.$$

□



### 3 Els zeros dels polinomis truncats $P_n$

En aquesta secció fem els detalls de l'esquema indicat a la Introducció, pel que fa al comportament asimptòtic dels zeros dels polinomis  $P_n$ . Començarem provant que aquests zeros se'n van a infinit quan  $n$  creix.

Ens serà útil tenir en compte que, per a tot  $n \geq 0$  i tot  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$e^z = P_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (3.1)$$

**Proposició 3.1.** *Per tot  $r > 0$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, per tot  $n \geq n_0$ ,*

$$Z(P_n) \cap \mathcal{D}(0, r) = \emptyset.$$

*Demostració.* Apliquem el Teorema de Rouché a les funcions  $P_n(z)$ ,  $e^z \in H(\mathbb{C})$ . Fixem un  $r > 0$  tan gran com vulguem. Per poder aplicar el Teorema de Rouché, demanem també que  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z(P_n)) \cap \{|z| = r\} = \emptyset$ . Això no és cap restricció, ja que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z(P_n)$  és numerable. Utilitzant la igualtat (3.1), tenim que, per  $|z| = r$

$$|P_n(z) - e^z| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}.$$

La sèrie del costat dret de la desigualtat és la cua de la sèrie de l'exponencial  $e^r$  i, per tant, es pot fer arbitràriament petita a mesura que  $n$  es fa gran. D'altra banda,

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \geq \min_{|z|=r} e^{\operatorname{Re}(z)} = e^{-r}.$$

És a dir,  $|e^z|$  està afitat per un valor fix que només depèn de  $r$ ; aleshores existeix  $n_0 > 0$  prou gran de manera que si  $n \geq n_0$  aleshores

$$|P_n(z) - e^z| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} < e^{-r} \leq |e^z|, \quad |z| = r.$$

Així doncs, pel Teorema de Rouché,  $P_n$  no té zeros al disc  $\mathcal{D}(0, r)$  perquè perquè  $e^z$  no s'anul·la mai. □

Passem a demostrar el Teorema de Iyengar, provat per K. S. K. Iyengar en [Iyen].

**Teorema de Iyengar.** *Per  $n > 0$  gran, existeixen nombres  $\alpha_n \in (0, 1)$  tals que*

$$Z(P_n) \subseteq \mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{C} : n\alpha_n < |z| < n\}.$$

*A més,  $\{\alpha_n\}_n$  és una successió monòtona creixent amb  $\alpha_n < \alpha$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ , on  $\alpha \in \mathbb{R}$  és l'únic zero de la funció  $f(t) = 1 + t + \log(t)$ ,  $t \in (0, 1]$ .*

*Demostració.* Desigualtat  $|z| < n$ :

Considerem els polinomis  $P_n$  reescalats  $Q_n(z) = P_n(nz)$ , i considerem el polinomi

$$g(z) = z^n Q_n\left(\frac{1}{z}\right) = z^n P_n\left(\frac{n}{z}\right) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n^k}{z^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} z^{n-k} = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n.$$

Observem que  $b_0 = b_1 > b_2 > \dots > b_n$ , ja que

$$b_0 = \frac{n^n}{n!}, b_1 = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, b_{n-1} = \frac{n}{1!}, b_n = 1.$$

Serà suficient veure que tots els zeros de  $g(z)$  es troben en  $|z| > 1$ , ja que si  $g$  no s'anul·la en  $|z| \leq 1$  llavors  $Q_n$  no s'anul·la en  $|z| \geq 1$  i  $P_n$  no s'anul·la en  $|z| \geq n$ .

Per a veure això escrivim

$$(1-z)g(z) = b_0 - \left( (b_0 - b_1)z + (b_1 - b_2)z^2 + \dots + (b_{n-1} - b_n)z^n + b_n z^{n+1} \right). \quad (3.2)$$

Utilitzant la desigualtat triangular  $|z+w| \geq |z| - |w|$ , obtenim, per  $|z| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} |(1-z)g(z)| &\geq b_0 - \left( (b_0 - b_1)|z| + (b_1 - b_2)|z|^2 + \dots + (b_{n-1} - b_n)|z|^n + b_n|z|^{n+1} \right) \\ &\geq b_0 - |z| \left( (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots + (b_{n-1} - b_n) + b_n \right) \\ &= b_0(1 - |z|). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Amb això veiem que si  $|z| < 1$ , necessàriament  $g(z) \neq 0$ . Ara comprovarem que en  $|z| = 1$ , la funció  $(1-z)g(z)$  només s'anul·la per  $z = 1$ . Aleshores tindrem  $g(z) \neq 0$  per  $|z| \leq 1$ , perquè  $g(1) \neq 0$ .

La desigualtat triangular és estricta excepte en el cas que  $z$  i  $w$  estiguin alineats, és a dir, que  $\arg(z) = \arg(w)$ . Representem en forma polar un valor  $z$  tal que  $|z| = 1$ :  $e^{\theta i}$  per algun  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Per (3.2),

$$(1-z)g(z) = b_0 + (b_1 - b_0)e^{\theta i} + (b_2 - b_1)e^{2\theta i} + \dots + (b_n - b_{n-1})e^{n\theta i} - b_n e^{(n+1)\theta i}.$$

Aleshores, la desigualtat triangular de (3.3) és una igualtat si i només si

$$0 = \arg(b_0) = \arg((b_1 - b_0)e^{\theta i}) = \dots = \arg(b_n e^{(n+1)\theta i}),$$

és a dir, si i només si  $0 = \theta = 2\theta = \dots = (n+1)\theta$ . Per tant,  $(1-z)g(z) = 0$  si i només si  $z = 1$ .

Desigualtat  $n\alpha_n < |z|$ :

Sigui  $z_0 \in Z(P_n)$  un zero de  $P_n(z)$  (observem que  $z_0 \neq 0$ , ja que  $P_n(0) = 1$ ). Com que  $P_n(z_0) = 0$ , utilitzant la igualtat (3.1) veiem que

$$e^{z_0} = P_n(z_0) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_0^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_0^k}{k!} = \frac{z_0^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z_0^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$$

Com que  $z_0$  és arrel de  $P_n$ , pel que hem demostrat anteriorment,  $|z_0| < n$ . Ara definim  $u_0 = \frac{|z_0|}{n+1} \in \mathbb{R}$  i mirem d'acotar  $e^{-|z_0|}$ . Trobarem una cota per  $e^{-u_0}$  i deduirem que existeix una successió  $\{\alpha_n\}_n$ , com la de l'enunciat, tal que  $u_0$  és major que  $\alpha_n$  per  $n$  gran, i conseqüentment  $|z_0| > n\alpha_n$ .

Observem que, amb aquesta definició de  $u_0$ , tenim

$$\begin{aligned} e^{-|z_0|} &< e^{Re(z_0)} = |e^{z_0}| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_0^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z_0|^k}{k!} = |z_0|^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z_0|^m}{(n+1+m)!} = |z_0|^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{((n+1)u_0)^m}{(n+1+m)!} \\ &= \frac{|z_0|^{n+1}}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{(n+1)u_0}{n+2} + \frac{(n+1)^2 u_0^2}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{(n+1)^m u_0^m}{(n+2)\dots(n+1+m)} + \dots \right) \\ &< \frac{|z_0|^{n+1}}{(n+1)!} \left( 1 + u_0 + u_0^2 + \dots + u_0^m + \dots \right). \end{aligned}$$

Com que  $u_0 = |z_0|/(n+1) < n/(n+1) = 1 - 1/(n+1) < 1$ , la sèrie geomètrica anterior és sumable i queda:

$$e^{-|z_0|} < \frac{|z_0|^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{1}{1-u_0} \right).$$

A més, tenim que

$$\frac{1}{n+1} < 1 - u_0,$$

aleshores,

$$e^{-|z_0|} < \frac{|z_0|^{n+1}}{(n+1)!} (n+1) = \frac{|z_0|^{n+1}}{n!} = \frac{(u_0(n+1))^{n+1}}{n!}.$$

Donat que  $e^{-|z_0|} = (e^{-u_0})^{n+1}$ , la desigualtat anterior dona

$$e^{-u_0} < \frac{u_0(n+1)}{(n!)^{1/(n+1)}},$$

que equival a

$$u_0 e^{1+u_0} > e \frac{(n!)^{1/(n+1)}}{n+1}. \quad (3.4)$$

A continuació estudiem el comportament asimptòtic de la banda dreta de la desigualtat anterior. A partir d'aquí, al valor  $\epsilon_n$  no el considerarem un valor fix; com en la Fórmula de Stirling (2.1), denotarà simplement una successió de valors positius ( $\epsilon_n > 0$ ) que tendeix a zero, i que pot anar canviant pas a pas.

**Lema 3.2.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/(n+1)}}{n+1} = \frac{1}{e}.$$

*Demostració.* Per la Fórmula de Stirling (2.1), obtenim

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/(n+1)}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^{1/(n+1)}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\pi n)^{1/2(n+1)} n^{n/(n+1)} e^{-n/(n+1)}}{n+1} \\ &= e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-1/(n+1)}}{n+1} = e^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{n^{1/(n+1)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

□

Com a conseqüència d'aquest Lema i la desigualtat (3.4), per  $n > 0$  gran,

$$u_0 e^{1+u_0} > 1 - \epsilon_n.$$

Prenent logaritmes d'aquesta desigualtat, tenim, per  $n > 0$  gran,

$$1 + u_0 + \log(u_0) > \log(1 - \epsilon_n),$$

on  $\log(1 - \epsilon_n)$  és un valor negatiu que tendeix a zero quan  $n$  tendeix a infinit. Per tant, podem denotar  $\log(1 - \epsilon_n)$  per  $-\epsilon_n$ . D'aquesta manera,

$$1 + u_0 + \log(u_0) > -\epsilon_n. \quad (3.5)$$

Ara observem que la funció  $f(u_0) = 1 + u_0 + \log(u_0)$  és contínua i creixent en  $(0, 1]$ , ja que  $f'(u_0) = 1 + \frac{1}{u_0}$ . Llavors, com que  $f(1/e^2) < 0$  i  $f(1/e) > 0$ , hi ha una única arrel  $\alpha$  de  $f$ , situada en  $(1/e^2, 1/e)$ . A més, per cada  $\epsilon_n$  existeix una única  $\alpha_n < \alpha$  tal que  $f(\alpha_n) = -\epsilon_n$ . Aquests  $\alpha_n$  creixen amb  $n$  i tendeixen a  $\alpha$ .

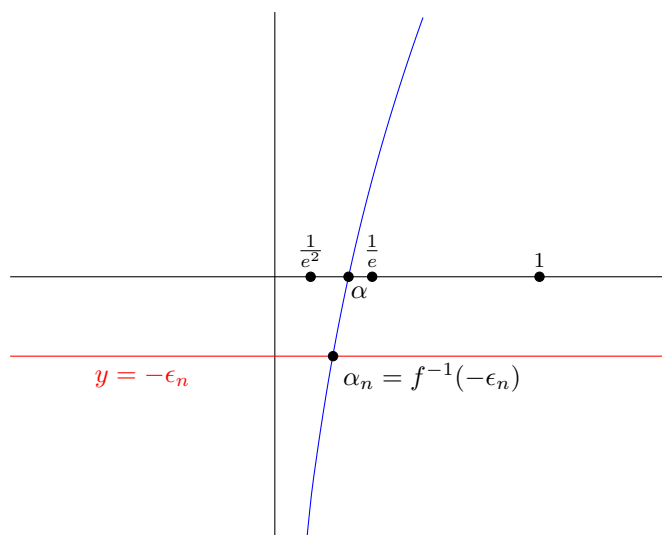


Figura 3: Valors  $\epsilon_n$  i  $\alpha_n$ .

Per tant, com que per  $n > 0$  gran  $f(u_0) > -\epsilon_n$  si  $u_0 \in (\alpha_n, 1]$ , si volem que es compleixi la desigualtat anterior (3.5), caldrà que  $u_0 > \alpha_n$ , per  $n > 0$  gran. Aleshores, per  $n$  gran tenim, com volíem,

$$n > |z_0| = (n + 1)u_0 > nu_0 > n\alpha_n.$$

□

### Observacions 3.3.

- 1) El valor  $\alpha$  es podria aproximar numèricament. Per exemple, utilitzant el Mètode de Newton amb  $x_0 = 1/e$  i quatre iteracions, obtenim  $\alpha = 0.27846454\dots$
- 2) El valor  $-\alpha \in \mathbb{R}^-$  és el tall de la corba  $|ze^{1-z}| = 1$  amb el semieix  $\mathbb{R}^-$ , ja que  $-\alpha e^{1-(-\alpha)} = 1$ . L'altre tall d'aquesta corba amb  $\mathbb{R}$  és el punt  $z = 1$ .

Com ja s'ha comentat, de l'acotació del Teorema de Iyengar surt de manera natural la consideració dels polinomis reescalats  $Q_n(z) = P_n(nz)$ . Fent això, podem reformular aquest teorema.

**Corol·lari 3.4.** *Siguin  $\alpha_n$  i  $\alpha$  com al Teorema de Iyengar. Per  $n > 0$  gran,*

$$Z(Q_n) \subseteq \mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{C} : \alpha_n < |z| < 1\}.$$

Així arribem a la conclusió explicada en la Introducció. Com que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$  i  $\alpha_n < \alpha$ , és evident que els zeros dels diferents  $Q_n$  s'acumularan forçosament a

$$\bar{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq |z| \leq 1\}.$$

Això ens ofereix la possibilitat de continuar l'estudi dels zeros de  $P_n$  observant el comportament dels zeros de  $Q_n$  en aquesta regió concreta.

Per acabar la secció, demostrem el teorema de caracterització de l'exponencial de J.D. Buckholtz [Buck1, Theorem 1], esmentat en la Introducció. Veurem que el fet que els zeros dels polinomis truncats de la sèrie de Taylor d'una funció entera tinguin mòdul d'ordre  $n$ , caracteritza la funció exponencial.

**Teorema de Buckholtz 1.** *Suposem que  $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$  és una funció entera. Aleshores, les següents afirmacions són equivalents:*

- (i) *Existeixen  $c > 0$  i  $n_0 > 0$  tals que per tot  $n \geq n_0$ , el polinomi truncat  $\sum_{p=0}^n a_p z^p$  no té cap zero en el disc  $|z| \leq nc$ .*
- (ii)  *$a_0 \neq 0$  i  $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$  és el desenvolupament en sèrie de potències de l'exponencial  $a_0 e^{a_1 z/a_0}$ .*

*Demostració.* Provem cada implicació per separat.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Siguen  $\tilde{P}_n(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$  els polinomis truncats de la sèrie de potències  $a_0 e^{a_1 z/a_0} = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{a_1}{a_0} z\right)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{a_0} z^p$ . Tenim  $e^{a_1 z/a_0} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{a_1}{a_0} z\right)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{a_0} z^p$ . Fent el canvi de variable  $w = a_1 z/a_0$  veiem que

$$\frac{1}{a_0} \tilde{P}_n(z) = \sum_{p=0}^n \frac{a_p}{a_0} z^p = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \left(\frac{a_1}{a_0} z\right)^p = P_n(w).$$

Aleshores, pel Teorema d'Iyengar, existeix  $n_0 > 0$  tal que per tot  $n \geq n_0$ ,  $P_n(w)$  no té cap zero en el disc  $|w| \leq n/e^2$ ; conseqüentment, existeix  $c = \left|\frac{a_0}{a_1}\right| \frac{1}{e^2} > 0$  tal que per tot  $n \geq n_0$ ,  $\tilde{P}_n(z)$  no té cap zero en el disc  $|z| \leq nc$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Primer veurem que  $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$  és una funció d'ordre més petit o igual que 1, utilitzant la fórmula que caracteritza l'ordre d'una funció entera amb els coeficients de la seva sèrie de potències (Teorema 2.4). Després, amb l'ajuda del Teorema de Hurwitz, veurem que  $f$  no s'anul·la mai. Finalment, fent ús del Teorema de Factorització de Hadamard, provarem que  $f$  és el desenvolupament en sèrie de potències de  $a_0 e^{a_1 z/a_0}$ .

Sigui  $n \geq n_0$ , i siguin  $\xi_1, \dots, \xi_n$  els zeros del polinomi  $\tilde{P}_n(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$ , aleshores  $\tilde{P}_n(z) = a_n(z - \xi_1) \cdots (z - \xi_n)$ , i conseqüentment,  $|a_0| = |\tilde{P}_n(0)| = |a_n| |\xi_1| \cdots |\xi_n|$ . Aleshores, aplicant (i) per a cada zero, tenim

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |\xi_1| \cdots |\xi_n| > (nc)^n$$

i, per tant,

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{1/n} > nc.$$

Prenent logaritmes,

$$\frac{1}{n} (\log |a_0| + \log |1/a_n|) > \log n + \log c,$$

és a dir,

$$\log |a_0| + \log |1/a_n| > n \log n + n \log c. \quad (3.6)$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{n \log(n)}{\log |1/a_n|} &= \frac{n \log n + n \log c - n \log c}{\log |1/a_n|} < \\ &< \frac{\log |a_0| + \log |1/a_n| - n \log c}{\log |1/a_n|} = 1 + \frac{\log |a_0|}{\log |1/a_n|} - \frac{n \log c}{\log |1/a_n|}. \end{aligned}$$

Donat que  $f$  és una funció entera, es té  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . Aleshores, quan  $n$  tendeix a infinit,

$$\epsilon_n = \frac{\log |a_0|}{\log |1/a_n|} \rightarrow 0.$$

Llavors, per (3.6) un cop més,

$$\frac{n \log(n)}{\log |1/a_n|} < 1 + \epsilon_n - \frac{n \log c}{\log |1/a_n|} < 1 + \epsilon_n + \frac{n |\log c|}{n \log n + n \log c - \log |a_0|} = 1 + \epsilon_n,$$

i prenent el límit superior en cada banda de la desigualtat,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(n)}{\log |1/a_n|} \leq 1.$$

Pel Teorema 2.4, això garanteix que  $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$  té ordre  $\rho_f \leq 1$ .

Passem a veure que  $f$  no s'anul·la mai. Suposem que  $f$  s'anul·la en  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Com que  $\tilde{P}_n \rightarrow f$  uniformement sobre compactes de  $\mathbb{C}$ , aplicant el Teorema de Hurwitz a  $\{\tilde{P}_n\}_n$  i  $f$ , veiem que per tot  $\delta > 0$  prou petita i per a  $n$  prou gran (depenent de  $\delta$ ),

$$Z(\tilde{P}_n) \cap \mathcal{D}(z_0, \delta) \neq \emptyset.$$

En particular,

$$Z(\tilde{P}_n) \cap \mathcal{D}(0, |z_0| + \delta) \neq \emptyset.$$

Això contradia el fet que, per tot  $n \geq n_0$ ,

$$Z(\tilde{P}_n) \cap \overline{\mathcal{D}(0, cn)} = \emptyset.$$

Per tant,  $f$  no s'anul·la en cap punt.

Finalment veiem que  $f(z) = a_0 e^{a_1 z/a_0}$ . La funció  $f$  és una funció entera d'ordre  $\rho_f$  més petit o igual a 1, que no s'anul·la mai. Aleshores, pel Teorema de Factorització de Hadamard, existeix un polinomi complex  $g \in \mathbb{C}[z]$  de grau  $\deg(g) \leq \rho_f$  tal que  $f(z) = e^{g(z)}$ , per a tot  $z \in \mathbb{C}$ . És a dir, existeixen  $b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  tals que

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p = e^{b_0 + b_1 z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En particular, per  $z = 0$  s'obté que  $a_0 = e^{b_0}$ . Per tant,  $a_0 \neq 0$  i

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p = a_0 e^{b_1 z} = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b_1 z)^p}{p!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Igualant els termes de grau 1 d'aquesta igualtat, obtenim que  $b_1 = a_1/a_0$ . Llavors, finalment,

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p = a_0 e^{a_1 z/a_0}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

## 4 Prova del Teorema de Szegő

En aquesta secció explicarem el treball de Szegő sobre el comportament asimptòtic dels zeros dels polinomis  $Q_n$ , seguint un fil conductor similar al de l'article de Bernardo de la Calle i Francisco Gibaja [Cal, Car]. La secció es dividirà en tres subseccions.

En la primera, analitzarem la funció  $h(z) = e^{1-z}z$ . En la segona, utilitzarem l'estudi de la funció  $h$  per provar la inclusió  $Z' \subseteq S$  del primer apartat del Teorema de Szegő. Finalment, en la tercera subsecció, demostrarem el segon apartat del Teorema de Szegő, que provarà també la inclusió  $S \subseteq Z'$  restant del primer apartat.

Per justificar la fórmula (1.1) vista a la Introducció, utilitzem la següent fórmula de Taylor amb terme de resta integral.

**Proposició 4.1.** *Per tot  $n \geq 0$  i per tot  $z \in \mathbb{C}$*

$$e^z = P_n(z) + \frac{e^z}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt.$$

*Demostració.* Fem inducció sobre  $n$ . Observem prèviament que integrem funcions de tipus  $f(w) = e^{-w}w^k$  per algun  $k \geq 0$ . Aquestes funcions són enteres i, per tant, tenen primitiva també entera; la integral no dependrà del camí que triem per anar de 0 a  $z$ , sinó només del punt d'inici i final.

Cas  $n = 0$ . Tenim  $P_0(z) = 1$ , i aleshores

$$P_0(z) + \frac{e^z}{0!} \int_0^z e^{-t} t^0 dt = 1 + e^z \int_0^z e^{-t} dt = 1 + e^z \left[ -e^{-t} \right]_0^z = e^z.$$

Suposem que la igualtat és certa per a  $n$  amb  $n > 0$ , i veiem el cas  $n + 1$ . Utilitzem integració per parts amb  $u = t^{n+1}$  i  $dv = e^{-t} dt$ :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) + \frac{e^z}{(n+1)!} \int_0^z e^{-t} t^{n+1} dt &= P_n(z) + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^z}{(n+1)!} \int_0^z e^{-t} t^{n+1} dt = \\ &= P_n(z) + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^z}{(n+1)!} \left( -e^{-z} z^{n+1} + (n+1) \int_0^z e^{-t} t^n dt \right) = \\ &= P_n(z) + \frac{e^z}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt = e^z \end{aligned}$$

□

Com hem observat a la Introducció, amb aquesta igualtat veiem que els zeros de  $P_n$  equivalen a les solucions de l'equació

$$1 = \frac{1}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt,$$

i fent el canvi de variable  $t = nu$  a la integral, i emprant la Fórmula de Stirling, hem provat que, per  $n$  gran, les solucions de  $P_n(nz) = Q_n(z) = 0$  són les solucions de l'equació (1.3),

$$\int_0^z (e^{1-u}u)^n du = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 + \epsilon_n).$$



Finalment, a partir d'aquesta igualtat hem raonat, sense entrar en demostracions, que la corba candidata a ser la regió límit dels zeros de  $Q_n$  és la Corba de Szegő,

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z}z| = 1, |z| \leq 1\}.$$

La intenció principal a partir d'aquí és demostrar amb rigor aquest resultat. En concret, quedarà provat en el Corol·lari 4.12 de la Proposició Principal (Secció 4.2), que diu que tot punt d'acumulació del conjunt de zeros dels  $Q_n$  pertany a  $S$ .

Un pas fonamental en aquest objectiu és entendre el comportament asimptòtic de les funcions

$$H_n(z) = \int_0^z (e^{1-u}u)^n du, \quad n > 0,$$

que queda determinat pel comportament de la funció  $h(z) = e^{1-z}z$ .

#### 4.1 La funció $h(z) = e^{1-z}z$

És clar que  $h$  és una funció entera i que la seva derivada  $h'(z) = (1-z)e^{1-z}$  només s'anul·la en  $z = 1$ . Per tant, pel Teorema de la funció inversa,  $h$  és localment invertible en tots els punts  $z_0 \neq 1$ , amb inversa  $h^{-1}$  holomorfa.

L'objectiu principal d'aquesta secció és veure que  $h$  és una transformació conforme entre un domini  $\Omega$ , que conté  $S$ , i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ . És a dir, volem veure que  $h$  és bijectiva, holomorfa i amb inversa holomorfa en aquests conjunts. També veurem que aquesta mateixa  $h$  és una representació conforme entre la regió  $\mathcal{U}$  tancada per  $S$  i el disc unitat  $\mathbb{D}$ .

**Observació 4.2.** Per definició de  $S$  i  $h$ , la Corba de Szegő és la part inclosa dins el disc unitat tancat de la corba de nivell  $|h(z)| = 1$ . És a dir,  $S = \{z \in \mathbb{C} : |h(z)| = 1\} \cap \overline{\mathbb{D}}$ .

Per començar amb l'estudi de  $h$ , reescrivim-la en coordenades polars. Sigui  $z = x+iy = re^{i\theta}$ , amb  $r \geq 0$  i  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Aleshores

$$h(z) = e^{1-z}z = e^{1-r\cos(\theta)-ir\sin(\theta)}re^{i\theta} = re^{1-r\cos(\theta)}e^{i(\theta-r\sin(\theta))}$$

i, per tant, el mòdul i l'argument principal de  $h$  són:

$$|h(z)| = re^{1-r\cos(\theta)} = e^{1-x}\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\text{Arg}(h(z)) = \theta - r\sin(\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Observem que la funció  $g(\theta) = \text{Arg}(h(re^{i\theta}))$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , és senar; ja que per tot  $\theta \in [0, \pi]$  es té  $\text{Arg}(h(re^{i\theta})) = -\text{Arg}(h(re^{-i\theta}))$ .

Considerem tot seguit la corba formada pels punts on aquest argument s'anul·la.

**Definició 4.3.** Sigui  $r : (-\pi, \pi) \rightarrow (0, \infty)$  la funció definida per

$$r(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sin(\theta)}, & \theta \neq 0 \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

Definim la corba

$$\Gamma = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r = r(\theta), \theta \in (-\pi, \pi)\}.$$

De fet, la corba de nivell  $\text{Arg}(h) = 0$ , que és el conjunt format pels  $z = re^{i\theta}$  que tenen  $\text{Arg}(h(z)) = \theta - r \sin(\theta) = 0$ , està formada per  $\Gamma$  i la semirecta  $\theta = 0$ . Per tant, es pot veure  $\Gamma$  com el conjunt format per 1 i els  $z \notin \mathbb{R}$  amb  $\text{Arg}(h(z)) = 0$ .

Aquesta corba es pot parametritzar per  $\theta \in (-\pi, \pi)$  de la següent manera:

$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos(\theta), r(\theta) \sin(\theta)) = \left( \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \theta \right), \quad (4.1)$$

entenent que quan  $\theta = 0$  la funció  $\frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  pren el valor  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 1$ .

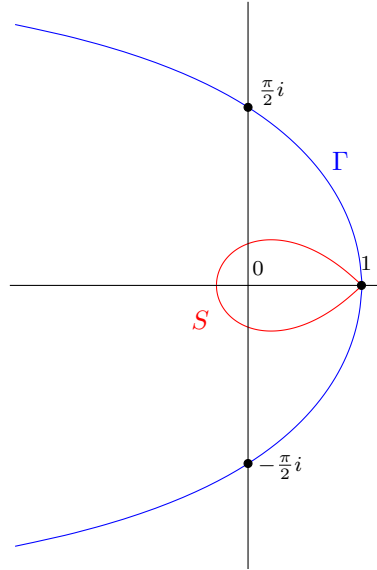


Figura 4: Corba  $\Gamma$  i Corba de Szegő.

**Lema 4.4.** *La funció  $r(\theta)$  és parell, positiva, i diferenciable en  $(-\pi, \pi)$ . A més, és creixent en l'interval  $(0, \pi)$ , amb imatge  $(1, \infty)$ . En particular,  $r(\theta)$  té asímptotes horitzontals en  $\theta = -\pi$  i  $\theta = \pi$ .*

*Demostració.* Que  $r(\theta)$  és parell, positiva i diferenciable en  $(-\pi, \pi)$ , és evident.

Veiem ara que  $r(\theta)$  creix de 1 a infinit en  $(0, \pi)$ . Tenim que

$$r'(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)}{(\sin(\theta))^2}$$

és positiva si i només si  $\sin(\theta) > \theta \cos(\theta)$ , la qual cosa es compleix si i només si  $\theta = \pi/2$  o

$$\begin{cases} \tan(\theta) > \theta & \text{per } \theta \in (0, \pi/2) \\ \tan(\theta) < \theta & \text{per } \theta \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Com que això és cert per tot  $\theta \in (0, \pi)$ , aleshores  $r(\theta)$  és creixent en aquest interval. A més, com que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = 1 \text{ i } \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} r(\theta) = +\infty,$$

$r(\theta)$  té una asímptota en  $\theta = \pi$  i, pel Teorema del valor intermedi, recorre l'interval  $(1, \infty)$ .  $\square$

Com a conseqüència del Lema 4.4, de la definició de  $\Gamma$ , i de la parametrització que n'hem donat a (4.1), veiem que  $\Gamma$  és una corba simètrica respecte l'eix real, que viu entre les asímptotes  $\text{Im}(z) = -\pi$  i  $\text{Im}(z) = \pi$ .

**Observació 4.5.** Podem veure la corba  $\Gamma$  com  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \{1\}$ , on

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \{z = r(\theta)e^{i\theta} : \theta \in (0, \pi)\} = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \\ \Gamma^- &= \{z = r(\theta)e^{i\theta} : \theta \in (-\pi, 0)\} = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}.\end{aligned}$$

Així doncs,  $\Gamma^+$  és una corba al semiplà superior  $\{\text{Im}(z) > 0\}$ , formada pels  $z = r(\theta)e^{i\theta}$  que “comencen” (quan  $\theta \rightarrow 0$ ) amb radi 1, i després es van desplaçant en sentit antihorari (els seus arguments  $\theta$  van de 0 a  $\pi$ ) i els seus mòduls  $r(\theta)$  van creixent cap a infinit; en concret, quan  $\theta \rightarrow \pi$ ,  $z$  tendeix a l'asímtota  $\text{Im}(z) = \pi$ . La corba  $\Gamma^-$  és simètrica a  $\Gamma^+$  respecte l'eix real.

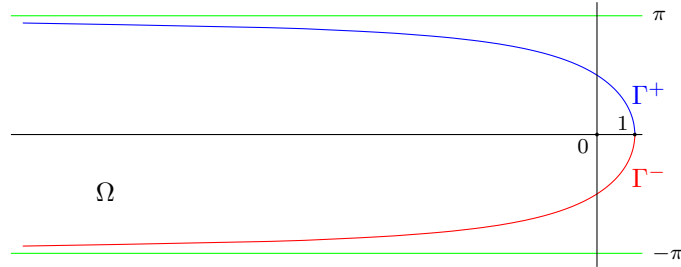


Figura 5: Corbes  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ , i el seu comportament asimptòtic.

La corba  $\Gamma$  divideix el pla complex en dues regions obertes i no acotades.

**Definició 4.6.** *Diem*

$$\Omega = \{z = \rho e^{i\theta} : \theta \in (-\pi, \pi), 0 \leq \rho < r(\theta)\} \cup (-\infty, 0).$$

Aquest domini està limitat per la corba  $\Gamma$ , que és la seva frontera, i conté el disc unitat. En particular, conté la Corba de Szegő, llevat del punt 1.

**Observació 4.7.** Anàlogament a  $\Gamma$ , el domini  $\Omega$  es pot veure com  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (-\infty, 1)$  on

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{z = \rho e^{i\theta} : \theta \in (0, \pi), \rho < r(\theta)\} = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \\ \Omega^- &= \{z = \rho e^{i\theta} : \theta \in (-\pi, 0), \rho < r(\theta)\} = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}.\end{aligned}$$

Passem a veure el resultat més important d'aquesta secció.

**Teorema 4.8.** *La funció  $h$  és una transformació conforme entre  $\Omega$  i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ ,*

$$h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [1, \infty).$$

*A més, cada  $x \in (1, \infty)$  té dues preimatges  $z^+ \in \Gamma^+$ ,  $z^- \in \Gamma^-$ , simètriques respecte  $\mathbb{R}$ .*

*Demostració.* Per veure que  $h$  és una transformació conforme entre  $\Omega$  i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  caldrà demostrar que  $h$  és holomorfa en  $\Omega$ , que és una bijecció entre  $\Omega$  i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  i que  $h^{-1}$  és holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ . Ja sabem que  $h$  és entera, i ja hem comentat a l'inici de la secció que, pel Teorema de la funció inversa,  $h^{-1}$  és localment holomorfa; per tant, és suficient

veure que  $h$  és una bijecció entre  $\Omega$  i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

En primer lloc observem que  $h$  és una bijecció del segment  $(-\infty, 1)$  amb ell mateix, ja que per tota  $x \in (-\infty, 1)$ , la funció  $h(x) = e^{1-x}x$  és real, contínua i amb derivada  $h'(x) = (1-x)e^{1-x} > 0$ . Per tant  $h$  és estrictament creixent sobre aquest segment. A més, donat que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{i} \quad h(1) = 1,$$

tenim que  $h((-\infty, 1)) = (-\infty, 1)$ .

A continuació veurem que per a tot  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  existeix una única  $z \in \Omega \setminus \mathbb{R}$  tal que  $h(z) = w$ , tot demostrant que  $h$  és una bijecció entre  $\Omega \setminus \mathbb{R}$  i  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Fixem  $\psi \in (0, \pi)$  i considerem la semirecta  $L_\psi = \{w = Re^{i\psi} : R > 0\}$ , que és el conjunt de punts del pla complex amb argument  $\psi$ . Aleshores, com que  $\text{Arg}(h(re^{i\theta})) = \theta - r \sin(\theta)$ , les antiimatges  $z = re^{i\theta}$  de punts de la recta  $L_\psi$  hauran de tenir  $\theta - r \sin(\theta) = \psi$ , o equivalentment

$$r = \frac{\theta - \psi}{\sin(\theta)}.$$

Caldrà que  $\theta \in (\psi, \pi)$ , perquè  $r > 0$  ( $r \neq 0$ , perquè  $h(z) = 0$  si i només si  $z = 0$ ). Així doncs, tenim que l'antiimatge de  $L_\psi$  existeix i és la corba a  $\Omega^+$ :

$$\gamma_\psi = h^{-1}(L_\psi) = \left\{ re^{i\theta} : \theta \in (\psi, \pi), r = \frac{\theta - \psi}{\sin(\theta)} \right\}$$

De fet, aquesta corba té un comportament molt similar a la corba  $\Gamma^+$ , ja que és una altra corba de nivell de  $\text{Arg}(h)$ , i es pot estudiar de manera anàloga. Si anomenem  $\tilde{r}(\theta) = \frac{\theta - \psi}{\sin(\theta)}$ , tenim que  $\tilde{r}$  és una funció contínua en  $[\psi, \pi)$ , derivable, i amb derivada positiva en  $(\psi, \pi)$ , per tant, és una funció creixent des de  $\tilde{r}(\psi) = 0$  a  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \tilde{r}(\theta) = \infty$ . A més, la corba  $\gamma_\psi$  es pot parametritzar per  $\theta \in (\psi, \pi)$  de manera anàloga a  $\Gamma^+$ :

$$\gamma_\psi(\theta) = (\tilde{r}(\theta) \cos(\theta), \tilde{r}(\theta) \sin(\theta)) = \left( \frac{(\theta - \psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \theta - \psi \right).$$

Per tant, la corba surt del punt 0 amb un angle inicial  $\psi$  i després es va desplaçant en sentit antihorari, mentre el seu mòdul va creixent de zero a infinit, i té una asymptota en  $\text{Im}(z) = \pi - \psi$ .

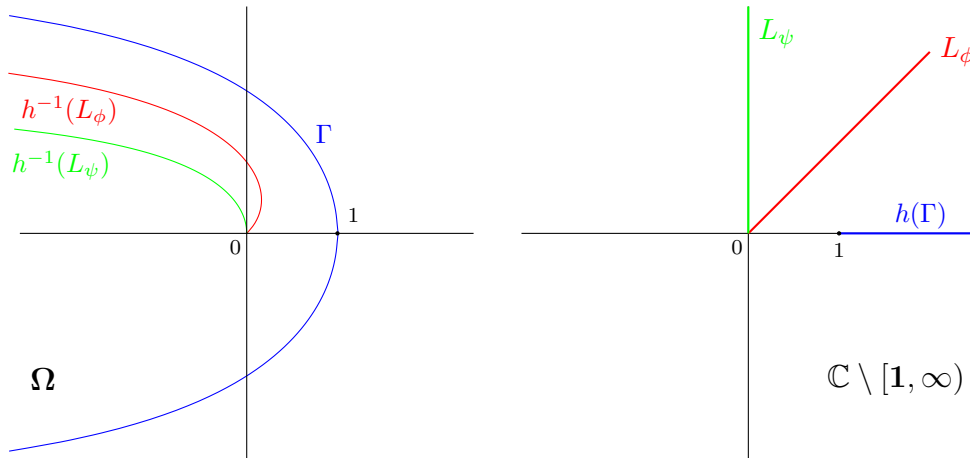


Figura 6: Acció de  $h$  sobre  $\Gamma$  i antiimatges per  $h$  de les semirectes  $L_\phi, L_\psi$ .

Donat que aquest raonament es vàlid per qualsevol  $\psi \in (0, \pi)$  (existeix  $h^{-1}(L_\psi)$  per tots aquests angles), i per cada angle  $\psi$  la corba  $h^{-1}(L_\psi)$  és diferent, aleshores  $\{h^{-1}(L_\psi)\}_{\psi \in (0, \pi)}$  és una família de corbes diferents que omplen  $\Omega^+$ , és a dir,  $\Omega^+ = \bigcup_{\psi \in (0, \pi)} h^{-1}(L_\psi)$ . De la mateixa manera,  $\{L_\psi\}_{\psi \in (0, \pi)}$  és una família de rectes diferents que omplen  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Llavors, la funció  $h$  és una bijecció línia a línia entre  $\Omega^+$  i  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ .

Anàlogament, la funció  $h$  és una bijecció línia a línia entre  $\Omega^-$  i  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$ . Es pot veure utilitzant el mateix raonament però fixant  $\psi \in (-\pi, 0)$  i amb  $h^{-1}(L_\psi)$  definida per  $\theta \in (-\pi, \psi)$ ; o també es pot deduir per la simetria de l'argument de  $h$  respecte  $\theta = 0$ . Tenim que  $h^{-1}(L_\psi)$  és simètrica respecte l'eix real a  $h^{-1}(L_{-\psi})$ .

Queda per veure que cada  $x \in (1, \infty)$  té dues antiimatges,  $z^+ \in \Gamma^+$  i  $z^- \in \Gamma^-$ . Primer demostrem que  $h : \Gamma^+ \rightarrow (1, \infty)$  és una bijecció. Com que per cada  $z \in \Gamma^+$  existeix un únic  $\theta \in (0, \pi)$  tal que  $z = r(\theta)e^{i\theta}$  (compleix  $h(z) = |h(z)|$ ), podem representar  $h$  en  $\Gamma^+$  amb la següent funció de  $\theta$ :

$$\phi(\theta) = h(r(\theta)e^{i\theta}) = r(\theta)e^{1-r(\theta)\cos(\theta)} = \frac{\theta}{\sin(\theta)}e^{1-\frac{\theta}{\sin(\theta)}\cos(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Donat que es tracta d'una funció real, positiva, contínua en  $(0, \pi)$ , i tal que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \phi(\theta) = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \phi(\theta) = \infty,$$

aleshores  $\phi$  recorre tots els punts de 1 a infinit, per tant  $h(\Gamma^+) = (1, \infty)$ . A més, es pot comprovar que  $\phi$  és derivable i té derivada positiva en  $(0, \pi)$ . Per tant, per tot  $x \in (1, \infty)$ , existeix una única  $\theta \in (0, \pi)$  tal que  $h(r(\theta)e^{i\theta}) = x$  i, per tant, una única  $z^+ \in \Gamma^+$  tal que  $h(z) = x$ .

Anàlogament, es pot veure que  $h : \Gamma^- \rightarrow (1, \infty)$  és una bijecció, definint  $\phi$  per  $\theta$  en  $(-\pi, 0)$  com a dalt i tenint en compte la seva paritat.

Aleshores per tot  $x \in (1, \infty)$ ,  $x$  té exactament dues antiimatges per  $h$ ,  $z^+ \in \Gamma^+$  i  $z^- \in \Gamma^-$ . □

**Observació 4.9.** Com que  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  és una transformació conforme, preserva angles. Podem veure, en la Figura 6, com l'angle que formen les corbes  $h^{-1}(L_\phi)$  i  $h^{-1}(L_\psi)$  en 0 és el mateix que formen les semirectes  $L_\phi$  i  $L_\psi$  en  $h(0)$ .

Anomenem  $\mathcal{U}$  a la regió envoltada per la Corba de Szegő, és a dir,

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |h(z)| < 1, |z| < 1\}.$$

Com a conseqüència directa del Teorema anterior, tenim el següent resultat.

**Corol·lari 4.10.** *La funció  $h$  restringida a  $\mathcal{U}$  és una representació conforme entre  $\mathcal{U}$  i  $\mathbb{D}$ ,  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ , amb  $h(0) = 0$ .*

## 4.2 Prova de la inclusió $Z' \subseteq S$

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar una inclusió de l'apartat 1 del Teorema de Szegő de la Introducció, en concret, provar que els zeros dels polinomis  $Q_n$  s'acumulen necessàriament a la Corba de Szegő.

Ara que ja sabem com actua  $h$  sobre  $\Omega$ , i que els zeros dels  $Q_n$  viuen a  $\mathbb{D} \setminus \{1\} \subset \Omega$ , continuem l'estudi del comportament asimptòtic de les funcions  $H_n$ , restringint-nos a la regió  $\Omega$ . Recordem que

$$H_n(z) = \int_0^z (e^{1-u}u)^n du \quad \text{i} \quad h(z) = e^{1-z}z.$$

El resultat principal és el següent.

**Proposició Principal.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{H_n(z)}{(h(z))^n} = \frac{z}{1-z}$$

*uniformement en subconjunts compactes de  $\Omega$ .*

*Demostració.* Comencem estudiant el límit al punt  $z = 0$ . La funció  $H_n/h^n \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  té una singularitat en  $z = 0$ , ja que l'únic zero de  $h^n$  és  $z = 0$  (d'ordre  $n$ ). A més,  $H_n(0) = 0$ . Anem a veure que és una singularitat evitable.

Tenim  $H'_n(z) = (h(z))^n$ ; aleshores, desenvolupant la sèrie en potències de  $e^{n(1-z)}$ , s'obté:

$$H'_n(z) = z^n e^{n(1-z)} = z^n (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + a_2 z^{n+2} + \dots,$$

amb  $a_0 \neq 0$ , la qual cosa ens duu a la següent expressió:

$$H_n(z) = \frac{a_0}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_1}{n+2} z^{n+2} + \dots = z^{n+1} \left( \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n+2} z + \dots \right).$$

Per tant,  $H_n(z)$  té a  $z = 0$  un zero d'ordre  $n+1$ , i

$$\frac{H_n(z)}{(h(z))^n} = \frac{z^{n+1} \left( \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n+2} z + \dots \right)}{z^n e^{n(1-z)}} = z \left( \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n+2} z + \dots \right) e^{-n(1-z)}.$$

Amb això,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{H_n(z)}{(h(z))^n} = 0,$$

de manera que  $H_n/h^n$  té una extensió holomorfa a 0, i trivialment es compleix la relació del teorema per  $z = 0$ .

Demostrem ara la convergència per a  $z \in \Omega \setminus \{0\}$ . Com que  $h^n$  és entera, la integral de  $H_n(z)$  no depèn del camí triat per anar de 0 a  $z$ . Per cada  $z = re^{i\theta} \in \Omega \setminus \mathbb{R}$ , puc triar com a camí de 0 a  $z$  al camí  $\gamma_z$  que segueix la corba de nivell de  $\text{Arg}(h)$  que passa per  $z$ . Si anomenem  $\psi = \text{Arg}(h(z)) \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$  i  $R = |h(z)|$ , tindrem  $h(z) = Re^{i\psi}$  i, per tant, la corba de nivell de  $\text{Arg} h$  de  $z$  serà  $\gamma_\psi = h^{-1}(L_\psi)$ .

D'aquesta manera, si fem el canvi de variable  $w = h(u)$  en  $H_n(z)$ , que té sentit per la bijectivitat de  $h$  en  $\Omega$ , tindrem que  $w$  recorre el segment  $h(\gamma_z) = [0, Re^{i\psi}]$ , inclòs en la semirecta  $L_\psi$ , i podrem fer un nou canvi de variable  $w = re^{i\psi}$ ,  $r \in [0, R]$ , en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

D'altra banda, per cada  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , podem triar com a camí d'integració de  $H_n(z)$  al segment  $\gamma_z = [0, z]$ , i procedir anàlogament amb els canvis de variable, tenint en compte que  $w = h(u)$  recorrerà el segment  $h(\gamma_z) = [0, R]$ , inclòs en  $(-\infty, 0)$ , si  $z < 0$ , i inclòs en  $(0, 1)$ , si  $z > 0$ .

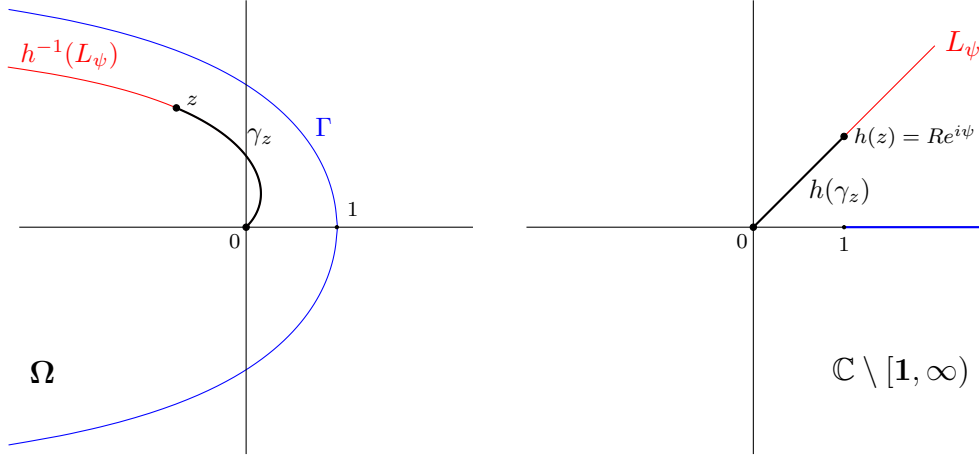


Figura 7: Camí  $\gamma_z$  en  $\Omega$  i camí  $h(\gamma_z)$  en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

Fem primer el canvi de variable  $w = h(u)$  a la integral que defineix  $H_n(z)$ : llavors  $u = h^{-1}(w)$  i  $dw = h'(u)du$  on

$$h'(u) = -e^{1-u}u + e^{1-u} = \frac{h(u)}{u} - h(u) = h(u) \left( \frac{1}{u} - 1 \right) = h(u) \frac{1-u}{u}.$$

Definim

$$G(w) = \frac{h^{-1}(w)}{1 - h^{-1}(w)}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty),$$

que és holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ , perquè  $h^{-1}(w) = 1$  si i només si  $w = 1 \notin \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

Aleshores

$$du = \frac{1}{h(u)} \frac{u}{1-u} dw = \frac{1}{w} G(w) dw,$$

i podem procedir a fer el canvi de variable:

$$H_n(z) = \int_0^z (h(u))^n du = \int_0^{h(z)} w^n \frac{1}{w} G(w) dw = \int_0^{h(z)} w^{n-1} G(w) dw.$$

A continuació parametritzem el segment de 0 a  $h(z)$  de la manera habitual. Essent  $R = |h(z)|$ , tenim  $w = re^{i\psi}$  amb  $r \in [0, R]$ , d'on  $dw = e^{i\psi} dr$  i, per tant,

$$H_n(z) = \int_0^R (re^{i\psi})^{n-1} G(re^{i\psi}) e^{i\psi} dr = \int_0^R r^{n-1} e^{in\psi} G(re^{i\psi}) dr = e^{in\psi} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\psi}) dr.$$

Com que  $h(z) = Re^{i\psi}$ ,

$$n \frac{H_n(z)}{(h(z))^n} = \frac{n}{(Re^{i\psi})^n} e^{in\psi} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\psi}) dr = \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\psi}) dr. \quad (4.2)$$

A continuació enunciem un lema que ens servirà per veure que el límit d'aquesta expressió és  $z/(1-z)$  uniformement en compactes de  $\Omega \setminus \{0\}$ , tal i com requereix l'enunciat de la proposició.

**Lema 4.11.** *Si  $f$  és una funció real de dues variables, i  $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times (-\pi, \pi))$ , aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r, \psi) dr = f(R, \psi)$$

*uniformement en compactes de  $[0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ .*

*Demostració.* Primer demostrarem que si  $f$  és una funció real d'una variable, i  $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ , aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r) dr = f(R)$$

uniformement en compactes de  $R > 0$ . Després ho generalitzarem a dues variables.

Fixem un compacte  $[0, R_1]$ , on  $R_1 > 0$ , de  $[0, \infty)$ . Utilitzant integració per parts amb  $u = f(r)$  i  $dv = r^{n-1} dr$  obtenim, per  $R \leq R_1$ ,

$$\int_0^R r^{n-1} f(r) dr = \left[ f(r) \frac{r^n}{n} \right]_0^R - \int_0^R \frac{r^n}{n} f'(r) dr = \frac{f(R)R^n}{n} - \frac{1}{n} \int_0^R r^n f'(r) dr.$$

Aleshores, prenent  $M = \max_{[0, R_1]} |f'(r)|$ , que és finit per hipòtesi, tenim

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r) dr - f(R) \right| &= \left| \frac{n}{R^n} \left( \frac{f(R)R^n}{n} - \frac{1}{n} \int_0^R r^n f'(r) dr \right) - f(R) \right| \\ &= \frac{1}{R^n} \left| \int_0^R r^n f'(r) dr \right| \leq \frac{1}{R^n} \int_0^R r^n |f'(r)| dr \leq \frac{M}{R^n} \int_0^R r^n dr \\ &= \frac{M}{R^n} \left[ \frac{r^{n+1}}{n+1} \right]_0^R = \frac{MR}{n+1} \leq \frac{MR_1}{n+1}. \end{aligned}$$

Aquesta desigualtat mostra la convergència uniforme a  $[0, R_1]$ , ja que l'acotació no depèn de  $R$  (és la mateixa per tots els  $R \in [0, R_1]$ ).

Aquest argument es pot generalitzar per a  $f$  funció real de dues variables,  $r$  i  $\psi$ , tal que  $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times (-\pi, \pi))$ , com en l'enunciat del Lema.

Fixem un compacte  $[0, R_1] \times [\psi_1, \psi_2]$ , on  $R_1 > 0$  i  $[\psi_1, \psi_2] \subset (-\pi, \pi)$ , i considerem ara

$$M = \max_{[0, R_1] \times [\psi_1, \psi_2]} \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, \psi) \right|,$$

que també és finit, per la hipòtesi sobre  $f$ .

Aleshores, per  $R \leq R_1$  i  $\psi \in [\psi_1, \psi_2]$  arribem a la mateixa desigualtat.  $\square$



A continuació utilitzem aquestes propietats per a la funció  $G(re^{i\psi})$  de la fórmula (4.2), com a funció de dues variables,  $r$  i  $\psi$ . Escrivim  $G(re^{i\psi}) = a(r, \psi) + ib(r, \psi)$  on  $a$  i  $b$  són la part real i imaginària de  $G$ . Com que  $a$  i  $b$  són de classe  $C^\infty$ , els podem aplicar el lema anterior i deduir que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\psi}) dr &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} a(r, \psi) dr + i \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} b(r, \psi) dr \right) = \\ &= a(R, \psi) + ib(R, \psi) = G(Re^{i\psi}) \end{aligned}$$

uniformement en compactes de  $[0, \infty) \times (\pi, \pi)$ .

Per tant, a partir de (4.2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{H_n(z)}{(h(z))^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\psi}) dr = G(Re^{i\psi}) = G(h(z)) = \frac{z}{1-z}$$

uniformement en compactes de  $[0, \infty) \times (\pi, \pi)$ ; equivalentment, en compactes de  $\Omega \setminus \{0\}$ .

Per acabar, veiem que la convergència és uniforme en tots els compactes de  $\Omega$ , també els que contenen el punt  $z = 0$ .

Definim, per a cada  $m > 1$ , el compacte

$$K_m = \{z \in \Omega : d(z, \Gamma) \geq 1/m\} \cap \overline{\mathcal{D}(0, e^m)}.$$

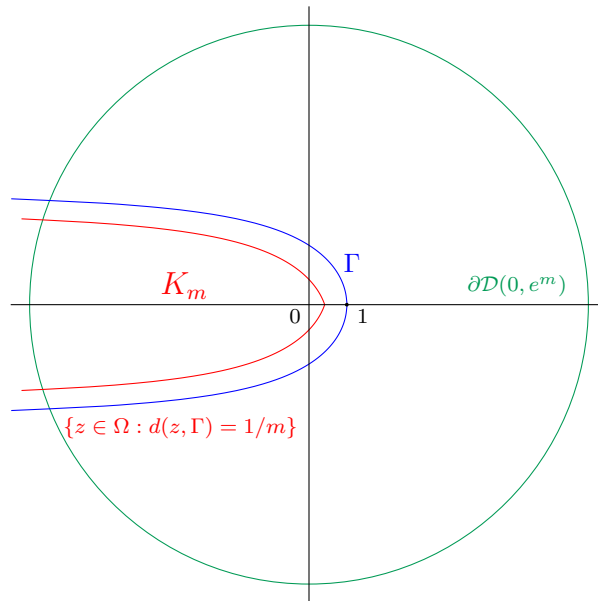


Figura 8: Compactes  $K_m$ .

Per qualsevol compacte  $K$  de  $\Omega$ , existeix  $m$  tal que  $K \subseteq K_m$ , i per tant, és suficient veure la convergència uniforme en aquests  $K_m$ .

Si anomenem  $F_n(z) = n \frac{H_n(z)}{(h(z))^n} - \frac{z}{1-z}$ , volem veure que, per tot  $m > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K_m} |F_n(z)| = 0.$$

Fixem  $m$  i escrivim  $K_m = K_m^1 \cup K_m^2$ , on  $K_m^1$  és un compacte sense el punt  $z = 0$ , com els considerats anteriorment, i  $K_m^2$  és la part que conté  $z = 0$ . Més precisament:

$$K_m^1 = K_m \setminus \mathcal{D}(0, 1/m) \quad \text{i} \quad K_m^2 = \overline{\mathcal{D}(0, 1/m)}.$$

Aleshores,

$$\max_{z \in K_m} |F_n(z)| = \max \left( \max_{z \in K_m^1} |F_n(z)|, \max_{z \in K_m^2} |F_n(z)| \right).$$

Com que  $K_m^1$  és compacte a  $\Omega \setminus \{0\}$  i  $F_n$  convergeix a 0 sobre compactes de  $\Omega \setminus \{0\}$ , tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{z \in K_m^1} |F_n(z)| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{z \in K_m^2} |F_n(z)| \right).$$

Pel Principi del mòdul màxim, per al disc  $K_m^2$ ,

$$\max_{z \in K_m^2} |F_n(z)| = \max_{|z|=1/m} |F_n(z)|,$$

i com que  $\{|z| = 1/m\}$  és compacte de  $\Omega \setminus \{0\}$ , també tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{z \in K_m} |F_n(z)| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{|z|=1/m} |F_n(z)| \right) = 0.$$

□

A continuació, volem demostrar la primera inclusió del primer apartat del Teorema de Szegő, que el lloc límit dels zeros del polinomis  $Q_n$  està inclòs en la Corba de Szegő,  $S$ .

Recordem que  $Z = \bigcup_{n>0} Z(Q_n)$  és el conjunt dels zeros dels polinomis  $Q_n$ . Sigui  $Z'$  el conjunt derivat de  $Z$ , és a dir, el conjunt de punts d'acumulació de  $Z$ :

$$Z' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists \{z_k\}_{k \geq 0} \subseteq Z \setminus \{z\} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z \right\}.$$

El següent corol·lari de la Proposició Principal mostra que els punts de  $Z$  només es poden acumular a la Corba de Szegő.

**Corol·lari 4.12.** *Els zeros dels polinomis  $Q_n$  s'acumulen en  $S$ , és a dir,  $Z' \subset S$ .*

*Demostració.* En primer lloc, donat que  $Z \subset \overline{\mathbb{D}}$ , els punts límit de  $Z$  també pertanyen a aquest tancat, és a dir,  $Z' \subset \overline{\mathbb{D}}$ . Així, podem centrar-nos en quins  $z$  de  $\overline{\mathbb{D}}$  pertanyen a  $Z'$ .

Observem que, com que per cada  $z \in Z$  hi ha algun  $n > 0$  tal que  $Q_n(z) = 0$ , per la igualtat (1.2), tenim

$$1 = \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(z).$$

A més, per la Fórmula de Stirling, existeix  $n_0 > 0$  tal que per tot  $n \geq n_0$  i per tot  $z \in \Omega$ ,

$$\left| \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(z) \right| = \frac{n^n}{e^n n!} |nH_n(z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1 + \epsilon_n)} |nH_n(z)| = \frac{(1 - \epsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} |nH_n(z)|. \quad (4.3)$$

Per provar el corol·lari, prendrem  $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus S$  qualsevol i veurem que  $z \notin Z'$ , tot mostrant que no existeix cap successió  $\{z_k\}_{k \geq 0} \in Z$  amb  $z_k \neq z$  tal que  $z_k \rightarrow z$ . Ho veurem prenent conjunts compactes en  $\overline{\mathbb{D}}$  que continguin  $z$ , i observant que en cadascun d'ells només hi pot haver un nombre finit d'elements que compleixin la igualtat (1.2) per algun  $n$ , mostrant així que no poden haver-hi successions de  $Z \setminus \{z\}$  que tendeixin a  $z$  en aquest compacte. Distingim dos casos:  $z$  amb  $|h(z)| < 1$  i  $z$  amb  $|h(z)| > 1$ .

Cas 1. Sigui  $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus S$  tal que  $|h(z)| < 1$ . Sigui  $\overline{\mathcal{D}}_1 \subset \Omega$  un disc tancat, centrat en  $z$ , i de radi tal que  $|h(w)| < 1$  per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_1$ . Prenem  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < 1$  i  $|h(w)| \leq 1 - \varepsilon$  per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_1$ . Com que  $\overline{\mathcal{D}}_1$  és compacte de  $\Omega$ , per la convergència de la Proposició Principal, existeix  $n_1 \geq n_0$  tal que per tot  $n \geq n_1$  i per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_1$

$$\left| \frac{nH_n(w)}{(h(z))^n} - \frac{w}{1-w} \right| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Llavors, pel que hem vist a (4.3), per tot  $n \geq n_1$  i per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(w) \right| &= \frac{(1 - \varepsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} |nH_n(w)| < \frac{(1 - \varepsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} |h(w)|^n \left( \left| \frac{w}{1-w} \right| + \varepsilon \right) \\ &\leq \frac{(1 - \varepsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} (1 - \varepsilon)^n \left( \left| \frac{w}{1-w} \right| + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Aleshores, sigui  $C_1 = \max_{w \in \overline{\mathcal{D}}_1} |w/(1-w)|$ , que és finit perquè  $1 \notin \overline{\mathcal{D}}_1$ , per tot  $n \geq n_1$  i per tot  $w \in \mathcal{D}_1$  tenim

$$\left| \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(w) \right| < \frac{(C_1 + \varepsilon)}{\sqrt{2\pi}} (1 - \varepsilon_n) \frac{(1 - \varepsilon)^n}{\sqrt{n}}.$$

Com que la banda dreta d'aquesta desigualtat tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a infinit, existeix  $n'_1 \geq n_1$  tal que per tot  $n \geq n'_1$  aquest valor és menor que 1. Aleshores, per tot  $n \geq n'_1$ ,  $w$  no és un zero de  $Q_n$ . Per tant, en  $\overline{\mathcal{D}}_1$  només hi ha un nombre finit, menor que  $n'_1$ , d'elements de  $Z$ . Conseqüentment, no existeix cap successió d'elements de  $Z \setminus \{z\}$  que tendeixin a  $z$ .

Cas 2. Sigui  $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus S$  tal que  $|h(z)| > 1$ . Anàlogament, considerem  $\overline{\mathcal{D}}_2 \subset \Omega$  un disc tancat, centrat en  $z$ , i de radi tal que  $|h(w)| > 1$  per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_2$ . Per la Proposició Principal, per tot  $\varepsilon > 0$  existeix un  $n_2(\varepsilon) \geq n_0$  tal que per tot  $n \geq n_2(\varepsilon)$  i per tot  $w \in \overline{\mathcal{D}}_2$  val la desigualtat (4.4) i, per tant, també val

$$\left| \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(w) \right| = \frac{(1 - \varepsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} |nH_n(w)| > \frac{(1 - \varepsilon_n)}{\sqrt{2\pi n}} |h(w)|^n \left( \left| \frac{w}{1-w} \right| - \varepsilon \right).$$

Diem ara  $C_2 = \min_{w \in \overline{\mathcal{D}}_2} |w/(1-w)|$ , triem  $\varepsilon > 0$  tal que  $C_2 - \varepsilon > 0$  i  $|h(w)| \geq 1 + \varepsilon$  per tot  $w \in \mathcal{D}_2$ . Aleshores existeix  $n_2(\varepsilon) \geq n_0$  tal que per tot  $n \geq n_2(\varepsilon)$  i per tot  $w \in \mathcal{D}_2$  tenim

$$\left| \frac{n^n}{e^n n!} nH_n(w) \right| > \frac{(C_2 - \varepsilon)}{\sqrt{2\pi}} (1 - \varepsilon_n) \frac{(1 + \varepsilon)^n}{\sqrt{n}}.$$

Com que la banda dreta d'aquesta desigualtat tendeix a  $\infty$  quan  $n$  tendeix a infinit, com en el cas anterior, això prova que  $z \notin Z'$ . □

### 4.3 Prova de la inclusió $S \subseteq Z'$ i del segon apartat del Teorema de Szegő

En aquesta secció estudiarem com els zeros dels polinomis  $Q_n$  es distribueixen al voltant de  $S$ ; en concret, es veurà com aquesta distribució és uniforme respecte l'argument de la funció  $h$  sobre  $S$ . Això implica, en particular, que  $S \subseteq Z'$ . Així doncs, aquest estudi acabarà la demostració del Teorema de Szegő de la Introducció.

El primer pas és definir entorns adjacents per cada interval de  $S$  en  $\Omega$ , per després veure quants zeros de  $Q_n$  hi ha en cadascun d'ells i com es reparteixen. Triarem aquests entorns tenint en compte l'estudi que hem fet de la transformació conforme  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

Siguin  $r, R \in \mathbb{R}$  amb  $0 < r < 1 < R$  i siguin  $\psi_1, \psi_2 \in (0, 2\pi)$  amb  $0 < \psi_1 < \psi_2 < 2\pi$ . Considerem en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  el quadrilàter en coordenades polars  $K = K(r, R, \psi_1, \psi_2)$  amb vèrtexs

$$re^{i\psi_1}, Re^{i\psi_1}, Re^{i\psi_2}, re^{i\psi_2}.$$

Els seus costats són els segments  $[re^{i\psi_1}, Re^{i\psi_1}] \subset L_{\psi_1}$  i  $[Re^{i\psi_2}, re^{i\psi_2}] \subset L_{\psi_2}$ , i els arcs de circumferència de centre 0 que uneixen  $Re^{i\psi_1}$  amb  $Re^{i\psi_2}$ , i  $re^{i\psi_2}$  amb  $re^{i\psi_1}$ .

Per la bijectivitat de  $h$  i la definició de  $S$ , l'antiimatge per  $h$  de  $K$  és una regió en  $\Omega$  que conté el segment  $I$  de  $S$  que es troba entre les corbes de nivell  $\arg h = \psi_1$  i  $\arg h = \psi_2$ . Així doncs, triant diferents  $r, R, \psi_1, \psi_2$ , podem triar com a entorns dels intervals de  $S$  a les antiimatges dels quadrilàters. Per cada  $r, R, \psi_1, \psi_2$ , denotem

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(r, R, \psi_1, \psi_2) = h^{-1}(K(r, R, \psi_1, \psi_2)).$$

Com que els zeros dels polinomis  $Q_n$  s'acumulen en  $S$ , és suficient considerar quadrilàters amb  $r$  i  $R$  propers a 1. A més, com que cada  $I \subseteq S$  es pot posar com la unió d'intervals més petits de  $S$ , és suficient considerar angles  $\psi_1, \psi_2$  amb  $\psi_2 - \psi_1$  petit. D'aquesta manera, la distribució per  $n$  gran dels zeros al voltant de qualsevol tros de  $S$ , surt de la distribució dels zeros en els diferents conjunts  $\mathcal{J}$ , que són pràcticament petits segments de  $S$ .

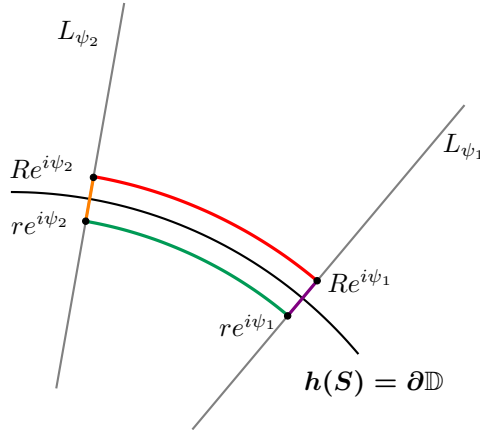


Figura 9: Frontera del quadrilàter  $K = h(\mathcal{J})$ .

El resultat més important de la secció és el següent teorema provat per Szegő en [Sz].

**Teorema de Distribució.** *Siguin  $r, R, \psi_1, \psi_2$  i  $\mathcal{J}$  definits anteriorment. Aleshores,*

$$\frac{1}{n} \#[Z(Q_n) \cap \mathcal{J}] = \frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

on  $O(1/n)$  és independent de  $r, R, \psi_1, \psi_2$ .

**Observació 4.13.** Sigui  $I = \mathcal{J} \cap S$  el segment de  $S$  que es troba entre les corbes de nivell  $\arg h = \psi_1$  i  $\arg h = \psi_2$ . Tenim que  $h(I)$  és l'arc de circumferència de  $\partial\mathbb{D}$  que uneix  $e^{i\psi_1}$  amb  $e^{i\psi_2}$ . Com que  $\#Z(Q_n) = n$  i els zeros dels polinomis  $Q_n$  s'acumulen a  $S$ , el Teorema de Distribució diu que la proporció de zeros de  $Q_n$  propers a  $I$  es va acostant a

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi} = \int_{h(I)} \frac{d\theta}{2\pi} = \mu(I).$$

Per tant, la demostració del Teorema de Distribució prova el segon apartat del Teorema de Szegő i que  $S \subseteq Z'$ .

*Demostració del Teorema de Distribució.* En primer lloc recordem que, per la fórmula (1.2),  $z \in Z(Q_n)$  si i només si

$$1 = \frac{n^n}{e^{nn}} nH_n(z).$$

Definim, per cada  $n > 0$ , la funció

$$h_n(z) = \frac{n^n}{e^{nn}} nH_n(z).$$

Llavors, els zeros de  $Q_n$  són exactament els valors en què  $h_n$  val 1, i el problema equival a demostrar que la funció  $h_n$  pren  $n \frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi} + O(1)$  vegades el valor 1 en  $\mathcal{J}$ .

Utilitzant la Fórmula de Stirling, tenim que

$$h_n(z) = \frac{n^n}{e^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n)} nH_n(z) = \frac{nH_n(z)}{\sqrt{2\pi n}} (1 - \epsilon_n).$$

D'altra banda, com que  $\mathcal{J}$  és un compacte d' $\Omega$ , per la Proposició Principal de la Secció 4.2, per  $n > 0$  gran i per tot  $z \in \mathcal{J}$ ,

$$h_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{z}{1-z} (h(z))^n (1 + \epsilon_n(z)),$$

on  $\{\epsilon_n(z)\}_n$  és una successió real, no necessàriament positiva ni negativa, que tendeix a zero uniformement en compactes de  $\mathcal{J}$ .

Per simplificar encara més aquesta expressió de  $h_n$ , observem que és suficient triar  $r$  i  $R$  tan propers a 1 com vulguem, i  $\psi_1, \psi_2$  tals que  $\psi_2 - \psi_1$  sigui tan pròxim a zero com vulguem. Amb això, podem triar  $\mathcal{J}$  prou petita tal que el valor  $\frac{z}{1-z}$  pràcticament no variï. Sigui  $z_{\mathcal{J}}$  l'antiimatge per  $h$  del centre de  $K$  i sigui

$$A_{\mathcal{J}} = \frac{z_{\mathcal{J}}}{1 - z_{\mathcal{J}}}.$$

Triem  $\mathcal{J}$  prou petit per tal que, per tot  $z \in \mathcal{J}$ ,

$$\frac{z}{1-z} = A_{\mathcal{J}}(1 + \delta(z)) \quad \text{amb } |\delta(z)| < \frac{1}{2}.$$

D'aquesta manera, per tot  $z \in \mathcal{J}$ , tenim

$$h_n(z) = A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} (1 + \delta(z))(1 + \epsilon_n(z)).$$

Malgrat aquesta funció ja és més simple que amb la que hem començat, volem una nova funció que valgui 1 el mateix nombre de vegades que  $h_n$  en  $\mathcal{J}$ , i que faci encara més fàcil calcular-ne el nombre de punts en què val 1. Per cada  $n > 0$ , definim la funció

$$\hat{h}_n(z) = A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}},$$

que en  $\mathcal{J}$  és molt similar a  $h_n$ , ja que

$$h_n(z) = \hat{h}_n(z)(1 + \delta(z))(1 + \varepsilon_n(z)), \quad z \in \mathcal{J}. \quad (4.5)$$

A partir d'aquí, la intenció és aplicar el Teorema de Rouché, per veure que  $h_n - 1$  i  $\hat{h}_n - 1$  s'anul·len el mateix nombre de vegades en  $\mathcal{J}$ , i aplicar el Principi de l'argument per calcular el nombre de vegades que  $\hat{h}_n - 1$  s'anul·la en  $\mathcal{J}$ .

Per poder aplicar el Teorema de Rouché a  $h_n - 1$  i  $\hat{h}_n - 1$  en  $\mathcal{J}$ , ens cal veure que es compleix la hipòtesi:

$$|(h_n(z) - 1) - (\hat{h}_n(z) - 1)| < |\hat{h}_n(z) - 1|, \quad z \in \partial\mathcal{J}.$$

Observem que, per la definició de  $\hat{h}_n$ , per tot  $z \in \mathcal{J}$ , tenim que

$$|\hat{h}_n(z) - 1| = \left| A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right|$$

i per la igualtat (4.5),

$$\begin{aligned} |(h_n(z) - 1) - (\hat{h}_n(z) - 1)| &= |\hat{h}_n(z)| |(1 + \delta(z))(1 + \varepsilon_n(z)) - 1| \\ &= |A_{\mathcal{J}}| \frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} |\delta(z) + \delta(z)\varepsilon_n(z) + \varepsilon_n(z)|. \end{aligned}$$

A més, com que  $|\delta(z)| < \frac{1}{2}$  i  $\varepsilon_n(z)$  tendeix a zero, podem suposar, prenent  $n$  prou gran, que existeix  $\varepsilon(z) < \frac{|A_{\mathcal{J}}|}{2}$  tal que, per  $n$  prou gran i  $z \in \mathcal{J}$ ,

$$|(h_n(z) - 1) - (\hat{h}_n(z) - 1)| \leq \frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z).$$

Per tant, en aquesta situació, per provar la hipòtesi del Teorema de Rouché és suficient veure que

$$\frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) < \left| A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right|, \quad z \in \partial\mathcal{J}. \quad (4.6)$$

A continuació volem veure que aquesta darrera desigualtat es compleix en cadascun dels quatre trossos que formen  $\partial\mathcal{J}$ :

**Tros 1.** Antiimatge per  $h$  de l'arc que uneix  $re^{i\psi_2}$  amb  $re^{i\psi_1}$  (verd a la Figura 9).

**Tros 2.** Antiimatge per  $h$  del segment  $[re^{i\psi_1}, Re^{i\psi_1}] \subset L_{\psi_1}$  (lila a la Figura 9).

**Tros 3.** Antiimatge per  $h$  de l'arc que uneix  $Re^{i\psi_1}$  amb  $Re^{i\psi_2}$  (roig a la Figura 9).

**Tros 4.** Antiimatge per  $h$  del segment  $[re^{i\psi_2}, Re^{i\psi_2}] \subset L_{\psi_2}$  (taronja a la Figura 9).

**Tros 1.** Aquí  $|h(z)| = r < 1$ . Llavors,

$$\frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) = \frac{r^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z)$$

mentre que

$$\left| A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right| \geq 1 - |A_{\mathcal{J}}| \frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} = 1 - |A_{\mathcal{J}}| \frac{r^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Com que la dreta de la primera igualtat decreix cap a 0 quan  $n$  tendeix a infinit, i la dreta de la segona desigualtat creix cap a 1, per  $n$  prou gran, es compleix la desigualtat (4.6).

**Tros 3.** Aquí  $|h(z)| = R > 1$ , i per tant, per  $n$  prou gran,

$$\frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) = \frac{R^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) < \frac{1}{2} |A_{\mathcal{J}}| \frac{R^n}{\sqrt{2\pi n}} < |A_{\mathcal{J}}| \frac{R^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \leq \left| A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right|,$$

ja que  $\frac{R^n}{\sqrt{2\pi n}}$  tendeix a infinit.

**Tros 2.** Es té que  $h(z) = \rho e^{i\psi_1}$  amb  $\rho \in [r, R]$ . Llavors,

$$\frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) = \frac{\rho^n}{\sqrt{2\pi n}} \varepsilon(z) < \frac{1}{2} |A_{\mathcal{J}}| \frac{\rho^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Per altra part, dient  $A_{\mathcal{J}} = |A_{\mathcal{J}}| e^{ia_{\mathcal{J}}}$ ,  $a_{\mathcal{J}} \in [0, 2\pi)$ ,

$$\left| A_{\mathcal{J}} \frac{(h(z))^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right| = \left| \frac{|A_{\mathcal{J}}| e^{ia_{\mathcal{J}}} (\rho e^{i\psi_1})^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right| = \left| \frac{|A_{\mathcal{J}}| \rho^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi_1)}}{\sqrt{2\pi n}} - 1 \right|.$$

Aquí ens trobem amb un problema per provar la desigualtat (4.6). Sigui

$$w_n = \frac{|A_{\mathcal{J}}| \rho^n}{\sqrt{2\pi n}} e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi_1)}.$$

Donat que  $\rho \in [r, R]$  amb  $r < 1 < R$ , el mòdul de  $w_n$  passa de ser molt proper a zero a ser molt gran. En particular, en algun moment aquest mòdul val 1. Com que no podem controlar l'argument  $a_{\mathcal{J}} + n\psi_1$  de  $w_n$ , no podem assegurar que  $w_n$  no és 1, i per tant, no podem assegurar que es compleix la hipòtesi del Teorema de Rouché (desigualtat (4.6)).

La solució a aquest problema és canviar l'angle  $\psi_1$  per  $\psi_1 + \alpha_n^1$ , amb  $\alpha_n^1$  molt petit que permeti controlar l'argument de  $w_n$ . En concret, triant  $\alpha_n^1$  de manera que  $w_n$  sigui un valor real negatiu, s'assegura que  $w_n$  és un valor allunyat de 1, de manera que el terme de més amunt és "gran", i es pot provar la hipòtesi del Teorema de Rouché.

A continuació cerquem  $\alpha_n^1$  tal que  $w_n$ , canviant l'argument  $\psi_1$  per  $\psi_1 + \alpha_n^1$ , sigui un nombre negatiu. Per tal que  $w_n$  sigui negatiu, cal que

$$e^{i(a_{\mathcal{J}} + n(\psi_1 + \alpha_n^1))} = -1,$$

la qual cosa es té si i només si

$$a_{\mathcal{J}} + n\psi_1 + n\alpha_n^1 = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

és a dir, si i només si

$$\alpha_n^1 = \frac{\pi - a_{\mathcal{J}} - n\psi_1 + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per cada  $n$ , existeix  $m_n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\pi - a_{\mathcal{J}} - n\psi_1 \in [2\pi m_n, 2\pi(m_n + 1))$$

i, per tant,

$$\pi - a_{\mathcal{J}} - n\psi_1 - 2\pi m_n \in [0, 2\pi) \quad \text{i} \quad \pi - a_{\mathcal{J}} - n\psi_1 - 2\pi(m_n + 1) \in [-2\pi, 0).$$

Llavors, per cada  $n$  fixat, triant  $k = -m_n$  i  $k = -(m_n + 1)$ , obtenim dues successions d'angles  $\{\alpha_n^1\}_n \subset [0, \frac{2\pi}{n})$ ,  $\{\hat{\alpha}_n^1\}_n \subset [-\frac{2\pi}{n}, 0)$ , que tendeixen a zero, i tals que

$$e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi_1 + n\alpha_n^1)} = e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi_1 + n\hat{\alpha}_n^1)} = -1.$$

La situació del **Tros 4** és la mateixa que la del Tros 2 i, per tant, es resol igual; per cada  $n$  es trien  $\alpha_n^2 \in [0, \frac{2\pi}{n})$  i  $\hat{\alpha}_n^2 \in [-\frac{2\pi}{n}, 0)$  amb les mateixes característiques que abans.

A partir d'aquests  $\alpha_n^1, \hat{\alpha}_n^1, \alpha_n^2, \hat{\alpha}_n^2$ , construïm uns compactes  $\mathcal{J}_n^-, \mathcal{J}_n^+$  en  $\Omega$ , molt semblants a  $\mathcal{J}$ , amb  $\mathcal{J}_n^- \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_n^+$ , i tals que la desigualtat (4.6) del Teorema de Rouché es compleix per tot  $z \in \partial\mathcal{J}_n^- \cup \partial\mathcal{J}_n^+$ .

Específicament, considerem en  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  el quadrilàter en coordenades polars  $K_n^- \subseteq K$  de vèrtexs

$$re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}, \quad Re^{i(\psi_1 + \hat{\alpha}_n^1)}, \quad Re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}, \quad re^{i(\psi_2 + \alpha_n^2)},$$

i el quadrilàter en coordenades polars  $K_n^+ \supseteq K$  que té vèrtexs

$$re^{i(\psi_1 + \hat{\alpha}_n^1)}, \quad Re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}, \quad Re^{i(\psi_2 + \alpha_n^2)}, \quad re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}.$$

Aleshores definim

$$\mathcal{J}_n^- = h^{-1}(K_n^-) \quad \text{i} \quad \mathcal{J}_n^+ = h^{-1}(K_n^+).$$

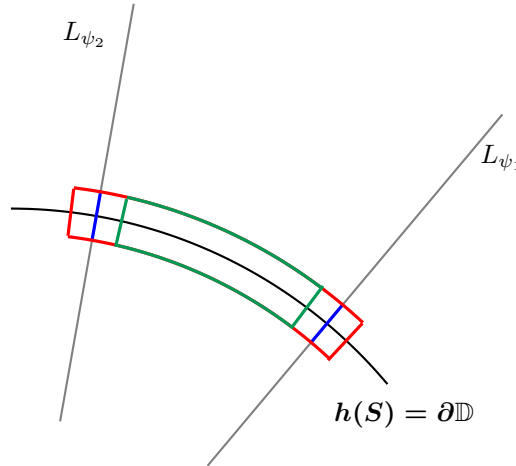


Figura 10: Fronteres de  $K = h(\mathcal{J})$  (blau),  $K_n^+ = h(\mathcal{J}_n^+)$  (roig),  $K_n^- = h(\mathcal{J}_n^-)$  (verd).

Així doncs, val la desigualtat (4.6) tant a la frontera de  $\mathcal{J}_n^-$  com a la de  $\mathcal{J}_n^+$ , i pel Teorema de Rouché,

$$\#[Z(h_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^-] = \#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^-] \quad \text{i} \quad \#[Z(h_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^+] = \#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^+].$$



Per acabar la demostració, aplicarem el Principi de l'argument a  $\hat{h}_n - 1$  en  $\mathcal{J}_n^-$ , i provarem que, per  $n > 0$  gran,

$$\#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^-] = n \frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi} + O(1).$$

De manera anàloga tindrem el mateix resultat per  $\mathcal{J}_n^+$ . Conseqüentment, com que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^-]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^+]}{n},$$

ja tindrem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#[Z(Q_n) \cap \mathcal{J}]}{n} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi}.$$

Apliquem doncs el Principi de l'argument a  $\hat{h}_n - 1$  sobre  $\mathcal{J}_n^-$ . El nombre de solucions de  $\hat{h}_n - 1$  en l'interior de  $\mathcal{J}_n^-$  és el nombre de voltes que fa la corba  $\hat{h}_n(\partial\mathcal{J}_n^-) - 1$  al voltant de  $z = 0$ . Per tant, hem d'examinar la variació de l'argument de  $\hat{h}_n - 1$  en  $\partial\mathcal{J}_n^-$ . Ho fem tros a tros de  $\partial\mathcal{J}_n^-$ .

**Tros 1.** Antiimatge per  $h$  de l'arc que uneix  $re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}$  amb  $re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}$ . Aquí  $|h(z)| = r < 1$  i, per tant,

$$|\hat{h}_n(z)| = |A_{\mathcal{J}}| \frac{|h(z)|^n}{\sqrt{2\pi n}} = |A_{\mathcal{J}}| \frac{r^n}{\sqrt{2\pi n}}$$

tendeix a zero quan  $n$  tendeix a infinit. En particular, existeix  $n_0$  tal que per tot  $n \geq n_0$ ,  $|\hat{h}_n(z)| < \frac{1}{2}$ , de manera que  $\hat{h}_n(z) - 1 \in \mathcal{D}(-1, \frac{1}{2})$ . Conseqüentment, per  $n$  prou gran,  $\hat{h}_n - 1$  no fa cap volta al voltant de  $z = 0$ .

**Tros 2.** Antiimatge per  $h$  del segment  $[re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}, Re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}] \subset L_{(\psi_1 + \alpha_n^1)}$ . Aquí  $h(z) = \rho e^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}$  amb  $\rho \in [r, R]$ . De la manera que hem triat  $\alpha_n^1$ , es té que

$$\hat{h}_n(z) - 1 = \frac{|A_{\mathcal{J}}|\rho^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi_1 + n\alpha_n^1)} - \sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{-|A_{\mathcal{J}}|\rho^n - \sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi n}} \in (-\infty, -1),$$

i en aquest tros no hi ha variació de l'argument.

**Tros 4.** Antiimatge per  $h$  del segment  $[re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}, Re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}] \subset L_{(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}$ . La situació és anàloga al Tros 2, per tant, no hi ha variació de l'argument en aquest tros.

**Tros 3.** Antiimatge per  $h$  de l'arc que uneix  $Re^{i(\psi_1 + \alpha_n^1)}$  amb  $Re^{i(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2)}$ . Tenim  $h(z) = Re^{i\psi}$  amb  $\psi \in [\psi_1 + \alpha_n^1, \psi_2 + \hat{\alpha}_n^2]$ . Llavors,

$$\arg(\hat{h}_n(z) - 1) = \arg\left(\frac{|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi)} - \sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi n}}\right) = \arg(|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi)} - \sqrt{2\pi n}).$$

El punt  $|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi)}$  pertany a la circumferència de radi  $|A_{\mathcal{J}}|R^n$ , que per  $n$  gran és molt major que  $\sqrt{2\pi n}$ . Per tant, pels diferents  $\psi$ , els punts  $|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi)} - \sqrt{2\pi n}$  viuen en una corona d'amplada  $\sqrt{2\pi n}$  al voltant de la circumferència  $|z| = |A_{\mathcal{J}}|R^n$ . Així doncs, per  $n$  gran, l'argument recorregut per  $\hat{h}_n(z) - 1$  és el mateix que el recorregut per  $|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}} + n\psi)}$ , amb un error  $\pm\sqrt{2\pi n}/(|A_{\mathcal{J}}|R^n)$  que tendeix a zero.

Donat que  $\arg(|A_{\mathcal{J}}|R^n e^{i(a_{\mathcal{J}}+n\psi)}) = a_{\mathcal{J}} + n\psi$  i que  $\psi$  varia de  $\psi_1 + \alpha_n^1$  a  $\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2$ , per  $n$  gran, la variació de l'argument de  $\hat{h}_n - 1$  en  $\partial\mathcal{J}_n^-$  és de

$$n(\psi_2 + \hat{\alpha}_n^2) - n(\psi_1 + \alpha_n^1) = n(\psi_2 - \psi_1) + n(\hat{\alpha}_n^2 - \alpha_n^1).$$

Com que  $|\alpha_n^1|, |\hat{\alpha}_n^2| \in [0, 2\pi/n]$ , tenim que  $n(\hat{\alpha}_n^2 - \alpha_n^1) = O(1)$  és independent de  $n, r, R, \psi_1, \psi_2$ . Aleshores, pel Principi de l'argument, per  $n > 0$  gran,

$$\#[Z(\hat{h}_n - 1) \cap \mathcal{J}_n^-] = n \frac{\psi_2 - \psi_1}{2\pi} + O(1).$$

□

**Observació 4.14.** Hi ha resultats més recents que formulen de manera més precisa en quin sentit els zeros de  $Q_n$  es distribueixen segons la mesura harmònica de l'enunciat del Teorema de Szegő. A continuació esmentem un dels resultats de Pritsker i Varga.

Donat  $z \in \mathbb{C}$ , sigui  $\delta_z$  la delta de Dirac a  $z$ , és a dir, la mesura que sobre  $B \subseteq \mathbb{C}$  val

$$\delta_z(B) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in B \\ 0, & \text{si } z \notin B \end{cases}.$$

Definim, per cada  $n > 0$ , la mesura de recompte de zeros de  $Q_n$  normalitzada

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{z \in Z(Q_n)} \delta_z,$$

que és clarament una mesura de probabilitat.

El resultat que es mostra en l'article [Pri, Var, Theorem 2.1] és el següent.

**Proposició 4.15.** *Siguin  $\mu_n$  les mesures que acabem de definir, i sigui  $\mu$  la mesura harmònica de  $\mathcal{U}$  al punt 0, tal i com apareix al Teorema de Szegő.*

- 1) *Les mesures  $\mu_n$  convergeixen a la mesura harmònica  $\mu$ , en la topologia feble\*. És a dir, per tota funció  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{C})$  contínua de suport compacte,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{C}} f d\mu.$$

- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-nz} Q_n(z)|^{1/n} = |h(z)|$  *uniformement en compactes de  $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathcal{U}}$ .*

## 5 Posició dels zeros de $Q_n$ respecte $S$

Després de Szegő altres matemàtics han seguit investigant el comportament dels zeros dels polinomis  $Q_n$  al voltant de la Corba de Szegő. En aquesta secció donarem alguns d'aquests resultats, que hem cregut interessants.

El primer és un teorema de J. D. Buckholtz, provat en [Buck1], que ens assegura que els zeros de  $Q_n$  es troben fora de la regió  $\bar{\mathcal{U}}$  limitada per la Corba de Szegő.

**Teorema 5.1** ([Buck1], Theorem 2). *Per tot  $n > 0$ , la regió  $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup S$  no conté cap zero de  $Q_n$ .*

*Demostració.* Per definició de  $S$  i  $\mathcal{U}$ , tenim que

$$\bar{\mathcal{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z}z| \leq 1, |z| \leq 1\}.$$

Prenem  $z \in \bar{\mathcal{U}}$  i veiem que  $Q_n(z) \neq 0$ . Serà suficient veure que  $|1 - e^{-nz}Q_n(z)| < 1$ , ja que els zeros de  $Q_n$  evidentment no compleixen aquesta desigualtat.

Per la igualtat (3.1), per tot  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-nz}Q_n(z) &= e^{-nz} \left( e^{nz} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right) = 1 - e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \\ &= 1 - (e^{1-z}z)^n (ze)^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Llavors, per tot  $n > 0$ ,

$$|1 - e^{-nz}Q_n(z)| \leq |e^{1-z}z|^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k |z|^{k-n}}{k!}. \quad (5.1)$$

Com que  $|e^{1-z}z| \leq 1$  i  $|z| \leq 1$ , per tot  $n > 0$ , tenim

$$|1 - e^{-nz}Q_n(z)| \leq e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!}.$$

Donat que, per la igualtat (3.1), la sèrie de la banda dreta de la desigualtat és  $e^n - Q_n(1)$ , tenim que, per tot  $n > 0$ ,

$$|1 - e^{-nz}Q_n(z)| \leq e^{-n}(e^n - Q_n(1)) = 1 - e^{-n}Q_n(1) < 1.$$

□

A continuació presentem més resultats de Buckholtz, que mostren que els zeros del polinomi  $Q_n$  estan a una distància controlada de la Corba de Szegő.

**Definició 5.2.** *Per tot  $z \in \mathbb{C}$  i per tot  $n > 0$ , sigui la funció  $S_n(z)$  definida per la igualtat*

$$e^{nz} = \sum_{p=0}^n \frac{(nz)^p}{p!} + \frac{(nz)^n}{n!} S_n(z). \quad (5.2)$$

Com que  $\frac{(nz)^n}{n!}S_n(z) = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!}$ , tenim, explícitament,

$$S_n(z) = \frac{nz}{n+1} + \frac{(nz)^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{(nz)^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nz)^k n!}{(n+k)!}.$$

**Definició 5.3.** Per tot  $z \in \mathbb{C}$  i per tot  $n > 0$ , definim de manera similar la funció  $T_n(z)$  per la igualtat

$$e^{nz} = \frac{(nz)^n}{n!}T_n(z) + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!} \quad (5.3)$$

Com que  $\frac{(nz)^n}{n!}T_n(z) = \sum_{p=0}^n \frac{(nz)^p}{p!}$ , ara tenim

$$T_n(z) = \frac{n!}{(nz)^n} + \frac{n(n-1)\cdots 2}{(nz)^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots 3}{(nz)^{n-2}} + \cdots + \frac{n}{(nz)^1} + 1 = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(nz)^{n-k}}.$$

Tot seguit enunciem un lema que recull propietats de les funcions que acabem de definir.

**Lema 5.4** ([Buck2], Lemma 1). *Si  $n > 0$ , les funcions  $S_n(z)$  i  $T_n(z)$  compleixen:*

(a) Per a tot  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$S_n(z) + T_n(z) = \frac{n!(e/n)^n}{(e^{1-z}z)^n}.$$

(b) La funció  $S_n(z)$  és entera, i està relacionada, per tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , amb la seva derivada per la igualtat

$$S_n(z) = \frac{z}{1-z} \left[ 1 - \frac{S'_n(z)}{n} \right].$$

(c) La funció  $T_n(z)$  és holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , i està relacionada, per tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , amb la seva derivada per la igualtat

$$T_n(z) = \frac{z}{z-1} \left[ 1 + \frac{T'_n(z)}{n} \right].$$

(d) Per  $n > 0$  gran,

- i) Si  $|z| \leq 1$ , llavors  $|S_n(z)| < e\sqrt{n}$ .
- ii) Si  $|z| \geq 1$ , llavors  $|T_n(z)| < e\sqrt{n}$ .
- iii) Si  $|e^{1-z}z| \geq 1$ , llavors  $|S_n(z)| < 2e\sqrt{n}$  i  $|T_n(z)| < 2e\sqrt{n}$ .

*Demostració.* (a) Per definició de  $S_n(z)$  i  $T_n(z)$ , per tot  $n > 0$ , tenim

$$e^{nz} = \frac{(nz)^n}{n!}T_n(z) + \frac{(nz)^n}{n!}S_n(z) = \frac{(nz)^n}{n!}(T_n(z) + S_n(z)).$$

Aleshores,

$$T_n(z) + S_n(z) = \frac{(e^z)^n n!}{n^n z^n} = \frac{n!(1/n)^n}{(e^{-z}z)^n} = \frac{n!(e/n)^n}{(e^{1-z}z)^n}.$$

(b) Que  $S_n(z)$  és entera és evident. Per veure la relació de  $S_n(z)$  amb la seva derivada, derivem ambdues bandes de la igualtat (5.2) que defineix  $S_n$ , i obtenim

$$ne^{nz} = n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(nz)^p}{p!} + n \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z) + \frac{(nz)^n}{n!} S'_n(z).$$

Aquesta equació equival a

$$n \left( e^{nz} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(nz)^p}{p!} \right) = n \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z) + \frac{(nz)^n}{n!} S'_n(z).$$

Per definició de  $e^{nz}$  i de  $S_n(z)$ , la banda dreta d'aquesta igualtat és

$$n \left( e^{nz} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(nz)^p}{p!} \right) = n \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!} = n \left( \frac{(nz)^n}{n!} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^p}{p!} \right) = n \left( \frac{n^{n-1} z^n}{(n-1)!} + \frac{(nz)^n}{n!} S_n(z) \right).$$

Aleshores, substituïnt això a la dreta de l'altra igualtat, tenim que  $S_n(z)$  compleix la igualtat

$$nz \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} + nz \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z) = n \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z) + \frac{(nz)^n}{n!} S'_n(z).$$

Redistribuint els termes d'aquesta equació, obtenim la igualtat equivalent

$$nz \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(nz)^n}{n!} S'_n(z) = n(1-z) \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z).$$

Llavors,

$$nz \left( \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{S'_n(z)}{n} \right) = n(1-z) \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} S_n(z),$$

i d'aquesta manera, per  $z \neq 1$ , arribem a la igualtat que volíem

$$\frac{z}{1-z} \left[ 1 - \frac{S'_n(z)}{n} \right] = S_n(z).$$

(c) És evident que la funció  $T_n(z)$  és holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La relació amb la seva derivada es prova anàlogament a com ho hem fet per  $S_n(z)$ , derivant l'equació (5.3) que defineix la funció  $T_n(z)$ .

(d) Per definició de  $S_n(z)$  i  $T_n(z)$ ,

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nz)^k n!}{(n+k)!} \quad \text{i} \quad T_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (nz)^{n-k}}.$$

Aleshores, en cas que  $|z| \leq 1$ , tenim

$$|S_n(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} |z|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} = S_n(1) < S_n(1) + T_n(1),$$

i en cas que  $|z| \geq 1$ ,

$$|T_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! n^{n-k} |z|^{n-k}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! n^{n-k}} = T_n(1) < S_n(1) + T_n(1).$$

Per tant, per veure que  $|S_n(z)| < e\sqrt{n}$  quan  $|z| \leq 1$ , i que  $|T_n(z)| < e\sqrt{n}$  quan  $|z| \geq 1$ , és suficient provar que  $S_n(1) + T_n(1) \leq e\sqrt{n}$ .

Per la propietat (a), val la igualtat

$$S_n(1) + T_n(1) = n! \left( \frac{e}{n} \right)^n.$$

Així doncs, només cal provar que, per  $n > 0$  gran,

$$n! \left( \frac{e}{n} \right)^n \leq e\sqrt{n}.$$

Això surt de la Fórmula de Stirling (2.1), ja que, per  $n > 0$  gran,

$$n! \left( \frac{e}{n} \right)^n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) \left( \frac{e}{n} \right)^n = \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) < e\sqrt{n}.$$

Ens queda demostrar la propietat *iii*). Sigui  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|e^{1-z}z| \geq 1$ , volem veure que  $|S_n(z)| < 2e\sqrt{n}$  i  $|T_n(z)| < 2e\sqrt{n}$ . Distingirem dos casos, quan  $|z| \leq 1$  i quan  $|z| \geq 1$ .

Per la propietat (i) i el que acabem de veure, tenim que, per tot  $n > 0$ ,

$$|S_n(z) + T_n(z)| = \frac{n!(e/n)^n}{|e^{1-z}z|^n} \leq n! \left( \frac{e}{n} \right)^n \leq e\sqrt{n}.$$

En cas que  $|z| \leq 1$ , ja hem provat que, per tot  $n > 0$ ,  $|S_n(z)| < e\sqrt{n}$ . A més,

$$|T_n(z)| - |S_n(z)| \leq |S_n(z) + T_n(z)| \leq e\sqrt{n},$$

llavors, per tot  $n > 0$ ,

$$|T_n(z)| \leq e\sqrt{n} + |S_n(z)| < 2e\sqrt{n}.$$

En cas que  $|z| \geq 1$ , hem provat que, per tot  $n > 0$ ,  $|T_n(z)| < e\sqrt{n}$ . A més,

$$|S_n(z)| - |T_n(z)| \leq |S_n(z) + T_n(z)| \leq e\sqrt{n},$$

per tant, per tot  $n > 0$ ,

$$|S_n(z)| \leq e\sqrt{n} + |T_n(z)| < 2e\sqrt{n}.$$

□

A partir de les propietats de les funcions  $S_n(z)$  i  $T_n(z)$ , podem controlar la distància màxima de  $Z(Q_n)$  a  $S$

**Teorema 5.5** ([Buck1], Theorem 3). *Per  $n > 0$  gran, si  $z \in Z(Q_n)$ , aleshores*

$$\text{dist}(z, S) < \frac{2e}{\sqrt{n}}.$$

*Demostració.* Per la definició de  $T_n(z)$ , sabem que

$$Q_n(z) = \frac{(nz)^n}{n!} T_n(z).$$

A més, com  $Q_n(0) \neq 0$  per tot  $n > 0$ , els zeros del polinomi  $Q_n(z)$  són els zeros de la funció  $T_n(z)$ . Per tant, volem veure que, per tot  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{dist}(z, S) \geq 2e/\sqrt{n}$ , es té que  $T_n(z) \neq 0$ .

Com que, pel Teorema 5.1, els zeros de  $Q_n$  estan fora de  $\bar{U} = \mathcal{U} \cup S$ , només hem de provar que, per tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{U}$  tal que  $\text{dist}(z, S) \geq 2e/\sqrt{n}$ , es té  $T_n(z) \neq 0$ .

En primer lloc veiem que, per tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$  i  $n$  gran, tenim  $|T_n(z)| < 2e\sqrt{n}$ . Això surt de l'apartat (d) del lema anterior. Com que

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z}z| < 1, |z| < 1\},$$

tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$  compleix  $|z| \geq 1$  i/o  $|e^{1-z}| \geq 1$ . Aleshores, per les propietats *ii*) i *iii*), es té  $|T_n(z)| < e\sqrt{n} < 2e\sqrt{n}$ , si  $|z| \geq 1$ , i es té  $|T_n(z)| < 2e\sqrt{n}$ , si  $|e^{1-z}z| \geq 1$ .

Ara prenem  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{U}$  tal que  $\text{dist}(z_0, S) = \delta + \varepsilon$ , amb  $\delta = 2e/\sqrt{n}$  i  $\varepsilon \geq 0$ . Volem provar que  $T_n(z_0) \neq 0$ ; d'aquesta manera, per tot  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{dist}(z_0, S) \geq \delta$ , es tindrà que  $z_0$  no és zero de  $Q_n(z)$ .

Com que el disc  $\overline{\mathcal{D}(z_0, \delta + \varepsilon)}$  està inclòs en  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ , per l'observació que hem fet de  $|T_n(z)|$ , tenim que

$$M = \max_{z \in \overline{\mathcal{D}(z_0, \delta + \varepsilon)}} |T_n(z)| < 2e\sqrt{n}.$$

Llavors, utilitzant les desigualtats de Chauchy en el disc  $\overline{\mathcal{D}(z_0, \delta + \varepsilon)}$ , obtenim que

$$|T'_n(z_0)| \leq \frac{M}{\delta + \varepsilon} \leq \frac{M}{\delta} < \frac{2e\sqrt{n}}{2e/\sqrt{n}} = n.$$

Per altra part, per l'apartat (c) del lema anterior, com que  $z_0$  és diferent de 0 i 1,

$$T_n(z_0) = \frac{z_0}{z_0 - 1} \left[ 1 + \frac{T'_n(z_0)}{n} \right].$$

Llavors,  $T_n(z_0) = 0$  si i només si

$$1 + \frac{T'_n(z_0)}{n} = 0.$$

Per tant, si  $z_0$  és zero de  $T_n(z)$ , cal que  $n = |T'_n(z_0)|$ . Però, com que hem vist que  $|T'_n(z_0)| < n$ , la igualtat anterior no és possible, per tant,  $z_0$  no és zero de la funció  $T_n(z)$ . □

Per acabar, oferim un recull de propietats dels polinomis  $Q_n$  i la seva distribució al voltant de la Corba de Szegő, demostrades per Peter Walker en [Walk].

La tercera d'aquestes propietats és particularment interessant, ja que, així com l'anterior teorema de Buckholtz ens dona una distància màxima a la qual poden viure els zeros de  $Q_n$  respecte  $S$ , aquesta propietat ens dona una distància mínima. Per tant, conjuntament, obtenim una regió controlada per  $n$  on viuen els zeros de  $Q_n$ .

**Teorema 5.6** ([Walk], Theorem 1). *Si*  $n \geq 0$ ,

(a)  $Q_n(1) = P_n(n) > \frac{e^n}{2}$ .

(b)  $Z(Q_n) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |e^{1-z}z| \leq 2^{1/n}\} = \emptyset$ .

(c) *Si*  $z \in Z(Q_n)$ , *aleshores*  $\text{dist}(z, S) > \frac{2^{1/n}-1}{2e^2}$ .

*Demostració.*

(a) El cas  $n = 0$  és trivial. Veiem què passa per  $n > 0$ .

Per la Proposició 4.1, per tot  $n > 0$  i tot  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$e^{-z}P_n(z) = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^z e^{-t}t^n dt.$$

En particular, com que per tot  $n > 0$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!,$$

tenim

$$e^{-n}P_n(n) = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t}t^n dt = \frac{1}{n!} \int_n^\infty e^{-t}t^n dt.$$

Per tant,

$$Q_n(1) = e^n \left( 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t}t^n dt \right) = e^n \left( \frac{1}{n!} \int_n^\infty e^{-t}t^n dt \right).$$

Per aquesta darrera igualtat, tenim  $Q_n(1) > \frac{e^n}{2}$  si i només si

$$1 > \frac{1}{n!} \int_n^\infty e^{-t}t^n dt > \frac{1}{2} > \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t}t^n dt > 0.$$

Llavors, per demostrar que això, és suficient provar

$$\int_0^n e^{-t}t^n dt < \int_n^\infty e^{-t}t^n dt.$$

Fent el canvi de variable  $u = t/n$ , amb  $ndu = dt$ , en ambdues integrals, la desigualtat anterior equival a

$$\int_0^1 (e^{-u}u)^n du < \int_1^\infty (e^{-u}u)^n du.$$

Per veure això, comparem la integral entre 0 i 1 amb la integral entre 1 i 2. Considerem la funció  $g(x) = e^x(1-x)$ , per  $x \in (0, 1)$ . Es tracta d'una funció decreixent, perquè  $g'(x) = -xe^x$ . A més,  $g(0) = 1$ , *aleshores*, per  $x \in (0, 1)$ , tenim

$$e^x < \frac{1}{1-x}.$$

Fent el quadrat en ambdues bandes, per  $x \in (0, 1)$  tenim

$$e^{2x} < \frac{1}{(1-x)^2}.$$



A continuació, prenent la integral entre 0 i  $x$  de cada banda per separat, obtenim

$$\int_0^x e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) \quad \text{i} \quad \int_0^x \frac{1}{(1-s)^2} ds = \frac{1}{2} \left( \frac{1+x}{1-x} - 1 \right),$$

que ens duu a la desigualtat

$$e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (0, 1).$$

Aquesta desigualtat equival a

$$e^x(1-x) < e^{-x}(1+x), \quad \text{per } x \in (0, 1)$$

que és el mateix que

$$e^{-(1-x)}(1-x) < e^{-(1+x)}(1+x), \quad \text{per } x \in (0, 1).$$

Observem que, per  $x \in (0, 1)$ ,  $u = 1 - x$  recorre el segment  $(0, 1)$  i  $u = 1 + x$  recorre el segment  $(1, 2)$ . Aleshores, per la desigualtat anterior, obtenim

$$\int_0^1 (e^{-u}u)^n du < \int_1^2 (e^{-u}u)^n du \leq \int_1^\infty (e^{-u}u)^n du,$$

com volíem demostrar.

(b) Sigui  $z$  tal que  $|z| \leq 1$  i  $|e^{1-z}z| \leq 2^{1/n}$ , per provar que  $z$  no és zero de  $Q_n$ , com en la demostració del Teorema 5.1 de Buckholtz, és suficient demostrar que  $|1 - e^{nz}Q_n(z)| < 1$ .

Seguint el mateix procediment que en aquella demostració, per la desigualtat (5.1) i per com hem triat  $z$ ,

$$|1 - e^{nz}Q_n(z)| \leq |e^{1-z}z|^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k |z|^{k-n}}{k!} \leq 2e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = 2e^{-n}(e^n - Q_n(1)).$$

Llavors, aplicant la propietat (a),

$$|1 - e^{nz}Q_n(z)| \leq 2(1 - e^{-n}Q_n(1)) < 2 \left( 1 - e^{-n} \frac{e^n}{2} \right) = 1.$$

(c) Sigui  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{dist}(z, S) \leq d = (2^{1/n} - 1)/2e^2$ , volem veure que  $Q_n(z) \neq 0$ . En cas que  $|z| > 1$ , pel Teorema de Iyengar, ja sabem que  $z$  no és zero de  $Q_n$ , per tant, podem suposar  $|z| \leq 1$ .

A continuació demostrem que  $|e^{1-z}z| \leq 2^{1/n}$ , ja que així, aplicant la propietat (b), ja tindrem que  $z$  no és zero de  $Q_n$ .

Recordem que la funció  $h(z) = e^{1-z}z$  és entera i  $h'(z) = (1-z)e^{1-z}$ . Llavors compleix

$$M = \max_{|w| \leq 1} |h'(w)| \leq 2e^2.$$

Per provar que  $|h(z)| \leq 2^{1/n}$ , prenem  $u \in S$  ( $|h(u)| = 1$  i  $|u| \leq 1$ ) tal que  $|z - u| \leq d$ . Pel Teorema del valor intermig per a funcions de diverses variables, si  $\mathcal{D}$  és un disc que conté  $z$  i  $u$ , aleshores

$$|h(z) - h(u)| \leq \left( \max_{w \in \mathcal{D}} |h'(w)| \right) |z - u|.$$

Per tant,

$$|h(z)| \leq |h(u)| + M|z - u| \leq 1 + 2e^2 d = 1 + 2e^2 \frac{2^{1/n} - 1}{2e^2} = 2^{1/n},$$

que és el que volíem demostrar. □

**Corol·lari 5.7.** *Per  $n > 0$  gran, si  $z \in Z(Q_n)$ , aleshores*

$$\frac{2^{1/n} - 1}{2e^2} < \text{dist}(z, S) < \frac{2e}{\sqrt{n}}.$$

**Observació 5.8.** Considerant  $f(x) = 2^x - 1$  i fent el desenvolupament de Taylor de  $f$  a  $x_0 = 0$ , es pot veure que  $2^{1/n} - 1 \approx \log 2/n$ . Per tant, la menor distància respecte a  $S$  a la qual els zeros de  $Q_n$  poden viure va a zero amb ordre de velocitat  $1/n$ , i la major distància a la qual poden viure va a zero amb ordre de velocitat  $1/\sqrt{n}$  (més lentament que  $1/n$ ).

Aquests resultats han estat millorats posteriorment pels matemàtics Carpenter, Varga i Waldvogel. Es poden trobar aquestes millores en [Car, Var, Wald]. Entre les millores es troba una quantificació del fet que hi ha una convergència més ràpida a  $S$  pels zeros de  $Q_n$  que es troben uniformement més lluny del punt  $z = 1$ .

## 6 Conclusions

Utilitzant diferents conceptes sobre funcions enteres i els seus zeros hem aconseguit demostrar el Teorema de Szegő exposat en la Introducció.

Hem vist que, efectivament, la Corba de Szegő està formada pels punts d'acumulació del conjunt de zeros dels polinomis truncats reescalats de l'exponencial. Després hem vist que aquests zeros es distribueixen, per fora de  $S$  i la regió que envolta, de manera uniforme respecte l'argument de la funció  $h$ , que hem provat que és una transformació conforme entre  $\Omega$  i  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

A banda d'això, hem estudiat la velocitat a la qual s'apropen els zeros dels polinomis truncats reescalats a  $S$ , acotant les distàncies mínima i màxima a la qual poden estar aquests zeros de  $S$ .

En definitiva, la Corba de Szegő ha resultat ser un tema d'estudi molt enriquidor; amb conceptes inicialment simples, ens hem endinsat en una teoria interessant i sorprenent que ha resultat ser més complexa del que semblava.

## Referències

- [Buck1] Buckholtz, J. D. *A characterization of the exponential series*. Amer. Math. Monthly, 73 (1966), no. 4, part II, 121–123.
- [Buck2] Buckholtz, J. D. *Concerning an approximation of Copson*. Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 564 – 568.
- [Cal, Car] Calle Ysern, Bernardo de la, i Carbajo Gibaja, Francisco. *La curva de Szegő*. La Gaceta de la RSME, 20 (2017), no. 2, 269-296.
- [Car, Var, Wald] Carpenter, A. J., Varga, R. S. i Waldvogel, J. *Asymptotics for the zeros of the partial sums of  $e^z$ . I*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 21 (1991), no. 1, 99-120.
- [Iyen] Iyengar, K. S. K. *A Note on the Zeros of  $\sum_{r=0}^n \frac{z^r}{r!} = 0$* . Math. Student, 6 (1938), 77-78.
- [Lev] Levin, B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Amer. Math. Soc. (1980), capítol 1, 1-25.
- [Pri, Var] Pritsker, I. E. i Varga, R. S. *The Szegő curve, zero distribution and weighted approximation*. Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 10, 4085-4015.
- [Row] Rowland, E. *Szegő Curve*. Wolfram Demonstrations Project (2011). <https://demonstrations.wolfram.com/SzegoeCurve/>.
- [Walk] Walker, P. *The Zeros of the Partial Sums of the Exponential Series*. Amer. Math. Monthly 110 (2003), no. 4, 337-339.
- [Sz] Szegő, G. *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 23 (1924), 50–64.