UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Del teorema de Sard a la teoria de Morse

Autor: Jon Ferreras Alegre

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

Sard's theorem is a basic result of Differential Topology which is assumed in many texts of this branch of mathematics. In this work we prove it in detail and we study one of its multiple applications: finding the homotopy type of differentiable manifolds through Morse theory, proving along the way that said theory can be applied to every differentiable manifold.

Resum

El teorema de Sard és un resultat base de la Topologia Diferencial que es dona per conegut en la majoria de textos d'aquesta branca. En aquest treball el demostrem en detall i n'estudiem una de les múltiples aplicacions: trobar el tipus d'homotopia de varietats diferencials a través de la teoria de Morse, provant pel camí que aquesta teoria es pot aplicar a qualsevol varietat diferencial.

2020 Mathematics Subject Classification. 57N75, 57R19, 57R35, 57R40, 57R42, 57R70, 58A05, 58K05

Agraïments

Vull agrair, en primer lloc, als meus pares i la meva parella, pel suport permanent que m'han donat durant tot el treball i tot el grau. En segon lloc, vull agrair als meus amics, especialment al Gaby i al Miquel, per tot el suport durant les èpoques de més feina i ajudar en tot el que han pogut. Finalment, vull donar les gràcies al Dr. Ignasi Mundet, sense el qual no hi hauria treball, pels seus consells i per motivar-me a saber comunicar en detall tot allò que he après.

Gràcies a tots.

Índex

Introducció

El teorema de Sard afirma que, donada una aplicació diferenciable entre dues varietats diferenciables M i N, la imatge dels punts crítics té mesura zero en N. Un resultat que, a priori, pot semblar força insubstancial, dona resposta a moltes 'idees intuitives' com per exemple: 'dues rectes a $\mathbb{R}^3$ en general no es tallen' o 'gairebé tot punt de la majoria de funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ té derivada diferent de zero'. Aquestes afirmacions 'en general' o 'gairebé tot' (*almost all*) es poden provar a partir del teorema de Sard.

L'objectiu principal d'aquest treball és provar que les varietats diferenciables tenen tipus d'homotopia fàcilment descriptibles. Aquest objectiu el teníem clar des del principi, però consultant llibres introductoris i desfent el camí fins a Morse vam arribar al teorema de Sard; les primeres eines que necessitem per a veure el tipus d'homotopia de les varietats diferenciables són les funcions de Morse, però observant quines funcions utilitzem per provar que existeixen trobem que, per poder aplicar els resultats de la teoria de Morse a tota varietat diferenciable, cal veure que les varietats diferenciables són subconjunts (tancats, de fet) d'algun $\mathbb{R}^n$. Això ens porta a estudiar els teoremes de Whitney, la demostració dels quals fa ús de diverses eines de la topologia diferencial, entre elles el teorema de Sard, que d'altra banda també apareix a la construcció de les funcions de Morse.

D'aquesta manera vam veure que el teorema de Sard dona un resultat bàsic però imprescindible, i per tant és ideal com a casella inicial d'aquest treball. Partint del teorema de Sard, podem provar tots els resultats que fan falta per arribar a l'objectiu principal. Sard torna a aparèixer pel camí en diversos llocs, sent útil per provar exemples i veure una mica de teoria de la transversalitat.

En definitiva, l'objectiu principal d'aquest treball acaba sent mostrar tot el que es pot desenvolupar a partir d'un teorema bàsic i 'intuïtiu', detallant el procés i posant exemples il·lustratius.

Estructura de la memòria

La memòria s'inicia al capítol 1 amb definicions i resultats inicials, un estudi sobre els punts crítics i la prova d'algunes propietats de tres tipus particulars d'aplicacions. Alguns dels conceptes que s'hi defineixen ja s'han vist en assignatures del grau, però creiem convenient tornar-los a definir, donat que existeixen diverses maneres, intrínseques i no intrínseques, de definir varietat diferenciable, espai tangent, diferencial, etc. i no volem que hi hagi cap ambigüetat. Mirem de no incloure resultats perquè sí: tot el que es prova en aquest primer capítol és d'utilitat al llarg del text.

El segon capítol el dediquem a enunciar i provar el teorema de Sard. En textos on es prova aquest teorema és habitual veure'l restringit a casos particulars més fàcils de provar; nosaltres el provem amb tota generalitat. Al final del capítol parlem de la transversalitat, una propietat íntimament relacionada amb el teorema de Sard.

Un cop provat Sard, podem provar els teoremes d'encabiment de Whitney, que és al que dediquem el capítol 3. Per fer aquestes proves necessitem unes funcions particulars anomenades funcions altiplà i particions de la unitat; les definim i en demostrem les propietats al mateix apartat, aprofitant que veure'n una aplicació directa facilita entendre la utilitat del concepte. Al final del capítol veiem una aplicació immediata del fet que les varietats diferencials es puguin encabir en $\mathbb{R}^n$.

Els teoremes de Whitney ens permeten provar la universalitat de tot allò que es discuteix al capítol 4. S'introdueixen les funcions de Morse, se n'estudia el comportament a prop dels punts crítics i es demostren els tres teoremes principals per poder descriure el tipus d'homotopia d'una varietat diferenciable. Al final del capítol presentem exemples de càlcul d'aquests tipus d'homotopia i altres aplicacions de la teoria de Morse.

1 Preliminars

1.1 Definicions inicials

Començarem definint els conceptes bàsics que necessitarem per treballar la topologia des de l'òptica diferencial.

Definició 1.1. *Siguin* $U \subset \mathbb{R}^m$ *i* $V \subset \mathbb{R}^n$ *conjunts oberts. Diem que una aplicació continua* $f : U \to V$ *és* k *vegades diferenciable (denotem* $\mathscr{C}^k$*) si existeixen totes les derivades parcials* $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}}$ *per tot* $l \leq k$ *i són continues.*

En general si $X \subset \mathbb{R}^m$ *i* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *són subconjunts arbitraris, diem que una aplicació continua* $f : X \to Y$ *és* k *vegades diferenciable si per cada* $x \in X$ *existeix un conjunt obert* $U \subset \mathbb{R}^m$ *que conté* x *i una aplicació* k *vegades diferenciable* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *que coincideix amb* f *a* $U \cap X$*.*

A no ser que s'indiqui el contrari, durant la resta del treball l'adjectiu 'diferenciable' es referirà a $\mathscr{C}^\infty$, és a dir, que existeixen totes les derivades parcials.

Definició 1.2. *Sigui* M *un espai topològic. Un atles diferenciable de dimensió* m *és una colecció de parells* $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ *on* U_i *és un obert de* M *i per a tot* $i \in I$, ϕ_i *és un homeomorfisme entre* U_i *i un obert de* $\mathbb{R}^m$*. A més, s'ha de verificar*

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
2. *Per tot* $i, j \in I$ *tals que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ *és una aplicació diferenciable entre* $\phi_i(U_i \cap U_j)$ *i* $\phi_j(U_i \cap U_j)$*. Aquesta aplicació s'anomena canvi de carta.*

Cada parell (U_i, ϕ_i) *s'anomena carta (local) de l'atles. A vegades parlarem d'un sistema de coordenades local* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$*, on* $x_{i_j} : U_i \to \mathbb{R}$ *són les components de* ϕ_i*.*

Definició 1.3. *Sigui* M *un espai topològic. Una estructura diferenciable de dimensió* m *sobre* M *és una classe d'equivalència d'atles de dimensió* m*, on diem que dos atles són equivalents si la seva reunió és un altre atles. Diem carta a una carta qualsevol continguda en un atles de la classe d'equivalència.*

Definició 1.4. *Una varietat diferenciable de dimensió* m *és un espai topològic* M *que és Hausdorff, satisfà el segon axioma de numerabilitat i està dotat d'una estructura diferenciable de dimensió* m*. En general denotarem la dimensió d'una varietat amb la lletra minúscula corresponent.*

Exemples 1.5.

1. $\mathbb{R}^n$ amb l'atles d'una sola carta $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$.
2. $\mathbb{S}^n$ amb l'atles $\{(\mathbb{S}^n \setminus \{p_n\}, \pi_{p_n}), (\mathbb{S}^n \setminus \{p_s\}, \pi_{p_s}\})$ on p_n i p_s son el pol nord i el pol sud respectivament i π_{p_n} i π_{p_s} son les projeccions estereogràfiques des d'aquests punts.
3. El torus T^n amb l'atles producte de n còpies de $\mathbb{S}^1$ (veure la següent observació).
4. L'espai projectiu real $\mathbb{RP}^n$. Considerant-lo com a quocient de $\mathbb{R}^{n+1}$ per la relació $x \sim y$ si i només si $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, donat $u \in \mathbb{RP}^n$ considerem l'antiimatge per la projecció, $\pi^{-1}(u) = (x_0, \ldots, x_n)$ i triem U_i els oberts de $\mathbb{RP}^n$ pels que $x_i \neq 0$. Llavors definint $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $\phi_i(u) = (\frac{x_0(u)}{x_i(u)}, \ldots, \frac{x_{i-1}(u)}{x_i(u)}, \frac{x_{i+1}(u)}{x_i(u)}, \ldots, \frac{x_n(u)}{x_i(u)})$ tenim que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ és un atles.

Sempre que diguem 'varietat' en aquest text ens referirem a varietats diferenciables. Si en algun punt ho especifiquem és per recalcar la diferenciabilitat.

Observació 1.6. Un parell de propietats de les varietats diferenciables:

1. Un obert d'una varietat també és una varietat, considerant-hi la topologia subespai i l'atles que s'obté d'intersecar les cartes amb l'obert i restringir les aplicacions.

2. És fàcil veure que si $\{(U_i, \phi_i)\}$ és un atles d'una varietat M i $\{(V_j, \psi_j)\}$ ho és d'una varietat N, llavors $M \times N$ té estructura de varietat diferenciable amb l'atles $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}$.

Definició 1.7. *Si N és un subconjunt d'una varietat M, diem que és una subvarietat n-dimensional ($n \leq m$) si podem prendre un atles a M, $\{(U_i, \phi_i)\}$, tal que $\phi_i(N \cap U_i) = \mathbb{R}^n \cap \phi_i(U_i)$, on $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \,|\, x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$. Una subvarietat en particular és una varietat, amb l'atles $\{(N \cap U_i, \phi_i|_{N \cap U_i})\}$. Direm que $m - n$ és la codimensió de N a M.*

Definició 1.8. *Una varietat diferenciable amb vora de dimensió m és un espai topològic X que és Hausdorff, satisfà el segon axioma de numerabilitat i està dotat d'una estructura diferenciable de dimensió m, amb la diferència de que les cartes de l'atles son homeomorfismes a oberts de $H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \,|\, x_m \geq 0\}$. La vora de X, ∂X, consisteix en el conjunt de punts amb la imatge per una carta local a la vora $\partial H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \,|\, x_m = 0\}$.*

Observació 1.9. Tres propietats de les varietats amb vora:

1. La vora ∂X d'una varietat diferenciable amb vora m-dimensional és una varietat diferenciable (sense vora) $m-1$-dimensional.

2. $Int(X) = X \setminus \partial X$ és una varietat diferenciable (sense vora) de dimensió m.

3. El producte de dues varietats diferenciables amb vora és una varietat diferenciable amb vora.

En aquest treball provarem algun resultat sobre varietats diferenciables sense vora. Veurem que el teorema de Sard val també per varietats diferenciables amb vora, però estendre els resultats dels capítols 3 i 4 a varietats amb vora no és gens trivial i no ho veurem.

Ara provarem una propietat de les varietats que necessitarem més endavant:

Proposició 1.10. *Tot recobriment obert d'una varietat M admet un subrecobriment numerable (tota varietat és un espai de Lindelöf).*

PROVA: És una conseqüència de que tot espai que satisfà el segon axioma de numerabilitat satisfà aquesta condició. Sigui $\{B_n\}$ la base numerable de M i sigui $\{U_i\}$ un recobriment obert. Per a cada element de la base, B_n, diem V_n a qualsevol U_i que contingui B_n. Si tal U_i no existeix, no fem res. Provarem que la col·lecció numerable $\{V_n\}$ recobreix M.

Suposem que existeix $p \in M$ que no pertany a cap V_n. Segur que podem trobar un element U_j del recobriment tal que $p \in U_j$, i per força ha d'existir un element B_{n_0} de la base tal que $p \in B_{n_0} \subset U_j$ (per definició de base). Com que B_{n_0} està contingut en almenys un element del recobriment, hauria d'existir un element V_{n_0}; però tal element hauria de contenir p. Així doncs hem arribat a una contradicció, fruit d'assumir que existeix un p que no pertany a cap V_n, i per tant $\{V_n\}$ és un subrecobriment numerable de $\{U_i\}$. $\square$

Definició 1.11. *Diem que una aplicació continua entre varietats $f : M \to N$ és diferenciable si per tota carta (U, ϕ) de M i (V, ψ) de N, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ és diferenciable (en el sentit d'aplicació entre subconjunts de $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$).*

Observació 1.12. Algunes propietats ben conegudes de les aplicacions diferenciables:

1. La composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable, allà on la composició tingui sentit.
2. La suma, el producte i la divisió d'aplicacions diferenciables és diferenciable, sempre que no dividim per zero.
3. Si $U \subset M$ és un obert, la inclusió és diferenciable. A més, si tenim una aplicació diferenciable $f : M \to N$ la restricció $f|_U$ també és diferenciable.
4. Les aplicacions projecció $M \times N \to M$ i $M \times N \to N$ són diferenciables.

Definició 1.13. *Diem que una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és un difeomorfisme si és bijectiva i té inversa diferenciable.*

Exemple 1.14. Sigui (U, ϕ) una carta de M. L'aplicació carta $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ és un difeomorfisme considerant les corresponents estructures que tenen U i $\phi(U)$ com a oberts.

Ara ja podrem començar a introduir les nocions de diferencial, espai tangent, etc. Apuntem també que aquestes nocions es poden estendre fàcilment a varietats amb vora ([7], pàg. 59).

Definició 1.15. *Diem funcions diferenciables a les aplicacions $f : M \to \mathbb{R}$, on $\mathbb{R}$ té l'estructura diferenciable trivial (una sola carta $(\mathbb{R}, Id)$). Si diem $\mathcal{F}(M)$ al conjunt d'aquestes funcions, és clar que la suma ($(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$), producte per escalar ($(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$) i producte de funcions ($(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$) són operacions tancades en aquest conjunt, i per tant és un anell i un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Definició 1.16. *Una derivació a M en un punt $p \in M$ és una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\delta : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\delta(fg) = \delta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta(g)$$

per a tot $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Definició 1.17. *Definim l'espai tangent a M en un punt p, T_pM, com el conjunt de derivacions a M en el punt p. T_pM és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ si definim $(\delta_1 + \delta_2)(f) = \delta_1(f) + \delta_2(f)$ i $(\lambda\delta)(f) = \lambda \cdot \delta(f)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Observació 1.18. Si $(p, q) \in M \times N$ llavors $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$.

Definició 1.19. *Si $f : M \to N$ és una aplicació diferenciable, en cada punt $p \in M$ podem definir una aplicació lineal $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ donada per*

$$d_pF(\delta)(g) = \delta(g \circ F),$$

per tota δ derivació a M en p i cada $g \in \mathcal{F}(N)$. Diem que d_pF és la diferencial de F en el punt p.

Observació 1.20. Un parell de propietats de la diferencial:

1. Si F o G es poden composar llavors $d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF$. Això implica que si F és un difeomorfisme llavors d_pF és un isomorfisme d'espais vectorials per a tot p ($d_{F(p)}F^{-1}$ és la inversa en tots dos sentits).

2. Si $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ és una aplicació lineal, llavors $d_xL = L$ per tot x.

Proposició 1.21. *Si dues funcions diferenciables $f, g : M \to \mathbb{R}$ coincideixen en un entorn V d'un punt p, llavors $\delta(f) = \delta(g)$ per a tota $\delta \in T_pM$.*

PROVA: Escollim una funció diferenciable $\rho : M \to \mathbb{R}$ que valgui 1 en un entorn W de p amb $W \subset V$ i que valgui 0 fora de V (aquest tipus de funcions reben el nom de funcions altiplà i provem la seva existència a la Proposició 3.3). Llavors com que $f(x) = g(x)$ per tot $x \in V$, se satisfà $(\rho f)(x) = (\rho g)(x)$ per tot $x \in M$. En conseqüència, $\delta(\rho f) = \delta(\rho g)$. Però de la definició de derivació obtenim que

$$\delta(f) = \delta(\rho f) - \delta(\rho) \cdot f(p) = \delta(\rho g) - \delta(\rho) \cdot g(p) = \delta(g)$$

i hem acabat. □

Utilitzarem aquesta propietat per provar que l'espai tangent d'una varietat és isomorf al d'un obert d'aquesta varietat.

Proposició 1.22. *Sigui M una varietat diferenciable, $U \subset M$ un obert i $p \in U$. Sigui $i : U \hookrightarrow M$ la inclusió. Llavors $d_pi : T_pU \to T_pM$ és un isomorfisme d'espais vectorials.*

PROVA: Per a cada funció diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$, escollim una funció diferenciable ρ com la de la proposició anterior. ρf està definida a tot arreu de M, és diferenciable i coincideix amb f a $W \subset U$. Definim $\delta'(f) = \delta(\rho f)$. δ' no depèn de la funció ρ escollida (per la proposició anterior) i és clar que és una derivació a U en p tal que $d_pi(\delta') = \delta$. Qualsevol altra derivació a U en p que s'apliqui a δ coincidirà amb δ' (un cop més per la proposició anterior). Així doncs d_pi és bijectiva. □

Ara estudiarem el cas particular de les derivacions a $\mathbb{R}^n$, cosa que ens permetrà trobar la dimensió dels espais tangents:

Definició 1.23. *Per a cada punt $p \in \mathbb{R}^n$ i cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ unitari, la derivada direccional en el punt p i en la direcció v és una derivació a $\mathbb{R}^n$ en el punt p que es defineix com*

$$\delta(f) = \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0}$$

per tota $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Així, definim la derivada parcial i-èsima d'una funció f en un punt p com la derivada direccional en la direcció del vector i-èsim de la base canònica (la usual) de $\mathbb{R}^n$. La denotarem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, o bé $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f)$ quan vulguem emfatitzar que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ és una derivació.

Proposició 1.24. *L'espai vectorial $T_0\mathbb{R}^n$ té dimensió n.*

PROVA: Primer observem que si f és una funció constant llavors $\delta(f) = 0$ per a tota derivació δ en un punt qualsevol (doncs $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ i per tant $\delta(1) = 0$ i llavors $\delta(c) = c \cdot \delta(1) = 0$).
Ara sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable qualsevol, que podem escriure com

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n) dt$$

$$= f(0,\dots,0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)dt.$$

Si δ és una derivació a $\mathbb{R}^n$ en el punt 0, considerant $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com la projecció i-èsima, tenim

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)dt\Big|_{(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)} = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Llavors

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0,$$

és a dir, que cada derivació en 0 és una combinació lineal de $(\frac{\partial}{\partial x_1})_0,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_n})_0$ i els coeficients són nombres reals $\delta(x_1),\dots,\delta(x_n)$.
Només falta veure que els elements de la combinació lineal són linealment independents: si $\lambda_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_0 + \cdots + \lambda_n(\frac{\partial}{\partial x_n})_0 = 0$, la imatge d'aquesta expressió per cada x_i ens dona $\lambda_i = 0$.
Com que tot espai vectorial de dimensió n és isomorf a $\mathbb{R}^n$, podem dir que $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.□

D'aquí i de la Proposició 1.22 obtenim:

Corol·lari 1.25. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$. Llavors $T_pU \cong T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.*

En el cas de varietats qualsevol:

Corol·lari 1.26. *Sigui M una varietat m-dimensional i sigui $p \in M$. Llavors T_pM té dimensió m.*

PROVA: Sigui (U,ϕ) una carta local de M amb $p \in U$ centrada en p ($\phi(p) = 0$). Com que ϕ és un difeomorfisme, $d_p\phi : T_pU \to T_0\mathbb{R}^m$ és un isomorfisme d'espais vectorials. Llavors la dimensió de T_pU és la mateixa que la de $T_0\mathbb{R}^m$, i per la Proposició 1.22 $T_pU \cong T_pM$. □

Donat $p \in M$ i una carta (U,ϕ) denotem

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = (d_p\phi)^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\phi(p)}.$$

i aquests $\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)_p,\dots,\big(\frac{\partial}{\partial x_n}\big)_p$ formen una base de T_pM.

Definició 1.27. *Diem fibrat tangent de M al subconjunt $TM \subset M \times \mathbb{R}^m$,*

$$TM = \{(p,v)\,|\,p \in M, v \in T_pM\} = \bigsqcup_{p\in M} T_pM.$$

A vegades denotem v_p al parell (p,v).

Proposició 1.28. *TM és una varietat diferenciable $2m$-dimensional. A més, la projecció $\pi : TM \to M$, $\pi(p,v) = p$ és diferenciable.*

PROVA: Cal dotar de topologia i estructura diferenciable a TM i provar que és un espai Hausdorff i que satisfà el segon axioma de numerabilitat.

1. Per a cada carta local (U, ϕ) de M amb coordenades $(x_1, \ldots, x_m)$ definim una aplicació $F_U : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2m}$ com

$$F_U(p, v) = (p_1, \ldots, p_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

on $\phi(p) = (p_1, \ldots, p_m)$ i $v = \lambda_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_p + \cdots + \lambda_m(\frac{\partial}{\partial x_m})_p$. Podem observar que F_U és una bijecció entre $\pi^{-1}(U)$ i $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, que és un obert de $\mathbb{R}^{2m}$. De fet, és un homeomorfisme, perquè ϕ és un homemorfisme de U a $\phi(U)$. Posem a TM la topologia generada per les antiimatges per F_U de tots els oberts de $\mathbb{R}^{2m}$, per a tota carta (U, ϕ).

2. Si (p, v) és un punt qualsevol de TM, podem escollir una carta (U, ϕ) amb $p \in U$ i aleshores $\pi^{-1}(U)$ és un obert de TM homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^{2m}$ a través de la F_U corresponent. Per tant TM és una varietat de dimensió $2m$.

3. $\{(\phi^{-1}(U_i), F_{U_i})\}_{i \in I}$ és un atles diferenciable a TM. Amb aquesta estructura diferenciable a TM l'aplicació π és diferenciable i cada F_{U_i} és un difeomorfisme de $\pi^{-1}(U_i)$ a $\phi(U_i) \times \mathbb{R}^n$. Observem que $\pi^{-1}(p) = T_pM$.

4. TM és Hausdorff, doncs si $(p, v) \neq (q, w)$ llavors o bé $p \neq q$ i utilitzem que M és Hausdorff per construir els entorns disjunts, o bé $p = q$ i $v \neq w$ i llavors podem utiltizar que $\mathbb{R}^m$ és Hausdorff.

5. TM satisfà el segon axioma de numerabilitat, doncs si prenem un recobriment numerable de M per entorns coordenats U_i (que sabem que existeix per la Proposició 1.10) amb les seves corresponents cartes (U_i, ϕ_i) i diem $V_i = \phi_i(U_i)$, és clar que $V_i \times \mathbb{R}^m$ satisfà el segon axioma de numerabilitat, i com que $TU_i \cong V_i \times \mathbb{R}^m$ i els TU_i formen un recobriment numerable de TM, hem acabat. $\square$

Abans d'acabar aquesta secció inicial, definim el concepte de camp vectorial:

Definició 1.29. *Un camp vectorial diferenciable en M és una aplicació diferenciable $X : M \to TM$ tal que $X(p) =: X_p \in T_pM$ per a tot $p \in M$. És clar doncs que donada una carta local (U, ϕ) amb coordenades $\{x_1, \ldots, x_m\}$ podem expressar*

$$X = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

amb λ_i funcions diferenciables $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$. També podem aplicar un camp vectorial a una funció $f \in \mathcal{F}(M)$; definim una nova aplicació $X(f)$ com $X(f)(p) = X_p(f)$, que és la derivada direccional de f a p en la direcció X_p. En aquest sentit X actúa com una derivació.

Definició 1.30. *El corxet de Lie és un operador que assigna dos camps vectorials X, Y en M a un tercer camp vectorial definit com*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

És fàcil comprovar que això també és una derivació.

1.2 Punts crítics

El teorema de Sard ens dona un resultat important sobre els punts crítics i la seva imatge per una aplicació diferenciable. Ara els definirem i posarem exemples:

Definició 1.31. *Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats m i n-dimensionals respectivament. Diem que $x \in M$ és un punt crític si rang($d_p f$)$< n$. Diem que $x \in M$ és un punt regular si rang($d_p f$)$= n$. En el cas de funcions diferenciables $g : M \to \mathbb{R}$ això equival a que, en un sistema de coordenades local $\{x_1, \ldots, x_m\}$ en un entorn U de p, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = 0$ per tot i.*

Definició 1.32. *En les mateixes condicions, la imatge d'un punt crític s'anomena valor crític i la imatge d'un punt regular s'anomena valor regular.*

Observació 1.33. Els difeomorfismes no tenen punts crítics.

Exemples 1.34.

1. El punt 0 de l'aplicació $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és un punt crític, doncs la derivada evaluada en zero dona zero. Tots els altres punts són regulars.

2. El mateix és cert per a la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

3. Tots els punts de la forma $\{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ són punts crítics de la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2$, doncs la diferencial té matriu
$$\begin{pmatrix} 2x & 0 \end{pmatrix}.$$
que té rang zero per $x = 0$.

4. Considerant el torus T^2 com subvarietat de $\mathbb{R}^3$, la funció $h : T^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = z$ té quatre punts crítics; si considerem el torus com $g^{-1}(0)$ amb $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2 + (R - \sqrt{y^2 + z^2})^2 - r^2$ (veure Teorema 1.38), els punts crítics són $(0, 0, R - r), (0, 0, R + r), (0, 0, -R + r)$ i $(0, 0, -R - r)$, on $R > r > 0$. Estudiarem el torus en profunditat al final del capítol 4.

La intuició ens diu que els valors crítics d'una aplicació són 'pocs' o 'molts menys que els regulars'. El teorema de Sard ens permetrà precisar què vol dir això; d'entrada observem que no sempre són finits, com prova l'exemple 3.

Definició 1.35. *Diem que una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és una submersió a $p \in M$ si $d_p f$ si és exhaustiva. Si ho és per a tot p, diem que és una submersió. Fixem-nos que f només pot ser una submersió si la dimensió de M és més gran o igual que la de N.*

Observació 1.36. És clar que p és un punt regular de f si i només si f és una submersió a p.

Un teorema conegut sobre submersions és:

Teorema 1.37. *Si $f : M \to N$ és una submersió a x i $y = f(x)$, existeixen coordenades locals en un entorn de x i de y tals que $f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$, on m i n són les dimensions de M i N respectivament. Fixem-nos que això ens diu que si f és una submersió a x també ho és en tots els punts d'un entorn de x.*

I d'aquí se'n pot deduir:

Teorema 1.38. *Si y és un valor regular de $f : M \to N$, llavors $f^{-1}(y)$ és una subvarietat de M de dimensió $m - n$.*

PROVA: Si y és un valor regular de f, f és una submersió en un punt $x \in f^{-1}(y)$. Triem coordenades locals com les del teorema anterior, $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$, i tals que $y = (0, \dots, 0)$. En un entorn V de x, $f^{-1}(y)$ és el conjunt de punts $(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$. Llavors les funcions $x_{n+1}, \dots, x_m$ formen un sistema de coordenades a $f^{-1}(y) \cap V$, que és un obert de $f^{-1}(y)$. En definitiva tenim que $x_i(f^{-1}(y) \cap V) = \mathbb{R}^{m-n} \cap \big(x_i(f^{-1}(y) \cap V)\big)$ per tot $i = n+1, \dots, m$ i on considerem $\mathbb{R}^{m-n} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = \cdots = x_n = 0\}$. Tot plegat obtenim que $f^{-1}(y)$ és una subvarietat $(m - n)$-dimensional, com volíem. $\square$

Observació 1.39. Si $g_1, \dots, g_n$ són funcions diferenciables en M, $g_i : M \to \mathbb{R}$, el conjunt de zeros comuns de les g_i és una subvarietat $(m - n)$ dimensional de M si 0 és un valor regular de $g = (g_1, \dots, g_n) : M \to \mathbb{R}^n$. Equivalentment, $g^{-1}(0)$ és una subvarietat si $d_x g$ és exhaustiva, és a dir, si g és una submersió en x. És fàcil veure que g és una submersió en x si i només si els $d_x g_i$ són linealment independents a $T_x M$. En aquest cas direm que $g_1, \dots, g_n$ són funcions independents.

Ara veurem una distinció entre punts crítics de funcions diferenciables que serà clau quan estudiem Teoria de Morse:

Definició 1.40. *Si p és un punt crític de $f : M \to \mathbb{R}$, definim una forma bilineal simètrica $dd_p f$ a $T_p M$, que anomenem Hessiana de f a p, de la manera següent: donats $v, w \in T_p M$, triem camps vectorials V, W tals que $V_p = v$ i $W_p = w$ i llavors*

$$dd_p f(v, w) = V_p(W(f)).$$

Cal provar que és simètrica i que no depèn dels camps vectorials triats.

1. *És simètrica perquè*

$$V_p(W(f)) - W_p(V(f)) = [V, W]_p(f) = 0$$

on l'última igualtat se segueix de que p és un punt crític i per tant tota derivada direccional és zero.

2. *Sabent que és simètrica, està ben definida perquè $V_p(W(f))$ no depèn de la tria de V doncs $V_p = v$, i $W_p(V(f))$ no depèn de la tria de W doncs $W_p = w$.*

Si triem un sistema local de coordenades $\{x_1, \dots, x_n\}$ en un entorn de p i tenim $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, podem prendre $W = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (on a_i són constants i b_j són constants en el primer cas i funcions constants en el segon). Llavors

$$dd_p f(v, w) = V_p(W(f))(p) = v(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j})(p) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

La matriu

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\Big)$$

és com usualment coneixem a la Hessiana. La igualtat anterior justifica que la següent definició és intrínseca i en realitat no depèn del sistema de coordenades:

Definició 1.41. *Diem que un punt crític p és no degenerat si la matriu*

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\Big)$$

no és singular. Diem que és degenerat si aquesta matriu sí és singular.

Exemples 1.42.

1. El punt crític 0 de la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és no degenerat perquè la segona derivada evaluada en 0 dona 2 i per tant no és singular.

2. El punt crític 0 de la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ sí és degenerat, doncs la segona derivada evaluada en 0 dona 0.

3. Els punts crítics $\{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ de la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2$ són tots degenerats, doncs la Hessiana evaluada en $x = 0$ és

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que és singular.

Finalment definim l'índex d'una funció en un punt:

Definició 1.43. *Diem índex d'una funció bilineal H definida en un espai vectorial V a la dimensió màxima d'un subespai de V pel qual H és definida negativa. Donada una funció $f : M \to \mathbb{R}$, en podem considerar la Hessiana i trobar-ne l'índex per a l'espai vectorial T_pM. Ens referirem a aquest índex com l'índex de f a p.*

1.3 Immersions, encabiments i aplicacions pròpies

En aquesta secció estudiarem breument aplicacions diferenciables amb propietats particulars. Al capítol 3 farem ús dels resultats d'aquesta secció.

Definició 1.44. *Diem que una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és una immersió si d_pf és injectiva per tot $p \in M$. Fixem-nos que f només pot ser una immersió si la dimensió de M és menor o igual a la de N.*

Definició 1.45. *Diem que una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és un encabiment (*embedding*) si és injectiva, és una immersió i defineix un homeomorfisme $M \cong f(M)$. En aquest context $f(M)$ és una subvarietat de N.*

Serà de gran importància trobar una caracterització dels encabiments. Les aplicacions pròpies ens ho permetran:

Definició 1.46. *Diem que una aplicació continua $f : X \to Y$ entre dos espais topològics és pròpia si per a tot compacte $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ també és compacte.*

Exemple 1.47. Qualsevol inclusió d'espais vectorials és pròpia.

Una propietat particular de les funcions pròpies:

Proposició 1.48. *Si $f : X \to Y$ és pròpia i Y és Hausdorff i localment compacte (tot punt té un entorn compacte) llavors f és tancada.*

PROVA: Sigui $T \subset X$ un tancat. Provarem que $Y \setminus f(T)$ és un obert de Y. Sigui $y \in Y \setminus f(T)$, i sigui V un entorn de y tal que $\overline{V}$ és compacte. Com que f és pròpia, $f^{-1}(\overline{V})$ també és compacte. Així doncs $C = T \cap f^{-1}(\overline{V})$ és un compacte (intersecció d'un compacte amb un tancat) i per tant $f(C)$ també és compacte. Com que Y és Hausdorff, compacte implica tancat i per tant $f(C)$ és tancat. Si ara considerem $U = V \setminus f(C)$, U és un entorn obert de y disjunt amb $f(T)$, doncs si $z \in U \cap f(T)$ llavors existeix $t \in T$ tal que $z = f(t)$, però això significa que $t \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \subset f^{-1}(\overline{V})$, és a dir que $t \in T \cap f^{-1}(\overline{V}) = C$ i per tant $z = f(t) \in f(C)$ que contradiu el fet que $z \in U$.

Així doncs per tot punt $y \in Y \setminus f(T)$ hem trobat un entorn disjunt a $f(T)$, per tant $Y \setminus f(T)$ és obert. $\square$.

Finalment, la proposició que ens permet relacionar els tres tipus d'aplicacions d'aquesta secció:

Proposició 1.49. *Una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és un encabiment amb imatge tancada si i només si és una immersió injectiva pròpia.*

PROVA: D'esquerra a dreta: per definició un encabiment és una immersió injectiva, només cal veure que és pròpia. Sigui $K \subset N$ un compacte. Llavors $K \cap f(M)$ també és compacte, doncs és la intersecció d'un compacte amb un tancat. Com que tenim un homeomorfisme entre M i $f(M)$, podem considerar la inversa f^{-1} i llavors $f^{-1}(K \cap f(M))$ és compacte per ser imatge d'un compacte. Però és clar que $f^{-1}(K \cap f(M)) = f^{-1}(K)$ i per tant f és pròpia.

De dreta a esquerra: f és tancada per la proposició anterior, ja que tota varietat és Hausdorff per definició i localment compacta perquè per cada punt $q \in N$, si triem una carta (U, ϕ) centrada en q i considerem la bola oberta $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ llavors $\phi^{-1}(B(0,1))$ és un entorn de q amb clausura compacta. Per tant si considerem $f : M \to f(M)$ tenim una aplicació continua, bijectiva i tancada, és a dir, un homeomorfisme. Així doncs tenim una immersió injectiva que defineix un homeomorfisme amb la seva imatge, és a dir, un encabiment. La imatge és tancada perquè f és tancada. $\square$

Corol·lari 1.50. *Una immersió injectiva $f : M \to N$ amb M compacta és un encabiment amb imatge tancada.*

PROVA: Veurem que f és pròpia: sigui $K \subset N$ un compacte, en particular és un tancat. Llavors $f^{-1}(K)$ és un tancat contingut en el compacte M, per tant un compacte. f és pròpia i apliquem la proposició anterior. $\square$

Ara ja estem preparats per passar a veure els resultats principals d'aquest treball. El teorema de Sard, els d'encabiment de Whitney i la teoria de Morse.

2 El teorema de Sard

2.1 Consideracions prèvies

En aquest capítol enunciarem i demostrarem el teorema de Sard, el resultat clau d'aquest treball. Per fer-ho, abans cal considerar un parell de definicions.

Definició 2.1. *Un interval o cub de $\mathbb{R}^n$ és un conjunt de la forma $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, amb $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ i $a_i < b_i$. Definim el volum d'un interval com $V(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$.*

Definició 2.2. *Diem que un subconjunt qualsevol $A \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero si per tot $\epsilon > 0$ existeix un recobriment numerable d'A per intervals I_i tal que $\sum_i V(I_i) < \epsilon$.*

Cal generalitzar la definició de mesura zero a varietats:

Definició 2.3. *Diem que un subconjunt qualsevol $B \subset M$ té mesura zero si per a tota carta ϕ de M, $\phi(B)$ té mesura zero a $\mathbb{R}^m$.*

Ara provarem un resultat previ que necessitarem per al teorema de Fubini.

Proposició 2.4. *Sigui $[a, b]$ un interval tancat de $\mathbb{R}$. De qualsevol recobriment d'$[a, b]$ per intervals oberts en podem extreure un subrecobriment amb volum total $\leq 2|b - a|$.*

PROVA: De qualsevol recobriment obert en podem obtenir un de finit, doncs $[a, b]$ és compacte. Un cop tenim aquest recobriment finit, en podem obtenir un de minimal extraient-ne els intervals superflus, és a dir, triem intervals $I_1, \dots, I_r$ tal que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{r} I_i$$

però

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1, i \neq s}^{r} I_i$$

per tot $1 \leq s \leq r$. Els podem numerar com $I_j = (a_j, b_j)$ amb $I_i < I_j$ si $a_i < a_j$. Llavors és clar que els únics solapaments possibles són entre intervals consecutius (si $I_i \cap I_{i+2} \neq \oslash$ llavors I_{i+1} és superflu) i per tant el volum total del solapament és com a molt $|b - a|$. Tot plegat fa que el volum total dels intervals sigui $\leq 2|b - a|$, com volíem. $\square$

Teorema 2.5. *(Fubini) Sigui K un subconjunt compacte de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Si la intersecció de K amb tots els hiperplans $\{t\} \times \mathbb{R}^n - 1$ té mesura zero a $\mathbb{R}^{n-1}$, llavors K té mesura zero a $\mathbb{R}^n$.*

PROVA: Denotem $H^t := \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Suposem que $K \subset [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ (podem suposar-ho perquè un compacte a $\mathbb{R}^n$ és tancat i acotat) i que $K \cap H^t$ té mesura zero a $\mathbb{R}^{n-1}$ per tot t. Això últim implica que per qualsevol $\epsilon > 0$ podem trobar un recobriment de $K \cap H^t$ per oberts $V_i^t \subset H^t$ amb volum total $< \epsilon$. Si diem $I_\delta^t = (t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2})$, per un δ prou petit els oberts $V_i^t \times I_\delta^t$ recobreixen l'intersecció de K amb tots els hiperplans que 'estan a distància menor que $\frac{\delta}{2}$ de H^t', és a dir, recobreixen $K \cap \bigcup_{x \in I_\delta^t} H^x$. Per cada t podem considerar un I_δ^t, i per tant aquests formen un recobriment d'$[a, b]$ del qual en podem extreure un subrecobriment finit amb volum total $\leq 2|b - a|$, per la proposició anterior. Diem-li $\{I^j\}$, i diem V_k^j a la colecció d'oberts corresponents a l'interval I^j (els oberts V_i^t

si $I_\delta^t = I_j$). Llavors és clar que $V_k^j \times I^j$ és un recobriment de K a $\mathbb{R}^n$ i a més té volum $\leq 2|b-a|\epsilon$, que és arbitràriament petit. Tot plegat fa que K tingui mesura zero a $\mathbb{R}^n$, com volíem. $\square$

Observació 2.6. Aquesta demostració s'estén fàcilment a tot tancat de $\mathbb{R}^n$, doncs tot tancat és unió numerable de compactes a $\mathbb{R}^n$.

Ara ja tenim totes les eines per provar el teorema de Sard:

2.2 Enunciat i prova del teorema de Sard

Teorema 2.7. *(Sard) Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre dues varietats. Llavors la imatge dels punts crítics de f té mesura zero a N.*

PROVA: Sigui m la dimensió de M i n la dimensió de N. El primer que farem és reduir aquest enunciat a un cas més fàcil: per la Proposició 1.10, tota varietat k-dimensional pot ser recoberta per una col·lecció numerable d'entorns difeomorfs a $\mathbb{R}^k$. Això permet reduir l'enunciat al cas $f : U \to \mathbb{R}^n$ on U és un obert de $\mathbb{R}^m$.

Ara, diem C al conjunt de punts crítics de f. La prova la farem per inducció en m. El cas inicial $m = 0$ és clar, doncs l'imatge d'un sol punt té mesura zero. Suposem doncs que se satisfà l'enunciat per $m-1$, $m \geq 0$. Ara definim C_1 com el conjunt de tots els $x \in U$ tal que $d_x f$ és zero, i en general C_i denota el conjunt de $x \in U$ tal que totes les derivades parcials de f d'ordre $\leq i$ s'anul·len a x. Aquests conjunts són tancats (són l'antiimatge del zero per alguna funció continua) i formen una cadena d'inclusions $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$. La prova consistirà en aprofitar el fet que

$$C = (C \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus C_2) \cup \cdots \cup (C_{k-1} \setminus C_k) \cup C_k.$$

Així doncs la prova es dividirà en tres passos:

1. Provar que $f(C \setminus C_1)$ té mesura zero.
2. Provar que $f(C_i \setminus C_{i+1})$ té mesura zero per tot $i \geq 1$.
3. Provar que $f(C_k)$ té mesura zero per k prou gran.

PRIMER PAS: Aquest pas i el següent són trivials si $n = 1$, per tant assumim $n \geq 2$. Prenem $z \in C \setminus C_1$. Com que $z \notin C_1$, existeix alguna derivada parcial que no s'anul·la a z (podem suposar $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$). Llavors l'aplicació $h : U \to \mathbb{R}^m$,

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$$

té diferencial no singular, doncs la matriu de la diferencial és

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & * & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que la derivada és no singular, pel teorema de la funció inversa h envia un entorn V de z difeomòrficament a un obert $V' \subset \mathbb{R}^m$. Aquí ve el pas clau: considerem la composició $g = f \circ h^{-1}$, que envia V' a $\mathbb{R}^n$. La derivada de g és $d_y g = d_x f \circ d_y(h^{-1})$, i com que

$d_y(h^{-1})$ no és singular i d_xf és singular per $x \in V \cap C$, el conjunt de punts crítics de g és $h(V\cap C)$. Observem també que $g(h(V\cap C)) = f(V\cap C)$. Ara, notem que $g(t, x_2, \ldots, x_m)$ pertany a l'hiperplà $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, així doncs g envia hiperplans a hiperplans. Restringint g a cada hiperplà, obtenim

$$g|_{\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}} := g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Els punts crítics de g^t coincideixen amb els de g, doncs la matriu de primeres derivades parcials de g és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}) \end{pmatrix}.$$

Aquí apliquem la hipòtesi d'inducció, que ens diu que el conjunt de punts crítics de g^t té mesura zero a $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Això vol dir que el conjunt de punts crítics de g interseca cada hiperplà $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ en un conjunt de mesura zero; així doncs, pel Teorema 2.5, el conjunt de punts crítics de g, $h(V\cap C)$, té mesura zero a $\mathbb{R}^m$. La imatge $g(h(V\cap C)) = f(V\cap C)$ té doncs mesura zero a $\mathbb{R}^n$. Com que aquests conjunts $V \cap C$ recobreixen $C \setminus C_1$ i d'aquest recobriment en podem extreure un subrecobriment numerable $\{V_i\}$ (per la Proposició 1.10, un cop més), $f(\bigcup V_i \cap C) = f(C \setminus C_1)$ té mesura zero a $\mathbb{R}^n$. Això completa el primer pas.

SEGON PAS: El procediment és semblant al del pas anterior. Per cada $z \in C_k \setminus C_{k+1}$, existeix una derivada $(k+1)$-èssima parcial, $\frac{\partial^{k+1} f_j}{\partial x_{i_1} \ldots x_{i_{k+1}}}$ que no s'anul·la. Llavors podem considerar l'aplicació

$$w(x) = \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_2} \ldots x_{i_{k+1}}},$$

que s'anul·la a z però $\frac{\partial w}{\partial x_{i_1}}$ no. Suposem $i_1 = 1$ per conveniència. Llavors podem definir una aplicació $h : U \to \mathbb{R}^m$ anàloga a la del primer pas,

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_m),$$

que envia un entorn V de z difeomòrficament a un obert $V' \subset \mathbb{R}^m$. En aquest cas, veiem que h envia $C_k \cap V$ a l'hiperplà $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$, doncs si $z \in C_k \cap V$, llavors $w(z) = 0$. Un cop més considerem l'aplicació $f \circ h^{-1} = g : V' \to \mathbb{R}^n$ i un cop més podem definir

$$g|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}} := g' : (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^n.$$

El conjunt de punts crítics de g' és $h(C_k \cap V)$, doncs totes les derivades parcials d'ordre $\leq k$ s'anul·len. La hipòtesi d'inducció diu que el conjunt de punts crítics de g', $h(C_k \cap V)$, té mesura zero a $\mathbb{R}^m$, i per tant l'imatge $g'h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$ té mesura zero a $\mathbb{R}^n$. Pel mateix argument del primer pas, podem trobar un subrecobriment numerable $\{V_i\}$ de $C_k \setminus C_{k+1}$ i per tant $f(\bigcup V_i \cap C_k) = f(C_k \setminus C_{k+1})$ té mesura zero. Això completa el segon pas.

TERCER PAS: Sigui $I^m \subset U$ un cub de costat δ (és a dir, un conjunt del tipus $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \times \cdots \times [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$). Volem trobar que $f(C_k \cap I^m)$ té mesura zero. Per fer-ho, prenem $x \in C_k \cap I^m$ i volem trobar una fòrmula per a tot element $x + h \in I^m$. Per fer-ho apliquem el teorema de Taylor a cada component f_i de f:

$$f_i(x+h) = f_i(x) + d_x f_i(h) + \cdots + \frac{1}{k!} d_x^k f_i(h, \ldots, h) + \frac{1}{(k+1)!} d_{\eta_i}^{k+1} f_i(h, \ldots, h),$$

on η_i està entre x i $x+h$. Les derivades d'ordre $\leq k$ s'anul·len, doncs $x \in C_k$, i com que I^m és compacte, podem trobar una constant λ_i de manera que $\|\frac{1}{(k+1)!} d_{\eta_i}^{k+1} f_i(h, \ldots, h)\| \leq \lambda_i \|h\|^{k+1}$. Prenent el màxim $\lambda = \max\{\lambda_i\}$ i generalitzant a f obtenim

$$f(x+h) = f(x) + r(x,h),$$

$$\|r(x,h)\| \leq \lambda \|h\|^{k+1}.$$

Ara ens interessa acotar $\|h\|$; per fer-ho, subdividim I^m en s^m cubs de costat $\frac{\delta}{s}$. Sigui I_1 un cub d'aquesta divisió que contingui un punt $x \in C_k$. Com que el diàmetre d'un cub de costat $\frac{\delta}{s}$ és $\sqrt{(\frac{\delta}{s})^2 + \cdots + (\frac{\delta}{s})^2}$, tot punt de I_1 es pot escriure com $x+h$, amb

$$\|h\| \leq \sqrt{m}\frac{\delta}{s}.$$

Ajuntant els dos resultats obtenim que $f(I_1)$ está contingut en el cub

$$[f_1(x) - \lambda(\sqrt{m}\frac{\delta}{s})^{k+1}, f_1(x) + \lambda(\sqrt{m}\frac{\delta}{s})^{k+1}] \times \cdots \times [f_n(x) - \lambda(\sqrt{m}\frac{\delta}{s})^{k+1}, f_n(x) + \lambda(\sqrt{m}\frac{\delta}{s})^{k+1}],$$

és a dir, el cub de costat $2\lambda(\sqrt{m}\frac{\delta}{s})^{k+1}$ centrat a $f(x)$. Denotem $\mu = 2\lambda(\sqrt{m}\delta)^{k+1}$, que és una constant. Cadascuna de les imatges dels cubs de la divisió té, doncs, volum $\leq (\frac{\mu}{s^{k+1}})^n$. Llavors $f(C_k \cap I^m)$ està contingut en una unió de fins a s^m cubs, amb un volum total

$$V \leq \; s^m \left(\frac{\mu}{s^{k+1}}\right)^n = \mu^n s^{m-(k+1)n}.$$

Si $m - (k+1)n < 0$, V tendeix a zero quan s tendeix a infinit, i per tant $f(C_k \cap I^m)$ té mesura zero. Com que podem trobar numerables I^m que recobreixin C_k, hem provat que $f(C_k)$ té mesura zero. Això conclou la prova del teorema de Sard. $\square$

Observació 2.8. El final del tercer pas ens permet concretar què vol dir "k prou gran". La prova només funciona si $m - (k+1)n < 0$. En el nostre cas, com treballem tota l'estona amb aplicacions $\mathscr{C}^\infty$, la desigualtat sempre és vàlida. En cas de considerar Sard per aplicacions $\mathscr{C}^k$, $1 \leq k < \infty$, cal afegir la desigualtat, que normalment es formula com $k > \frac{m}{n} - 1$.

Corol·lari 2.9. *El conjunt de valors regulars d'una aplicació diferenciable $f : M \to N$ és dens en N. Direm que 'gairebé' tot $y \in N$ és un valor regular de f.*

PROVA: Diem $f(C)$ al conjunt de valors crítics. Suposem que la clausura de $N \setminus f(C)$ no és N, és a dir, que existeix un tancat T tal que $N \setminus f(C) \subset T \subset N$. Això implica que $N \setminus T$ és un obert contingut en $f(C)$. Ara bé, sabem que tot obert de $\mathbb{R}^n$ conté un interval $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, doncs sempre podem construir una bola prou petita al voltant de qualsevol punt que estigui tota continguda en l'obert, i dins d'una bola de radi ϵ hi cap un interval de costat ϵ (un interval del tipus $(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}) \times \ldots (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$. Com que tot obert de N és difeomorf a un de $\mathbb{R}^n$, l'interval es trasllada a l'obert de N i tot plegat fa que tinguem un interval de volum $(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) \neq 0$ contingut dins un conjunt de mesura zero, cosa impossible. Així doncs no existeix tal tancat T i per tant $N \setminus f(C)$, el conjunt de valors regulars de f, és dens en N. $\square$

Com hem promès al primer capítol, ara veiem com s'estén Sard a varietats amb vora:

Teorema 2.10. *(Sard per varietats amb vora). Sigui $f : X \to N$ una aplicació diferenciable entre dues varietats, X amb vora i N sense. Llavors gairebé tot punt de N és un valor regular tant de f com de $\partial f : \partial X \to N$.*

PROVA: És fàcil veure que la diferencial de ∂f en un punt $x \in X$ és la restricció de $d_x f$ al subespai $T_x(\partial X) \subset T_x X$. Això implica que si ∂f és regular a x, f també ho és. Així doncs un punt $y \in N$ és un valor crític de f i ∂f només si és un valor crític de $f|_{Int(X)}$ i ∂f. Però com que $Int(X)$ i ∂X són varietats sense vora, podem aplicar el teorema de Sard i per tant tenim que els valors crítics de $f|_{Int(X)}$ i ∂f tenen mesura zero a N. La unió d'aquests dos conjunts de mesura zero també té mesura zero, i per tant el complementari és dens en N. $\square$

2.3 Transversalitat

La transversalitat és una noció que generalitza la regularitat. Al capítol anterior hem vist que les solucions de $f(x) = y$, on $f : M \to N$, formen una varietat diferenciable, sempre que y sigui un valor regular de f. Una generalització natural seria pensar si conjunts de punts en M que satisfacin una condició més general. Si $L \subset N$ és una subvarietat de N, quines condicions són necessàries per a que $f^{-1}(L)$ sigui una varietat?

De la definició de subvarietat és clar que $f^{-1}(L)$ és una varietat si i només si cada punt $x \in f^{-1}(L)$ té un entorn V en M tal que $\big(f^{-1}(L)\big) \cap U$ és una varietat. Això ens permet reduir-nos al cas en el que L és un sol punt, doncs si $y = f(x)$, podem descriure L en un entorn de y com el conjunt de zeros comuns d'un seguit de funcions independents $g_1, \dots, g_k$, on k és la codimensió de L a N. Llavors en un entorn U de x tenim que $f^{-1}(L)$ és el conjunt de zeros comuns de $g_1 \circ f, \dots, g_k \circ f$. Si diem $g = (g_1, \dots, g_k)$ i considerem $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$, tenim que $\big(f^{-1}(L)\big) \cap U = (g \circ f)^{-1}(0)$ és una varietat si 0 és un valor regular de $g \circ f$, és a dir, si $g \circ f$ és una submersió a x.

Proposició 2.11. *$g \circ f$ és una submersió a $x \in f^{-1}(L)$ si i només si*

$$Im(d_x f) + T_y L = T_y N,$$

on la suma és la suma d'espais vectorials.

PROVA: $d_x(g \circ f) = d_y g \circ d_x f$, $d_x(g \circ f) : T_x M \to \mathbb{R}^k$ és exhaustiva si i només si $d_y g$ envia la imatge de $d_x f$ a $\mathbb{R}^k$. Però $d_y g : T_y N \to \mathbb{R}^k$ és una aplicació lineal exhaustiva, el kernel de la qual és el subespai $T_y L$ (doncs és precisament el subespai de dimensió $n - k$ que es projecta al zero de $\mathbb{R}^k$). Llavors $d_y g$ envia un subespai de $T_y N$ a $\mathbb{R}^k$ si tal subespai i $T_y L$ junts abasten tot $T_y N$. Hem acabat. $\square$

Definició 2.12. *Si per a tot punt $x \in f^{-1}(L)$ se satisfà la suma de la proposició, diem que l'aplicació f és transversal a la subvarietat L. Ho denotem $f \pitchfork L$.*

Teorema 2.13. *Si l'aplicació diferenciable $f : M \to N$ és transversal a la subvarietat $L \subset N$, llavors $f^{-1}(L)$ és una subvarietat de M. A més, la codimensió de $f^{-1}(L)$ a M és igual a la codimensió de L a N.*

PROVA: La primera afirmació ja l'hem vist. Per a provar la segona, notem que localment hem descrit $f^{-1}(L)$ com el conjunt de zeros comuns de k funcions independents $g_1 \circ f, \dots, g_k \circ f$. Llavors la codimensió de $f^{-1}(L)$ a M és k, que hem definit originalment com la codimensió de L a N. $\square$

Observació 2.14. Diem que la transversalitat generalitza la regularitat perquè si L és un únic punt y, el seu espai tangent és el subespai zero de T_yN, i per tant $f \pitchfork \{y\}$ si $d_xf(T_xM) = T_yN$ per tot $x \in f^{-1}(y)$, cosa que vol dir que y és un valor regular de f.

Un cas interessant de transversalitat és el de l'aplicació inclusió d'una subvarietat en una varietat:

Definició 2.15. *Sigui $i : M \hookrightarrow N$ l'aplicació inclusió de M en N. Si $L \subset N$ és una subvarietat de N, un punt $x \in M$ pertany a $i^{-1}(L)$ si $x \in M \cap L$. A més, la diferencial $d_xi : T_xM \hookrightarrow T_xN$ es la inclusió de T_xX en T_xY. Llavors $i \pitchfork L$ si i només si per a cada punt $x \in M \cap L$ se satisfà*

$$T_xM + T_xL = T_xN.$$

En aquest cas diem que M i L són transversals i ho denotem $M \pitchfork L$.

Proposició 2.16. *La intersecció de dues subvarietats M i L de N transversals és una subvarietat. A més, $codim(M \cap L) = codim(M) + codim(L)$ prenent les codimensions a N, i la seva intersecció és el buit.*

PROVA: La intersecció és una subvarietat perquè la podem obtenir de considerar el conjunt de zeros comuns de la unió dels dos conjunts de funcions independents que defineixen M i L. Que totes les funcions d'aquesta unió són independents ho garantitza la transversalitat de M i L.

D'altra banda, el Teorema 2.13 ens diu que la codimensió de $M \cap L$ a M és igual a la codimensió de L en N, és a dir, que $m - dim(M \cap L) = n - l$ i per tant $codim(M \cap L) = n - dim(M \cap L) = n - m + n - l = codim(M) + codim(L)$, com volíem. $\square$

Observació 2.17. El buit és una varietat; ho comentem perquè per exemple dues corbes a $\mathbb{R}^3$ només poden ser transversals si no es tallen, cosa fàcil de veure considerant la fòrmula de suma de codimensions.

Ara veurem un parell d'exemples de transversalitat i no transversalitat en subvarietats de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

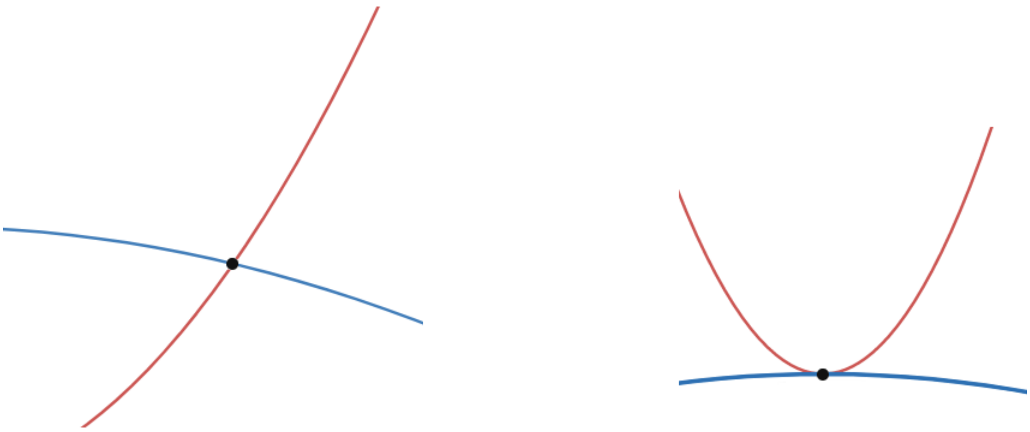

Figura 1: Corbes transversals (esquerra) i no transversals (dreta) a $\mathbb{R}^2$

Veient aquests exemples queda més clara la relació entre transversalitat i valors regulars; les corbes no transversals, per exemple, no ho són perqué es tallen en un valor crític. En aquest exemple i el dels plans no transversals també veiem que una petita deformació

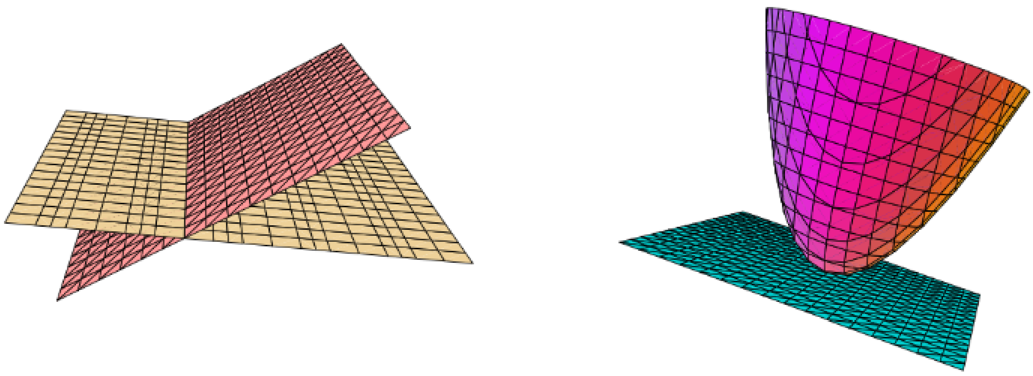

Figura 2: Superfícies transversals (esquerra) i no transversals (dreta) a $\mathbb{R}^3$

de les corbes/superfícies pot trencar la intersecció; aquesta és una altra manera d'entendre la no-transversalitat.

Per acabar la secció relacionarem la transversalitat i el teorema de Sard. Sard ens permet provar que la transversalitat és una propietat genèrica: donada una subvarietat $L \subset N$, qualsevol aplicació diferenciable $f : M \to N$ pot ser deformada una quantitat arbitràriament petita en una aplicació transversal a L. Entenem com a deformació una homotopia[1]; Si $F(x,0) := f$, $F(x,\epsilon)$ és una aplicació transversal a L per a $\epsilon > 0$. En aquest sentit, el que provarem és que 'gairebé totes' les aplicacions són transversals a L.

Teorema 2.18. *Sigui $F : X \times S \to N$ una aplicació diferenciable, on N i S són varietats, i X (i només X) és una varietat amb vora. Prenem una subvarietat sense vora $L \subset N$. Si tant F com ∂F són transversals a L, per a gairebé tot $s \in S$ tan f_s com ∂f_s són transversals a L, on $f_s(x) := F(x,s)$.*

PROVA: Diem $Z = F^{-1}(L)$. Z és una subvarietat amb vora de $X \times S$, amb $\partial Z = Z \cap \partial(X \times S)$. Siguin $\pi : X \times S \to S$ la projecció natural $\pi(x,s) = s$. Considerem-ne les restriccions $\pi|_Z : Z \to S$ i $\partial\pi|_Z : \partial Z \to S$ i apliquem el teorema de Sard: gairebé totes les $s \in S$ són valors regulars de les dues aplicacions. Només cal veure que això implica que f_s i ∂f_s són transversals a L.

Suposem que $f_s(x) = y \in L$. Com que $F(x,s) = y$ i $F \pitchfork L$, sabem que

$$d_{(x,s)}F\big(T_{(x,s)}(X \times S)\big) + T_yL = T_yN,$$

és a dir, que per a tot vector $a \in T_yN$ existeix un vector $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ tal que $d_{(x,s)}F(b) - a \in T_yL$. Com que $T_{(x,s)}(X \times S) = T_xX \times T_sS$, podem dir $b = (w,e)$ amb $w \in T_xX$ i $e \in T_sS$. Considerem

$$d_{(x,s)}\pi : T_xX \times T_sS \to T_sS$$

i tenim que per la tria de s aquesta aplicació envia $T_{(x,s)}Z$ a T_sS. Això ens indica que existeix un vector de la forma (u,e) a $T_{(x,s)}Z$. La imatge de tal vector per $d_{(x,s)}F$ pertany

[1] A no ser que s'indiqui el contrari, les homotopies i equivalències homotòpiques en aquest treball seran diferenciables.

a T_yL. Llavors $v = w - u \in T_xM$ satisfà

$$d_xf_s(v) - a \in T_yL,$$

és a dir,

$$d_xf_s(T_xM) + T_yL = T_yN,$$

la condició de transversalitat. La comprovació és un càlcul:

$$d_xf_s(v) - a = d_{(x,s)}F\big((w,e) - (u,e)\big) - a = \big(d_{(x,s)}F(w,e) - a\big) - d_sF(u,e),$$

i els dos últims vectors pertanyen a T_zL. Així doncs $f_s \pitchfork L$ per a gairebé totes les s.

Un argument anàleg mostra que $\partial f_s \pitchfork L$ quan s és un valor regular de $\partial\pi|_Z$. $\square$

Observació 2.19. Aquest teorema també funciona quan X és una varietat sense vora; només cal estalviar-se considerar ∂F i ∂f_s. Hem decidit provar la versió més general.

Aquest teorema no implica immediatament que la transversalitat sigui una propietat genèrica, cal fer una mica més de feina. Estudiarem el cas en que $N = \mathbb{R}^k$; si N és una varietat arbitraria també és cert, però no ho desenvoluparem.

Corol·lari 2.20. *Donada una subvarietat sense vora $L \subset \mathbb{R}^k$ i una varietat X amb o sense vora, qualsevol aplicació diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^k$ pot ser deformada una quantitat arbitràriament petita en una aplicació transversal a L.*

PROVA: Prenem S una bola oberta de $\mathbb{R}^k$ i definim $F : X \times S \to \mathbb{R}^k$ com $F(x,s) = f(x) + s$. Per a qualsevol $x \in X$ fixat, F és una translació de S, i per tant és una submersió. Llavors F és una submersió de $X \times S$ i per tant és transversal a qualsevol subvarietat $L \subset \mathbb{R}^k$. El teorema anterior ens diu que per a gairebé tota $s \in S$, l'aplicació $f_s(x) = f(x)+s$ és transversal a L. Llavors f es pot deformar en una aplicació transversal a L només afegint-li una quantitat s arbitràriament petita. $\square$

Per acabar el capítol, podem provar una de les afirmacions que hem fet a la introducció: dues rectes a $\mathbb{R}^3$ en general no es tallen. Com es pot deduir de tot el que hem vist, aquest 'en general' vol dir que donada una recta, el conjunt de rectes que la tallen forma un conjunt de mesura zero en $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.21. Si prenem una recta qualsevol r_1 com a subvarietat de $\mathbb{R}^3$, i prenem $f : r_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusió d'una altra recta qualsevol r_2 en $\mathbb{R}^3$, pel corol·lari anterior podem deformar f una quantitat arbitràriament petita per obtenir $f \pitchfork r_1$, que en aquest cas és $r_1 \pitchfork r_2$. Com que dues rectes a $\mathbb{R}^3$ només poden ser transversals si no es tallen, com hem comentat a l'Observació 2.17, tenim que dues rectes a $\mathbb{R}^3$ en general no es tallen.

3 Els teoremes d'encabiment de Whitney

En aquest capítol estudiarem un resultat important en l'àmbit de la topologia diferencial que ens permetrà provar l'existència de funcions de Morse per a tota varietat diferenciable. Trobarem que tota varietat diferenciable m-dimensional M es pot encabir en $\mathbb{R}^{2m+1}$ i que de fet n'és un tancat.

3.1 Funcions altiplà

Definició 3.1. *Sigui M una varietat m-dimensional. Diem suport d'una funció diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ al subconjunt tancat de M definit per $sup(f) = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$.*

Definició 3.2. *La funció altiplà associada al punt $p \in M$ i a l'entorn obert $V \subset M$ de p és una funció diferenciable $\lambda : M \to [0, 1]$ que val 1 restringida a un compacte contingut en V i tal que $sup(\lambda)$ és un compacte (diferent) també contingut en V. Diem que la funció està associada a (p, V).*

Proposició 3.3. *Les funcions altiplà existeixen.*

PROVA: Considerem primer $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} & si \quad t \in (a, b) \\ \\ 0 & si \quad t \notin (a, b) \end{cases}$$

La funció φ és diferenciable, doncs és clarament continua i les derivades per $t \in (a, b)$ són de la forma $e^{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} R(t)$, on $R(t)$ és un quocient de polinomis que tendeix a infinit quan t tendeix a a o b, però més lent que l'exponencial, que tendeix a zero. Així doncs les derivades són totes continues. Ara definim:

$$\theta(t) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, ds} \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds.$$

Fixem-nos en que aquesta funció és diferenciable i satisfà $\theta(t) = 0$ si $t \leq a$ i $\theta(t) = 1$ si $t \geq b$, doncs $\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds = 0$ si $t \leq a$ i $\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, ds$ si $t \geq b$. El que passi entre a i b no ens interessa. Abans de passar a treballar amb la varietat M, definim

$$h(t) = 1 - \theta(t)$$

que satisfà $h(t) = 1$ si $t \leq a$ i $h(t) = 0$ si $t \geq b$ i que també és diferenciable.

Tornem a les condicions de la definició: prenem una carta local (U, ϕ) centrada a p (i.e. $\phi(p) = 0$) i tal que $U \subset V$. El subconjunt $\phi(U)$ és un obert de $\mathbb{R}^m$ que conté l'origen, per tant conté una bola centrada a l'origen de radi $c \in \mathbb{R}_+$. Si prenem $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a < b < c$, només cal considerar la funció $\lambda(x) = h(\|\varphi(x)\|)$, que satisfà totes les condicions:

1. Val 1 a $\overline{B(0, a)}$.

2. El suport és $\overline{B(0, b)}$.

3. La diferenciablitat de λ és evident fora del zero, doncs és composició de funcions diferenciables, i al zero és una funció constant (val 1) i per tant diferenciable. $\square$

Ara ja podem provar el teorema d'encabiment de Whitney per a varietats compactes.

3.2 Whitney compacte i particions de la unitat

Teorema 3.4. *Tota varietat compacta M m-dimensional es pot encabir en $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

PROVA: Primer provarem que M es pot encabir en $\mathbb{R}^n$ per alguna n, i després ho reduirem a $2m+1$. Per cada punt $p \in M$ prenem una carta (U_p, ϕ_p) centrada en p i triem r_p tal que $B(0, 3r_p) \subseteq \phi_p(U_p)$. Definim també $V_p = \phi_p^{-1}(B(0, r_p))$ i $W_p = \phi_p^{-1}\overline{(B(0, 2r_p))}$.

Sigui $H_{r_p} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la funció altiplà de $\mathbb{R}^m$ associada a $(0, B(0, 3r_p))$, amb $a = r_p$ i $b = 2r_p$. Aquesta funció satisfà $H_{r_p}(x) = 1$ si $\|x\| \leq r_p$ i $H_{r_p}(x) = 0$ si $\|x\| \geq 2r_p$. Ara, sigui $\lambda_p : M \to \mathbb{R}$ la funció altiplà de M associada a (p, U_p) amb suport W_p, que es pot definir com

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} H_{r_p} \circ \phi_p(x) & si \quad x \in U_p \\ \\ 0 & si \quad x \notin W_p. \end{cases}$$

Finalment considerem una aplicació $\psi_p : M \to \mathbb{R}^m$ definida per

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \lambda_p(x)\phi_p(x) & si \quad x \in U_p \\ \\ 0 & si \quad x \notin W_p. \end{cases}$$

És clar que les tres aplicacions que hem definit són diferenciables; les dues primeres són funcions altiplà i ψ_p és producte d'aplicacions diferenciables.

Com que M és compacta, podem triar un recobriment de M per V_{p_i}, $i = \{1, \ldots, k\}$. Llavors $f : M \to \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{km+k}$, definida per

$$f(x) = \big(\psi_{p_1}(x), \ldots, \psi_{p_k}(x), \lambda_{p_1}(x), \ldots, \lambda_{p_k}(x)\big)$$

és l'encabiment que busquem. Per provar-ho, primer observem que f és diferenciable (cada component ho és). Ara veurem que f és una immersió injectiva.

Provem primer la injectivitat: siguin $x, y \in M$, $x \neq y$.

1. Si existeix i tal que $x, y \in \overline{V_{p_i}}$, llavors $\psi_{p_i}(x) = \phi_{p_i}(y) \neq \psi_{p_i}(x) = \phi_{p_i}(y)$; això se segueix de que ϕ_{p_i} és un difeomorfisme i $\lambda_{p_i}(x) = \lambda_{p_i}(y) = 1$ si $x, y \in \overline{V_{p_i}}$

2. Si existeix i tal que $x \in \overline{V_{p_i}}$ i $y \notin \overline{V_{p_i}}$, llavors $f_{p_i}(x) = 1 \neq f_{p_i}(y)$.

En tots dos casos $f(x) \neq f(y)$ i per tant f és injectiva.

Per provar que f és una immersió, considerem les projeccions $\pi_i : \mathbb{R}^{km+k} \to \mathbb{R}^m$ sobre l'i-èssim $\mathbb{R}^m$. Llavors $\pi_i \circ f|_{V_{p_i}}$ és la carta ϕ_{p_i}, per tant $\pi_i \circ f$ és un difeomorfisme. Sabem que si una composició és un difeomorfisme, l'aplicació que s'aplica primer ha de tenir rang màxim. Llavors f té rang m a x, i per tant és una immersió.

Hem provat doncs que f és una immersió injectiva en un compacte, és a dir, un encabiment (Corol·lari 1.50).

Ara queda provar que podem reduir n fins a $2m + 1$, i és aquí on entrarà en joc el teorema de Sard. Definim dues aplicacions: $h : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ com

$$h(x, y, t) = t(x - y)$$

i $g : TM \to \mathbb{R}^n$ com

$$g(w_p) = w,$$

on TM és el fibrat tangent de M, varietat $2m$-dimensional que hem definit al capítol 1. Els espais de sortida d'aquestes dues aplicacions tenen dimensió $2m + 1$ i $2m$ respectivament.

Assumim $n > 2m+1$, doncs si no fos així ja hauríem acabat. Pel teorema de Sard, les imatges d'h i g tenen mesura zero a $\mathbb{R}^n$, doncs quan la dimensió d'arribada és superior a la de sortida tots els punts són crítics. Així doncs, existeix un vector $v \in \mathbb{R}^n$ que no pertany a cap de les imatges. La idea és veure que la composició de f amb la projecció $\pi_v : \mathbb{R}^n \to v^\perp$ és una immersió injectiva, i així haurem reduit la dimensió fins a $n-1$ (doncs $v^\perp$ és un hiperplà de dimensió $n-1$). Com que aquest procés el podem repetir sempre que $n > 2m+1$, arribarem a un encabiment a $\mathbb{R}^{2m+1}$, que és el que volem.

Ja sabem que f és una immersió injectiva; només cal provar que $\pi_v|_M$ també.

Provem la injectivitat: suposem $\pi_v(x) = \pi_v(y)$ per $x, y \in M$ amb $x \neq y$. Llavors $\pi_v(x-y) = 0$, és a dir, $x - y = tv$ per alguna $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (π_v és la projecció sobre el complement ortogonal de v, per tant el Kernel és el conjunt dels múltiples de v). Però llavors $h(x, y, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t}(x-y) = v$ i hem arribat a una contradicció, doncs havíem pres v fora de la imatge d'h. Així doncs $\pi_v|_M$ és injectiva.

Provem que és una immersió: la primera observació és que $d_x\pi_v = \pi_v$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$, doncs π_v és una projecció lineal entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{n-1}$. Ara prenem $w \in T_pM$ no nul tal que $d_p\pi_v(w) = 0$, és a dir, $\pi_v(w) = 0$. Llavors $w = tv$ per alguna $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Però llavors $g(p, \frac{1}{t}w) = g(p, v) = v$ i hem arribat a una contradicció, doncs havíem pres v fora de la imatge de g. Per tant $d_p\pi_v$ és injectiva per tot $p \in M$, és a dir que $\pi_v|_M$ és una immersió.

Així doncs hem arribat a que $\pi_v \circ f$ és una immersió injectiva en un compacte, i per tant és un encabiment, com volíem. □

Observació 3.5. Notem que per a la construcció de π_v, que ens permet reduir $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{2m+1}$, no hem utilitzat la compacitat. Això serà clau a l'hora de generalitzar el teorema.

Abans d'acabar la secció, aprofitarem algunes de les definicions del teorema anterior per definir i provar un resultat sobre particions de la unitat:

Definició 3.6. *Una família de funcions $\{\sigma_\alpha \,|\, \alpha \in A \subset \mathbb{R}\}$ en una varietat M és una partició de la unitat si per tot $x \in M$, la suma $\sum_\alpha \sigma_\alpha(x)$ està ben definida i dona 1.*

Entenem que la suma està ben definida si $\sigma_\alpha(x)$ és diferent de zero per un nombre finit de αs i zero a totes les altres. Això ens suggereix que les podem relacionar amb les funcions altiplà.

Definició 3.7. *Diem que una partició de la unitat està subordinada a un recobriment $\mathcal{U} = \{U_\beta \,|\, \beta \in B \subset \mathbb{R}\}$ si per tot $\alpha \in A$, existeix un $\beta \in B$ tal que $sup(\sigma_\alpha) \subset U_\beta$.*

Proposició 3.8. *Si M és una varietat diferenciable i $\mathcal{U}$ és un recobriment obert llavors existeix una partició de la unitat $\{\sigma_\alpha\}$ subordinada a $\mathcal{U}$ i tal que les funcions σ_α són diferenciables.*

PROVA: Considerem primer el cas d'una varietat compacta. Podem utilitzar els conjunts U_p, V_p i W_p i les funcions altiplà λ_p que hem definit a la prova del teorema anterior: si recobrim M amb finits V_{p_i} llavors la suma $\sigma = \sum \lambda_{p_i}$ està ben definida (diferent de zero en un nombre finit de funcions), és diferenciable perquè és suma de funcions diferenciables i $\sigma(x) \geq 1$ per tot $x \in M$. Definint $\sigma_i = \frac{\lambda_{p_i}}{\sigma}$ obtenim una partició de la unitat subordinada al recobriment $\{U_{p_i} \,|\, i = 1, \ldots, k\}$ (fixem-nos que $sup(\sigma_i) = W_{p_i} \subset U_{p_i}$). Per subordinar-la a qualsevol recobriment, només cal triar els U_p per tal que estiguin a dins d'un element d'$\mathcal{U}$.

En general, si M no és compacta, considerem el recobriment de M per conjunts del tipus V_p; en podem extreure un subrecobriment numerable $\{V_{p_n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Llavors podem definir una succesió creixent $s(n)$, amb $s(1) = 1$ i un ordenament de V_{p_n} de la següent manera: per tot n, el compacte $K_n = W_{p_1} \cup \cdots \cup W_{p_{s(n)}}$ està contingut en $V_{p_1} \cup \cdots \cup V_{p_{s(n+1)}}$. Això és possible perquè K_n és compacte i $V_{p_1}, \ldots, V_{p_{s(n)}}$ ja estan continguts en K_n; $V_{p_{s(n)+1}}, \ldots, V_{p_{s(n+1)}}$ seran els que calguin per acabar de recobrir-lo. Notem que aquesta construcció satisfà $K_n \subset int(K_{n+1})$. Ara, recuperem el nostre recobriment $\mathcal{U}$, i ens interessa aplicar el resultat compacte als compactes $K_n \setminus int(K_{n-1})$. Per fer-ho, cal haver triat els U_p utilitzats de manera que es quedin dins $int(K_{n+1}) \setminus K_n$ i dins d'un element d'$\mathcal{U}$. Això sempre es pot fer, per les definicions de V_p i W_p en relació a U_p (podem triar un radi r_p adient). Llavors un punt $x \in K_n$ tindrà imatge no zero només sota les funcions altiplà $\lambda_{s(n)+1}, \ldots, \lambda_{s(n+1)}$. Llavors, com en el cas compacte, la suma està ben definida a tot arreu i podem obtenir una partició de la unitat subordinada a $\mathcal{U}$. □

3.3 Whitney general

La prova sobre particions de la unitat i els resultats sobre aplicacions pròpies que hem vist al capítol 1 ens permeten provar el teorema de Whitney en general:

Teorema 3.9. *Tota varietat M m-dimensional es pot encabir en $\mathbb{R}^{2m+1}$ i n'és un tancat.*

PROVA: Primer triem un recobriment de M per oberts amb clausura compacta (per exemple, antiimatges de boles obertes per cartes, com els V_p que hem definit al Teorema 3.4). Això ens permet observar que M és un espai localment compacte. D'aquest recobriment n'extraiem un subrecobriment numerable i prenem una partició de la unitat subordinada a aquest subrecobriment, que existeix per la proposició anterior. Sigui $\{\sigma_i \mid i > 0\}$ la partició i definim $h : M \to [1, \infty]$ com

$$h(x) = \sum k\sigma_k(x).$$

Aquesta funció està ben definida, doncs la suma està ben definida, i és diferenciable perquè les σ_k ho són. A més és pròpia: si prenem un compacte de $[1, \infty]$, que serà de la forma $[a, b]$, i en considerem l'antiimatge obtenim $\{x \in M \mid \sum k\sigma_k(x) \in [a, b]\}$. Aquest conjunt és tancat, i està contingut en una unió finita de compactes; per com hem construit la partició de la unitat, els seus suports són compactes, i l'unió és finita perquè sino la suma no estaria ben definida. Així doncs aquest conjunt és un tancat contingut en un compacte, i per tant és compacte. Així doncs h és pròpia.

Ara definim dues famílies de conjunts: $V_i = h^{-1}(i-\frac{1}{4}, i+1+\frac{1}{4})$ i $W_i = h^{-1}[i-\frac{1}{3}, i+1+\frac{1}{3}]$. Aquestes famílies satisfan que els V_i són oberts, els W_i compactes, $\overline{V}_i \subset int(W_i)$ i el que dona sentit a una definició tan específica, que els W senars són disjunts dos a dos, i el mateix pels parells. Per cada i, Whitney compacte ens diu que existeix una aplicació diferenciable $g_i : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ que és un encabiment a $\overline{V}_i$ i val zero fora de W_i (això se segueix de la definició de l'encabiment a partir de funcions altiplà). Ens interessa composar aquestes g_i amb un difeomorfisme entre $\mathbb{R}^{2m+1}$ i una bola oberta, per tal d'acotar la imatge. Seguirem denotant-les g_i.

Siguin

$$f_s = \sum_{j\, senar} g_j$$

i

$$f_p = \sum_{j\, parell} g_j$$

i finalment definim $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}$ com

$$f(x) = \big(f_s(x), f_p(x), h(x)\big).$$

Observem que $Im(f) \subset K \times \mathbb{R}$, on K és un compacte de $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$, doncs les imatges de f_p i f_s estan acotades. Ara, per provar que f és un encabiment, veiem:

1. f és pròpia, doncs les tres components ho són: h ja ho hem vist i f_s i f_p són pròpies perquè estan definides en compactes disjunts; l'antiimatge d'un compacte serà un tancat contingut en un compacte, i per tant serà compacta.

2. f és injectiva, doncs si $f(x) = f(y)$, llavors $h(x) = h(y)$, cosa que implica que x i y pertanyen a un mateix V_i. Si i és senar, f_s és un encabiment en $\overline{V}_i$ i per tant $x = y$, i el mateix amb f_p si i és parell.

3. f és una immersió, doncs si prenem $p \in V_i$ i considerem un vector w no nul de T_pM, tenim que $d_pf(w) = (d_pg_i(w), *, *)$ si i és senar i $d_pf(w) = (*, d_pg_i(w), *)$ si és parell. Com que g_i és una immersió en $\overline{V}_i$, $d_pg_i(w) \neq 0$ i per tant $d_pf(w) \neq 0$.

Així doncs f és una immersió injectiva pròpia, és a dir, un encabiment amb imatge tancada, per la Proposició 1.49. Tenim doncs un encabiment de M en $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}$, i utilitzant el mateix mètode que a Whitney compacte, podem reduir la dimensió de l'espai d'arribada fins a $2m+1$, projectant-lo sobre un hiperplà H d'aquesta dimensió.

Un cop arribats aquí ja hem provat que existeix un encabiment de M en $\mathbb{R}^{2m+1}$, que és el resultat principal que volíem provar. Faltaria veure, per tal de completar la prova, que composar amb la projecció que hem construït per reduir la dimensió no altera el fet de que l'encabiment tingui imatge tancada. Diem π_v a aquesta projecció, i en definim una altra, $\Pi : \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$, la projecció natural $\Pi(x, y, t) = (x, y)$. Fixem-nos que $Ker(\pi_v) = \{tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ i $Ker(\Pi) = \{(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$. Com que el conjunt de vectors v que podíem triar per fer la projecció era un conjunt dens (complementari d'un conjunt de mesura zero), segur que en podem trobar un tal que $Ker(\pi_v) \cap Ker(\Pi) = \{0\}$. Per tant l'aplicació $(\Pi \times \pi_v)(x) = \Pi(x) \times \pi_v(x)$ és una inclusió entre espais euclidians, i és clar llavors que $\Pi \times \pi_v$ és pròpia. Això implica que, per $C \subset H$ compacte, $(\Pi \times \pi_v)^{-1}(K \times C) = K \times \mathbb{R} \cap \pi_v^{-1}(C)$ és compacte, per tant π_v és pròpia a $f(M) \subset K \times \mathbb{R}$, que és tot el que necessitem per afirmar que $\pi_v \circ f$ és un encabiment amb imatge tancada de M en $\mathbb{R}^{2m+1}$. $\square$

Amb aquest teorema hem provat el resultat principal d'aquest capítol, que ens permet treballar amb varietats com a tancats de $\mathbb{R}^n$. Cal mencionar que Whitney va provar que l'encabiment es podia fer a $\mathbb{R}^{2m}$, però no ho provarem perquè la demostració és feixuga i amb el que hem provat en tenim prou per al proper capítol. Sí veurem, però, un parell d'exemples que proven que l'encabiment en $\mathbb{R}^{2m}$ és estricte (és a dir, que hi ha varietats m-dimensionals que no es poden encabir en $\mathbb{R}^{2m-1}$):

Exemple 3.10. $\mathbb{S}^1$ no es pot encabir en $\mathbb{R}$, doncs no es pot construir una immersió de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}$; sigui $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una funció continua i considerem $f(\mathbb{S}^1)$. Com que $\mathbb{S}^1$ és compacta, la imatge també ho és, i per tant és tancada i acotada. Llavors existeix un valor màxim t en la imatge; sigui $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(p) = t$. És clar que $d_pf = 0$, i per tant f no té rang màxim a tot arreu, és a dir, no és una immersió. En particular no és un encabiment, i per tant $\mathbb{S}^1$ no es pot encabir en $\mathbb{R}$.

Exemple 3.11. Un exemple més interessant és el del pla projectiu real o l'ampolla de Klein, que no es poden encabir en $\mathbb{R}^3$. Per provar-ho, es demostra el resultat més general de que tota subvarietat de codimensió 1 d'una varietat orientable M és orientable. Es pot trobar una prova a [5], pàg. 353. Es prova per M compacta, però es pot generalitzar fàcilment.

Com a últim comentari a afegir, per a alguns valors concrets de m sí que es pot millorar aquest encabiment. S'ha provat que la dimensió és igual a $2m$ si m és una potència de 2 (utilitzant precisament els espais projectius), però que si no ho és la dimensió és $\leq 2m-1$. Encara no es coneix el valor mínim per a totes les m.

3.4 El fibrat normal i entorns tubulars

A partir d'aquest punt ja podem considerar que tota varietat diferenciable m-dimensional està encabida en $\mathbb{R}^{2m+1}$ (com ja hem dit, no ens cal reduir a $2m$). Diem $n = 2m+1$. L'encabiment ens permet treballar amb la mètrica (riemanniana) de $\mathbb{R}^n$ induïda en M. A més, ens permet construir el fibrat normal d'una varietat:

Definició 3.12. *El fibrat normal de M és el subconjunt $NM \subset M \times \mathbb{R}^n$,*

$$NM = \{(p,v) \,|\, p \in M, v \in (T_pM)^{\perp}\}.$$

Observem que $(T_pM)^{\perp}$ és un espai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-m$, doncs T_pM té dimensió m i l'espai ambient és $\mathbb{R}^n$. És clar que aquesta definició depèn de l'espai ambient; l'omitim a la notació perquè sempre treballarem a $\mathbb{R}^n$.

Proposició 3.13. *NM és una varietat diferenciable n-dimensional. A més, la projecció $\pi : NM \to M$, $\pi(p,v) = p$ és diferenciable.*

PROVA: Cal dotar de topologia i estructura diferenciable a NM i provar que és un espai Hausdorff i que satisfà el segon axioma de numerabilitat. La prova és molt similar a la que hem fet per a TM a la Proposició 1.28. Reproduirem el primer pas i la resta es dedueixen per comparació:

1. Per a cada carta local (U,ϕ) de M amb coordenades $\{x_1,\dots,x_m\}$ definim una aplicació $F|_U : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ com

   $$F|_U(p,v) = (p_1,\dots,p_m,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-m})$$

   on $\phi(p) = (p_1,\dots,p_m)$ i, donada una base $w_1,\dots,w_{n-m}$ de $(T_pM)^{\perp}$, $v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-m}w_{n-m}$. Podem observar que F_U és una bijecció entre $\pi^{-1}(U)$ i $\phi(U) \times \mathbb{R}^{n-m}$, que és un obert de $\mathbb{R}^n$. De fet, és un homeomorfisme, perquè ϕ és un homeomorfisme de U a $\phi(U)$. Posem a NM la topologia generada per les antiimatges per F_U de tots els oberts de $\mathbb{R}^n$, per a tota carta (U,ϕ). $\square$

El fibrat normal ens permet definir un entorn tubular de la varietat M, un obert de $\mathbb{R}^n$ que consisteix en els punts de $\mathbb{R}^n$ a menys d'una certa distància de M. El que és interessant és que la varietat en sí és un retracte de deformació del seu entorn tubular.

Proposició 3.14. *Definim l'aplicació diferenciable $E : NM \to \mathbb{R}^n$, $E(p,v) = p+v$ i sigui $NM_\epsilon = \{(p,v) \in NM \,|\, \|v\| < \epsilon\}$. Existeix una funció diferenciable $\epsilon : M \to (0,\infty)$ tal que E és un difeomorfisme entre $NM_{\epsilon(p)}$ i $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x-p\| < \epsilon(p)$ per algun $p \in M\}$. Si M és compacta, podem prendre ϵ constant.*

Podem trobar proves d'aquest resultat a [7], pàg. 69-72 i a [5], pàg. 93-94. Observem que $r = \pi \circ E^{-1} : E(NM_\epsilon) \to M$ és el retracte de deformació desitjat, que envia els punts de $E(NM_\epsilon)$ al punt de M més proper; clarament és un retracte i és homòtop a la identitat amb l'homotopia $F : E(NM_\epsilon) \times [0,1] \to E(NM_\epsilon)$ definida per $F(p+v,s) = p+sv$; llavors $F(p+v,1) = p+v$ i $F(p+v,0) = r(p+v)$.

Així doncs tota varietat diferenciable és un retracte de deformació d'un entorn a $\mathbb{R}^n$. Aquest resultat serà necessari per provar un dels últims teoremes del següent capítol.

4 Teoria de Morse

Aquest capítol introdueix una branca de la topologia diferencial que ens permet relacionar-la amb la topologia algebraica. Resumidament, podrem relacionar els punts crítics de les funcions de Morse, que definirem tot seguit, amb el tipus d'homotopia de les varietats de sortida d'aquestes funcions. Un resultat que va encara més enllà és el teorema de Reeb (Teorema 4.39), que veurem a l'última secció.

4.1 Existència de les funcions de Morse

Definició 4.1. *Una funció de Morse és una funció diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ que no té punts crítics degenerats, és a dir, que tots els seus punts crítics son no degenerats.*

Dedicarem aquesta secció a provar que podem trobar una funció de Morse per a qualsevol varietat. De fet, en trobarem dues en particular: la funció distància a un punt, que estudiem a continuació, i la funció alçada, que estudiarem al Teorema 4.13.

Teorema 4.2. *Fixat $p \in \mathbb{R}^{2m+1}$, la funció $L_p : M \to \mathbb{R}$ definida com*

$$L_p(q) = \|p - q\|^2$$

és una funció de Morse per gairebé tot p.

Observació 4.3. Per tal que la definició es pugui aplicar a qualsevol varietat, cal que M estigui encabida en $\mathbb{R}^{2m+1} =: \mathbb{R}^n$, que és precisament el que hem provat al capítol anterior. D'altra banda, el teorema de Sard tornarà a entrar en joc per donar sentit a aquest 'gairebé tot p'.

Definició 4.4. *Sigui $E : NM \to \mathbb{R}^n$ l'aplicació diferenciable que hem definit al final del capítol anterior, $E(q, v) = q + v$. Diem que $e \in \mathbb{R}^n$ és un punt focal de (M, q) amb multiplicitat λ si $e = q+v$, amb $(q, v) \in N$ i la diferencial d'E en (q, v) té rang $n-\lambda < n$. Direm que el punt e és un punt focal de M si és punt focal de (M, q) per algun $q \in M$.*

Observació 4.5. Com que demanem $n - \lambda < n$, és a dir, $\lambda > 0$, és clar que els punts focals son valors crítics de l'aplicació E. Així doncs, pel teorema de Sard, el conjunt de punts focals té mesura zero a $\mathbb{R}^n$. Tot seguit trobarem la relació entre els punts focals i els punts crítics degenerats de L_p.

Per tal de caracteritzar els punts focals, ens interessa definir les formes fonamentals. Com que no les utilitzarem més, no farem una definició intrínseca sino que ens restringirem a unes coordenades. Siguin $\{x_1, \ldots, x_m\}$ les coordenades d'una regió de M, i siguin $c = (c_1, \ldots, c_n)$ les funcions diferenciables que envien aquestes coordenades a $\mathbb{R}^n$.

Definició 4.6. *La primera forma fonamental associada al sistema de coordenades es defineix com la matriu simètrica de funcions (amb valors reals)*

$$(g_{ij}) = (\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j}).$$

Definició 4.7. *La segona forma fonamental associada al sistema de coordenades és una matriu simètrica d'aplicacions (amb valors vectorials) que s'ha de definir per a cada direcció, de la següent manera: considerem el vector $\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}$ en un punt de M. És clar que* *podem expressar aquest vector com la suma d'un vector tangent a M i un de normal a M. Si diem φ_{ij} a la part normal, donat un vector unitari qualsevol v normal a M en un punt $q \in M$ diem que la matriu*

$$(v \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}) = (v \cdot \varphi_{ij})$$

és la segona forma fonamental de M a q en la direcció v.

Com que podem triar el sistema de coordenades que més ens convingui, podem assumir que g_{ij} evaluada en q és la identitat:

Definició 4.8. *Si assumim això, els valors propis de $(v \cdot \varphi_{ij})$, $K_1, \dots, K_n$, s'anomenen curvatures principals de M a q en la direcció v. Pels K_i diferents de zero, diem radis principals de curvatura a $K_1^{-1}, \dots, K_n^{-1}$.*

Lema 4.9. *Considerem la recta r formada per tots els punts de la forma $q + tv$, on v és un vector unitari ortogonal a M a q. Els punts focals de (M, q) sobre r son exactament els punts $q + K_i^{-1} v$, on $1 \leq i \leq m$, pels $K_i \neq 0$. Així doncs hi ha com a molt m punts focals de (M, q) sobre r, contant cadascun amb la multiplicitat corresponent.*

PROVA: Triem $n - m$ camps vectorials $w_1(x_1, \dots, x_m), \dots, w_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$ sobre la varietat de manera que $w_1, \dots, w_{n-m}$ siguin vectors unitaris ortogonals entre sí i a M. Això ens permet introduir coordenades a NM, $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_{n-m})$, de la següent manera: el punt

$$(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_{n-m})$$

es correspon a

$$\left(c(x_1, \dots, x_m), \sum_{k=1}^{n-m} t_k w_k(x_1, \dots, x_m) \right).$$

Aquesta introducció de coordenades té sentit (és a dir, el punt definit pertany a NM), doncs $c(x_1, \dots, x_m)$ són les coordenades d'un punt de M a $\mathbb{R}^n$ i per la definició dels camps vectorials w_i, la suma ens dona un vector de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a M.

Ara considerem l'aplicació $E : NM \to \mathbb{R}^n$ que defineix la correspondència

$$(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_{n-m}) \to c(x_1, \dots, x_m) + \sum_{k=1}^{n-m} t_k w_k(x_1, \dots, x_m).$$

Com que ens interessa estudiar el rang de la diferencial d'E per tal de trobar els punts focals, considerem les derivades parcials d'aquesta correspondència:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial c}{\partial x_i} + \sum_k t_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_l} = w_l.$$

Per poder trobar fàcilment el rang de la diferencial d'E, el més convenient és fer el producte escalar de cadascuna d'aquestes derivades parcials pels n vectors linealment independents $\frac{\partial c}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial c}{\partial x_m}, w_1, \dots, w_{n-m}$ (que són l.i. se segueix fàcilment de les definicions). D'aquesta manera podem obtenir una matriu $n \times n$ que en cada punt tindrà el mateix rang que la diferencial d'E, doncs fer el producte escalar per vectors l.i. provoca que només la singularitat de la diferencial afecti a la singularitat de la matriu. Fent els càlculs (utilitzant l'ortogonalitat) obtenim la matriu:

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j} + \sum_k t_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j}) & (\sum_k t_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \cdot w_l) \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Així doncs el rang de la matriu és igual al rang del bloc superior esquerre. Ara cal utilitzar que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}(w_k \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j}) = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(w_k \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j}) = \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j} + w_k \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}, \end{cases}$$

és a dir, que

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j} = -w_k \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j},$$

i recordar que hem definit $(g_{ij}) = (\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j})$. Tot plegat ens diu que la matriu del bloc superior esquerre es pot expressar com

$$\left(g_{ij} - \sum_k t_k w_k \cdot \varphi_{ij} \right).$$

Si ara evaluem en un punt $q + tv$ de la recta r, obtenim $(g_{ij} - tv \cdot \varphi_{ij})$; llavors $q + tv$ és punt focal de multiplicitat λ si i només si aquesta matriu és singular de rang $n - \lambda$. Com que hem assumit que (g_{ij}) és la identitat, això passarà si $\frac{1}{t}$ és un valor propi de la matriu $(v \cdot \varphi_{ij})$, i a més la λ serà igual a la multiplicitat de $\frac{1}{t}$ com a valor propi. Per tant ja hem acabat, doncs els valors propis d'aquesta matriu són les curvatures principals. □

Ara tornem a la nostra funció $L_p : M \to \mathbb{R}$.

Lema 4.10. *El punt $q \in M$ és un punt crític degenerat de L_p si i només si p és un punt focal de (M, q), i si p té multiplicitat λ llavors $d_q L_p$ tindrà rang $n - \lambda$.*

PROVA: Com que

$$L_p(c(x_1, \dots, x_m)) = \|c(x_1, \dots, x_m) - p\|^2$$

llavors

$$\frac{\partial L_p}{\partial x_i} = 2\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot (c - p)$$

i també

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial x_i \partial x_j} = 2\left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (c - p) \right).$$

Així doncs L_p té un punt crític a $c = q$ si i només si $q - p \in (TqM)^\perp$, i si triem $p = c + tv$, com en la prova del lema anterior, llavors l'expressió de la segona derivada es converteix en

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial x_i \partial x_j} = 2(g_{ij} - tv \cdot \varphi_{ij}).$$

D'aquesta manera hem arribat a les condicions del lema anterior, i per tant ja estem. □

Combinant aquest últim lema amb el Corol·lari 2.9, que diu que els valors regulars són densos, hem provat el Teorema 4.2: Per gairebé tot p (llevat d'un conjunt de mesura zero), la funció L_p no té punts crítics degenerats.

Observació 4.11. L_p només pren valors positius. Això vol dir que $L_p^{-1}(-\infty, a] = L_p^{-1}[0, a]$. D'altra banda, L_p és pròpia, doncs l'antiimatge d'$[a, b]$ consisteix en el conjunt de punts de M a distància entre a i b de p, que és un conjunt clarament tancat i acotat. Tot plegat ens dona que $L_p^{-1}[0, a]$ és un compacte de M. Això serà útil més endavant.

L'últim que ens queda per veure és com trobar l'índex de L_p als punts crtícs:

Lema 4.12. *L'índex de L_p en un punt crític no degenerat $q \in M$ és igual al nombre de punts focals de (M, q) que estan sobre el segment de q a p, on cada punt el contem amb la multiplicitat corresponent.*

PROVA: És gairebé immediat del Lema 4.10, doncs l'índex de la matriu

$$\Big(\frac{\partial^2 L_p}{\partial x_i \partial x_j}\Big) = 2(g_{ij} - tv \cdot \varphi_{ij})$$

és igual al nombre de valors propis negatius. Assumint que (g_{ij}) és la identitat, això és igual al nombre de valors propis de $(v \cdot \varphi_{ij})$ que siguin més grans o iguals a $\frac{1}{t}$, i aquí ja ens trobem en les condicions del lema mencionat. $\square$

Ara passem a veure el cas de la funció alçada. La prova serà més directa que la de la funció distància:

Teorema 4.13. *Fixat $v \in \mathbb{R}^n$, la funció $h_v : M \to \mathbb{R}$ definida com*

$$h_v(p) = p \cdot v$$

és una funció de Morse per gairebé tot v.

PROVA: Definim el següent conjunt:

$$S = \{(x, v) \in M \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \,|\, d_x h_v = 0\}.$$

Volem provar que S és una subvarietat; per fer-ho, podem treballar localment, prenent per cada punt $(x, v) \in S$ una carta de M, (U, φ), tal que $x \in U$. Llavors podem definir

$$S' = \{(z, w) \in U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \,|\, d_z h_w = 0\} = \{(y, w) \in \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \,|\, d_y(h_w \circ \varphi^{-1}) = 0\}.$$

Prenent coordenades $(y_1, \ldots, y_m)$, és clar que $S' = \phi^{-1}(0)$ on $\phi : \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^m$ està definida per

$$\phi(y, v) = \Big(\frac{\partial(h_w \circ \varphi^{-1})}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial(h_w \circ \varphi^{-1})}{\partial y_n}\Big).$$

Es pot comprovar que 0 és un valor regular de ϕ, i això implica que la Hessiana de h_w no és singular (si fos singular en un punt amb imatge 0, la diferencial de ϕ no seria exhaustiva en aquell punt i 0 no seria un valor regular). Tenim doncs que 0 és un valor regular, i per tant S és una varietat. Considerem la projecció $\pi : S \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\pi(x, v) = v$. En prenem un valor regular v_0 i llavors

$$\pi^{-1}(v_0) = \{(x, v_0) \in M \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \,|\, d_x h_{v_0} = 0\}$$

$$= \{x \in M \mid d_x h_{v_0} = 0\} = \{\textit{Punts crítics de } h_{v_0}\}.$$

Com que per Sard els valors regulars de π són densos, tenim que per a gairebé tot v, els punts crítics de h_v pertanyen a S (emparellats amb v), és a dir que són no degenerats (Hessiana no singular), i per tant h_v és una funció de Morse. $\square$

Observació 4.14. L'exemple 1.34/4 és un cas particular d'aquesta funció, amb $M = T^2$ i $v = (0, 0, 1)$. Al final del capítol treballarem en profundidat l'exemple del torus.

Com que aquestes funcions es poden definir per a tota varietat, tenim que:

Corol·lari 4.15. *En qualsevol varietat diferenciable existeix una funció de Morse.*

A les següents seccions estudiarem les aplicacions d'aquest resultat.

4.2 El Lema de Morse

En aquesta secció estudiarem el comportament de les funcions a prop dels punts crítics no degenerats. En particular, provarem que l'índex de f a p descriu completament el comportament de f en aquest punt.

Lema 4.16. *Sigui f una funció diferenciable en un entorn convex V de l'origen de $\mathbb{R}^m$, amb $f(0) = 0$. Llavors existeixen funcions diferenciables $g_1, \ldots, g_m$ definides a V tals que*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x_1, \ldots, x_m)$$

i tals que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

PROVA: Només cal considerar la següent igualtat, que se satisfà sempre:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_m)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_m) x_i \, dt.$$

Llavors triant $g_i(x_1, \ldots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_m)\, dt$ ja estem. $\square$

Lema 4.17. *(de Morse) Sigui p un punt crític no degenerat de f. Llavors existeix un sistema local de coordenades $\{y_1, \ldots, y_m\}$ en un entorn U de p, amb $y_i(p) = 0$ per tot i, tal que per tot $q \in U$ se satisfà*

$$f(q) = f(p) - y_1^2(q) - \cdots - y_\lambda^2(q) + y_{\lambda+1}^2(q) + \cdots + y_n^2(q),$$

on λ és l'índex de f a p.

PROVA: Sempre podem assumir que p és l'origen de $\mathbb{R}^m$ i que $f(p) = f(0) = 0$. Llavors utilitzem el lema anterior per escriure, per $(x_1, \ldots, x_m)$ en un entorn de zero,

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(x_1, \ldots, x_m).$$

Com que 0 és un punt crític, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = g_j(0) = 0$. Així doncs tornem a estar en les condicions del lema anterior i per tant el podem tornar a aplicar a les g_i: per tot i, existeixen funcions diferenciables $h_{i_1}, \ldots, h_{i_m}$ tals que

$$g_i(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} x_j h_{i_j}(x_1, \ldots, x_m).$$

Per tant

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} x_i x_j h_{i_j}(x_1,\ldots,x_m).$$

Ara substituim cada h_{i_j} per $h'_{i_j} = \frac{1}{2}(h_{i_j} + h_{j_i})$; llavors tenim $h_{i_j} = h_{j_i}$ per tot i, j. Seguim escrivint $h'_{i_j} = h_{i_j}$. D'altra banda, observem que tenim la igualtat de matrius

$$(h_{i_j}(0)) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right),$$

doncs $h_{i_j}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$. Com que 0 és un punt crític no degenerat, aquesta matriu és no singular. Aquesta no-singularitat ens permet afirmar que existeixen transformacions de les funcions coordenades que ens permeten obtenir l'expressió desitjada, en un entorn potser més petit de 0; només cal aplicar la diagonalització per a formes quadràtiques ([14],pàg. 287).

Ara ja tenim el sistema de coordenades desitjat. Veiem que aquesta expressió implica necessàriament que λ és l'índex de f a p. Com que

$$f(q) = f(p) - y_1^2(q) - \cdots - y_\lambda^2(q) + y_{\lambda+1}^2(q) + \cdots + y_m^2(q),$$

llavors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(p) \begin{cases} -2 & si \quad i = j \leq \lambda \\ 2 & si \quad i = j > \lambda \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Això implica que, en la base $\{\frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}|_p\}$, la Hessiana de f és la matriu diagonal

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Així doncs tenim un subespai V de T_pM de dimensió λ on és definida negativa, i un subespai W de dimensió $m - \lambda$ on és definida positiva. Si existís un subespai de T_pM de dimensió més gran que λ on la Hessiana fos definida negativa, llavors aquest espai intersecaria W, cosa impossible. Llavors λ és l'índex de f a p i hem acabat. □

Corol·lari 4.18. *Els punts crítics no degenerats estan aïllats, és a dir, existeix un entorn en el qual no hi ha cap altre punt crític.*

PROVA: Només cal considerar l'entorn U del lema anterior. □

Observació 4.19. Els punts crítics degenerats no estan aïllats en general, com prova l'exemple 1.34/3.

4.3 Relació entre tipus d'homotopia i valors crítics

Definició 4.20. *Sigui $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ el disc o bola n-dimensional i sigui $\phi : D^n \to X$ una aplicació continua, on X és un espai topològic qualsevol, tal que $D^n \to \phi(D^n)$ és un homeomorfisme. Llavors diem que $\phi(D^n)$ és una cel·la n-dimensional o n-cel·la, i es denoten e^n.*

Definició 4.21. *Un complex cel·lular X és un espai topològic que es construeix inductivament de la manera següent:*

1. *Comencem amb un conjunt discret X^0. Considerem que els punts son 0-cel·les. Si no hi ha 0-cel·les, el considerem buit.*

2. *Formem l'esquelet n-dimensional de X^n partint de X^{n-1} adjuntant-hi una col·lecció de n-cel·les e_α^n a través d'aplicacions $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$, que anomenarem aplicacions d'adjunció. Això vol dir que X^n és l'espai quocient de $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n$ amb la identificació $x \sim \varphi_\alpha(x)$ per $x \in \partial D_\alpha^n$. En definitiva, enganxem n-cel·les a $X^n - 1$ respectant que la vora de la cel·la coincideixi amb la vora del disc original.*

En aquest text treballarem amb complexos cel·lulars finits (pels detalls addicionals que cal considerar pel cas infinit, consultar [10], pàg. 519). Direm que $X = X^n$ és un complex cel·lular n-dimensional. La topologia és la topologia quocient.

Exemple 4.22. $X = \mathbb{S}^n$ admet estructura de complex cel·lular n-dimensional. Comencem amb $X^0 = x$, un sol punt. No afegim cap k-cel·la per $1 \leq k \leq n-1$ i llavors afegim una n-cel·la que s'adjunta via l'aplicació constant $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to \{x\}$, $\varphi(p) = x$.

Alternativament, la mateixa $\mathbb{S}^n$ es pot construir amb una $(n-1)$-cel·la (l'equador) i dues n-cel·les (hemisferis nord i sud) adjuntades a l'equador per la vora; les φ son la identitat.

En aquesta secció provarem que tota varietat diferenciable té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular finit, i podrem precisar quin complex en particular. Per fer-ho, necessitarem provar tot un seguit de resultats. Comencem amb una construcció prèvia:

Definició 4.23. *Un grup uniparamètric de difeomorfismes en una varietat M és una aplicació diferenciable*

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$$

tal que

1. *Per cada $t \in \mathbb{R}$, l'aplicació $\varphi_t : M \to M$ definida com $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ és un difeomorfisme de M en sí mateix.*

2. *Per tot $t, s \in \mathbb{R}$ se satisfà $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$*

Un grup uniparamètric de difeomorfismes ens permet definir un camp vectorial X a M: per cada funció $f : M \to \mathbb{R}$, tenim

$$X_q(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}.$$

Diem que aquest camp vectorial genera el grup φ.

Lema 4.24. *Un camp vectorial diferenciable a M que s'anul·la fora d'un compacte $K \subset M$ genera un únic grup uniparamètric de difeomorfismes de M.*

PROVA: Per a qualsevol corba diferenciable $t \to c(t) \in M$ podem definir el vector velocitat $\frac{dc}{dt} \in T_{c(t)}M$ com

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}.$$

Així doncs, per a q fixat la corba $t \to \varphi_t(q)$ satisfà l'equació diferencial

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)} \\ \varphi_0(q) = q \end{cases}$$

Això se segueix de la definició del camp X. Aquesta equació diferencial té una solució única que depén diferenciablement de la condició inicial (resultat bàsic de teoria d'equacions diferencials). Llavors per a cada punt de M existeix un entorn U i un $\epsilon > 0$ tal que l'equació diferencial té una única solució diferenciable per $q \in U$, $|t| < \epsilon$. Ara recobrim el nostre compacte K amb finits tals entorns U, i sigui ϵ_0 el menor dels ϵ corresponents. Si ara establim $\varphi_t(q) = q$ per $q \notin K$, l'equació diferencial té una solució única $\varphi_t(q)$ per $|t| < \epsilon_0$ i per tot $q \in M$. Aquesta solució és diferenciable en totes dues variables t i q i per unicitat $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, sempre que $|t|, |s|, |t+s| < \epsilon_0$. Així doncs φ_t és un grup uniparamètric de difeomorfismes, peró només ho hem vist per $|t| < \epsilon_0$. Sigui t amb $|t| \geq \epsilon_0$ qualsevol, llavors el podem expressar com $t = k\frac{\epsilon_0}{2} + r$ amb $|r| < \frac{\epsilon_0}{2}$. Llavors definim

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{\epsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{\epsilon_0}{2}} \circ \varphi_r$$

si $k > 0$ i

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{-\epsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{-\epsilon_0}{2}} \circ \varphi_r$$

si $k < 0$. És clar que aquesta construcció també satisfà $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, que és diferenciable per ser composició de diferenciables i que està ben definida. Així doncs el nostre grup uniparamètric de difeomorfismes està ben definit per a tot t. $\square$

Aquesta construcció serà necessària per a la demostració del següent teorema:

Teorema 4.25. *Sigui $f : M \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Diem*

$$M^\beta = \{p \in M \mid f(p) \leq \beta\} = f^{-1}(-\infty, \beta].$$

Sigui $a < b$ i suposem que $f^{-1}[a, b]$ és compacte i no conté punts crítics de f. Llavors M^a és difeomorf a M^b. A més, M^a és un retracte de M^b, de manera que la inclusió $M^a \hookrightarrow M^b$ és una equivalència homotòpica.

PROVA: Donat un camp vectorial qualsevol Y a M, el gradient de f es defineix a partir de la igualtat $Y \cdot grad\, f = Y(f)$. D'altra banda, donada una corba qualsevol $c : \mathbb{R} \to M$ tenim que

$$\frac{dc}{dt} \cdot grad\, f = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

Ara prenem una funció altiplà $\lambda : M \to \mathbb{R}$ que valgui 1 a $f^{-1}[a, b]$ (i amb suport en un entorn compacte de $f^{-1}[a, b]$). Diem $\psi = \frac{\lambda}{grad\, f \cdot grad\, f}$, i definim el camp vectorial X com

$$X_q = \psi(q)(grad\, f)_q,$$

que satisfà les condicions del lema anterior i per tant genera un grup uniparamètric de difeomorfismes

$$\varphi_t : M \to M.$$

Prenem $q \in M$ fixat i considerem $t \to f(\varphi_t(q))$; si $\varphi_t(q)$ està dins de $f^{-1}[a, b]$, llavors

$$\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = \frac{d\varphi_t(q)}{dt} \cdot grad\, f = X \cdot grad\, f = X(f) = 1.$$

És a dir que $t \to f(\varphi_t(q))$ és lineal amb derivada 1 ($f(\varphi_t(q)) = f(q) + t$) sempre que $f(\varphi_t(q))$ estigui entre a i b. Així doncs, $\varphi_{b-a} : M \to M$ és el difeomorfisme entre M^a i M^b; està clar que si $q \in M^a$ ($f(q) \in (-\infty, a]$) llavors $f(\varphi_{b-a}(q)) = f(q) + b - a \in (-\infty, b]$ i per tant $f^{-1}(f(q) + b - a) \in M^b$.

Falta veure que M^a és un retracte de deformació de M^b. Sigui $R : M^b \times [0,1] \to M^b$, definida com

$$R(q,t) = \begin{cases} q & si \quad f(q) \leq a \\ \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & si \quad a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

Llavors $R(q,0)$ és la identitat i $R(q,1)$ és una retracció de M^b a M^a (doncs és la identitat per $q \in M^a$). $\square$.

Fixem-nos que el teorema anterior ens diu que el tipus d'homotopia d'una varietat no canvia entre punts crítics. En altres paraules, el tipus d'homotopia depèn dels punts crítics. El següent teorema precisa aquesta dependència:

Teorema 4.26. *Sigui $f : M \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i sigui p un punt crític no degenerat amb índex λ. Diem $c = f(p)$ i suposem que $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ és compacte i no conté cap altre punt crític de f per alguna $\epsilon > 0$. Llavors per una ϵ prou petita, $M^{c+\epsilon}$ té el mateix tipus d'homotopia que $M^{c-\epsilon}$ amb una λ-cel·la adjuntada.*

PROVA: Primer observem que la condició de que existeixen $\epsilon > 0$ tals que $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ no conté cap altre punt crític de f ens la garanteix el fet que els punts crítics no degenerats estan aïllats (Corol·lari 4.18).

D'altra banda: triem un sistema de coordenades $\{y_1, \ldots, y_m\}$ en un entorn U de p com el del Lema de Morse, és a dir, tal que per tot $q \in U$ se satisfà

$$f = c - (y_1(q))^2 - \cdots - (y_\lambda(q))^2 + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (y_m(q))^2.$$

El punt crític p té coordenades $y_1(p) = \cdots = y_m(p) = 0$. Quan no calgui especificar el punt o quan calgui simplificar la notació escriurem les coordenades sense especificar-lo.

Ara triem una $\epsilon > 0$ prou petita tal que

1. $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ és compacte i no conté cap altre punt crític.
2. La imatge de U per $(y_1, \ldots, y_m) : U \to \mathbb{R}^m$ conté la bola tancada

$$\{(y_1, \ldots, y_m) \mid \sum (y_i)^2 \leq 2\epsilon\}.$$

Ara definim la cel·la següent:

$$e^\lambda = \{q \in U \mid (y_1)^2(q) + \cdots + (y_\lambda)^2(q) \leq \epsilon \,, y_{\lambda+1}(q) = \cdots = y_m(q) = 0\}.$$

És clar que e^λ és una cel·la. També notem que $e^\lambda \cap M^{c-\epsilon} = \partial e^\lambda$, doncs si $q \in e^\lambda$ llavors $f(q) = c - ((y_1(q)^2 + \cdots + y_\lambda(q)^2) + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (y_m(q))^2 = c - \delta + 0$, on $\delta \leq \epsilon$. Els únics elements $q \in e^\lambda$ tal que $f(q) \in (-\infty, c-\epsilon]$ són aquells tals que $\delta = \epsilon$, és a dir, aquells tals que $(y_1)^2(q) + \cdots + (y_\lambda)^2(q) = \epsilon$, és a dir, els elements de ∂e^λ. Això ens diu que la cel·la està adjuntada a M com a la definició de complex cel·lular; per la vora. Provarem que $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ és un retracte de deformació de $M^{c+\epsilon}$.

Per fer-ho, caldrà construir una nova funció diferenciable $F : M \to \mathbb{R}$ de la manera següent: sigui $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tal que

1. $\mu(0) > \epsilon$

2. $\mu(r) = 0$ per $r \geq 2\epsilon$

3. $-1 < \mu'(r) = \frac{d\mu}{dr} \leq 0$ per tot r.

Un exemple de funció μ es pot construir triant una funció altiplà ψ_k associada a $(0, (-\infty, \frac{3\epsilon}{2}))$ adequada, tal que el seu suport sigui $[0, 2\epsilon] = \overline{[0, 2\epsilon)}$ i valgui 1 a $[0, \frac{\epsilon}{k}]$. Llavors

$$\mu(r) = \begin{cases} \epsilon + \frac{\epsilon}{k} & si \quad r < 0 \\ (\epsilon + \frac{\epsilon}{k})\psi_k(r) & si \quad r \geq 0. \end{cases}$$

satisfà trivialment les dues primeres propietats i, triant $k > 0$ prou gran i havent triat ϵ prou petita satisfà la tercera. En particular notem que $\mu \geq 0$. Llavors definim $F = f$ fora de U i

$$F = f - \mu\big((y_1)^2 + \cdots + (y_\lambda)^2 + 2(y_{\lambda+1})^2 + \cdots + 2(y_m)^2\big)$$

dins de U. F està ben definida i és diferenciable per ser suma i composició de funcions diferenciables. Ara, per simplificar la notació, definim dues funcions $\alpha, \beta : U \to [0, \infty)$ com

$$\alpha = (y_1)^2 + \cdots + (y_\lambda)^2 \, , \, \beta = (y_{\lambda+1})^2 + \cdots + (y_m)^2.$$

Llavors $f = c - \alpha + \beta$ i per tot $q \in U$,

$$F(q) = c - \alpha(q) + \beta(q) - \mu\big(\alpha(q) + 2\beta(q)\big)$$

Ara entrem a la recta final de la demostració. Dividirem el que ens queda en quatre passos:

PRIMER PAS: Provem que $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = M^{c+\epsilon}$. Per fer-ho, considerem la regió $\alpha + 2\beta \leq 2\epsilon$. Per la definició de μ, fora d'aquesta regió $F = f$, i a dins tenim

$$F = f - \mu(\alpha + 2\beta) \leq f = c - \alpha + \beta \leq c + \frac{1}{2}\alpha + \beta \leq c + \epsilon.$$

La primera igualtat se segueix de que la regió que hem definit està a dins de U.

SEGON PAS: Provem que els punts crítics de F son els mateixos que els de f. Fora de U està clar, per tant treballem a dins de U. Notem que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -1 - \mu'(\alpha + 2\beta) < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 1 - 2\mu'(\alpha + 2\beta) \geq 1$$

Com que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta$$

i $d\alpha$ i $d\beta$ només s'anul·len alhora a l'origen, F no té cap punt crític a U llevat de l'origen.

TERCER PAS: Provem que la regió $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ es un retracte de deformació de $M^{c+\epsilon}$. Per fer-ho, considerem $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Com que $F \leq f$ i al primer pas hem vist $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon] = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$, tenim que

$$F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon] \subset f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$$

i per tant aquesta regió és compacta (tancada en un compacte). Per la definició de $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$, l'únic punt crític que podria tenir $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ és p, però $F(p) = c-\mu(0) < c-\epsilon$ i per tant $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ no conté punts crítics. El teorema anterior ens dona el retracte de deformació desitjat.

QUART PAS: Provem que $M^{c-\epsilon} \cup e^{\lambda}$ és un retracte de $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$. Recordem que e^{λ} és la cel·la que hem definit al principi de la demostració (que en termes de α i β és $\{q \in U \mid \alpha(q) \leq \epsilon\, ,\, \beta(q) = 0\}$). Per $q \in e^{\lambda}, F(q) \leq F(p) < c-\epsilon$ però $f(q) \geq c-\epsilon$.

Construïm el retracte: definim $R : (F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]) \times [0,1] \to F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ com la identitat fora de U i distingim tres casos a dins de U:

1. Si $\alpha \leq \epsilon$ tenim

   $$R(y_1, \ldots, y_m, t) = (y_1, \ldots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \ldots, ty_m).$$

   $R(q,1)$ és la identitat i $R(q,0)$ envia tota la regió a e^{λ}.

2. Si $\epsilon < \alpha < \beta + \epsilon$ definim $s_t = t + (1-t)\sqrt{\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}}$ i llavors

   $$R(y_1, \ldots, y_m, t) = (y_1, \ldots, y_\lambda, s_t y_{\lambda+1}, \ldots, s_t y_m)$$

   $R(q,1)$ és la identitat i $R(q,0)$ envia tota la regió a $f^{-1}(c-\epsilon) \subset M^{c-\epsilon}$. Falta considerar un detall, i és què passa si $\beta \to 0$. En aquest cas $\alpha \to \epsilon$, i per tant la funció $s_t y_j$ val zero, doncs si $\beta \to 0$ llavors $y_j \to 0$ i

   $$lim_{\beta \to 0\, ,\, \alpha \to \epsilon\, ,\, y_j \to 0} (t + (1-t)\sqrt{\frac{\alpha-\epsilon}{\beta}}) y_j = 0.$$

   Així doncs les funcions s_t no tenen cap problema de continuïtat i tot està ben definit.

3. Si $\beta + \epsilon \leq \alpha$ (és a dir, estem a dins de $M^{c-\epsilon}$) en tenim prou amb que R sigui la identitat.

Així doncs hem vist que $M^{c-\epsilon} \cup e^{\lambda}$ és un retracte de deformació de $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$, que al seu torn és un retracte de $M^{c+\epsilon}$. Hem acabat. □

Observació 4.27. M^c també és un retracte de deformació de $M^{c+\epsilon}$, i, en conseqüència, $M^{c-\epsilon} \cup e^{\lambda}$ és un retracte de deformació de M^c. Això se segueix de la demostració anterior, però requereix una modificació no trivial. No detallem aquest resultat perquè no el necessitarem.

Observació 4.28. El teorema anterior es pot generalitzar; si a $f^{-1}(c)$ hi ha k punts crítics no degenerats amb índexs $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ llavors $M^{c+\epsilon}$ té el mateix tipus d'homotopia que $M^{c-\epsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_k}$. La demostració és molt similar; utilitzant que els punts crítics no degenerats estan aïllats, els podem 'ordenar' i anar adjuntant les cel·les una a una com a la demostració que hem vist.

Arribats a aquest punt, queda només un teorema per a poder descriure amb total precisió el tipus d'homotopia d'una varietat diferenciable. Necessitarem, però, un seguit de resultats sobre homotopia, començant per tres resultats sobre adjunció de cel·les. Als enunciats següents (els dos lemes, la definició i les proposicions) les homotopies no son necessàriament diferenciables.

Proposició 4.29. *(teorema d'aproximació cel·lular). Tota aplicació $f : X \to Y$ entre complexos cel·lulars és homòtopa a una aplicació g tal que $g(X^n) \subset Y^n$, és a dir, una aplicació que envia les cel·les a cel·les de la mateixa dimensió o inferior. Aquestes aplicacions s'anomenen aplicacions cel·lulars.*

Lema 4.30. *Sigui X un espai topològic. Si $\varphi_0, \varphi_1 : \partial e^\lambda \to X$ són aplicacions homòtopes, llavors la identitat de X s'estén a una equivalència homotòpica*

$$I : X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \to X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$$

on $\cup_\varphi$ denota la unió adjuntant la cel·la per la vora.

Lema 4.31. *Sigui $\varphi : \partial e^\lambda \to X$ una aplicació d'adjunció. Qualsevol equivalència homotòpica $f : X \to Y$ s'estén a una equivalència homotòpica*

$$F : X \cup_\varphi e^\lambda \to Y \cup_{f\circ\varphi} e^\lambda.$$

Les proves d'aquests lemes es poden trobar a [1], pàg. 20-23 i la prova de la proposició a [10], pàg. 349-351. Ara, uns resultats sobre dominació topològica:

Definició 4.32. *Diem que un espai topològic K domina a un altre espai X si existeixen aplicacions $a : X \to K$ i $b : K \to X$ tals que $b \circ a$ és homòtopa a la identitat de X. Un espai sempre està dominat per ell mateix.*

Proposició 4.33. *Si dos espais topològics X i Y estan dominats per complexos cel·lulars de dimensions no necessàriament finites i una aplicació $g : X \to Y$ indueix isomorfismes dels grups d'homotopia de dimensió menor que $max(dimX, dimY) \leq \infty$, llavors g és una equivalència homotòpica.*

Proposició 4.34. *Si un espai topològic X és un retracte de deformació d'un entorn de $\mathbb{R}^n$, llavors està dominat per un complex cel·lular.*

Corol·lari 4.35. *Tota varietat diferenciable M està dominada per un complex cel·lular.*

PROVA: Conseqüència immediata de la Proposició 3.14 i la proposició anterior. □

Les proves de les proposicions es poden trobar a [11], pàg. 3 i [17], pàg. 1 respectivament. Ara ja estem preparats per demostrar l'últim teorema:

Teorema 4.36. *Si $f : M \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable en una varietat M sense punts crítics degenerats (una funció de Morse), i cada M^a és compacte, llavors M té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular amb una cel·la de dimensió λ per cada punt crític d'índex λ.*

PROVA: Siguin $c_1 < c_2 < \dots$ els valors crítics de f. Com que cada M^a és compacte (i per tant compacte per successions), la successió c_i no té un punt d'acumulació. Tenim $M^a = \emptyset$ si $a < c_1$. Prenem $a \neq c_i$ per tot i i suposem que M^a té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular X. Sigui c el $c_i > a$ més petit. Pels Teoremes 4.25 i 4.26 i l'Observació

4.28, $M^{c+\epsilon}$ té el tipus d'homotopia de $M^{c-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup_{\varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ per certes aplicacions d'adjunció $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j(c)}$. A més, tenim una equivalència homotòpica $h : M^{c-\epsilon} \to M^a$ i hem assumit que existeix una equivalència homotòpica $h' : M^a \to X$. La composició $h' \circ h \circ \varphi_j : \partial e^{\lambda_j} \to X$ és homòtopa per la Proposició 4.29 a una aplicació cel·lular

$$\psi_j : \partial e^{\lambda_j} \to X^{\lambda_j - 1}.$$

Llavors $X \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ és un complex cel·lular i té el mateix tipus d'homotopia que $M^{c+\epsilon}$, pels Lemes 4.30 i 4.31 que acabem d'enunciar.

Per inducció se segueix que cada M^b té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular. Si M és compacta, ja estem, perquè $M = M^{max(f)}$. Si no ho és, però tots els punts crítics estan a dins d'un compacte M^a, el Teorema 4.25 ens diu que M^a és un retracte de deformació de M, i per tant també hem acabat.

L'últim que falta per considerar és què passa quan f té infinits punts crítics. Si és el cas, la construcció que acabem de veure ens dona una successió infinita d'equivalències homotòpiques

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & K_3 & \subset & \ldots \end{array}$$

Sigui K la unió dels K_i en la topologia compatible més fina possible i sigui $g : M \to K$ l'aplicació colímit, que indueix isomorfismes dels grups d'homotopia en totes les dimensions[1]. Llavors pel fet que K està dominat per ell mateix, pel Corol·lari 4.35 i per la Proposició 4.33 obtenim que $g : M \to K$ és una equivalència homotòpica. Hem acabat.□

De l'Observació 4.11 i el Corol·lari 4.15 obtenim:

Corol·lari 4.37. *En qualsevol varietat diferenciable existeix una funció de Morse per a la qual cada M^a és compacte.*

I per tant:

Corol·lari 4.38. *Tota varietat diferenciable té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular.*

4.4 Exemples

Dedicarem aquesta última secció a veure aplicacions de tot el que hem vist.

Teorema 4.39. *(Reeb): Si M és una varietat compacta i f és una funció de Morse a M amb només dos punts crítics, llavors M és homeomorfa a una esfera.*

PROVA: Els dos punts crítics han de ser mínim i màxim; diem que $f(p) = 0$ és el mínim i $f(q) = 1$ el màxim. Si ϵ és prou petita, $M^\epsilon = f^{-1}[0, \epsilon]$ i $f^{-1}[1-\epsilon, 1]$ son n-cel·les tancades, doncs pel Lema de Morse podem triar coordenades $\{y_1, \ldots, y_n\}$ en un entorn de p tal que $f = 0 + y_1^2 + \cdots + y_n^2$ (mínim) i coordenades $\{z_1, \ldots, z_n\}$ en un entorn de q tals que $f = 1 - z_1^2 + \cdots + z_n^2$ (màxim). Ara, com que entre M^ϵ i $M^{1-\epsilon}$ no hi ha cap altre punt crític, pel Teorema 4.25 són difeomorfs. Llavors M és la unió de dues n-cel·les, $M^{1-\epsilon}$ i $f^{-1}[1-\epsilon, 1]$, adjuntades seguint la vora comú $f^{-1}(1-\epsilon)$, que fa d'equador. Comparant això amb l'Exemple 4.22, és clar que aquesta construcció és homeomorfa a una esfera. □

[1]Consultar [17] pàg. 16 per la definició de colímit i pàg. 67 per veure que indueix els isomorfismes mencionats.

Observació 4.40. No és cert en general que M sigui difeomorfa a $\mathbb{S}^n$ amb l'estructura diferencial habitual. Existeixen varietats que anomenem 'esferes exòtiques' amb estructures diferencials no estàndards que satisfan les condicions d'aquest teorema.

Veiem ara un exemple de càlcul d'homotopia:

Exemple 4.41. Sigui $h_v : T^2 \to \mathbb{R}$ la funció alçada en el torus 2-dimensional encabit en $\mathbb{R}^3$, i triem $v = (0,0,1)$. Per trobar els punts crítics, considerem la funció $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = -(x^2 + (R - \sqrt{y^2+z^2})^2 - r^2)$ i el torus com $g^{-1}(0)$, on $R > r > 0$. Llavors definim $S_a = \{(x,y,a) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ i és clar que els punts crítics de h_v són els mateixos que els de $g|_{S_a}$. Tenim:

$$d_{(x,y)}g|_{S_a} = \begin{pmatrix} -2x & -2y + \frac{2Ry}{\sqrt{y^2+a^2}} \end{pmatrix}.$$

Això és igual a $(0,0)$ si $x = y = 0$ o si $x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$, però la segona opció no pertany al torus (substituint obtenim $r = 0$). Així doncs només cal considerar $x = y = 0$. Substituint-lo a $g = 0$ obtenim $a = R \pm r$.

Ara trobem l'índex dels punts crítics. La Hessiana $dd_{(x,y)}g|_{S_a}$ evaluada a $x = y = 0$ és

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2(-1 + \frac{R}{a}) \end{pmatrix}.$$

Per $a = R+r$ aquesta matriu és definida negativa (màxim), i per tant aquest punt té índex 2. Per $a = R - r$ el punt crític és un punt de sella; el primer menor és negatiu i el segon també, per tant el punt té índex 1. Com que el torus és simètric, podem repetir aquest estudi amb $-g$, obtenint la mateixa Hessiana però en negatiu i els punts $a = -R + r$ i $a = -R - r$. El primer també és un punt de sella i té índex 1, i el segon té Hessiana definida positiva (mínim) i per tant té índex 0.

Anomenem $P = (0,0,-R-r)$, $Q = (0,0,-R+r)$, $Q' = (0,0,R-r)$ i $P' = (0,0,R+r)$. Els punts estan senyalats a la Figura 3.

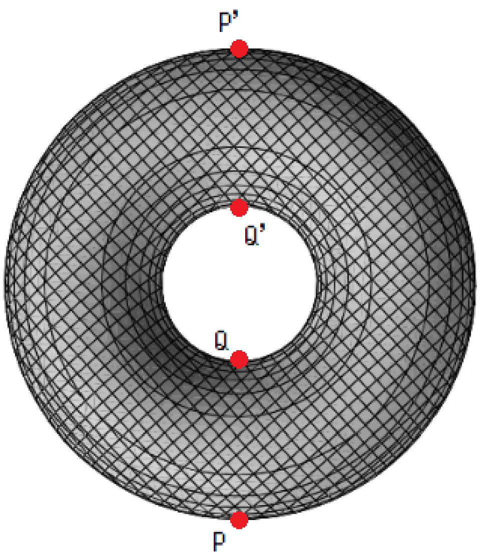

Figura 3: Punts crítics al torus

Tornem a la funció alçada, i sigui $M^a = h_v^{-1}(-\infty, a]$. Llavors, coneixent els índexs dels punts crítics i utilitzant els teoremes que hem vist a la secció anterior, tenim:

1. Si $a < -R - r$, M^a és buit.
2. Si $-R - r \leq a < -R + r$, M^a té el tipus d'homotopia d'un punt, doncs al buit anterior li adjuntem una 0-cel·la, és a dir, un punt.
3. Si $-R + r \leq a < R - r$, M^a té el tipus d'homotopia d'un cercle, doncs al punt anterior li adjuntem una 1-cel·la, i com que només hi ha un punt l'única manera d'adjuntar-la és identificant els dos extrems de la 1-cel·la amb el mateix punt.
4. Si $R - r \leq a < R$, M^a té el tipus d'homotopia de la unió puntual de dos cercles, doncs al cercle anterior li adjuntem una 1-cel·la, que tant si s'adjunta amb els dos extrems en un sol punt com a punts diferents del cercle ens dona espais homeomorfs.
5. Si $R \leq a$, M^a té el tipus d'homotopia del torus sencer. Als dos cercles anteriors hi adjuntem una 2-cel·la identificant-ne la frontera amb un dels dos cercles.

Així doncs, el torus té el tipus d'homotopia de $e^0 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^2$ on les unions respecten les adjuncions comentades.

Per acabar, trobarem el tipus d'homotopia de tot un conjunt particular de varietats complexes, utilitzant la funció distància a un punt:

Teorema 4.42. *Una varietat complexa (analítica) M de dimensió complexa k, encabida bianalíticament com un tancat de $\mathbb{C}^n$, té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular m-dimensional, amb $m \leq k$.*

En aquest enunciat apareixen diversos elements que no hem definit; en parlarem a continuació.

Definició 4.43. *Una varietat complexa (analítica) de dimensió complexa k és una varietat topològica dotada d'un atles, però tal que les cartes defineixen homeomorfismes amb la bola oberta unitària de $\mathbb{C}^k$ i les aplicacions de canvi de carta són holomorfes.*

Observació 4.44. Una varietat complexa k-dimensional també és una varietat diferenciable $2k$-dimensional; es dedueix fàcilment de les definicions. Això ens dona una idea de la magnitud del teorema que volem provar, doncs veurem que certes varietats diferenciables $2k$-dimensionals tenen el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular com a molt k-dimensional.

Definició 4.45. *Diem que una aplicació és bianalítica si és holomorfa i bijectiva. Un encabiment bianalític és, doncs, un encabiment holomorf.*

Ara ja estem preparats per veure la prova del teorema. Utilitzarem alguns resultats d'anàlisi complexa que es donen per coneguts.

PROVA: Considerem una forma quadràtica en k variables complexes,

$$Q(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{j,l} b_{jl} z_j z_l.$$

Diem $z_j = x_j + iy_j$ i llavors prenent la part real de Q obtenim una forma quadràtica real de $2k$ variables:

$$Q'(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) = \Re\Big(\sum_{j,l} b_{jl}(x_j + iy_j)(x_l + iy_l)\Big).$$

Notem que si λ és un valor propi de Q' amb multiplicitat μ, llavors $-\lambda$ també és un valor propi amb la mateixa multiplicitat, doncs $Q(iz_1, \ldots, iz_k) = -Q(z_1, \ldots, z_k)$ i per tant podem transformar Q' en $-Q'$ canviant les y_j per x_j i les x_j per $-y_j$. Aquest canvi de variables no afecta als valors propis.

Ara prenem una varietat M que satisfaci les condicions del teorema, i $q \in M$. Estudiarem els punts focals de (M, q) per tal de poder utilitzar la funció distància. Veurem que els punts focals de (M, q) sobre qualsevol recta r apareixen en parelles situades simètricament respecte a q. En altres paraules, si $q+tv$ és un punt focal, $q-tv$ també, i tenen la mateixa multiplicitat.

Per veure-ho, triem coordenades $z_1, \ldots, z_k$ de M en un entorn de q tals que $z_1(q) = \cdots = z_k(q) = 0$. La inclusió $M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ determina n aplicacions holomorfes $w_1, \ldots, w_n$. Ara triem un vector unitari $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ortogonal a M a q. Considerem el producte hermitià

$$\langle w, v\rangle = \sum_{h=1}^{n} w_h(z_1, \ldots, z_k)\overline{v_h}.$$

Si el desenvolupem com una sèrie complexa de potències obtenim

$$\langle w, v\rangle = constant + Q(z_1, \ldots, z_k) + termes\, de\, grau\, superior$$

on Q és una forma quadràtica amb tots els termes de grau 2. Fixem-nos que el terme lineal desapareix perquè v és ortogonal a M. Ara fem com abans i diem $z_j = x_j + iy_j$ per obtenir un sistema de coordenades real per M, i podem considerar el producte escalar real

$$w \cdot v = \Re(\langle w, v\rangle).$$

Aquest producte el podem desenvolupar com una sèrie real de potències

$$w \cdot v = constant + Q'(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) + termes\, de\, grau\, superior.$$

De la definició de segona forma fonamental veiem que els termes quadràtics Q' denotem la segona forma fonamental de M a q en la direcció v. Hem vist abans que els valors propis de Q' apareixen en parelles, una positiva i l'altra negativa. Llavors els punts focals de (M, q) sobre la recta $r = q + tv$ apareixen en parelles simètriques.

Amb això ja gairebé estem: ara triem un punt $p \in \mathbb{C}^n$ tal que L_p sigui una funció de Morse. Com que M és un tancat de $\mathbb{C}^n$, és clar que cada

$$M^a = L_p^{-1}[0, a]$$

és compacte. Pel Lema 4.12, l'índex de L_p en un punt crític q és igual al nombre de punts focals de (M, q) que pertanyen al segment de q a p. Però hi ha com a molt $2k$ punts focals sobre la recta que passa per q i p, i hem vist que estan situats simètricament respecte a q. Llavors com a molt hi ha k punts focals entre q i p.

Així doncs l'índex de L_p a q és $\leq k$. Immediatament se segueix que M té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular de dimensió $\leq k$. $\square$

Observació 4.46. Donat que no és cert en general que les varietats complexes es puguin encabir en $\mathbb{C}^n$, moltes varietats no satisfan les propietats del teorema. L'espai projectiu complex n-dimensional $\mathbb{CP}^n$, per exemple, té el tipus d'homotopia de $e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$, que és un complex cel·lular $2n$-dimensional. Aquest tipus d'homotopia també es pot trobar utilitzant funcions de Morse.

Com a apunt final; del Teorema 4.42 se'n pot deduir el Teorema de Lefschetz sobre seccions hiperplanes, un resultat important en el camp de la topologia de varietats algebraiques. No en parlarem perquè queda fora de l'abast d'aquest treball, però voliem mencionar-lo per donar un exemple de fins a on poden arribar les aplicacions de tot el que hem vist.

5 Conclusions

En aquest treball hem aconseguit allò que ens havíem proposat inicialment; descriure el tipus d'homotopia de les varietats diferenciables, tot fent el camí complet des del teorema de Sard. També em vist resultats intermedis molt interessants i amb molt recorregut.

Al llarg del treball, i parlant ja en primera persona, he pogut comprovar la passió que desperten en mi certes branques i resultats de les matemàtiques. Com es veu, no m'he pogut estar de mencionar resultats ulteriors als que es provaven, que m'agradaria poder estudiar a fons i desenvolupar amb les meves paraules. El comentari final de la secció 3.3, per exemple, és fruit d'haver descobert que un resultat principal del treball encara és un camp obert de la recerca matemàtica. En aquest sentit, no he entès el treball com un punt i final sinó com una oportunitat de descobrir més resultats i àrees de recerca interessants i motivadores.

En termes d'habilitats, he après a escriure amb relativa fluidesa en LaTeXi he desenvolupat les meves capacitats de comprensió i sintesí de textos matemàtics, especialment en anglès. En particular els dos llibres de J. Milnor (els dos primers de la bibliografia), fonts essencials d'aquest treball, han estat molt interessants i molt fàcils de llegir.

Referències

[1] Milnor, J. (1963). *Morse Theory. (Am-51), Volume 51* (0 ed.). Princeton University Press.

[2] Milnor, J. (1997). *Topology from the Differentiable Viewpoint: 21* (Rev ed.). Princeton University Press.

[3] Barden, D.; Thomas, C. B. (2003). *An Introduction to Differential Manifolds.* Imperial College Press.

[4] Warner, F. W. (1971). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman & Company.

[5] Bredon, G. E. (1993). *Topology and Geometry: 139* (3rd Corrected 2002. Corr. 3rd Printing 1997 ed.). Springer.

[6] Hirsch, M. W. (1976). *Differential Topology: 33* (6th ed.). Springer.

[7] Guillemin, V. W.; Pollack, A. (1974). *Differential Topology.* Prentice Hall.

[8] Sternberg, S. (1964). *Lectures on Differential Geometry.* Prentice Hall.

[9] Navarro, V.; Pascual P. (1999). *Topologia algebraica.* Universitat de Barcelona.

[10] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge University Press.

[11] Whitehead, J.H.C. (2018). *Combinatorial homotopy I.* Bulletin (new Series) of the American Mathematical Society, 55(3), 213-245. `https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09175-9`

[12] Whitney, H. (2012). *Geometric Integration Theory Princeton Mathematical Series, No. 21.* Literary Licensing, LLC.

[13] Currás, C. (2003). *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann.* EUB, Edicions Universitat de Barcelona.

[14] Birkhoff, G.; Lane, S. M. (2008). *A Survey of Modern Algebra.* Taylor & Francis.

[15] Lee, J. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds: 218* (2nd 2013 ed.). Springer.

[16] Milnor, J. (1959). *On Spaces Having the Homotopy Type of a CW-Complex. Transactions of the American Mathematical Society, 90(2)*, 272. `https://doi.org/10.2307/1993204`

[17] May, J.P. *A concise course in algebraic topology* `https://math.uchicago.edu/ may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`