Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El Teorema de Brown-Shields-Zeller

Autor: Ferran Márquez Martínez

Director: Dr. Francesc Xavier Massaneda Clares

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

In this memoir we will prove the extension of the Brown-Shields-Zeller Theorem to H^p, which states that a sequence in the unit disk $\mathbb{D}$ is sampling for the Hardy space H^p if and only if almost every point of the unit circle is a non-tangential limit point of the sequence.

To prove this result we will base our study in the Harmonic analysis, in particular the study of harmonic functions and Poisson kernels and integrals, which will play an important role in the work. Finally, we will finish with a factorization on the Hardy spaces to give way to the proof of Brown-Shields-Zeller.

Resum

En aquest treball demostrarem el Teorema de Brown-Shields-Zeller per H^p que afirma que una successió és de mostreig per l'espai de Hardy H^p en el disc unitat $\mathbb{D}$ si i només si quasi tot punt de la circumferència unitat és el límit no tangencial de la successió.

Per demostrar aquest resultat ens recolzarem en la teoria de l'anàlisi harmònica, en particular en l'estudi de funcions harmòniques i en els nuclis i integrals de Poisson, que prendran un paper important en el treball. Finalment, acabarem amb una factorització sobre els espais de Hardy per donar pas a la demostració del Teorema de Brown-Shields-Zeller.

2020 Mathematics Subject Classification. 42, 30H10, 31A05, 31A20, 31A25, 31A35

Agraïments

Vull agrair al Dr. Xavier Massaneda per la paciència que ha tingut i el suport que m'ha brindat durant tota l'elaboració d'aquest treball.

Índex

Capítol 1

Introducció

Normalment, quan estem estudiant un conjunt amb molts elements ens agradaria agafar una mostra d'aquest conjunt que representés totalment aquest espai a tractar. L'analogia més senzilla seria en una ciutat. Com i quantes han de ser les persones que escullo en una ciutat perquè aquestes la representin totalment?

Considerem l'àlgebra de les funcions holomorfes i acotades al disc unitat $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$:

$$H^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : ||f||_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}.$$

En aquesta memòria estudiem el problema del mostreig a H^∞, que consisteix en trobar una successió $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$ que determini les funcions de H^∞ i controli la norma.

Més precisament diem que Λ és de *mostreig* per H^∞ si existeix una constant $C > 0$, que satisfaci

$$||f||_\infty \leq C \sup_{z_j\in\Lambda} |f(z_j)| \qquad \forall f \in H^\infty.$$

Observem que la desigualtat

$$\sup_{z_j\in\Lambda} |f(z_j)| \leq ||f||_\infty \tag{1.0.1}$$

és immediata.

Aquesta definició de mostreig s'automillora en el següent sentit: com que la propietat de mostreig ha de ser vàlida per tota f, ha de ser vàlida per $f^n \in H^\infty, n \geq 1$:

$$||f||^n_\infty = ||f^n||_\infty \leq C \sup_{z_j\in\Lambda} |f^n(z_j)| = C \left(\sup_{z_j\in\Lambda} |f(z_j)| \right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Elevant a $1/n$ i fent tendir n cap a infinit observem que la condició és de fet equivalent a $||f||_\infty \leq \sup_{z_j\in\Lambda} |f(z_j)|$. Juntament amb la desigualtat (1.0.1), la condició de mostreig és equivalent a

$$||f||_\infty = \sup_{z_j\in\Lambda} |f(z_j)|. \qquad \forall f \in H^\infty.$$

A partir d'aquesta definició, queda clar que perquè una successió sigui de mostreig ha de contenir molts punts, i el que volem és quantificar aquesta idea qualitativa.

El teorema de Brown-Shields-Zeller dona condicions geomètriques que caracteritzen les successions Λ de mostreig a H^∞. Com és natural, aquestes condicions estan relacionades amb el comportament de la successió de la frontera del disc, ja que pel principi del mòdul màxim el creixement d'una funció holomorfa al disc queda determinat pel comportament a prop de $\partial\mathbb{D}$.

A continuació definirem i introduirem notació ben definida per tal de poder enunciar correctament el Teorema de Brown-Shields-Zeller.

És ben sabut que les funcions d'H^∞ tenen límit no-tangencial quasi per tot $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$: sigui la *regió d'aproximació no tangencial a* $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) := \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < 1 + \alpha \right\} \qquad \alpha > 0.$$

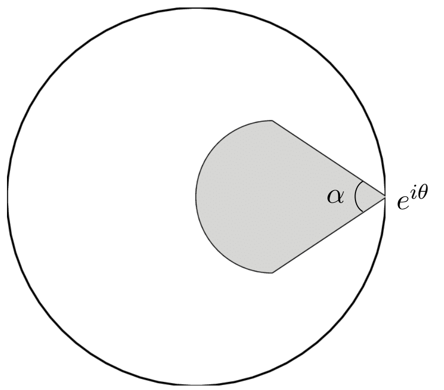


Figura 1.1: Angle de Stolz

Aleshores

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})}} f(z),$$

existeix q.p.t $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.

A més a més, $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ i $||f||_\infty = ||f^*||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})}$. Això implica que perquè Λ sigui de mostreig en H^∞ cal que hi hagi infinits punts de Λ a les regions $\Gamma_\alpha(e^{i\theta})$ q.p.t $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. És per això que definim

$$NT_\alpha(\Lambda) := \left\{ e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \mid e^{i\theta} \in \overline{\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda} \right\}.$$

Per digerir millor aquesta definició cal observar que si un punt $e^{i\theta}$ pertany a $NT_\alpha(\Lambda)$ aleshores aquest punt és límit d'elements de punts z_j que estan tots dins d'una regió no tangencial $\Gamma_\alpha(e^{i\theta})$. En particular veurem que

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \# \left[\Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \right] d\theta < \infty \Leftrightarrow e^{i\theta} \in NT_\alpha(\Lambda).$$

Aleshores definim *el conjunt d'acumulació no tangencial de*Λ com

$$NT(\Lambda) := \bigcup_{\alpha > 0} NT_\alpha(\Lambda).$$

Com que $NT_{\alpha_1}(\Lambda) \subseteq NT_{\alpha_2}(\Lambda)$ si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, aquesta manera de definir el conjunt no tangencial de punts és equivalent a agafar l'α més petit que serveixi per a tots els punts $e^{i\theta}$.

El teorema de Brown-Shields-Zeller fet a[BSZ60] diu

Teorema. *Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$, aleshores Λ és una successió és de mostreig d'H^∞ si i només si $|NT(\Lambda)| = 2\pi$. On $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue a la frontera del disc.*

És a dir, perquè una successió sigui de mostreig en H^∞, haig de tenir suficients punts per tal que m'hi pugui apropar no tangencialment a quasi tot punt de la frontera a partir de punts de Λ.

El teorema de Brown-Shields-Zeller realment només s'encarrega de demostrar que la condició $|NT(\Lambda)| = 2\pi$ és necessària, ja que l'altra part de la demostració surt de la mateixa definició. Si $|NT(\Lambda)| = 2\pi$, tot punt de la frontera serà límit no tangencial per punts de $z_j \in \Lambda$ i, per tant $||f||_\infty = \sup_{e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}} |f^*(e^{i\theta})| = \sup_{e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}} \sup_{z_j\in\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f(z_j)|$.

Tot i que farem la demostració més endavant es pot donar la idea de per què l'altra implicació del teorema, que es realitza per contrarecíproc, també és certa. Si $|NT(\Lambda)| < 2\pi$, existeix un conjunt a la frontera E al qual no puc apropar-me tangencialment amb Λ. Aleshores podem construir una funció (externa) tal que assoleixi el seu màxim a E i sigui petita a la resta de llocs, en particular a Λ i, per tant, no satisfaci la condició de mostreig.

La definició de mostreig es pot estendre als espais de Hardy H^p de funcions $f \in H(\mathbb{D})$ amb

$$||f||_{H^p} := \left(\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} < \infty.$$

Per a funcions d'aquests espais se sap que, donat qualsevol $\alpha > 0$, la funció maximal no tangencial

$$M_\alpha f(e^{i\theta}) := \sup_{z\in\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f(z)|$$

existeix q.p.t $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.

A més, per tot $0 < p < \infty$, i $\alpha > 0$, existeix $C_{p,\alpha} > 0$ tal que

$$||M_\alpha f||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq C_{p,\alpha}||f||_{H^p}. \tag{1.0.2}$$

A partir d'aquesta propietat podem induir la noció de mostreig a H^p, $p < \infty$, per una successió $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$. Sigui la funció maximal no tangencial restringida a Λ

$$M_\Lambda f(e^{i\theta}) = M_\Lambda^\alpha f(e^{i\theta}) := \sup_{z_j\in\Lambda\cap\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f(z_j)|.$$

Diem que Λ és de mostreig per H^p si i només si existeixen $\alpha > 0$ i $C > 0$ tals que

$$||f||_{H^p} \leq C||M_\Lambda^\alpha f||_{L^p(\partial\mathbb{D})}.$$

Amb aquesta definició les successions d'H^p queden caracteritzades per la mateixa condició que al Teorema de Brown- Shields-Zeller, és a dir, per la condició $|NT(\Lambda)| = 2\pi$.

L'estructura de la memòria és la següent. El primer capítol enunciarà i demostrarà un seguit de desigualtats que seran essencials per desenvolupar correctament la teoria en H^p. El Capítol 2 tractarà l'estudi de funcions harmòniques, involucrant així els nuclis i les integrals de Poisson, per donar pas a l'estudi de les integrals de Poisson sobre la frontera i facilitar l'estudi de les funcions H^p a la frontera. El Capítol 3 caracteritzarà els espais de Hardy i les principals propietats d'aquests espais. En particular, es demostra la factorització de les funcions H^p i es justifica l'aparició de la funció exterior que s'utilitzarà a l'últim Capítol, on es veu la prova del Teorema de Brown-Shields-Zeller, tant per H^∞ com per H^p.

Per elaborar tot el mencionat ha calgut consultar una diverses fonts bibliogràfiques. Òbviament, els articles de [BSZ60] i [Tho98] han estat una font d'informació molt important, però, els llibres [Dur70] [Gar07] i [Rud74] han estat crucials pel desenvolupament i tractament dels espais H^p.

Tanmateix, altres fonts com [Dup] i [Ran95] han estat emprades per aprofundir una mica i acabar d'entendre les diverses demostracions a tractar.

Quant a notació, de vegades denotarem per $||f||_p$ la norma de f a $L^p(\mathbb{D})$, $L^p(\partial\mathbb{D})$ i a H^p, aquesta es deduirà pel tipus de funció amb el que estiguem treballant o pel context el qual estiguem treballant, tot i que s'ha intentat especificar en la mesura del possible.

Amb tot això, espero que els temes a tractar no siguin dificultosos pel lector, o mai millor dit, que siguin "Hardy".

Capítol 2

Preliminars

Per poder desenvolupar la teoria i resultats importants dels espais de Hardy, serà important recordar alguns lemes i desigualtats que ens seran de gran utilitat en les demostracions. Clarament, no posarem tots els resultats que utilitzem, però sí que hi seran els més importants.

2.1 Resultats auxiliars

Teorema 2.1.1 (Desigualtat de Jensen). *Sigui* (Ω, Σ, μ) *un espai de probabilitats* $(\mu(\Omega) = 1)$. *Sigui* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funció* $\mu-$*mesurable i sigui* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció convexa. Aleshores*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

Demostració. Que φ sigui convexa en (a, b) vol dir que per $a < s < t < u < b$.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t},$$

és a dir, que el pendent de la recta que va del punt $(s, \varphi(s))$ a $(t, \varphi(t))$ és més petit o igual que el pendent de la recta que va de $(t, \varphi(t))$ a $(u, \varphi(u))$.

Això vol dir que fixat un $t_0 \in (a, b)$ podem trobar un β tal que

$$\sup_{t<t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \leq \beta \leq \inf_{t>t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0},$$

i, per tant, per tot t tenim

$$(t - t_0)\beta \leq \varphi(t) - \varphi(t_0).$$

Ara, declarant $t = f(x)$ i $t_0 = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$ tenim

$$\left(f(x) - \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right)\beta \leq \varphi(f(x)) - \varphi\left(\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right)$$

Integrant tots dos costats i recordant que $\int_\Omega d\mu(x) = 1$ queda

$$\left(\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) - \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right)\beta \leq \int_\Omega \varphi(f(x))\, d\mu(x) - \varphi\left(\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right),$$

que és el mateix que

$$\varphi\left(\int_\Omega f(x)\,d\mu(x)\right) \leq \int_\Omega \varphi(f(x))\,d\mu(x).$$

$\square$

Teorema 2.1.2 (Desigualtat de Hölder). *Sigui* (X, M, μ) *un espai mesurable,* $p_1, \ldots, p_n \in (1, \infty)$ *tals que* $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$ *i* $f_1, \ldots, f_n : X \to [0, \infty]$ *funcions mesurables. Aleshores*

$$\int_X f1 \ldots f_n\,d\mu \leq \left(\int_X f_1^{p_1}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdots \left(\int_X f_n^{p_n}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Demostració. Sigui $f = f_1 \ldots f_n$, sigui $I = \int_X f\,d\mu$ i sigui $I_j = \left(\int_X f_j^{p_j}\,d\mu\right)^{1/pj}$ per $j = 1, \ldots, n$.

Amb aquesta notació el que volem veure és

$$I \leq I_1 \ldots I_n$$

Si $I_j = 0$, aleshores $f_j = 0$ *q.p.t* i, per tant, $f = 0$ *q.p.t.* i $I = 0 = I_1 \ldots I_n$. Així doncs, podem suposar que $I_j > 0$, per a cada j.

Si $I_j = \infty$ llavors $I \leq I_1 \ldots I_n = \infty$. Per tant, a partir d'ara suposarem que $0 < I_j < \infty$, per a cada j.

Aleshores definim $F_j := f_j / I_j$ que és una funció mesurable i no negativa en X que compleix

$$\int_X F_j^{p_j}\,d\mu = \int_X \frac{f_j^{p_j}}{I_j^p}\,d\mu = \frac{\int_X f_j^{p_j}\,d\mu}{\int_X f_j^{p_j}\,d\mu} = 1.$$

Aplicant la desigualtat de Jensen

$$F_1(x) \ldots F_n \leq \frac{1}{p_1} F_1^{p_1} \ldots + \frac{1}{p_n} F_n^{p_n},$$

i integrant respecte de μ obtenim

$$\int_X F_1, \ldots F_n d\mu \leq \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

I com que $F_1 \ldots F_n = \frac{f}{I_1 \ldots I_n}$ aleshores tenim $I \leq I_1 \ldots I_n$, que és el que volíem demostrar.

$\square$

Teorema 2.1.3 (Desigualtat de Minkowski). *Sigui* (X, M, μ) *un espai mesurable,* $1 < p < \infty$ *i* $f, g : X \to [0, \infty]$ *mesurables. Aleshores*

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu > 0, \qquad \int_X f^p\,d\mu < \infty \qquad \text{i} \qquad \int_X g^p\,d\mu < \infty.$$

Vegem primer que $||f+g||_p < \infty$: Per la convexitat de la funció $\varphi(x) = x^p$ per $1 < p < \infty$ i $x \in (0, \infty)$. Aplicant la desigualtat de Jensen

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p),$$

i, per tant,

$$\int_X (f+g)^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_X f^p \, d\mu + \int_X g^p \, d\mu \right)$$

Aleshores ja podem començar a provar la desigualtat.

Com que

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

aleshores

$$\int_X (f+g)^p \, d\mu = \int_X f(f+g)^{p-1} \, d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} \, d\mu.$$

Aplicant la desigualtat de Hölder per p i q conjugats i extraient factor comú

$$\int_X f(f+g)^{p-1} \, d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \left[\left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

És a dir,

$$||f+g||_p^p \leq (||f||_p + ||g||_p)||f+g||_p^{p/q}.$$

Dividint per $||f+g||_p^{p/q}$ i tenint en compte que $p - p/q = p(1-1/q) = p(1/p) = 1$ tenim la desigualtat desitjada.

□

El lema que presentarem a continuació ens serà de gran utilitat i l'utilitzarem contínuament a tots els capítols, ja que ajuda a treure el límit fora de la integral.

Teorema 2.1.4 (Lema de Fatou). *Sigui (Ω, Σ, μ) un espai mesurable, i siguin $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ funcions mesurables per a tot $n \in \mathbb{N}$. Definim $f := \liminf_{n \to \infty} f_n$, aleshores*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \left(\liminf_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demostració. Recordem que, per definició,

$$\liminf_{n \to \infty} f_n := \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right).$$

Això segueix sent una funció mesurable, ja que l'ínfim d'un conjunt de funcions mesurables és mesurable i el limit d'una funció mesurable també és una funció mesurable.

Definim $g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k$, de manera que la definició anterior és

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x).$$

Com que $g_n = \inf_{k \geq n} f_k \leq f_n$. En particular

$$\int_\Omega g_n \leq \int_\Omega f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.1}$$

Per demostrar el Lema de Fatou utilitzarem la definició de la integral de Lebesgue, és a dir, a través de funcions simples. Sigui $SF(f)$ el conjunt de funcions simples $s \in \Omega$ Σ-mesurables tal $0 \leq s \leq f$. Fixada $0 < t < 1$ aleshores per cada enter $n \geq 1$ considerem el conjunt

$$E_n := \bigcap_{k \geq n} \{x \in \Omega \mid t\, s(x) \leq g_k(x)\},$$

que és numerable perquè és la intersecció numerable de conjunts numerables ($\{t\, s - g_k \leq 0\}$). És clar per definició que $E_n \subset E_{n+1}$ ja que $E_n = \{ts \leq g_n\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{x \in \Omega \mid t\, s(x) \leq g_k(x)\} = \{ts \leq g_n\} \cap E_{n+1}$ per a tot $n \geq 1$. Ara comprovarem que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Lema. *Sigui $s \in SF(f)$, aleshores*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{2.1.2}$$

Demostració. Donat un $x \in \Omega$ aleshores o bé $s(x) = 0$, per tant $x \in E_1$, o bé $s(x) > 0$ i aleshores $t\, s(x) < s(x) \leq f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n$. Per tant, existeix un $k \geq 1$ tal que $t\, s(x) < g_k(x)$, per a tot $k \geq n$, i en particular $x \in E_n$.

□

Lema. *Per a tot $s \in SF(f)$,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} s\, d\mu = \int_{\Omega} s\, d\mu. \tag{2.1.3}$$

Demostració. Utilitzant la definició de funció simple

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} s\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in s(\Omega)} \alpha \mu \left(s^{-1}(\alpha) \cap E_n\right) = \sum_{\alpha \in s(\Omega)} \alpha \mu(s^{-1}(\alpha)) = \int_{\Omega} s\, d\mu.$$

On a la segona igualtat hem utilitzat que $s^{-1}(\alpha)$ és la unió de la successió creixent $\left\{s^{-1}(\alpha) \cap E_n\right\}$.

$$\bigcup_{n \geq 1} \left\{s^{-1}(\alpha) \cap E_n\right\} = s^{-1}(\alpha) \cap \bigcup_{n \geq 1} E_n \overset{2.1.2}{=} s^{-1}(\alpha).$$

□

Lema. *Per tot $s \in SF(f)$,*

$$\int_{\Omega} s\, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} g_n\, d\mu. \tag{2.1.4}$$

Demostració. Utilitzant la definició de E_n

$$t \int_{E_n} s\, d\mu = \int_{E_n} ts\, d\mu \leq \int_{E_n} g_n\, d\mu \leq \int_{\Omega} g_n\, d\mu,$$

i fent tendir $n \to \infty$ i aplicant l'equació 2.1.3

$$t \int_{\Omega} s \leq \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} g_n\, d\mu.$$

Finalment fent tendir $t \to 1$

$$\int_\Omega s\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\, d\mu.$$

$\square$

Ajuntant tots els lemes

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup_{s\in SF(f)} \int_\Omega s\, d\mu \overset{2.1.4}{\leq} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\, d\mu \overset{2.1.1}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu$$

Provant així el que volíem veure.

$\square$

Capítol 3

Funcions harmòniques

En aquest capítol caracteritzarem les funcions harmòniques a través de la propietat de la mitjana i demostrarem alguns resultats del comportament d'aquestes funcions a la frontera. En particular per poder veure el comportament d'aquestes funcions a la frontera veurem que les funcions harmòniques són integrals de Poisson, que es comporten molt bé a la frontera del disc i que donen solució al problema de Dirichlet .

3.1 Funcions Harmòniques

Com que podem identificar $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$ mitjançant la igualtat $z = x+iy \in \mathbb{C}$, on $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A l'hora de treballar ho utilitzarem com millor ens convingui segons la situació.

Per facilitar les demostracions considerem els dos operadors:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right] \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

Recordem que, d'acord amb les equacions de Cauchy-Rieman, una funció diferenciable $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és holomorfa si i només si

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0.$$

No només podem caracteritzar les funcions holomorfes amb aquests operadors sinó que també les funcions harmòniques que definirem tot seguit.

Definició 3.1.1 (Funció harmònica). *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$. Una funció $u \in C^2(\Omega)$ es diu que és harmònica a Ω si*

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Utilitzant la notació d'abans $\Delta u = 0$ aquesta equació és

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}} u = 0,$$

ja que, essent

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} u = \frac{1}{2}[u_x + iu_y],$$

i tenim

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \overline{z}}u = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}[u_x + iu_y]\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}u_x + i\frac{\partial}{\partial z}u_y\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u_{xx} - iu_{xy}) + \frac{i}{2}(u_{yx} - iu_{yy})\right] = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Observació 3.1.2. Les funcions holomorfes són harmòniques, ja que com $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (i $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$) aleshores $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) = 0$.

Els exemples típics de funcions harmòniques són les parts reals de funcions holomorfes: si $f \in H(\Omega)$, Ω obert, aleshores $u := Re\, f$ és harmònica a Ω ja que $Ref = \frac{f+\overline{f}}{2}$ i, per tant, $\Delta(Re\, f) = \frac{1}{2}\frac{4\partial^2}{\partial z\,\partial \overline{z}}(f + \overline{f}) = 0 + 0 = 0$.
El recíproc és cert si Ω és simplement connex (és de fet una conseqüència del Lema de Poincaré). Així, si Ω és simplement connex, si $u \in Har(\Omega)$, existeix $f \in H(\Omega)$ tal que $u = Re\, f$. Si Ω no és simplement connex això no és veritat.

La proposició que ve a continuació afirma que un canvi de variables no destrueix l'harmonicitat.

Proposició 3.1.3. *Sigui $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una funció harmònica i sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa. Aleshores $u \circ f$ és una funció harmònica.*

Demostració. Aplicant la regla de la cadena i tenint en compte que, per hipòtesi, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ tenim

$$\Delta(u \circ f)(z) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}u(f(z)) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}[f(z)] \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\right] = 0.$$

□

Definició 3.1.4 (Funció subharmònica). *Diem que una funció $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció subharmònica si té les següents propietats:*

(a) $-\infty < u(z) < \infty$ *per a tot* $z \in \Omega$

(b) u *és semicontínua superior en* Ω*. És a dir, si* $\{x \in \Omega \mid f(x) < \alpha\}$ *és obert per a cada* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Per a tot $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$ *aleshores*

$$u(z_0)\frac{1}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

(d) Per cap $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$ *la integral de (c) és* $-\infty$.

I aquí tenim el seu anàleg per a les funcions subharmòniques.

Lema 3.1.5. *Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ és subharmònica en Ω i $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció monòtona creixent convexa aleshores $(\varphi \circ u)$ és subharmònica*

Demostració. Com que u és subharmònica

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

Com que φ és creixent i continua aleshores

$$\varphi(u(z_0)) \leq \varphi\left(\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, \tfrac{d\theta}{2\pi}\right)$$

I finalment com φ és convexa, aplicant la desigualtat de Jensen

$$\begin{aligned}\varphi(u(z_0)) &\leq \int_0^{2\pi} \varphi(u(z_0 + re^{i\theta}))\, \tfrac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u(z_0 + re^{i\theta}))\, d\theta\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.1.6. *Si Ω és una regió, $f \in H(\Omega)$ i $f \not\equiv 0$ aleshores* $\log|f|$, $\log^+|f|$ *i* $|f|^p$, *per $0 < p < \infty$, són funcions subharmòniques.*

Demostració. Definint $\log|0| = -\infty$ s'aconsegueix que $\log|f|$ sigui una funció subharmònica a tot Ω, ja que, a $\Omega - \{\text{zeros de } f\}$ és harmònica en ser la part real de $\log f$, i als zeros de f, on l'hem definit que sigui menys infinit, subharmònica.

Per veure que $\log^+|f|$ és subharmònica podem considerar la funció $\varphi(x) = \max\{0, x\}$ i utilitzar el lema anterior 3.1.5 sobre $\log|f|$.

Per veure que $|f|^p$ és una funció subharmònica utilitzarem el mateix argument amb la funció $\varphi(x) = e^{px}$ sobre $\log|f|$. Com que la desigualtat també és certa per $f(z) = 0$ aleshores tenim que la funció $|f|^p$ també és una funció subharmònica. $\square$

Les funcions harmòniques tenen moltes propietats, però sens dubte, una de les que més utilitzarem és que aquestes estan caracteritzades per tenir la propietat de la mitjana.

Definició 3.1.7 (Propietat de la mitjana). *Una funció contínua u en un conjunt obert Ω té la propietat de la mitjana si per a tot disc $D(z,r)$ amb $\overline{D(z,r)} \subseteq \Omega$ es té*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

El que ens diu aquesta propietat és que la funció avaluada en un punt és el mateix que fer la mitjana dels punts que estan a la frontera del disc centrat en el punt.

Proposició 3.1.8. *Sigui $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció harmònica, $z_0 \in \Omega$ amb $\overline{D(z_0,r)} \subseteq \Omega$ aleshores*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Demostració. Dir que u sigui una funció harmònica, és equivalent a dir que sigui la part real d'una funció holomorfa $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ on $u(z) = Re\, f(z)$ i $v(z) = Im\, f(z)$. Ja que si $z_0 \in \Omega$, $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Utilitzant el Teorema de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi.$$

Reparametritzant $\xi = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

i agafant la part real

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

$\square$

Aquesta manera de caracteritzar funcions indueix l'aparició de l'anomenat nucli de Poisson

3.2 Nucli i Integrals de Poisson

Una de les tantes possibles maneres d'introduir els nuclis de Poisson a $\mathbb{D}$ és fent un automorfisme a la propietat de la mitjana vista anteriorment.

Sigui $\tau_{z_0}(z)$ la transformació de Moëbius

$$\tau_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

aleshores si tenim una funció dins del disc unitat que satisfà la propietat de la mitjana i canviem els punts amb $\tau_{z_0} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ resulta que el Jacobià d'aquest canvi de variables és l'anomenat nucli de Poisson

$$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

Per veure-ho primer veurem alguna de les propietats de les transformacions de Moëbius.

Proposició 3.2.1. *La transformació de Moëbius*

$$\tau_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

és invariant sobre la frontera del disc. És a dir, $\tau_{z_0}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$

Demostració. Per veure això només cal veure la igualtat

$$1 - |\tau_{z_0}(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \overline{z_0} z|^2}$$

ja que si veiem que $1 - |\tau_{z_0}(z)|^2 = 0$ quan $|z| = 1$ haurem vist que $|\tau_{z_0}(z)| = 1$ quan $|z| = 1$.

Però observem d'aquesta que si $|z| = 1$ el numerador s'anul·la. $\square$

Ara ja podem procedir a fer el canvi de variables.

Sigui

$$\tau_{z_0}(z) := \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z},$$

i sigui $u \in Har(\Omega)$ amb $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$, aleshores satisfà la propietat de la mitjana.

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta$$

Com τ_{z_0} és una funció holomorfa $(u \circ \tau_{z_0})$ és una funció harmònica per la Proposició 3.1.3

$$(u \circ \tau_{z_0})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u \circ \tau_{z_0})(e^{i\theta}) d\theta$$

Per una part $\tau_{z_0}(0) = z_0$. Per l'altra per la Proposició 3.2.1 $|\tau_{z_0}(e^{i\theta})| = 1$, i per tant es pot parametritzar $\tau_{z_0}(e^{i\theta}) = e^{i\psi}$, amb $\psi \in [0, 2\pi]$. Aleshores

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\psi}) |det J_C| d\psi$$

Proposició 3.2.2. *El Jacobià del canvi de la transformació de Moëbius τ_{z_0} és el nucli de Poisson*

Demostració. Sigui

$$\frac{z_0 - e^{i\theta}}{1 - \overline{z_0} e^{i\theta}} = e^{i\psi}$$

Aleshores

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\psi} - z_0}{e^{i\psi}\overline{z_0} - 1}$$

i derivant

$$\begin{aligned} ie^{i\theta} d\theta &= \frac{i\, e^{i\psi}(|z_0|^2 - 1)}{(\overline{z_0} e^{i\psi} - 1)^2} d\psi \\ d\theta &= \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{e^{i\psi}(|z_0|^2 - 1)}{(\overline{z_0} e^{i\psi} - 1)^2} d\psi \\ &= \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\psi} - z_0|^2} d\psi. \end{aligned}$$

□

El que acabem de veure és que si tenim una funció harmònica $u \in Har(\Omega)$, aquesta no només la podem representar amb la propietat de la mitjana, sinó que també la podem escriure amb el nucli de Poisson per qualsevol disc tal que $\overline{D(z, r)} \subseteq \Omega$ ja que la transformació de Moëbius la podem redimensionar per qualsevol radi com $\tau_{rz_0} = \frac{r(z_0 - z)}{r^2 - \overline{z_0} z}$.

Observació 3.2.3. Com $u(z) = 1$ és una funció harmònica i satisfà la propietat de la mitjana, i $P(z, e^{it}) \geq 0$ aleshores $1 = \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) \frac{dt}{2\pi}$. Per tant, $d\mu(t) = P(z, e^{it}) \frac{dt}{2\pi}$ és una mesura de probabilitat a $\partial\mathbb{D}$ i en particular hi podrem aplicar la desigualtat de Jensen (2.1.1).

Cada disc té el seu nucli (que surt del de $\mathbb{D}$ per translació i dilatació) però hem de familiaritzar-nos amb ell i identificar-lo en les formes més habituals.

Definició 3.2.4 (Nucli de Poisson a $\mathbb{D}$). *Sigui $z \in \mathbb{D}$ i $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$. Aleshores el nucli de Poisson és*

$$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}. \tag{3.2.1}$$

Es pot escriure també com

$$P(z, e^{it}) = Re\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right], \tag{3.2.2}$$

o escrivint $z = re^{i\theta}$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ com

$$P_r(\theta - t) = P(re^{i\theta}, e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}. \tag{3.2.3}$$

Fins ara només hem presentat el nucli de Poisson i vist com sorgeix de manera natural quan parlem de funcions harmòniques. Ara veurem alguna de les propietats que satisfà, i que més endavant aplicarem.

Teorema 3.2.5. *El nucli de Poisson té les següents propietats:*

(a) $P_r(t) \geq 0$ *per* $r \in [0,1]$

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}, e^{it})\,dt = 1.$

(c) $P_r(-t) = P_r(t).$

(d) $P_r(t) \leq P_r(\delta)$ *per* $(0 \leq \delta < |t| \leq \pi)$

(e) Per cada $\delta > 0$. Aleshores $\int_{|t-\theta|\geq\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})\,dt \to 0$ quan $r \to 1$.

Demostració. Com que tant el numerador com el denominador de 3.2.1 tenim (a). (b) ho hem vist a l'observació 3.2.3.

Com que $\cos(t) = \cos(-t)$ i el nucli de Poisson es pot escriure com 3.2.2 aleshores tenim (c) i en particular P_r és una funció simètrica. Per veure (d) només és suficient amb observar que la funció $\cos(t)$ és decreixent de 0 a π i que $\cos(t)$ és simètrica.

Només falta veure la propietat (e),

$$\int_{\pi\geq|t-\theta|\geq\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})\,dt = \int_{\delta\leq|t-\theta|\leq\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\,dt \overset{(d)}{\leq} \int_{\delta\leq|t-\theta|\leq\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\delta) + r^2}\,dt$$

Si $(t - \theta) < 0$ aleshores utilitzant (d) podem tornar a situar-nos sobre $\delta \leq t - \theta \leq \pi$. Aleshores serà suficient amb estudiar la funció sobre $\delta \leq t - \theta \leq \pi$.

$$\int_{\delta+\theta}^{\pi+\theta} P_r(\delta)\,dt = (\pi - \delta)P_r(\delta) \xrightarrow{r\to 1^-} (\pi - \delta)\frac{0}{2[1 - \cos(\delta)]} = 0.$$

□

Ara que ja hem definit el nucli de Poisson i vist algunes de les seves propietats podem parlar de la Integral de Poisson.

La manera de representar una funció harmònica amb el nucli de Poisson té el seu propi nom. Aquesta s'anomena integral de Poisson

Definició 3.2.6 (Integral de Poisson). *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, per $z \in \mathbb{D}$ definim l'integral de Poisson de f per*

$$P[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})f(t)\,dt.$$

Definició 3.2.7. *Siguin f i g dues funcions mesurables a (Ω, Σ, μ) aleshores anomenem per $f * g$ a la convolució de f i g i la definim com*

$$(f * g)(\theta) := \int_\Omega f(\theta - t)g(t)\,dt.$$

Observació 3.2.8. La integral de Poisson també la podem veure com la convolució del nucli de Poisson amb la funció f a $\partial\mathbb{D}$.

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}(P_r * f)(\theta).$$

Aixo ho fem notar perquè la convolució és una famosa operació binària a la que se li pot donar interpretació visual.

Observació 3.2.9. A partir d'ara quan parlem de $P[f]$ no només ens estarem a la integral de Poisson al disc, sinó que també ens estarem referint a la integral de Poisson al disc $D(a, R)$ que surt traslladant i dilatant el nucli de Poisson tal com havíem fet amb l'automorfisme després de la Proposició 3.2.2.

Com hem vist a l'equació (3.2.2) podem escriure el nucli de Poisson com la part real d'una funció holomorfa. Per tant, la integral de Poisson $P[f]$ també la podem veure com la part real de la funció holomorfa

$$H[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)\,dt.$$

Això ho veurem amb més detall més endavant, al Teorema 3.3.6. Aquesta observació ens ajudarà a caracteritzar totalment les funcions harmòniques per la propietat de la mitjana.

Teorema 3.2.10. *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ aleshores la integral de Poisson $P[f]$ és una funció harmònica en $\mathbb{D}$*

Ara veurem l'equivalència entre ser harmònica i tenir la propietat de la mitjana.

Teorema 3.2.11. *Sigui $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Són equivalents:*

(1) u és contínua en Ω i satisfà la propietat de la mitjana.

(2) u és harmònica en Ω.

Demostració. (2) $\implies$ (1) ja ho hem vist a la Proposició 3.1.8

(1) $\implies$ (2).

Fixat $\overline{D(a, R)} \subseteq \Omega$. $P[u]$ és una funció contínua en $\overline{D(a, R)}$ harmònica i coincideix amb u a la frontera de $D(a, R)$. Sigui $v = u - P[u]$, i sigui $m := \sup\left\{v(z) \mid z \in \overline{D(a, R)}\right\} = \max\left\{v(z) \mid z \in \overline{D(a, R)}\right\}$. Suposem que $m > 0$ (per arribar a contradicció) i definim per $E := \left\{z \in \overline{D(a, R)} \mid v(z) = m\right\}$. Com que u i $P[u]$ coincideixen a la frontera del disc aleshores $v = 0$ a la frontera del disc i com E és un subconjunt compacte de $D(a,R)$, aleshores existeix $z_0 \in E$ tal que

$$|z_0 - a| \geq |z - a| \qquad \text{per tot } z \in E.$$

Per tot $r > 0$ prou petit, almenys la meitat del cercle amb centre z_0 i radi r està fora de E. Per tant, els corresponents valors sobre la frontera de $D(z_0, r)$ són tots menors que $m = v(z_0)$. Però v té la propietat de la mitjana, ja que totes dues la tenen.

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} v(t)\, dt.$$

La part de l'esquerra és m i la part de la dreta és estrictament menor que m per tant tenim contradicció!

D'aquí $m = 0$, i $v \leq 0$. El mateix raonament s'aplica a $-v$. D'aquí $v = 0$. O més ben dit, $u = P[f]$ en $\overline{D(a,r)}$, i com que $\overline{D(a,r)}$ és un disc tancat escollit arbitràriament en Ω aleshores u és harmònica en Ω.

□

Lema 3.2.12. *Sigui u una funció subharmònica en Ω, sigui K un subconjunt compacte de Ω i sigui U una funció contínua i real en K i harmònica a l'interior B de K tal que*

$$u(z) \leq U(z) \quad a\ B$$

aleshores $u(z) \leq U(z)$ a tot K.

La demostració és semblant a la que acabem de veure

Demostració. Suposarem que $v = u - U$ i $m := \max\left\{v(z) \mid z \in \overline{D(a,R)}\right\}$. Suposem que $m > 0$ (per arribar a contradicció) i definim per $E := \{z \in K \mid v(z) = m\}$. Com que $v \leq 0$ a la frontera del disc, el conjunt E és un subconjunt compacte no buit B. Sigui z_0 un punt de la frontera de E. Aleshores per algun r prou petit $\overline{D(z_0,r)} \subseteq B$. Però hi ha una part de la frontera de $\overline{D(z_0,r)}$ que està fora de E. Aleshores

$$v(z_0) = m > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

i, per tant, v no és subharmònica en B. On trobem la contradicció ja que per hipòtesis tenim que tant u com U són funcions subharmòniques i en particular v també és subharmònica.

□

Teorema 3.2.13. *Sigui u una funció subharmònica en $\mathbb{D}$, i*

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Aleshores $\varphi(r)$ és una funció creixent.

Demostració. Sigui $0 < r_1 < r_2 < 1$. Sigui U una funció contínua en $\overline{D(0,r_2)}$ que coincideix amb u a la frontera de $\overline{D(0,r_2)}$ i harmònica a $D(0,r_2)$. Per la Proposició que acabem de veure $u \leq U$ en $D(0,r_2)$. Per tant,

$$\varphi(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1 e^{i\theta})\, d\theta = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2 e^{i\theta})\, d\theta = \varphi(r_2).$$

□

3.3 Comportament a la frontera de les integrals de Poisson

Ara que ja tenim ben caracteritzades les funcions harmòniques és el moment de veure com es comporten aquestes funcions a la frontera. Això serà de gran importància quan arribem al teorema de factorització de funcions a H^p a la secció 4.3, ja que ens interessarà només el comportament a la frontera de la funció.

Per poder parlar de convergència radial i no tangencial haurem de garantir l'existència d'aquests límits. D'això s'encarrega el següent resultat

Lema 3.3.1. *(a) Tota funció harmònica té límit radial quasi per tot punt*

(b) Per cada funció $f \in H^p$, el límit no tangencial $f(e^{i\theta})$ existeix quasi per tot punt.

Demostració. La demostració d'(a) la podeu trobar al Corol·lari 1 de la pagina 5 de [Dur70], que es recolza en què tota funció harmònica és una Poisson-Stieltjes integral (funcions harmòniques per una mesura de variació acotada), i aleshores com que les integrals de Poisson Stieltjes són diferenciable quasi per tot punt, aleshores el límit radial existeix quasi per tot punt.

La demostració de (b) també es prova a [Dur70], en particular a la pàgina 17, Teorema 2.2, que es demostra la propietat per una classe més gran de funcions, la classe de Nevalina $N \supset H^p$, també coneguda com la classe de les funcions de característica acotada. $\square$

El segon teorema que veurem serà la convergència del límit radial de la integral de Poisson a la frontera per funcions contínues.

Teorema 3.3.2. *Sigui $f \in C(\partial\mathbb{D})$ una funció contínua aleshores*

$$\lim_{r\to 1} \left| P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) \right| = 0 \qquad \text{per a tot } \theta \in [0, 2\pi].$$

Demostració. Com que f és contínua tenim que per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $|t - \theta| < \delta$, $\theta \in \partial\mathbb{D}$ aleshores $|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| < \pi\varepsilon$

Utilitzant que $\int_{\partial\mathbb{D}} P(z, e^{it}) \frac{dt}{2\pi} = 1$ tenim

$$\begin{aligned} |P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| &= \left| \int_{\partial\mathbb{D}} P(re^{i\theta}, e^{it}) f(e^{it}) \tfrac{dt}{2\pi} - f(e^{i\theta}) \right| \\ &= \left| \int_{\partial\mathbb{D}} P(re^{i\theta}, e^{it})(f(e^{it}) - f(e^{i\theta})) \tfrac{dt}{2\pi} \right| \end{aligned}$$

Fixat $\varepsilon > 0$, separem la integral en dos parts: la part que està propera a θ i la que està allunyada.

$$\begin{aligned} |P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \leq & \int_{|t-\theta|<\delta} P(re^{i\theta}, e^{it}) |f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| \tfrac{dt}{2\pi} \\ & + \int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it}) |f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| \tfrac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

Utilitzant que f és contínua en θ, tenim $\delta > 0$ amb $|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|t - \theta| < \delta$. Aleshores

$$|P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2||f||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})} \int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it}) \tfrac{dt}{2\pi}.$$

Com que tenim fixat δ podem escollir r prou a prop d'1 per tal que $\int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it}) \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{\varepsilon}{4||f||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})}}$ (pel Teorema $3.2.5_{(e)}$)

$$|P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

tal com volíem. □

Observació 3.3.3. No només hem vist la convergència puntual sinó que com qualsevol funció continua en un compacte és una funció uniformement contínua aleshores també hem vist que convergeix uniformement.

Proposició 3.3.4. *Sigui $f \in C(\partial\mathbb{D})$. Aleshores*

$$||P[f]||_{L^\infty(\mathbb{D})} = ||P[f]||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})} = ||f||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})}$$

Demostració. Sigui $f \in C(\partial\mathbb{D})$ una funció qualsevol i sigui la seva integral de Poisson

$$P[f](z) = \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) f(t) \, \tfrac{dt}{2\pi}.$$

Acotant per la norma infinit i utilitzant que la integral del nucli de Poisson és 1 (Teorema $3.2.5_{(b)}$)

$$|P[f](z)| \leq \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) ||f||_\infty \tfrac{dt}{2\pi} \leq ||f||_\infty$$

Aleshores

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |P[f](z)| = \sup_{\partial\mathbb{D}} |P[f](z)| \leq ||f||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})}$$

Ara bé com que $P[f](z)$ és holomorfa, pel principi del mòdul màxim tenim que el màxim de $|P[f](z)|$ s'assoleix a la frontera per un $e^{i\theta_1} \in \partial\mathbb{D}$.

$$||P[f]||_{L^\infty(\mathbb{D})} = ||P[f]||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})} |\lim_{r\to 1} P[f](re^{i\theta_1})| = |f(e^{i\theta_1})| = \sup_{e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}} |f(e^{i\theta})| = ||f||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})}$$

i hem aconseguit la igualtat de normes. □

Teorema 3.3.5. *Si $f \in C(\partial\mathbb{D})$ és contínua a la frontera del disc i definim $E[f](z)$ a $\overline{\mathbb{D}}$ com*

$$E[f](z) = \begin{cases} P[f](z) & si\ 0 \leq r < 1, \\ f(e^{i\theta}) & si\ r = 1, \end{cases}$$

aleshores $E[f](z)$ és harmònica i contínua a $\overline{\mathbb{D}}$

Aquest teorema ens dona a través de la integral de Poisson una manera de desenvolupar al disc funcions que sabem com es comporten a la frontera. Aquest teorema dona solució al famós problema de Dirichlet[1]

Demostració. La demostració d'aquest teorema s'ha vist quan s'ha demostrat la continuïtat al Teorema 3.3.2 □

A continuació demostrem la unicitat de la funció.

[1]Donada una funció contínua f a $\partial\mathbb{D}$, trobar una funció harmònica a $\mathbb{D}$ g amb valors frontera f.

Teorema 3.3.6. *Si $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i harmònica en $\mathbb{D}$ aleshores*

(1) per a tot $0 \leq r < 1$ i $\theta \in [0, 2\pi)$

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it}) \tfrac{dt}{2\pi} = P[u|_{\partial\mathbb{D}}](re^{i\theta})$$

(2) u és la part real de la funció holomorfa

$$H[u](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})dt$$

Demostració. (1) ja ho hem vist a la Proposició 3.1.8.

Per demostrar (2) distingirem entre els casos en què la funció és la part real de $H[u]$ i en el que no. En el segon cas arribarem a contradicció.

1. Si $u = Re\, H[u]$, aleshores u és la integral de Poisson pels valors frontera.

2. Si $u \neq Re\, H[u]$ aleshores definim $h = u - Re\, H[u]$. La funció h és contínua en $\overline{\mathbb{D}}$, pel teorema anterior, i h és harmònica en ser la resta de dues funcions harmòniques. A més, sabem que $h = 0$ a $\partial\mathbb{D}$.

   Suposem que $h(z_0) > 0$ per $z_0 \in \mathbb{D}$. Sigui ε tal que $0 < \varepsilon < h(z_0)$ i definim

   $$g(z) = h(z) + \varepsilon\, |z|^2 \qquad z \in \overline{\mathbb{D}} \tag{3.3.1}$$

   Aleshores $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$. Com $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ i $g = \varepsilon$ a $\partial\mathbb{D}$, aleshores existeix un punt $z_1 \in \mathbb{D}$ on g té un màxim local. El que implica que $g_{xx} \leq 0$ i $g_{yy} \leq 0$. Però per la definició de g (3.3.1) $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ i tenim una contradicció.

   Per tant, $u - Re\, H[u] \leq 0$. El mateix argument prova que $Re\, H[u] - u \leq 0$. Per tant, $u = Re\, H[u]$.

□

3.3.1 Comportament a la frontera per L^p

Ara que ja hem acabat amb les funcions contínues el nostre nou objectiu serà veure com es comporten les integrals de Poisson sobre $L^p(\partial\mathbb{D})$ ja que aquest és molt semblant a estudiar els espais de Hardy.

A partir d'ara per evitar complicar la notació, denotarem per $||\cdot||_{L^p(\partial\mathbb{D})}$ no només denotarà la mesura de Lebesgue per la frontera del disc $\mathbb{D}$ sinó que també la de la frontera del disc $D(0, r)$. S'introdueix aquesta notació perquè en capítols posteriors només ens interessarà l'estudi quan $r \to 1$.

Teorema 3.3.7. *Si $1 \leq p \leq \infty, f \in L^p(\partial\mathbb{D})$, aleshores*

$$||P[f](re^{i\theta})||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq ||f(e^{i\theta})||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \qquad (0 \leq r < 1)$$

Si $1 \leq p < \infty$, aleshores

$$\lim_{r\to 1} ||P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})||_{L^p(\partial\mathbb{D})} = 0$$

En particular, el límit radial de la integral de Poisson $P[f](re^{i\theta})$ en $L^p(\mathbb{D})$ és $f(e^{i\theta})$ $q.p.t$ θ.

Demostració. Com ja hem fet notar a l'Observació 3.2.3 podem considerar la mesura de probabilitat $d\mu(t) = P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi}$ de manera que

$$P[f](re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})P(re^{i\theta}, e^{it})\,\tfrac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,d\mu(t)$$

Aplicant la desigualtat de Jensen amb $\varphi(x) = x^p \quad p \in [1, \infty)$ sobre $|P[f]|$ obtenim

$$|P[f](re^{i\theta})|^p \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p\,d\mu(t).$$

És a dir,

$$|P[f](re^{i\theta})|^p \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p P(re^{i\theta}, e^{it})\,\tfrac{dt}{2\pi}.$$

Integrant en θ

$$\int_0^{2\pi} |P[f](re^{i\theta})|^p\,\tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p P(re^{i\theta}, e^{it})\,\tfrac{dt}{2\pi}\right)\tfrac{d\theta}{2\pi},$$

i ara aplicant Fubini

$$\int_0^{2\pi} |P[f](re^{i\theta})|^p\,\tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p\left(\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}, e^{it})\,\tfrac{d\theta}{2\pi}\right)\tfrac{dt}{2\pi}.$$

Finalment utilitzant el Teorema $3.2.5_{(b)}$ juntament amb el principi del mòdul màxim tenim

$$||P[f]||^p_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq ||f||^p_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

que és el que volíem veure.

Veiem ara la segona part del Teorema a demostrar. En el cas de L^∞ vam veure la igualtat a la Proposició 3.3.4.

$$||P[f] - f(e^{i\theta})||_p = ||P[f - f(e^{i\theta})]||_p = \int_0^{2\pi} ||P[f - f(e^{i\theta})]||_p\,d\mu(t) \leq \int_0^{2\pi} ||f - f(e^{i\theta})||_p$$

Com que $||P[f-g]||_p \leq ||f-g||_p$ en particular

$$\int_0^{2\pi} ||\; P[f - f(e^{i\theta})]\; ||_p\,d\mu(t) \leq \int_0^{2\pi} ||f - f(e^{i\theta})||_p\,d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})||f - f(e^{i\theta})||_p\,dt$$

La demostració segueix tant per $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ com per $L^p(\partial\mathbb{D})$ com en el Teorema 3.3.2 separant la integral en la part local i la part allunyada. Així doncs, la part local tendirà quasi per tot punt cap a 0 perquè les funcions en L^p són contínues (s'utilitza la densitat de les funcions contínues a L^p) i per la part allunyada tindrem que el nucli de Poisson tendeix cap a 0 quan r tendeix cap a 1.

$\square$

Capítol 4

Espais de Hardy

En aquest capítol estudiarem, el comportament a la frontera de les funcions que pertanyen a H^p, la classe de funcions holomorfes amb

$$||f||_{H^p} := \left(\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} < \infty.$$

A la primera part del capítol tractarem el comportament a la frontera, en particular estudiarem els límits radials i no tangencials d'aquesta classe de funcions per passar a estudiar el comportament dels zeros. Finalment, demostrarem un teorema que permet factoritzar les funcions per tots els espais de Hardy.

4.1 Valors a la frontera

Fins ara hem vist que

$$\lim_{r\to 1} P[f](re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

Per a $f \in C(\mathbb{D})$ (Teorema 3.3.2), $f \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ (Teorema 3.3.5) i per $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$ (Teorema 3.3.7). El que voldrem veure ara és la convergència en H^p. Per facilitar la notació definirem

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

Que existeix quasi per tot pel teorema (...).

Tinguem en compte també que

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z\in\Gamma_\alpha(e^{i\theta})}} f(z) \qquad \text{quasi per tot}$$

Quan estiguem als espais H^p serà normal trobar-se amb funcions subharmòniques. És per això que demostrarem uns enunciats sobre funcions subharmòniques.

Ara si, comencem a discutir el comportament a la frontera de H^p i l'estructura d'aquest

Teorema 4.1.1. *Sigui $f \in H^p, 0 \leq p \leq \infty$. Aleshores*

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

O dit d'una altra manera

$$||f||^p_{H^p} = ||f^*||^p_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

Demostració. Com que $|f|^p$ és una funció subharmònica, aleshores pel Teorema 3.2.13 $\varphi(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}$ és una funció creixent. Per tant

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Com que $f \in H^p$ aleshores $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ i $|f^*|^p \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Per tant aplicant el teorema de la convergència dominada:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 1^-} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

La igualtat en norma infinit s'aconsegueix pel principi del mòdul màxim. □

Corol·lari 4.1.2. *Sigui $f \in H^p$, $0 \le p \le \infty$ aleshores $f^*(e^{i\theta}) \in L^p(\partial\mathbb{D})$.*

Lema 4.1.3. *Sigui $f \in H^p, z \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)| \le \left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{1/p} ||f||_{H^p}.$$

Aquesta desigualtat demostra que la convergència de $\{f_n\}$ en la norma H^p implica la convergència uniforme sobre compactes i donat K compacte de $\mathbb{D}$ existeix $\overline{D(0,r)}$, amb $r < 1$ tal que $K \subseteq \overline{D(0,r)}$. Llavors $1 - |z| \ge 1 - r$ $\forall z \in K$ i $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\sup_K |f_n(z) - f_m(z)| \le \sup_K \left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{1/p} ||f_n - f_m||_{H^p} \le \left(\frac{2}{1-r}\right)^{1/p} ||f_n - f_m||_{H^p}.$$

En particular, si $\{f_n\}$ és de Cauchy a H^p, aleshores és de Cauchy (i per tant convergent) uniformement a compactes. Això assegura pel teorema de Morera que la funció límit puntual és una funció analítica en $\mathbb{D}$

Demostració. Com que $|f|^p$ és subharmònica, tenim

$$|f(0)|^p \le \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \le \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Aplicant-ho a $f \circ \tau_z$ i fent el mateix canvi de variable $\tau_z(e^{i\theta}) = e^{i\psi}$ fet per a funcions harmòniques tenim

$$|f(z)|^p = |(f\circ\tau_z)(0)|^p \le \int_0^{2\pi} |f^*(\tau_z(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\psi})|^p \frac{1-|z|^2}{|e^{i\psi}-z|^2} \frac{d\psi}{2\pi}$$

Com que $|e^{i\psi} - z| \ge 1 - |z|$, tenim

$$|f(z)|^p \le \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\psi})|^p \frac{(1-|z|)(1+|z|)}{(1-|z|)^2} \frac{d\psi}{2\pi} \le$$

$$\le \frac{1+|z|}{1-|z|} ||f||^p_{H^p} \le \frac{2}{1-|z|} ||f||^p_{H^p}.$$

Per tant $|f(z)| \le \left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{1/p} ||f||_{H^p}$ □

Corol·lari 4.1.4. *Tota successió $\{f_n\}_n$ H^p-Cauchy convergeix puntualment a una funció analítica $f(z)$.*

Teorema 4.1.5. *Per $0 < p \leq \infty$, H^p és un espai mètric complet.*

Demostració. Com ja hem dit abans veure que H^p és un espai mètric és semblant a veure que $L_p(\partial\mathbb{D})$ és un espai mètric ja que pel Principi del Modul màxim el modul d'una funció holomorfa assoleix el seu màxim a la frontera.

Recordem que un espai mètric és una dupla (M, d) on M es un conjunt i d és una mètrica en M.

Una funció $d : M \times M \to \mathbb{R}$ és una mètrica si satisfà

(a) $\forall x \in M$,
$$d(x, x) = 0.$$

(b) Si $x, y \in M$. $x \neq y$,
$$d(x, y) > 0.$$

(c) $\forall x, y \in M$,
$$d(x, y) = d(y, x).$$

(d) La desigualtat triangular se satisfà: $\forall x, y, z \in M$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

En particular veurem que H^p és un espai normat i per tant indueix a un espai mètric amb mètrica $d(f, g) = ||f - g||_{H^p}$. Per tant si veiem que H^p és un espai normat ja estarem.

(a), (b) i (c) són clares per definició de norma.

Com hem vist abans
$$||f||_{H^p}^p = ||\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})||_{L^p(\partial\mathbb{D})}^p$$

Com la desigualtat triangular se satisfà per L^p amb la desigualtat de Minkowski (2.1.3)
$$||f + g||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq ||f||_{L^p(\partial\mathbb{D})} + ||g||_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

I hem vist la igualtat de normes de L^p amb H^p, aleshores la norma d'H^p també satisfà la desigualtat triangular i per tant H^p és un espai normat.

Per veure que l'espai és complet hem de veure que tota successió de Cauchy a H^p té límit a H^p. Per poder demostrar-ho utilitzarem el Corol·lari 4.1.4.

Per tant queda veure que per a $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_0$
$$||f - f_n||_{H^p} < \varepsilon$$

Per definició,
$$||f - f_n||_{H^p}^p = \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} = \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |\lim_{m\to\infty} f_m(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi}.$$

Aplicant el Lema de Fatou (2.1.4)

$$\begin{aligned}||f - f_n||_{H^p}^p &\leq \sup_{r<1} \liminf_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_m(re^{i\theta}) - f_n(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} ||f_m - f_n||_{H^p}^p.\end{aligned}$$

Per hipòtesi, donat $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ es té $||f_m - f_n||_p < \varepsilon$, tal i com volíem. □

4.2 Productes de Blaschke

Els zeros de tota funció de $H^\infty \subseteq H^p \subseteq N$ tenen una condició de creixement restringit: La condició de Blaschke $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |z_j| < \infty$ ($Z(f) = \{z_j\}_j$). Això permet contruir un producte canònic, anomenat producte de Blaschke, que és de H^∞ que té exactament els zeros $\{z_j\}$

Definició 4.2.1 (Producte de Blaschke finit). *Sigui $\{z_j\}$ una successió de punts dins del disc. Definim el producte de Blaschke finit per tot $z \in \mathbb{D}$ com*

$$B_n(z) := z^m \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

La transformació de Moëbius que hem definit abans τ_{z_j} s'anul·la a z_j, i per tant $\prod_{j=1}^{N} \tau_{z_j}$ s'anul·la a $\{z_j\}_{j=1}^{N}$. A més $|\tau_{z_j}(e^{i\theta})| = 1$.

És per aixo que $Z(B_n) = \{z_j\}_{j=1}^{n}$ i com que B_n és holomorfa al ser producte de funcions holomorfes tenim que pel principi del Modul màxim el modul s'assoleix a la frontera que com hem vist abans és 1 i per tant $||B_n||_\infty = 1$

Una eina que ens ajuda a relacionar el creixement de la funció i el comportament dels seus zeros és la formula de Jensen.

Teorema 4.2.2 (Formula de Jensen). *Sigui $f \in H(\mathbb{D})$ una funció holomorfa tal que $f(0) \neq 0$. Sigui $Z(f) = \{z_j\}_j$ el conjunt de zeros de f apareixent tants cops com multiplicitat tenen. Sigui $0 < r < 1$ tal que f no té zeros a la circumferència. Aleshores*

$$\log|f(0)| + \sum_{0<|z_j|<r} \log \frac{r}{|z_j|} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}$$

Demostració. Aquesta demostració la dividirem en dos casos

- $Z(f) = \varnothing$. Aleshores $\log|f(z)|$ és una funció harmònica i per la propietat de la mitjana
$$\log|f(0)| = \int \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi},$$
que és exactament la propietat que volíem demostrar

- $Z(f) \neq \varnothing$. Siguin $z_1, \ldots, z_n$ els zeros de $f(z)$ a $D(0, r)$ on apareixen tants cops com multiplicitat tenen dins del disc.

Aleshores podem considerar el producte de Blaschke amb zeros $Z(f)$ reescalat a $D(0,r)$:

$$B_r(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{r(z_j - z)}{r^2 - \overline{z_j} z} \qquad z \in D(0,r).$$

Aleshores podem definir

$$g(z) := \frac{f(z)}{B_r(z)}$$

Aquesta funció és analítica i no té zeros dins de $D(0,r)$. També, com que el producte de Blaschke té modul 1 a la frontera tenim que $|g(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|$. Aplicant un altre cop la propietat de la mitjana, ara a la funció $\log|g|$, tenim

$$\log|g(0)| = \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}$$

Com que $g(0) = f(0) \prod_{j=1}^{n} \frac{r}{zj}$, tenim

$$\log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{r}{z_j}\right| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}.$$

□

A partir de la formula de Jensen i del següent teorema podrem caracteritzar els zeros de les funcions H^p

Teorema 4.2.3. *Sigui $f(z) \not\equiv 0$ una funció holomorfa i $Z(f) = \{z_j\}_j$ els zeros de f repetits segons multiplicitat. Aleshores, si*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} < \infty$$

aleshores

$$\sum_{|z_j|<r} (1 - |z_j|) < \infty.$$

Demostració. Aplicant la formula de Jensen 4.2.2 tenim

$$\log|f(0)| + \sum \log\frac{r}{|z_j|} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi},$$

és a dir

$$\sum_{|z_j|<r} \log\frac{r}{|z_j|} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)|.$$

Fent tendir $r \to 1^-$ tenim

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\frac{1}{|z_j|} = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)|$$

Com $1 - |t| \leq \log\frac{1}{|t|} \quad$ per $|t| \leq 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1 - |z_j| \leq \lim_{r\to 1} \int \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)|.$$

□

Corol·lari 4.2.4. *Si $f \in H^p$ aleshores*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty.$$

Demostració. Pel teorema anterior si veiem que si $f \in H^p$ aleshores $\lim_{r<1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$ és finit ja haurem acabat

Aplicant la desigualtat de Jensen amb $\varphi(t) = e^{pt}$

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} \leq ||f||_{H^p}$$

□

Alhora també hem vist

Corol·lari 4.2.5. *Si $f \in H^p$, aleshores* $\log|f| \in H^1(\mathbb{D})$

La condició de Blaschke $\sum_{z_j \in \Lambda} 1-|z_j| < \infty$, que apareix a la memòria caracteritzant els zeros de H^∞ es pot expressar com

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \#\left[\Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta})\right] \, d\theta < \infty.$$

En particular implica que $\#\Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta})$ ha de ser finit quasi per tot $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, i, per tant, $|NT_\alpha(\Lambda)| = 0 \quad \forall\alpha$.

Proposició 4.2.6. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}$ una successió de punts a $\mathbb{D}$ aleshores*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \#\left[\Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta})\right] \, d\theta < \infty.$$

Si i només si

$$e^{i\theta} \in NT_\alpha(\Lambda).$$

Demostració. Recordem la definició de $NT(\Lambda)$

$$NT(\Lambda) := \bigcup_{\alpha>0} NT_\alpha(\Lambda),$$

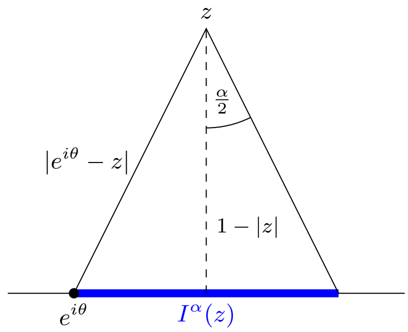
on

$$NT_\alpha(\Lambda) := \left\{e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \mid e^{i\theta} \in \overline{\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda}\right\}.$$

Recordeu que per entendre aquesta definició cal observar que si un punt $e^{i\theta}$ pertany a $NT_\alpha(\Lambda)$ aleshores aquest punt és límit d'elements de punts z_j que estan tots dins d'una regió no tangencial $\Gamma_\alpha(e^{i\theta})$.

Denotarem per $I^\alpha(z)$ a *l'ombra de Privalov* a l'intersecció amb $\partial\mathbb{D}$ del con d'obertura α i vèrtex z, $\Gamma_\alpha(z)$, que té per bisectriu l'eix $\rho e^{i\,Arg(z)}$ amb $\rho \geq |z|$, és a dir, els $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ tals que $z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})$. Observeu amb l'ajuda d'una representació visual al semiplà que $|I_\alpha(z)| = C_\alpha(1-|z|)$. ja que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|I^\alpha(z)|}{2(1-|z|} \Leftrightarrow 1-|z| = \frac{|I^\alpha(z)|}{2\tan(\frac{\alpha}{2})}$$

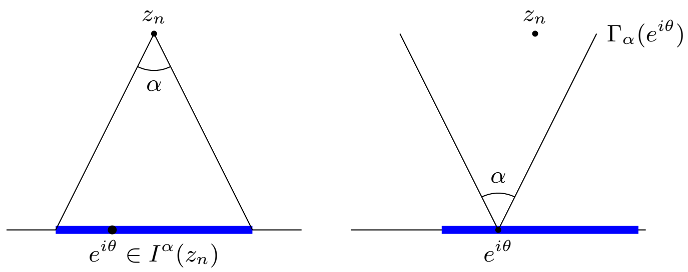


Sigui $d\mu$ la mesura comptadora $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{z_j}(z)$ on δ és al delta de Dirac al punt z_j.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) = \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)\, d\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} \int_{0}^{1-|z|} d\theta\, d\mu(z)$$

Aplicant Fubini i observant que $e^{i\theta} \in I_{\alpha}(z)$ si i només si $z \in \Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) &= C_{\alpha} \int_{\mathbb{D}} \int_{I_{\alpha}(z)} d\theta\, d\mu(z) \\ &= C_{\alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \int_{\Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})} d\mu(z)\, d\theta = C_{\alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \# \left[\Lambda \cap \Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})\right] d\theta\end{aligned}$$



Aleshores tenim

$$\sum (1 - |z_j|) < \infty \Leftrightarrow \int_{\partial\mathbb{D}} \# \left(\Lambda \cap \Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})\right) d\theta < \infty.$$

Observació 4.2.7. En particular, aquesta equivalència implica que $|NT(\Lambda)| = 0$.

Però sabem que,

$$e^{i\theta} \in NT_{\alpha}(\Lambda) \Leftrightarrow \# \left(\Lambda \cap \Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})\right) = \infty$$

.

Sigui $F(e^{i\theta}) := \# \left(\Lambda \cap \Gamma_{\alpha}(e^{i\theta})\right)$

Es a dir, si tenim algun $e^{i\theta} \in NT_{\alpha}(\Lambda)$ vol dir que tenim una successió que tendeix infinitament cap a $e^{i\theta}$ i per tant tenim infinits z_j's. És a dir, tenim $F(e^{i\theta}) = \infty$ si i només si $e^{i\theta} \in NT_{\alpha}(\Lambda)$. $\square$

Realment el que volem veure al teorema és el contrari. Volem veure que

$$\Lambda \text{ és de mostreig a } H^{\infty} \Longleftrightarrow |NT(\Lambda)| = 2\pi$$

4.3 Factorització a H^p

Al llarg d'aquesta secció donarem una primera descomposició de funcions a través del teorema de Riesz. En particular descomposarem f per una part que conté els zeros i per una d'altra que no a través del producte de Blaschke.

Així doncs, haurem de veure que el producte de Blaschke associat a una funció es comporta bé i conté tots els zeros.

Teorema 4.3.1. *Sigui $\{z_j\}$ una successió de punts en $\mathbb{D}$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|) < \infty.$$

Aleshores el producte de Blaschke

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

1. *Convergeix uniformement en cada disc $|z| \leq R < 1$.*
2. *Els zeros de B(z) són exactament els $\{z_j\}$ amb multiplicitat igual al nombre de vegades que apareix en $\{z_j\}$.*
3. *$|B(z)| < 1$ per $|z| < 1$, i $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ q.p.t*

Demostració. Sigui

$$b_j(z) = \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

de manera que

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} b_j(z).$$

Començarem veient la convergència uniforme. Observem que

$$|1 - b_j(z)| = \left| 1 - \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z} \right|$$

$$= \left| \frac{z_j(1-\overline{z_j}z)}{z_j(1-\overline{z_j}z)} - \frac{|z_j|(z_j - z)}{z_j(1-\overline{z_j}z)} \right| = \left| \frac{z_j - |z_j|^2 z - |z_j| z_j + |z_j| z}{z_j(1-\overline{z_j}z)} \right|$$

$$= \left| \frac{-z|z_j|^2 + (-z_j + z)|z_j| + z_j}{z_j(1-\overline{z_j}z)} \right| = \left| \frac{(-z|z_j| - z_j)}{z_j(1-\overline{z_j}z)} (|z_j| - 1) \right|$$

Aplicant les desigualtats triangulars, com que $|z_j| < 1$ i $|z| < R < 1$,

$$|1 - b_j(z)| \leq \frac{|z_j|(1+|z|)}{|z_j||1 - |z_j||z||}(1 - |z_j|) \leq \frac{1+R}{1-R}(1 - |z_j|)$$

Com que $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty$ aleshores

$$|B(z)| = \prod_{j=1}^{\infty} |b_j(z)| = e^{\sum_{j=1}^{\infty} \log|b_j(z)|}$$

Utilitzant que per j prou gran $|b_j(z)|$ és proper a 1, i per tant $\log|b_j(z)| \leq 1 - |b_j(z)|$ (Taylor per $\log t$ a prop de 1)

$$|B(z)| \leq e^{\sum_{j=1}^{\infty} 1-|b_j(z)|} < \infty.$$

Per tant el producte infinit convergeix uniformement en cada disc $|z| \leq R < 1$ i per tant $B(z)$ és una funció analítica en $|z| < 1$. A més cada z_j és un zero de $B(z)$ amb la seva multiplicitat corresponent i no té cap més zero.

Que $|B(z)| < 1$ quan $|z| < 1$ és cert ja que cadascú dels seus productes ho és com vam veure a la Proposició 3.2.1. Per tant $||B||_\infty = 1$ que implica que $B \in H^\infty \subset H^p \subset N$. Per tant $B^*(e^{i\theta})$ existeix i $|B^*(e^{i\theta})| \leq ||B||_\infty = 1$.

L'únic que ens falta per veure és que $|B(e^{i\theta})| = 1$ *q.p.t.* Com que la funció $\varphi(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}$$

substituint a la desigualtat anterior f per B/B_n, i utilitzant que $|B_n(e^{i\theta})| = 1$, aleshores

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |B^*(e^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}. \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero acabem de veure que $B_n(z) \to B(z)$ uniformement en cada disc $|z| \leq R < 1$, aleshores

$$1 \leq \int_0^{2\pi} |B^*(e^{i\theta})| \tfrac{d\theta}{2\pi}.$$

Però també hem vist que $|B^*(e^{i\theta})| \leq 1$ *q.p.t* provant així que $|B(e^{i\theta})| = 1$ *q.p.t.*

□

Com hem vist quan demostràvem la formula de Jensen (4.2.2) i a la demostració del Teorema del producte de Blaschke, existeix una $g(z)$ sense zeros tal que $f(z) = B(z)g(z)$. Aquest és un principi de factorització que és formalitza al següent teorema de Riesz.

Teorema 4.3.2 (F.Riesz (Garnett)). *Sigui* $0 < p < \infty$. *Sigui* $f(z) \in H^p$, $f \not\equiv 0$, *sigui* $\{z_j\}_j$ *els zeros de* $f(z)$, *i* $B(z)$ *el producte de Blaschke amb zeros* $\{z_j\}_j$. *Aleshores*

$$g(z) = \frac{f(z)}{B(z)} \in H^p$$

i

$$||g||_p = ||f||_p$$

Demostració. Suposarem que $f(z)$ té infinits zeros, d'altra manera el teorema es trivial. Sigui

$$B_n(z) = z^m \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

el producte de Blaschke finit, definim

$$g_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}.$$

Com que $|B_n(z)| \to 1$ quan $|z| \to 1$. Per $n \in \mathbb{N}$ fixada i $\varepsilon > 0$, tenim $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$ per $|z|$ prou a prop de 1. Per tant,

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} ||f||_{H^p}^p$$

Fent tendir $\varepsilon \to 0$, tenim que per tot $r < 1$ i tot n

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} \leq ||f||_{H^p}^p$$

I per tant $g_n \in H^p$ amb $||g_n||_{H^p} \leq ||f||_{H^p}$.

Pel teorema anterior (4.3.1) $g_n(z) \to g(z)$ uniformement en cada disc $|z| = R < 1$. Per tant $g \in H^p$ i no té zeros.

Per veure que $||f||_{H^p} \leq ||g_n||_{H^p}$ només fa falta observar que com $|B| \leq 1$

$$|f| = |g\, B| = |g|\, |B| \leq |g|.$$

Aleshores

$$||f||_{H^p} \leq ||g||_{H^p}$$

□

Lema 4.3.3. *Sigui $f \in H(\mathbb{D})$ i*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Aleshores $f \in H^2(\mathbb{D})$ si i nomes si $\sum_1^\infty |a_n|^2 < \infty$.

Demostració. Per la identitat de Parseval aplicada a $f(re^{i\theta})$ per $r < 1$

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

$$\sum_1^\infty = \lim_{r\to 1} \sum_1^\infty |a_n|^2 r^{2n} = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \tfrac{d\theta}{2\pi} = ||f||_{H^2(\mathbb{D})}^2$$

□

Teorema 4.3.4 (Teorema de la convergència mitjana(Garnett)). *Si $f \in H^p$ per $0 < p < \infty$, aleshores*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} \tag{4.3.1}$$

i

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^p \tfrac{d\theta}{2\pi} = 0. \tag{4.3.2}$$

Demostració. (4.3.1) ja ho hem vist al Teorema 4.1.1

Deduirem (4.3.2) directament de (4.3.1) gràcies a aquest lema.

Lema 4.3.5. *Sigui Ω un subconjunt mesurable de la recta real, i sigui $\phi_n \in L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$; $n = 1, 2, \ldots$. Si quan $n \to \infty$, $\phi_n(x) \to \phi(x)$ q.p.t en Ω i*

$$\int_\Omega |\phi_n(x)|^p \, dx \to \int_\Omega |\phi(x)|^p \, dx < \infty$$

Aleshores

$$\int_\Omega |\phi_n(x) - \phi(x)|^p \, dx \to 0$$

Demostració. Sigui $E \subset \Omega$ i definim $E^* = \Omega - E$

$$J_n(E) = \int_E |\phi_n|^p \qquad J(E) = \int_E |\phi|^p$$

Reescrivint la hipòtesis amb aquesta notació tenim

$$J_n(\Omega) \to J(\Omega) < \infty$$

Aleshores

$$J(E) \leq \liminf_{n\to\infty} J_n(E) \leq \limsup_{n\to\infty} J_n(E) = \limsup_{n\to\infty} J_n(\Omega - E^*) \leq \limsup_{n\to\infty} J_n(\Omega) + \limsup_{n\to\infty} J_n(-E^*)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} J_n(\Omega) - \liminf_{n\to\infty} J_n(E^*) \leq J(\Omega) - J(E^*) = J(\Omega - E^*) = J(E)$$

I totes les desigualtats d'enmig son igualtats, i

$$\liminf_{n\to\infty} J_n(E) = \limsup_{n\to\infty} J_n(E) = J(E).$$

Ara donat $\varepsilon > 0$, escollim un conjunt $F \subset \Omega$ tal que $J(F^*) < \varepsilon$. Escollint $\delta > 0$ per tal que $J(Q) < \varepsilon$ per cada conjunt $Q \subseteq F$ amb mesura $m(Q) < \delta$. Aleshores pel Teorema de Egorov podem garantir que existeix un $Q \subset F$ amb $m(Q) < \delta$ on $\phi_n(x) \to \phi$ uniformement en $E = F - Q$. Per tant

$$\int_\Omega |\phi_n - \phi|^p = \int_{F^*} |\phi_n - \phi|^p + \int_Q |\phi_n - \phi|^p + \int_E |\phi_n - \phi|^p$$

Emprant que $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ per $a, b \geq 0$

$$\int_\Omega |\phi_n - \phi|^p \leq 2^p \left(\int_{F^*} |\phi_n|^p + \int_{F^*} |\phi|^p \right) + 2^p \left(\int_Q |\phi_n|^p + \int_Q |\phi|^p \right) + \int_E |\phi_n - \phi|^p$$

$$= 2^p \left[J_n(F^*) + J(F^*) \right] + 2^p \left[J_n(Q) + J(Q) \right] + \int_E |\phi_n - \phi|^p$$

Per n prou gran per a que $J_n(F^*) \to J(F^*)$, $J_n(Q) \to J(Q)$ i $\int_E |\phi_n - \phi|^p < \varepsilon$

$$\int_\Omega |\phi_n - \phi|^p \leq 2^p [\varepsilon + \varepsilon] + 2^p [\varepsilon + \varepsilon] + \varepsilon.$$

□

Corol·lari 4.3.6. *Si $f \in H^p$ per $p > 0$, aleshores*

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, \tfrac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| \, \tfrac{d\theta}{2\pi}.$$

És a dir,

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \left| \log^+ |f(re^{i\theta})| - \log^+ |f^*(e^{i\theta})| \right| \, \tfrac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Demostració. Per $p \geq 1$ $|\log^+ a - \log^- b| \leq |a - b|$. En particular per $1 \leq p < \infty$ $|\log^+ a - \log^- b|^p \leq |a - b|^p$ i per tant ja estariem.

Per $0 < p < 1$ utilitzem el següent lema:

Lema. *Per $a \geq 0$, $b \geq 0$, i $0 < p \leq 1$,*

$$|\log^+ a - \log^+ b| \leq (1/p)|a - b|^p$$

Si veiem

$$\log x \leq (1/p)(x - 1)^p, \qquad x \geq 1\,, p \in (0, 1], \tag{4.3.3}$$

aleshores ja haurem demostrat el lema ja que si suposem sense pèrdua de generalitat que $0 < a < 1$, i $b > 1$, aleshores $\log^+ a = 0$ i $\log^+ b = \log b$ i per tant demostrar el lema seria veure que $logb \leq (1/p)|a - b|^p$. Però aplicant (4.3.3)

$$\log b \leq (1/p)(b - 1)^p \leq (1/p)(b - a)^p = (1/p)|b - a|^p.$$

En el cas que tots dos siguin més grans que 1. Definint $x = a/b$

$$\log x \leq (1/p)(x - 1)^p, \qquad x \geq 1,$$

I aleshores tindrem $|\log x| \leq b^p |\log x| \leq \frac{1}{p}|a - b|^p$.

La desigualtat (4.3.3) es pot demostrar veient que $F(x) := (1/p)(x-1)^p - \log x$ té derivada positiva i que $F(1) = 0$.

Sigui $-\beta = p - 1$, per veure que $F'(x) = \frac{1}{(x-1)^\beta} - \frac{1}{x} > 0$ per $x \geq 1$ i $0 \leq \beta \leq 1$ considarem els casos en que $0 < x - 1 < 1$ i $x \geq 2$.

- Si $1 < x < 2$ aleshores $0 < x - 1 < 1$ i per tant $0 < (x - 1)^\beta < 1$. Aleshores,

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^\beta} - \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} > 0.$$

- Si $x \geq 2$, aleshores $(x - 1)^\beta \leq (x - 1)$ i per tant $\frac{1}{(x-1)^\beta} > \frac{1}{x-1}$. Aleshores,

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^\beta} - \frac{1}{x} > \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)} > 0$$

□

Teorema 4.3.7. *Sigui $f \in H^p$, $p > 0$ aleshores*

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}, e^{it})_r(\theta - t) \log |f^*(e^{it})| \, \tfrac{dt}{2\pi}$$

És a dir,

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq P[\log |f^*|]$$

Demostració. Després de factoritzar $f(z)$, en cas de tenir zeros, amb el teorema de Riesz, podem suposar que $f(z) \neq 0$ en $|z| < 1$. Aleshores aplicant la propietat de la mitjana a la funció harmònica $\log|f(z)|$.

$$\log|f(\rho re^{i\theta})| = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f(\rho e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi} \qquad r < \rho < 1. \tag{4.3.4}$$

Utilitzant el Corol·lari 4.3.6 i que $d\mu(t) = P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi}$ és una mesura de probabilitat.

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^+|f(\rho e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^+|f^*(e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi}. \tag{4.3.5}$$

Per altra banda utilitzant el Lema de Fatou tenim que

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-|f(\rho e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi} \geq \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-|f^*(e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi}. \tag{4.3.6}$$

Com que $\log|z| = \log^+|z| - \log^-|z|$, ajuntant les equacions (4.3.5) i (4.3.6),

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f(\rho e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|\, \tfrac{dt}{2\pi}$$

Per tant fent $\lim\limits_{\rho\to 1}$ a (4.3.4) tenim la desigualtat desitjada. $\square$

4.3.1 Funcions Internes i Externes

Un cop has factoritzat $f \in H^p$ de la forma $f = Bg$, on B producte de Blaschke i $g \in H^p$ sense zeros, encara pots factoritzar g producte de dues funcions de natura diferent: una part que encara és a H^p (funció externa), i que ve representada pels valors frontera de f, $f^*(e^{i\theta})$, i una altra part que és a H^∞ i té norma H^∞ igual a 1 (funció interna).

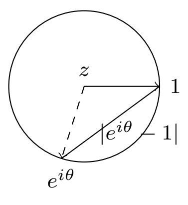
El que farem en aquesta secció serà introduir les definicions i els teoremes pertanyents per aconseguir la descomposició.

Definició 4.3.8. *Una funció $I \in H^\infty$ es diu que és interna si $|I^*(e^{i\theta})| = 1 \quad q.p.t$ en $\partial\mathbb{D}$.*

Exemples:

1. El producte de Blaschke
2. Les funcions
$$S_\mu(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right\}$$
on μ és una mesura singular per la mesura de Lebesgue són internes i sense zeros. En particular, per $\mu(t) = \delta_1(t)$ la funció
$$S(z) = e^{-\frac{1+z}{1-z}}.$$

Vegem que $S(z)$ és una funció interna:
$$S(z) = e^{-\frac{1+z}{1-z}} = e^{\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\delta_1(t)}$$
aleshores
$$|S(z)| = e^{-P(z,1)} = e^{-\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}},$$
i com que $\log|S(z)| = -\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ aleshores observem que si fem tendir z cap a qualsevol punt de la frontera $e^{i\theta}$ excepte l'1. Aleshores $|1-z|^2$ tendeix cap a una constant i $1-|z|^2$ tendeix cap a 0. Per tant, $|I*(e^{i\theta})| = 1$ q.p.t $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.



Definició 4.3.9. *Una funció externa per la classe H^p és una funció de la forma*
$$O_\psi(z) := c\exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\psi(t)\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\} \qquad z \in \mathbb{D}.$$
On $|c| = 1$, $\psi(t) \geq 0$, $\log\psi(t) \in L^1(\partial\mathbb{D})$, i $\psi(t) \in L^p(\partial\mathbb{D})$.

Passem a veure unes propietats importants de les funcions externes

Teorema 4.3.10 (Teo 17.16 Rudin). *Sigui O_f la funció externa associada a f aleshores* *(a)* $\log|O_f|$ *és la integral de Poisson de* $\log f$*.*

(b) $|O_f^*(re^{i\theta})| = \lim_{r\to 1} |O_f(re^{i\theta})| = f^*(e^{i\theta})$ *q.p.t en* $\partial\mathbb{D}$*.*

(c) $O_f \in H^p$ *si i nomes si* $f^* \in L^p(\partial\mathbb{D})$*. Si això ocorre,* $||O_f||_{H^p} = ||f^*||_{L^p(\mathbb{D})}$

Demostració. (a) és clar per definició (vegi 3.2.6).

(b) La condició (a) implica que $\log|O_f| = P[\log|f|]$ i el limit radial de $P[\log|f|]$ és $\log|f^*|$ *q.p.t* a $\partial\mathbb{D}$.

(c) Comencem per la implicació $\Longrightarrow$

Si $O_f \in H^p$ el lema de Fatou 2.1.4 implica que $||O_f^*||_p \le ||O_f||_p$, i per (b), $||f||_p \le ||O_f||_p$

□

Vegem ara $\Longleftarrow$

Recíprocament, si $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$, utilitzant que $|c| = 1$, que $|e^z| = e^{Re(z)}$ i les propietats dels logaritmes tenim que

$$|O_f(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*|^p(e^{it})\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\}$$

aleshores per la desigualtat de Jensen 2.1.1 per $\varphi(t) = e^{pt}$ i mesura $d\mu(t) = P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi}$.

$$\varphi\Big(\log|O_f(re^{i\theta})|\Big) = |O_f(re^{i\theta})|^p \le \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p P_r(\theta - t)\,\tfrac{dt}{2\pi}.$$

Si integrem l'última desigualtat respecte la mesura $\frac{d\theta}{2\pi}$ i aplicant Fubini tenim que $||O_f||_p \le ||f||_p$ per $p < \infty$. El cas $p = \infty$ és trivial.

Al haver demostrat la doble desigualtat hem vist la igualtat entre aquestes dues normes.

□

Vegem ara com la funció externa donada pels valors frontera $f^*(e^{i\theta})$ de $f \in H^p$ factoritza a f. Primerament, estudiarem el comportament d'aquestes funcions, doncs seran el tipus de funcions que ens ajudaran a demostrar el Teorema de Brown-Shields-Zeller

Teorema 4.3.11 (Teo 17.17 Rudin Walter). *Sigui* $0 < p \le \infty$*, i sigui* $f \in H^p$*, i* $f \not\equiv 0$*. Aleshores*

(a) $\log f(e^{i\theta}) \in L^1(\partial\mathbb{D})$*,*

(b) la funció externa de f

$$O_f(z) := \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\log|f^*(e^{it})|\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\}$$

està en H^p *, i existeix una funció interna* I_f *tal que*

$$f = I_f \cdot O_f.$$

(c) A més a més,

$$\log|f(0)| \leq \int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})| \, \tfrac{dt}{2\pi}.$$

On la igualtat ocorre si I_f es una constant.

Observació 4.3.12. Observeu que O_f depèn només dels valors frontera de $|f|$

Demostració. Pel teorema de Riesz 4.3.2 podem factoritzar la funció i trobar una funció $g = f/B \in H^p$ sense zeros i com que $|B^*| = 1 \quad q.p.t$ a $\partial\mathbb{D}$ pel Teorema 4.3.1, aleshores $|f^*| = |g^*| \quad q.p.t$ a $\partial\mathbb{D}$ serà suficient provar la demostració per g en comptes de per f.

Sigui $f \in H^p$ una funció sense zeros i que $f(0) = 1$. Aleshores $\log|f|$ és harmònica a $\mathbb{D}$ i $\log|f| \in H^1$ pel Corol·lari 4.2.5. En particular aplicant el lema de Fatou $\log|f^*| \in L^1(\partial\mathbb{D})$.Això porta a considerar

Aleshores la idea de l'aparició de la funció externa surt de considerar funcions a la frontera de la forma $\log F$, amb F positiva. És a dir, "tirar enrereï construir funcions a $\mathbb{D}$ de manera que només hagi de tenir en compte els valors a la frontera.

Pel Teorema $4.3.10_{(c)}$ $O_f \in H^p$, i $|O_f^*| = |f^*| \neq 0 \quad q.p.t$ ja que $\log|f^*| \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Aleshores si podem provar que

$$|f(z)| \leq |O_f(z)| \quad z \in \mathbb{D} \tag{4.3.7}$$

haurem vist que la funció $I_f := f/O_f$ és una funció interna i haurem aconseguit la factorització.

Com que $\log|O_f| = P[\log|f^*|]$ $(4.3.10_{(a)})$ la desigualtat que volem veure és equivalent a

$$\log|f| \leq P[\log|f^*|]$$

que ja hem vist al Teorema 4.3.7.

Avaluant la desigualtat (4.3.7) per $z = 0$ aconseguim (c). I observem que la igualtat se satisfà si i només si $|f(0)| = |O_f(0)| \quad q.p.t \Leftrightarrow |I_f(0)| = 1 \quad q.p.t$; i com $||I_f||_\infty = 1$ això ocorre només si I_f és una constant.

Com que la funció $S(z) = g(z)/O_f(z)$ és analítica al disc, i té les propietats

$$0 < |S(z)| \leq 1; \quad |S^*(e^{i\theta}) = 1 \; q.p.t \quad S(0) > 0$$

I per tant $-log|S(z)|$ és una funció harmònica positiva tal que $S^*(e^{i\theta}) = 1 \quad q.p.t.$ Per tant pel Teorema 1.2 de Duren i la representació de Herglotz $-log|S(z)|$ pot ser representada com una integral de Poisson- Stieltjes respecte una mesura no decreixent acotada singular $q.p.t.$ Però com que $S(0) > 0$ la completesa analítica conclou que

$$S(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right\}.$$

□

En particular hem vist que $f(z) = B(z) \cdot S(z) \cdot O_f(z)$

Capítol 5

Teorema Brown-Shields-Zeller

Abans de començar la demostració recordem l'enunciat del Teorema de Brown-Shields-Zeller: una successió és de mostreig per H^∞ si i només si $|NT(\Lambda) = 2\pi$..

Recordem també que una successió $\Lambda = \{z_j\} \subseteq \mathbb{D}$ és de mostreig per H^∞ si

$$||f||_\infty = \sup_{z_j \in \Lambda} |f(z_j)| \qquad \forall f \in H^\infty.$$

Per la definició de norma d'H^∞ que una successió Λ sigui de mostreig només ens diu qualitativament que hem de tenir molts punts. El que fa aquesta part del capítol, i en particular el Teorema de Brown-Shields-Zeller, és quantificar això pels espais de Hardy.

Recordem també la notació de la introducció. Tenim la *regió d'aproximació no tangencial a $e^{i\theta}$*

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) := \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < 1 + \alpha \right\} \text{ per } \alpha > 0.$$

I donada Λ considerem

$$NT_\alpha(\Lambda) := \left\{ e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \mid e^{i\theta} \in \overline{\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda} \right\}$$

i *el conjunt d'acumulació no tangencial de* Λ

$$NT(\Lambda) := \bigcup_{\alpha > 0} NT_\alpha(\Lambda).$$

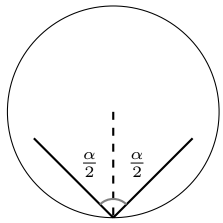
Teorema 5.0.1 (Teorema de Brown-Shields-Zeller). *Si un conjunt Λ és de mostreig per H^∞ aleshores*

$$|NT(\Lambda)| = 2\pi \qquad q.p.t\ e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$$

On $|\cdot|$ és la mesura de Lebesgue a $\partial\mathbb{D}$.

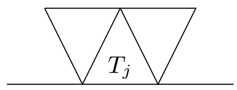
Demostració. Que $|NT(\Lambda) = 2\pi$ és fàcil, i ja ho hem demostrat a la introducció. Queda per veure que aquesta condició és necessària, cosa que es farà per contrarecíproc, és a dir, demostrarem que si $|NT(\Lambda)| \neq 2\pi$ aleshores Λ no és de mostreig.

Si $|NT(\Lambda)| \neq 2\pi$ aleshores existeix un conjunt $E \subseteq \mathbb{D}$ de mesura positiva tal que cap punt d'E pot ser aproximat no tangencialment per punts de Λ. Això implica que qualsevol angle α amb vèrtex a un punt de E només pot contenir una quantitat finita de $z_j's$. En particular això es veritat per un angle recte col·locat de tal manera que el radi al punt bisequi l'angle.



Això implica que per cada punt $p = e^{i\theta} \in E$ podem considerar un triangle rectangle Δ_θ amb l'angle recte al punt p i els altres dos vèrtexs a dins de $\mathbb{D}$, de tal manera que el radi a p sigui un eix de simetria i dins del triangle no hi hagi cap punt de Λ. En particular existeix un $b > 0$ i un subconjunt tancat $E_b \subseteq E$ amb mesura positiva tal que cada punt p d'E_b la alçada del triangle sigui com a mínim b.

Sigui ara un arc tancat $I \subseteq \partial\mathbb{D}$, tal que els seus punts finals estiguin a E_b, amb $|E_b \cap I| > 0$ i $|I| > 0$. Aleshores considerem G, el complementari d'E_b respecte l'arc I ($G := (\partial\mathbb{D} - E_b) \cap I$). Aleshores G és obert i per tant és la unió d'un conjunt d'arcs oberts $\{I_n\}$. (Si $I \subseteq E_1$ aleshores G és el conjunt nul). Agafem un d'aquests arcs, I_j, amb punts extrems $e^{i\alpha}$ i $e^{i\beta}$, i dibuixem els dos triangles rectangles Δ_α i Δ_β. Aleshores podem observar que els costats d'aquests dos triangles es tallen per formar una mena de "triangle" T_j amb un costat a l'arc I_j.



Per tant, si $e^{i\theta}$ és un punt de I_j, aleshores qualsevol z_j prou a prop de $e^{i\theta}$ ha d'estar a T_j.

Sigui χ_G la funció característica del conjunt G, Aleshores considerem la funció

$$O_{\chi_G}(z) := \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\chi_G(t)\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\}.$$

Tal i com hem vist als Teoremes 4.3.11 i 4.3.10, $O_{\chi_G}(z)$ és una funció externa, i per tant

$$|O_{\chi_G}(z)| = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} P(z,e^{it})\chi_G(t)\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\}. \tag{5.0.1}$$

Aleshores $|O_{\chi_G}(z)| \leq 1$ per $|z| < 1$ i

$$|O^*_{\chi_G}(z)| = 1 \qquad \text{q.p.t } e^{i\theta} \in E_b. \tag{5.0.2}$$

Per tant $||O_{\chi_G}||_\infty = 1$. Veurem tot seguit que

$$|O^*_{\chi_G}(z)| \leq e^{-1/2} \qquad \text{per } z \in T_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.0.3}$$

Considerem l'arc I_j, amb punts extrems $e^{i\alpha}$ i $e^{i\beta}$ $\quad (0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi)$. Denotant per

$$O_{I_n}(z) = \exp\left\{\int_{I_n} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\tfrac{dt}{2\pi}\right\}$$

Per (5.0.1) tenim que $|O_{\chi_G}(z)| = \prod_{n=1}|O_{I_n}(z)|$. Per tant demostrar (5.0.3) és suficient veure que

$$\int_{I_j} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}\,\tfrac{dt}{2\pi} \geq \frac{1}{2} \qquad z \in T_j.$$

És ben sabut que aquesta integral té una intuïció geomètrica senzilla. Concretament, s'estén el segment de $e^{i\alpha}$ a z fins que aquest interseca $\partial\mathbb{D}$ en el punt w_1. Anàlogament és fa el mateix per $e^{i\beta}$ fins que aquest interseca $\partial\mathbb{D}$ en w_2. Aleshores la integral és igual a la llargària de l'arc de w_1 a w_2 (en sentit antihorari) dividit entre 2π (vegi l'exercici 3, pagina 40 de [Gar07]). Utilitzant això es veu la integral per $z \in T_j$ és $1/2 + (\beta - \alpha)/2\pi$.

Sigui ara $t = e^{it}$ un punt d'E_b, interior al arc I, tal que la condició (5.0.2) se satisfà (per simplicitat podem suposar sense perdre generalitat que $e^{it} = 1$), aleshores existeix $\varepsilon > 0$ tal que si $Re(z_j) > 1 - \varepsilon$ aleshores z_j està en un dels "triangles" T_j. Per (5.0.3) $|f(z_j)| \leq e^{\frac{-1}{2}}$. Aleshores, considerem $g(z) = O_{\chi_G}(z)e^z$. Aquesta g és a H^∞, ja que és holomorfa i$||g||_\infty = e$. Però

$$\begin{aligned} |g(z_j)| &\leq e^{1/2} \quad \text{si } Re(z_j) > 1 - \varepsilon \\ |g(z_j)| &\leq e^{1-\varepsilon} \quad \text{si } Re(z_j) \leq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Per tant, $\sup\limits_{z_j \in \Lambda} |g(z_j)| < ||g||_\infty$, i Λ en altres paraules, no és de mostreig. □

Observació. La demostració al cas H^p, $p < \infty$ és la mateixa. En aquest cas cal veure que existeixen $\alpha \geq 0$ i $C > 0$ tals que

$$||f||_{H^p} \leq C||M_\Lambda^* f||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \qquad \forall f \in H^p$$

si i només si $|NT(\Lambda)| = 2\pi$ quasi per tot $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.

Que la condició $|NT(\Lambda)| = 2\pi$ és suficient pel mostreig a H^p, $p < \infty$, es veu com al cas H^∞: si $|NT(\Lambda)| = 2\pi$ els límits radials i no tangencials de $f \in H^p$ existeixen quasi per tot punt de la frontera aleshores. Com que

$$M_\Lambda(f) := \sup_{\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda} |f| \geq \lim_{\substack{z \to e^{i\theta} \\ z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda}} |f(z)| =: |f^*(e^{i\theta}),$$

aleshores en particular

$$||M_\Lambda^\alpha(f)||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \geq ||f^*||_p = ||f||_{H^p}.$$

Al igual que es fa al Teorema de Brown Shields Zeller, l'altra implicació també es demostra per contrarecíproc.

Si $|NT(\Lambda)| < 2\pi$ aleshores existeix un $\varepsilon > 0$ i un compacte A (com s'ha fet a la demostració per H^∞ (5.0.1) amb mesura positiva tal que per tot $e^{i\theta} \in A$, no hi ha punts de la successió Λ que s'acostin $e^{i\theta}$ de manera no tangencial, és a dir,

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \Lambda \cap \{|z| \geq 1 - \varepsilon\} = \varnothing.$$

Aleshores podem considerar la funció externa

$$O_{1-\chi_A} := \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} (1 - \chi_A(e^{it})) \tfrac{dt}{2\pi}\right\}$$

Així, pel Teorema 4.3.10, $-\log|O_{1-\chi_A}|$ és la mesura harmònica de $\partial\mathbb{D}|_A$, és a dir, és la solució del problema de Dirichlet amb valors frontera $h(e^{it}) = \chi_{\partial\mathbb{D}-A}(e^{it})$. I aleshores,

$$-\log|O_{1-\chi_A}| = P[1 - \chi_A].$$

I utilitzant l'exercici 3, pagina 40 de [Gar07] es veu que per tot $z \notin \bigcup_{e^{i\theta} \in A} \Gamma_\alpha(e^{i\theta})$ el $-\log|O_{1-\chi_A}| \geq c_\alpha > 0$.

Observació. Aquesta és la mateixa demostració que per H^∞ pero en comptes d'agafar triangles de 90 agafem un angle Γ_α

Considerant $f_n(z) = z^n\, O^n_{1-\chi_A}$, altre cop pel Teorema 4.1.1 sempre que $M^\alpha_\Lambda(f_n)(e^{i\theta}) \leq 1$ tenim

$$||f_n||^p_{H^p} = ||f^*_n||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \geq |A| > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com que la condició és certa per tot n, en particular fent tendir $n \to \infty$ també. Aleshores $M^\alpha_\Lambda(f_n)(e^{i\theta}) = \sup_{z_j \in \Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f_n(z)| = \sup_{z_j \in \Lambda \cap \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |z^n\, O^n_{1-\chi_A}(z)| \to 0$ per tot $e^{i\theta} \in A$ perquè $(1-\varepsilon)^n \to 0$ quan n tendeix cap a infinit i alhora també per $e^{i\theta} \notin A$, perquè $\sup |g_n| = |z|^n |O_{1-\chi_A}|^n$ i $|O_{1-\chi_A}| = e^{-nc_\alpha} \to 0$.

És a dir, $M^\alpha_\Lambda(f_n)$ és gran a prop de $\partial\mathbb{D} - A$ i petita a prop de A (i per tant $|O_{1-\chi_A}|$ és petita a prop de $\partial\mathbb{D} - A$ i gran a prop de A). Com que $|O_{1-\chi_A}|$ és petita a prop de $\partial\mathbb{D} - A$ aleshores també és petita a Λ.

Això entra en contradicció amb l'hipòtesi de mostreig ja que $||f_n||_{H^p} \geq |A| > 0$, mentre que $||M_\Lambda(f_n)||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \to 0$, quan $n \to \infty$

Capítol 6

Conclusions

En aquest pas per l'anàlisi complexa de funcions holomorfes emfatitzem la importància de l'ús dels nuclis i les integrals de Poisson, que han estat tractats al llarg de tota la memòria, com de la factorització realitzada per així garantir l'existència de les funcions frontera que s'utilitzen per demostrar el Teorema de Brown-Shields-Zeller.

En aquesta memòria hem il·lustrat com a partir de l'estudi dels espais H^p deriven a una solució explícita d'un problema de mostreig.

Bibliografia

[BSZ60] Leon Brown, Allen Shields i Karl Zeller. ?On absolutely convergent exponential sums? A: *Transactions of the American Mathematical Society* 96.1 (1960), pàg. 162 - 183.

[Dur70] Peter L Duren. *Theory of H p Spaces*. Academic press, 1970.

[Rud74] Walter Rudin. ?Real and Complex Analysis, McGraw-Hill? A: *Inc.,* (1974).

[Ran95] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*. 28. Cambridge university press, 1995.

[Tho98] Pascal Thomas. ?Sampling sets for Hardy spaces of the disk? A: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126.10 (1998), pàg. 2927 - 2932.

[Gar07] John Garnett. *Bounded analytic functions*. Vol. 236. Springer Science & Business Media, 2007.

[Dup] Taylor Dupuy. ?Hadamard's Theorem and Entire Functions of Finite Order—For Math 331? A: ().