UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EQUILIBRIO Y OPCIONES EN TIEMPO DISCRETO

Autor: Gabriel Montero Abadías

Director: Dr.José Manuel Corcuera Valverde

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de Enero de 2023

.

2020 Mathematics Subject Classification. 91G10, 91G15, 91G20

Abstract

In this final degree thesis, the objective is to present several models for calculating options and financial equilibrium through a discrete-time study.
First, we will study the valuation of classical options in different states and dates, and then we will propose a simulation of the calculation of these options. We will also work on the notion of financial equilibrium in the case of a complete market. Finally, we will propose the study of the calculation of exotic options, in this case of the "barrier" type.

Resumen

En este trabajo de final de grado, el objetivo es presentar diversos modelos de cálculo de opciones y equilibrios financieros mediante un estudio en tiempo discreto.
En un primer momento estudiaremos la valoración de opciones clásicas en diversos estados y fechas para más adelante proponer una simulación sobre el cálculo de estas. También trabajaremos sobre la noción de equilibrios financieros en el caso de un mercado completo. Finalmente propondremos el estudio del cálculo de opciones exóticas, en este caso tipo "barrera".

Agradecimientos

Primero de todo quería agradecer a José Manuel Corcuera Valverde por su dedicación y la preocupación que ha mostrado en cuanto a la realización de este trabajo.

También deseo señalar la gran ayuda de mis amigos médicos de la facultad de Vall d'Hebron y especialmente a Vladi y Moli los cuales me han transmitido las ganas y el esfuerzo del estudio.

Gracias también a Luis por ayudarme con mis dudas en temas económicos.

Por último, quería dirigirme a los dos pilares de mi vida.
Por siempre apoyarme en todo, por creer tanto en mi, por quererme tanto y priorizar mi bienestar frente al vuestro; me gustaría dedicar este trabajo a mi madre, mi mejor amiga y a mi padre, la persona a la cual se lo debo todo.

Contents

1 Introducción **5**

2 Modelo para dos fechas y dos estados **6**

2.1 Conceptos basicos 6
2.2 Valor de una opción y cobertura de una cartera 7
2.2.1 Opciones call 7
2.2.2 Opciones put 8
2.3 Medida neutral al riesgo y paridad Put-Call 9
2.3.1 Medida neutral al riesgo 9
2.3.2 Paridad Put-Call 9
2.4 Arbitraje 10
2.5 Riesgo asociado a una opción 10
2.5.1 Riesgo asociado al subyacente 10
2.5.2 Riesgo asociado a la opción 10

3 Modelo con multiples activos y diversos estados posibles **12**

3.1 Arbitraje 12
3.2 Mercados completos 13
3.2.1 Características y definición 13
3.2.2 Interpretación económica 14
3.2.3 Medida de probabilidad neutral al riesgo 14
3.3 Valoración por arbitraje en mercados completos 14

4 Consumo óptimo y elección de cartera **16**

4.1 El problema de maximización 17
4.1.1 Existencia de un consumo óptimo 17
4.1.2 Fórmula de valoración de activos 18
4.1.3 Caso del mercado completo 19
4.1.4 Caso de mercados incompletos 19
4.2 Modelos de equilibrio en mercados financieros completos 20
4.2.1 El agente representativo 20
4.2.2 Modelo de valoración de activos 22
4.2.3 Una fórmula aproximada para CAPM 23

5 Equilibrio de los mercados financieros en tiempo discreto **24**

5.1 Equilibrio en una economía de intercambio estatica 25

5.2 El enfoque de la demanda 26

5.4 El método Negishi 27

5.5 La teoría de los mercados contingentes 28

5.6 El equilibrio de Arrow-Radner en una economía de intercambio con mercados financieros en dos fechas 29

5.7 Caso de mercados completos 31

5.7.1 El caso de la economía del bien único 32

6 Arbol binomial y simulación **33**

7 Introducción a las opciones de barrera en un mercado completo **36**

7.1 Opciones exóticas 36

7.2 Modelo en tiempo discreto 37

7.3 Fórmula para el cálculo de opciones barrera Europeas 39

8 Conclusión **41**

9 Referencias **42**

1 Introducción

En la práctica financiera moderna, los precios de los activos se modelizan mediante procesos estocásticos. En este trabajo, buscaremos el valor de opciones financieras y indagaremos sobre la noción de equilibrio de mercado. En primer lugar, estudiaremos varios modelos con un activo, un número finito de estados y fechas para más adelante adentrarnos en un modelo con múltiples activos y diversos estados posibles. Posteriormente nos interesaremos por la noción de elección de una cartera y consumo optimo para así introducir ciertas nociones sobre equilibrios de mercado. Es con estas nociones financieras que atacaremos el estudio de los equilibrios de mercado en tiempo discreto. Volviendo al estudio de los derivados, propondremos un caso práctico de cálculo del precio de una opción mediante una simulación del árbol binomial. Finalmente y para profundizar sobre la valoración de opciones, daremos una breve introducción al cálculo de opciones barrera mediante inducción hacia atrás. He dedicado un capitulo entero a las opciones exoticas ya que estas representan un mercado cada vez más grande y son la continuación lógica del cálculo sobre opciones clásicas sean europeas o americanas.
Es numerosa la literatura existente sobre este tema pero resaltaremos: Financial markets in continuous time-Springer de Rose-Anne Dana, Monique Jeanblanc y A. Kennedy [1] , Option Pricing: A Simplified Approach [2] de John. C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein, Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time [3] de Hans Föllmer y Alexander Schied y el paper: A discrete time approach for european and american barrier [4] de Matthias Reimer y Klaus Sandmann.
Los objetivos de este trabajo son dar una guía sobre el cálculo de opciones financieras así como de equilibrios de mercados únicamente en tiempo discreto.
Personalmente, este tema me interesa particularmente ya que estoy orientando mi futuro laboral al sector del riesgo financiero y este trabajo me ha permitido estudiar en profundidad las bases matemáticas que imperan detrás de los modelos que utilizan las compaginas aseguradoras o los bancos.

2 Modelo para dos fechas y dos estados

Historia : Es muy complicado determinar la aparición de la primera opción ya que se trata únicamente de un contrato entre dos partes que les compromete en un futuro. Con esta visión, podemos evidenciar la existencia de opciones en el siglo VI a.C. En la antigua Grecia, esperando un extraordinario aumento de la demanda de aceite en una época de bonanza, Tales de Mileto puso gran parte de su riqueza en garantía para el arriendo de la integralidad de las maquinas de prensa de aceite de Quios[2]. Cuando la predicción del sabio se cumplió, Tales pudo subarrendar las maquinas al precio que el mismo decidiera.
No es hasta el siglo XVI, cuando Thomas Greham (comerciante íngles) decidió invertir una parte de su riqueza en construir la Royal Exchange de Londres que se creó el primer mercado propicio para los derivados y entre ellos las opciones.
En 1973 tuvieron lugar dos hechos que cambiaron el mercado de los derivados financieros y lo propulsaron. Primero la creación del Chicago Board Options Exchange (CBOE), actualmente el mercado de opciones más grande en Estados Unidos. El segundo hecho que cambió la industria de derivados fue la publicación por parte de Fischer Black y Myron Scholes de su modelo de valoración de opciones conocido como Black-Scholes Option Pricing Model[3] .

2.1 Conceptos basicos

En este capítulo estudiaremos un mercado financiero compuesto por una acción y un bien libre de riesgo como podria ser una cuenta de ahorro.
En el momento 0, es decir hoy, el precio de la acción es de S euros. En el momento 1 (futuro), el valor de esta misma acción será S_u en el caso de que el precio aumente y S_d en el caso de que baje con $S_d < S_u$. Evidentemete, no conocemos el valor que tomará el activo. Diremos que la acción valdrá S_d o S_u dependiendo del estado mundial.
En cuanto a nuestro bien libre de riesgo, sabemos que este se verá multiplicado por (1+r) sea cual sea el estado mundial.
Introduzcamos el concepto opción call o opción de compra: el comprador de la opción paga q (prima) al vendedor en el momento 0 a cambio de tener el derecho de adquirir una acción en el momento 1 a un precio K (precio de ejercicio o strike) acordado en el momento de la firma del contrato. En el momento 1, el comprador de la opción, conoce el precio del subyacente sea S_u o S_d. Si el valor de la acción es superior a K, entonces el comprador comprará y venderá inmediatamente esta acción consiguiendo un beneficio.
Una opción put u opción de venta, da el derecho a vender una acción a un precio K, acordado en el momento de la firma.(Explicaremos su funciónamiento más adelante)
La valoración de una opción consiste en determinar el precio q de la opción en

[2]Ciudad principal de la isla griega de Quios, en el Mar Egeo

[3]Ecuación usada en matemática financiera para determinar el precio de determinados activos financieros,desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes, aparece referenciado en 1973, cuando Robert C. Merton lo incluyó en su publicación "Theory of Rational Option Pricing".

una situación normal de los mercados financieros. Es importante resaltar que el beneficio asociado a una opción de compra es ilimitado mientras que las pérdidas estan limitadas por q. En cambio, el beneficio de una opción put esta limitado por el precio del subyacente mientras que las pérdidas son ilimitadas.

2.2 Valor de una opción y cobertura de una cartera

2.2.1 Opciones call

Veamos primero tres posibles casos:
1) $K \leq S_d \leq S_u$
2) $S_d \leq S_u \leq K$
3) $S_d \leq K \leq S_u$
En el primer caso, el tenedor del derivado tendrá unos beneficios asegurados de al menos $S_d - K$ y el vendedor de la accíon se enfrentará a pérdidas. En el segundo caso, nos enfrentamos al caso contrario en el que el vendedor obtiene ganancias y el comprador de la acción tendrá pérdidas aseguradas. Viendo que ninguno de estos dos casos es una situación realista, nos centraremos a partir de ahora en el tercer caso: $S_d \leq K \leq S_u$.
Veamos en un primer momento como construir una cartera con el mismo rendimiento que la acción en el momento 1. Recordemos que una cartera está compuesta por el par (α, β) donde la cantidad invertida libre de riesgo es α y β es la cantidad de acciones que posees el inversor. El valor de la cartera en el momento 0 es entonces $\alpha + \beta S$. En el momento 1, la cartera valdrá: $\alpha(1+r) + \beta S_u$ en el caso en el que el precio de la acción aumente (primer estado mundial) o $\alpha(1+r) + \beta S_d$ en el caso que el valor de acción baje (Segundo estado mundial).
Para que una cartera replique una opcción, necesitamos que ésta tenga los mismos resultados monetarios en el momento 1 independientemente del estado mundial. Si fórmulamos esta definición tendríamos:

$$\alpha(1+r) + \beta S_u = S_u - K$$

$$\alpha(1+r) + \beta S_d = 0$$

Si solventamos el sistema obtenemos la pareja α^*, β^* tal que:

$$\alpha^* = -\frac{S_d(S_u - K)}{(S_u - S_d)(1+r)}; \ \beta^* = \frac{S_u - K}{S_u - S_d}$$

Es asi que obtenemos el precio de la opción en el momento 0: El valor de la acción será el valor de la cartera (α^*, β^*) es decir:

$$q = (\alpha^* + \beta^* S) \tag{1}$$

En el caso de de tener una opción a este precio, hablariamos de un ”precio justo”. Con la cantidad q, el vendedor puede adquirir una cartera (α^*, β^*) que generará $S_u - K$ ganancias en el primer estado y cubrirá sus pérdidas si el precio de la acción baja. En el caso del comprador, éste no estará dispuesto a pagar más que q por esta opción ya que podría utilizar ese dinero para comprar una cartera que le dará más beneficios que la opción en juego. En el caso en el que no asumimos ninguno de los tres casos presentados al inicio de esta sección, podemos también obtener una fórmula para q:

Sea $C_u = \max\ (0, S_u - K$ y $C_d = \max\ (0, S_d - K$

Veamos que: $C_u = \alpha^*(1 + r) + \beta^* S_u$ y $C_d = \alpha^*(1 + r) + \beta^* S_d$

Aislando β^* obtenemos:

$$\beta^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

Tenemos entonces:

$$q = \frac{1}{1 + r}(\pi C_u + (1 - \pi)C_d) \tag{2}$$

con:

$$\pi = \frac{1}{S_u - S_d}((1 + r)S - S_d) \tag{3}$$

2.2.2 Opciones put

Siendo el call una opción un tipo de opción, también tenemos las opciones put. Primero demos un rápido repaso a lo que es una posición corta, short o ponerse en corto. Una posición corta significa vender un activo sin haberlo comprado antes, con la idea de que el precio bajará y que lo podremos comprar en un futuro a un nivel más bajo.
Veamos un ejemplo fuera del mundo financiero para ilustrar este concepto y como podemos obtener beneficios con posiciones cortas. Imaginemos que somos alumnos de un colegio en el que las pruebas se hacen en hojas dobles y sabemos que el martes hay un examen. Podemos predecir que el martes las hojas dobles estarán muy demandadas y podrán llegarse a vender mucho más caras que al día siguiente. Como nosotros no disponemos de estas hojas, pedimos a una tercera persona que nos preste 20 hojas prometiéndole devolvérselas el miércoles. Entonces llegado el día del examen vendemos las hojas por un precio de 1euro por unidad (por ejemplo), luego vamos a una tienda, adquirimos por 0,50 euros 20 hojas idénticas a las que nos prestaron y se las entregamos a nuestro prestador. Es así como podemos obtener 20-10=10 euros vendiendo hojas que no tenemos. Es importante remarcar que en el espacio temporal en el que hemos pedido prestado el activo y no lo hemos devuelto, tenemos una cantidad de activos negativa.

De igual manera, que hemos calculado el precio de las opciones call podemos obtener P: precio de una acción put.

$$P = \frac{1}{1+r}(\pi P_u + (1-\pi)P_d)$$

donde P_u =max(0,$K - S_u$); P_d= max(0,$K - S_d$) y:

2.3 Medida neutral al riesgo y paridad Put-Call

2.3.1 Medida neutral al riesgo

Si suponemos $S_d < (1+r)S < S_u$, entonces $0 < \pi < 1$, obtenemos:

$$(1+r)S = \pi S_u + (1-\pi)S_d \tag{4}$$

(1+r)S son las ganancias obtenidas poniendo S euros en una inversión libre de riesgo. πS_u+$(1-\pi)S_d$ es la ganancia esperada al comprar una acción a un precio determinado si la probabilidad de que la acción llegue al estado S_d es de π.
La ecuación (4) se entiende como una situación neutral frente al riesgo, es decir: el inversor es indiferente frente a la elección entre las dos posibilidades de inversión ya que éstas tienen los mismos beneficios esperados. Para ilustrar este caso, podríamos imaginar que π es la probabilidad asociada a la situación mundial y bajo la cual el inversor es neutral frente al riesgo.

Proposición 2.3.1. *El precio de una opción es el valor descontado de la ganancia esperada con respecto a la medida de probabilidad neutral al riesgo.*

Demostración En el caso de una opción de compra, las ganancias son iguales a C_u o a C_d. Como el valor de 1 euro en el momento 1 es $\frac{1}{1+r}$ euros en el momento 0. Por lo tanto las ganancias realizadas serán: $C_u\frac{1}{1+r}$ y $C_d\frac{1}{1+r}$ □
Visto de otra manera, si S_1 es el precio de la acción en el momento 1 y P es la medida de probabilidad neutral al riesgo tal que P$(S_1 = S_u)$=π, $P(S_1 = S_d) = 1-\pi$. Entonces el precio de una opción de compra es la expectativa bajo la medida de probabilidad $(S_1 - K)^+/(1+r)$.

2.3.2 Paridad Put-Call

Visto que tenemos $(S_1-K)^+-(K-S_1)^+ = S_1-K$ entonces con los valores presentes, las expectativas bajo una medida neutral al riesgo y observando que $S_1/(1+r) = S$ obtenemos:

$$C = P + S - K/(1+r) \tag{5}$$

Con C el precio de un call y P el precio de un put

2.4 Arbitraje

Una oportunidad de arbitraje ocurre cuando con un capital inicial estrictamente negativo en el momento 0, un agente puede obtener una cantidad positiva de riqueza en el momento 1. De forma alternativa, también se puede definir una oportunidad de arbitraje cuando un agente con una riqueza inicial nula puede obtener un capital estrictamente positivo. Está claro que tal situación no podría darse en ningún mercado financiero ya que, de ser así, cualquiera podría sin capital inicial, obtener ganancias sin miedo a sufir pérdidas. La teoría asociada a los precios de los derivados se basa en el hecho de que no existen oportunidades de arbitraje.

Teorema 2.4.1 (NAO[4])**.** *No existen oportunidades de arbitraje si y sólo si* $S_d < (1+r)S < S_u$

Demostración : Ver apartado 7.1.2 de [9].

2.5 Riesgo asociado a una opción

Supondremos ahora que los agentes piensan que el precio del activo (acción) subirá con una probabilidad p. Es decir que p es la probabilidad de encontarse en el estado mundial u en el momento 1.

2.5.1 Riesgo asociado al subyacente

El ratio de ganancias de una acción es por definición $R = \frac{S_1 - S}{S}$. La expectativa de estas ganancias es:

$$m_s = \frac{pS_u + (1-p)S_d}{S} - 1$$

El riesgo de una acción se asocia a un cálculo mediante la variancia del ratio de ganancias llamado volatilidad.

Definición 2.5.1. *Decimos que* v_S *es la volatilidad de un activo tal que:*

$$v_S^2 = \frac{S_u - S_d}{S}(p(1-p))^{1/2}$$

2.5.2 Riesgo asociado a la opción

Sea C un call de una acción. Llamamos Δ de la opción al número de acciones del subyacente que necesitamos para replicar la opción (veamos que $\Delta = \beta$), $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. Decimos que Δ representa la sensibilidad de C al precio S del activo subyacente.
Sea Ω la elasticidad de la opción tal que $\Omega = \frac{S}{C}\Delta$ con C el precio de la opción.

[4]Por sus siglas en íngles: No Arbitrage Opotunity

De manera similar al caso del riesgo de una acción: Sea m_c la expectativa del ratio de ganancias de la opción y v_c el riesgo de la opción:

$$m_c = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{C} - 1$$

$$v_c = (p(1-p))^{1/2}\frac{C_u - C_d}{C}$$

Vemos que el riesgo de un call es igual al producto de la elasticidad de la opción por la volatilidad del activo subyacente, es decir: $v_c = \Omega v_s$.

3 Modelo con multiples activos y diversos estados posibles

Buscando una situación más cercana a la realidad, crearemos un modelo con (d+1) activos y k estados mundiales posibles.
Si S_i es el precio en el momento 0 del activo i ($i = 0, ..., d$), entonces su valor en el momento 1 en un estado j será: v_j^i
Una cartera está compuesta por acciones θ^i de tipo i y la representaremos como: $(\theta^0, \theta^1, .., \theta^d)$. El valor de esta cartera en el momento 0 es entonces $\sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i$ y su valor en el momento 1 y estado j será:

$$\sum_{i=0}^{d} \theta^i v_j^i$$

Sean:

$$\theta^T = [\theta^0, \theta^1, .., \theta^d]$$

$$S^T = [S^0, ..., S^d].$$

Denotamos como $V_{k\times(d+1)}$ la matriz de precios en momento 1. La columna i de V está compuesta por los precios del activo i en el momento 1: $(v_j^i, 1 \leq j \leq k)$.
Usaremos la notación $\theta \cdot S = \sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i$ y $V\theta$ será el $\mathbb{R}^k$-vector con componentes $(V\theta)_j = \sum_{i=0}^{d} \theta^i v_j^i$.
Por motivos de simplificación, si v y u son dos vectores de $\mathbb{R}^k$, notaremos $v \geq u$ si $u_i \geq v_i$ para todo i.
Usaremos de nuevo los mismos principios introducidos previamente sobre los activos libres de riesgo y su valor en los distintos momentos.
Utilizaremos $\mathbb{R}_+^k$ y $\mathbb{R}_{++}^k$ para referirnos al conjunto de vectores de dimensión k no negativos y estrictamente positivos respectivamente. También tendremos el simplex Δ^{k-1} que viene difinido por:

$$\Delta^{k-1} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^k | \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

3.1 Arbitraje

El concepto de arbitraje sigue siendo el mismo que en el capítulo anterior salvo que aquí podemos expresarlo en términos de V, θ, S. Es decir que existe arbitraje si:

$$\begin{cases} S \cdot \theta < 0 \text{ y } V\theta \geq 0 \\ \quad\quad\quad o \\ S \cdot \theta = 0 \text{ y } V\theta \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, para no tener oportunidades de arbitraje, necesitamos que se cumplan las siguientes condiciones:
1) $V\theta = 0 \implies S \cdot \theta = 0$
2)$V\theta \geq 0, V\theta \neq 0 \implies S \cdot \theta > 0$

Teorema 3.1.1. *La hipótesis de NAO es equivalente a la existencia de un secuencia de valores extrictamente positivos $(\beta_j)_{j=1}^k$ tal que:*

$$S^i = \sum_{j=1}^{k} v_j^i \beta_j; \; i \in \{0, ..., d\}. \tag{6}$$

Demostración : Ver 1.2.1 [1]

3.2 Mercados completos

Llamaremos vector de precios por estado a β, β_j corresponde al precio en el momento 0 de un producto que tomará el valor 1 en el momento 1 en el estado j y el valor 0 en cualquier otro estado.

3.2.1 Características y definición

Definición 3.2.1. *Un mercado es llamado completo si para cada vector w de $\mathbb{R}^k$, podemos encontrar una cartera θ tal que $V\theta = w$, es decir que no existe θ tal que:*

$$\sum_{i=0}^{d} \theta^i v_j^i = w_j, \; j \in \{1, ..., k\}$$

Un mercado es completo si podemos elegir una cartera en el momento 0 de tal forma a obtener cualquier vector de riqueza en el momento 1.
Veamos una condición mas sobre los mercados completos:

Proposición 3.2.1. *Un mercado es completo si y sólo si la matriz V es de rango k*

Demostración : La matriz V tiene rango k si y solo si el mapping asociado con V es sobreyectivo, entonces Vθ=w tiene al menos una solución. $\square$

3.2.2 Interpretación económica

En un mercado completo, existe θ_j para cada j=1,..,k tal que el pago de θ_j satisface $V\theta_j = (\delta_{1,j}, ..., \delta_{k,j})^T$ con $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.
Suponiendo que estamos en un mercado libre de arbitraje, tendríamos $S \cdot \theta_j = \beta^T V\theta_j = \beta_j$. Podemos ver β_j como el precio a pagar en el momento 0 para tener 1 euro en el momento 1 en el estado j y no obtener nada si el estado mundial es distinto. De ahí el término de vector de precios por estado.
Podemos observar además que si existe β tal que $V^T\beta = S$, entonces como el mapping asociado a V^T es inyectivo, el vector β es unico.

3.2.3 Medida de probabilidad neutral al riesgo

En un mercado completo, es necesaria la existencia de una cartera libre de riesgo θ cumpliendo $(V\theta)_j = a$ para todo j=1,..,k. El valor inicial de esta cartera será V_0. El ratio de beneficios, siguiendo los principios del primer capítulo será entonces:

$$r = \frac{a - V_0}{V_0}$$

A partir de ahora asumiremos que el activo 0 está libre de riesgo y normalizaremos su precio inicial a 1 tal que su precio en el momento 1 sea 1+r. Si existe una medidad de probabilidad π que satisfazca $V^T\pi = (1 + r)S$, entonces ésta es única y la llamaremos: Medida de probabilidad neutral al riesgo.

3.3 Valoración por arbitraje en mercados completos

Sea z un vector de $\mathbb{R}^k$. Bajo la hipótesis de no arbitraje, si no existe $\theta = (\theta^0, ..., \theta^d)$ con valor z en el momento 1 tal que $\sum_{i=0}^{d} \theta^i v_j^i = z_j$, entonces decimos que z es replicable.
El valor inicial de la cartera es $z_0 = \sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i$ y este valor no depende de la cartera de cobertura escogida. Veamos el último resultado con un ejemplo: Supongamos que existen dos carteras θ y $\widetilde{\theta}$ tal que $V\theta = V\widetilde{\theta}$. La cartera $\widetilde{\theta} - \theta$ es una oportunidad de arbitraje. En un mercado completo, siempre existe una cartera de cobertura.

Proposición 3.3.1. *En un mercado completo y libre de arbitraje, el valor inicial del pago $z \in \mathbb{R}^k$, entregado en el momento 1 viene dado por:*

$$\frac{1}{1 + r} \sum_{j=1}^{k} \pi_j z_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j z_j$$

Demostración : El valor de una cartera de cobertura es: $z_0 = \sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i$. Por lo tanto tendríamos:

$$z_0 = \sum_{0}^{d} \theta^i \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j^i = \beta \cdot z = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{k} \pi_j z_j$$

$\square$

La expresión precedente tiene diversas ventajas: No depende de la cartera y podríamos intepretarla como: el precio inicial de la cartera $z_j; j = 1, ..., k)$ es la expectativa bajo π descontada de su valor en el momento 1.

En el caso de una opción sobre el suyacente , tenemos $z_j = sup(v_j^i - K, 0)$ y de ahí obtenemos el valor de arbitraje:

$$\frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{k} \pi_j sup(v_j^i - K, 0)$$

4 Consumo óptimo y elección de cartera

En esta sección consideraremos un caso muy específico: solo existe un bien de consumo y un solo agente economico. Este agente tiene unos recursos conocidos $R_0 > 0$ en el momento 0 y sus recursos en el momento 1 vienen dados por $R_1 > 0$ en estado j.
Con el fin de modificar sus futuros ingresos, el agente puede comprar una cartera de activos en el momento 0 con la condición de no endeudarse al realizar la compra.
Consumo del agente: c_0 es la cantidad consumida en el momento 0; c_j es el consumo en el momento 1 en un estado j. El agente construye una cartera θ. El conjunto de parejas consumo-cartera que son compatibles con los ingresos del agente, viene definido por las siguientes desigualdades (las podemos encontrar en [1]):

$$R_0 \geq c_0 + \sum_{i=0}^{d} \theta^i S^i \tag{7}$$

$$R_j \geq c_j - \sum_{i=0}^{d} \theta^i v_j^i, \ j = \{1, ..., k\} \tag{8}$$

La primera restricción indica que el dinero invertido en la cartera viene de la parte de los ingresos que no se han consumido, y la segunda restricción hace que el consumo en el momento 1 esté cubierto por sus recursos y por la cartera.
El conjunto de estrategias de consumo compatibles con los ingresos del agente es entonces:

$$B(S) := \left\{ c \in \mathbb{R}_+^{k+l}; \exists \theta \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}$$

Con θ satisfaciendo las desigualdades anteriores.

El agente tiene preferencias en R_+^{k+1}, es decir que es un preorden (una relación binaria reflexiva y transitiva) indicado con $\succeq$, en la que cualquier pareja de elementos puede ser comparada (es completa). Decimos que u: $\mathbf{R}_+^{k+1} \to \mathbf{R}$ es una función de utilidad que representa el preorden de preferencias $u(c) \geq u(c')$ es equivalente a $c \succeq c'$. Históricamente, el concepto de función de utilidad es anterior al de preorden de preferencias. Las funciones de utilidad han sido durante mucho tiempo parte de la base de la teoría económica (teoría "marginalista"). Posteriormente, muchos trabajos trataron de dar fundamentos a la teoría de la utilidad, tomando como punto de partida los preórdenes.
Asumimos que las preferencias del agente están representadas por la aplicación u: $\mathbf{R}_+^{k+1} \to \mathbf{R}$ que es estrictamente creciente en relación con respecto de cada una de sus variables, diferenciable y estrictamente cóncava. Suponemos que el agente maximiza su utilidad bajo restricciones de presupuesto. La derivada u' es la utilidad marginal. Suponemos además que $\frac{\partial u}{\partial c_i}(c_0, ..., c_i, ...c_k) \to \infty$ cuando $c_i \to 0$. Lo que vendría a decir que el agente tiene gran repulsión a no consumir nada en el momento 0 o en el momento 1.

4.1 El problema de maximización

Sea u la función de utilidad. Decimos que $c^* \in B(S)$ es un consumo óptimo si:

$$u(c^*) = max \{u(c); c \in B(S)\}$$

4.1.1 Existencia de un consumo óptimo

Proposición 4.1.1. *Existe un consumo óptimo si y sólo si S satisface las condiciones de no arbitraje (NAO)*

Demostración : Supongamos que existe una solución optima (c_0^*, c_1^*) financiada por θ^* y un arbitraje θ^a. Entonces tenemos $S \cdot \theta^a \leq 0$ y $V\theta^a \geq 0$ donde al menos una de las desigualdades es estricta. Entonces, es cierto que los consumos$(c_0^* - S \cdot \theta^a, c_1^* + V\theta^a) \in B(S)$ (la cartera asociada es $\theta^* + \theta^a$. Usando la propiedad de una estrategia de arbitraje, $c_0^* - S \cdot \theta^a c_0^*$, $c_1^* + V\theta^a c_1^*$ con al menos una de las desigualdades estricta. Como $u(c)$ es estrictamente creciente, esto contradice la optimidad de (c_0^*, c_1^*).
Ahora, demostremos que bajo el supuesto de NAO, si V es inyectiva, entonces existe una solución óptima. Veamos que que el conjunto:

$$\theta \in \mathbb{R}^{d+1}; \exists c \in \mathbb{R}_+^{k+1} \text{ Satisfaciendo (8) y (9)}$$

es acotado. Supongamos contrariamente que existe una succesión (c_n, θ_n) que satisface (8) y (9) tal que $\|\theta_n\| \to \infty$ y sea θ_{lim} el limite de la succesión $\frac{\theta_n}{\|\theta_n\|}$ tenemos:

$$\frac{S \cdot \theta_n}{\|\theta_n\|} + \frac{c_{0n}}{\|\theta_n\|} \leq \frac{R_0}{\|\theta_n\|}$$

,

$$\frac{c_{jn}}{\|\theta_n\|} \leq \frac{R_j}{\|\theta_n\|} + \frac{V\theta_n}{\|\theta_n\|},$$

para todo n y por lo tanto $S \cdot \theta_{lim} \leq 0$ y $V\theta_{lim} \geq 0$. Por la hipotesis de NAO, $V\theta_{lim}$=0, y $\theta_{lim} = 0$, que contradice que $\|\theta_{lim}\| = 1$. Deducimos que B(S) es cerrado, acotado y por tanto compacto, y por tanto que una solución óptima c^* existe. Veamos que c^* es estrictamente positiva. Como u es estrictamente creciente, las resticiones presupuestarias (8) y (9) son imperativas. Por lo tanto existe θ^* tal que

$$\begin{cases} c_0^* + \sum_{i=0}^d \theta^{i*} S^i - R_0 = 0 \\ c_j^* - \sum_{i=0}^d \theta^{i*} v_j^i - R_j = 0 \quad j \in \{1, ..., k\} \end{cases}$$

Sea ε satisfaciendo $c_0^* + \varepsilon S \cdot \theta^* > 0$ y $c_j^* - \varepsilon (V\theta^*)_j > 0$ para cualquier j$\in \{1, ..., k\}$. El consumo $c_0, c_1, ..., c_k$ donde $c_0 = \varepsilon S \cdot \theta^* + c_0^*$ y $c_j = c_j^* + \varepsilon (V\theta^*)_j$ para cualquier j$\in \{1, ..., k\}$ está en B(S). Como u es concava:

$$u(c) - u(c^*) \geq \varepsilon \left(S \cdot \theta^* \frac{\partial u}{\partial c_0}(c) - \sum_{j=1}^k (V\theta^*)_j \frac{\partial u}{\partial c_j}(c) \right)$$

.
Para ε suficientemente pequeño, si $c_0^* = 0$ o si $c_j^* = 0$ para j$\in$ $\{1, ..., k\}$, la ultima expresión es estrictamente positiva: si $c_0^* = 0$ (respectivamente $c_j^* = 0$), $S \cdot \theta^* = R_0 > 0$ (respectivamente $(V\theta^*)_j < 0$) y cuando $\varepsilon \to 0$, $\frac{\partial u}{\partial c_0}(c) \to \infty$ (respectivamente $\frac{\partial u}{\partial c_j}(c) \to \infty$. Esto contradice que c^* sea optimo. □

4.1.2 Fórmula de valoración de activos

Como c* es estrictamente positiva y siguiendo lo indicado en la demostración de la proposición 4.4.1, por el métodode los multiplicadores de Lagrange (en caso de no seguir la demostración 4.4.1 podriamos utilizar el resultado del teorema de Karush–Kuhn–Tucker), una condición suficiente para que c* sea óptimo es que exista $\theta^* \in \mathbb{R}^{d+1}$ y $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^{k+1}$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial c_0}(c^*) - \lambda_0^* = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial c_j}(c^*) - \lambda_j^* = 0, j = 1, ..., k \end{cases}$$

$$\lambda_0^* S^i - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* v_j^i = 0, i \in \{0, ..., d\}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^*(c_0^* + \sum_{j=1}^{d} \theta^{i*} S^i - R_0) = 0 \\ \lambda_j^*(c_j^* + \sum_{j=1}^{d} \theta^{i*} v_j^i - R_j) = 0, j = 1, ..., k \end{cases}$$

Como u es estrictamente creciente, tenemos que su derivada es estrictamente positiva. Tenemos $\lambda^* \in \mathbb{R}_{++}^{k+1}$ y entonces:

$$\begin{cases} c_0^* + \sum_{j=1}^{d} \theta^{i*} S^i - R_0 = 0 \\ c_j^* + \sum_{j=1}^{d} \theta^{i*} v_j^i - R_j = 0, j = 1, ..., k \end{cases}$$

Definiendo β_j como:

$$\beta_j = \frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*} = \frac{\partial u / \partial c_j}{\partial u / \partial c_0}(c^*)$$

Como β_j es estrictamente positiva, podemos encontrar una fórmula para evaluar el precio de un activo:

$$S^i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j^i$$

El ratio de intereses viene dado por la expresión:

$$1 + r = \frac{\partial u / \partial c_0(c^*}{\sum_{j=1}^{k} \partial u / \partial c_j) c^*}$$

Finalmente tendríamos:

$$c_0^* + \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_j^* = R_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j R_j$$

4.1.3 Caso del mercado completo

En el caso de un mercado completo sin arbitraje posible, el problema de optimización resulta más simple. Como el mercado es completo, existe un único β tal que $s = V^T\beta$. Tenemos la desigualdad:

$$c_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_j \leq R_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j R_j$$

Esta es la restricción presupuestaria impuesta a un agente que adquiera un c_j a un precio contingente de β_j Si el mercado es completo:

$$B(s) = \left\{c \in \mathbb{R}_+^{k+1}\right\}$$

con c satisfaciendo la desigualdad presentada anteriormente.
Si el mercado es completo, entonces existe θ tal que:

$$c_j - \sum : i = 0^d \theta^i v_j^i - R_j = 0 \forall j \in \{1, ..., k\}$$

Observamos que el precio en el estado j es proporcional a la utilidad marginal del consumo en el estado j.
Si existe un activo sin riesgo, entoncesβ_j puede interpretarse en términos de probabilidades neutrales al riesgo: $\beta_j = \frac{\pi_j}{1+r}$. La probabilidad neutral al riesgo es proporcional al la utilidad marginal del consumo en el estado j. Vemos que usando la probabilidad neutral al riesgo, si un activo 0 es libre de riesgo:

$$c_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{1+r}\pi_j \leq R_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j}{1+r}\pi_j$$

El consumo en el momento 0, más el valor, descontado por la rentabilidad sin riesgo de la expectativa con respecto a π del consumo en 1 es inferior o igual a los ingresos en el momento 0, más la expectativa descontada de los ingresos en el momento 1.

4.1.4 Caso de mercados incompletos

Suponemos que existe un activo libre de riesgo. Escribimos $\mathcal{P}$ para el conjunto de medidad de probabilidad π que satisfacen $V^T\pi = (1+r)S$. Si $c \in B(S)$ y $\pi \in \mathcal{P}$, tenemos :

$$c_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{1+r}\pi_j \leq R_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j}{1+r}\pi_j$$

Usaremos la notación: $V(\pi)$ =max u(c) Donde el máximo se toma sobre los c que satisfacen la condición:

$$c_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{1+r}\pi_j \leq R_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j}{1+r}\pi_j$$

por lo que obtenemos: $u(c^*) \leq min_{\pi\in\mathcal{P}} V(\pi)$

4.2 Modelos de equilibrio en mercados financieros completos

4.2.1 El agente representativo

Estudiaremos en este apartado un modelo simple para mostrar el efecto producido por la introduccíon de un mercado financiero en una economía. Trataremos más detalladamente este tema en el capítulo siguiente.
Imaginemos una economía de intercambio con un solo bien de consumo donde existen m agentes económicos. Suponemos (d+1) activos existentes y un mercado completo.
El agente h tiene una dotación inicial de e_{h0} unidades del bien en el momento 1 en un estado mundial j. Para modificar sus futuros recursos puede comprar una cartera de valores $\theta = (\theta_h^0, ..., \theta_h^d)$ a condición de no endeudarse. Con un precio S por los activos, definimos el conjunto presupuestario del agente como el conjunto de planes de consumo que puede soportar con su riqueza inicial y sus futuros ingresos:

$$B_h(S) := \left\{c \in \mathbb{R}_+^{k+1} | \theta \in \mathbb{R}^{d+1}, e_{h0} \geq c_0 + \theta \cdot S; e_{hj} \geq c_j - (V\theta)_j, j \in \{1, ..., k\}\right\}$$

Suponemos que las preferencias del agente están representadas por la función de utilidad introducida por Von Neumann y Morgenstern[5]:

$$u_h(c_0, C) = v_{h0}(c_0) + \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_{h1}(c_j).$$

Suponemos que todos los agentes tienen el mismo factor de descuento α.

Definición 4.2.1. *La colección $\bar{S}, (\bar{c}_h, \bar{\theta}_h)$;h=1,...,m es un equilibrio en una economía con mercados financieros si dado $\bar{S}$*
1. $\bar{c}$ maximiza $u_h(c_{h0}, C_h)$ bajo la condición $c_h = (c_{h0}, C_h) \in B_h(\bar{S})$,
2. $\sum_{h=1}^{m} \bar{c}_{hj} = \sum_{h=1}^{m} e_{hj} := e_j$, $j \in$ 1,...,k
3. $\sum_{h=1}^{m} \bar{\theta}_h = 0$

Lo que nos indica que el mercados de bienes y de valores se liquidan (por la igualdad 2 y 3 respectivamente).

[5]En el siglo XX, Von Neumann y Morgenstern desarrollaron la teoría de la utilidad esperada y plantearon cuatro axiomas que aseguran una elección racional: Preferencias completas, transitividad, independencia y continuidad

Suponemos ahora que el equilibrio existe. Podemos utilizar las siguientes condiciones para todo h:

$$S^i = \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{v'_h(\bar{c}_{hj}}{v'_{h0}(\bar{c}_{h0})} v^i_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{1+r} \mu_j \frac{v'_h(\bar{c}_{hj}}{E(v'_h(\bar{C}_h))} v^i_j$$

$$\frac{1}{1+r} = \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{v'_h(\bar{c}_{hj}}{v'_{h0}(\bar{c}_{h0})}$$

Bajo el supuesto de mercado completo, la ecuación $S = V^T \beta$ tiene una única solución. Los ratios: $\frac{v'_h(\bar{c}_{hj})}{v'_{h0}(\bar{c}_{h0}}$ son independientes de h.
Consideremos un agente ficticio, el "agente representativo[6]" cuya utilidad es:

$$u(c_0, C) := v_0(c_0) + \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j v(c_j)$$

donde:

$$v_0(c) := max \left\{ \sum_{h=1}^{m} \frac{v_{h0}(c_h)}{v'_{h0}(\bar{c}_{h0}}; \sum_{h=1}^{m} c_h = c \right\}$$

$$v(c) := max \left\{ \sum_{h=1}^{m} \frac{v_h(c_h)}{v'_{h0}(\bar{c}_{h0}}; \sum_{h=1}^{m} c_h = c \right\}$$

Sea e una variable aleatoria con valores c_j con probabilidad μ_j, tenemos entonces que

$$\frac{1}{1+r} = \alpha E(v'(e))$$

$$S^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{v'(e_j)}{E(v'(e)} v^i_j = \frac{1}{1+r} \left[E(V^i) + Cov(\frac{v'(e)}{E(v'(e))}, V^i) \right]$$

donde V^i es una variable aleatoria con valor v^i_j.

Esta formula tiene una gran importancia en la literatura económica ya que muestra que cuando existe un equilibrio, el precio de un activo es sólo una función de la dotación agregada y no de la dotación de cada individuo.

[6]Los economistas utilizan el término agente representativo para referirse al tomador típico de decisiones de un cierto tipo (por ejemplo, el consumidor o la empresa típica).

4.2.2 Modelo de valoración de activos

Supongamos que los agentes tienen funciones de utilidad cuadráticas y que en el equilibrio, los agentes tienen un consumo estrictamente positivo. En este caso específico, podemos facilmente verificar que v' es lineal y decreciente:

$$v'(c) = -ac + b$$

Entonces tenemos:

$$S^i = \frac{1}{1+r}\left[E(V^i) - \frac{a}{E(v'(e))}Cov(e, V^i)\right]$$

Esta fórmula también se denomina CAPM[7] por sus siglas en íngles (Capital Asset Pricing Model). Mientras $E(v'(e)) > 0$, el precio del activo i es mayor que las expectativa de rentabilidad descontada, si $Cov(e, V^i \leq 0)$ entonces el activo es una forma de seguro.
Sea la rentabilidad del activo i: $\rho^i = \frac{V^i}{S^i}$ y M tal que e=VM (M es la cartera), tenemos:

$$E(\rho^i) - (1+r) = \frac{a}{E(v'(e))}Cov(\rho^i, e) = \frac{aS \cdot M}{E(v'(e))}Cov(\rho_i, \rho_M$$

Sabiendo que $\rho_M = \frac{e}{S \cdot M}$ es la rentabilidad de la cartera:

$$E(\rho^i) - (1+r) = \frac{Cov(\rho^i, \rho_M)}{Var\rho_M}\left\{E(\rho_m - (1-r)\right\}$$

Esta fórmula relaciona el exceso de rentabilidad de un activo con la rentabilidad de una cartera.
La fórmula es también conocida como fórmula beta:

$$\frac{Cov(\rho^i, \rho_M)}{Var\rho_M}$$

Vemos que β^i es el coeficiente de regresión de ρ^i en ρ_M, En este modelo de valoración, este coeficiente es interpretado como el factor de sensibilidad al riesgo del acivo i es una función lineal.

[7]El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) es un modelo de valoración de activos financieros desarrollado por William Sharpe que permite estimar su rentabilidad esperada en función del riesgo sistemático.

4.2.3 Una fórmula aproximada para CAPM

Generalmente, tomando cualquier función de utilidad para un agente representativo, supongamos que e_j es cercano con E(e). Tendríamos entonces una fórmula aproximada para la valoración de un activo:

$$\frac{v'(e_j)}{E(v'(e))} \simeq 1 + \alpha \left[E(e) - e_j \right]$$

Donde α es el índice de absoluta adversión al riesgo en E(e) del agente representativo.

$$S^i \simeq \frac{E(V^i)}{1+r} - \frac{\alpha}{1+r} Cov(e, V^i)$$

5 Equilibrio de los mercados financieros en tiempo discreto

En este capítulo buscaremos responder a las siguientes preguntas: ¿Cuales son los efectos de introducir unos mercados financieros en una economía? Y cómo se determinan los precios de las acciones? La teoría del equilibrio general fue introducida en un primer momento por Walras[8]. Su teoría explica los precios de los bienes utilizando la igualdad de oferta y demanda. Las primeras pruebas de la existencia de la teoría de Walras se dieron en 1936 através de los trabajos de Wald[9] pero no fue hasta 1954 que se pudo recopilar un cuerpo de pruebas generado por Arrow-Debreu.
En el mismo periodo (1953), Arrow[10] mostro que la teoría del equilibrio general podia extenderse al caso de un futuro incierto a traves del concepto de los bienes contingentes (”Le rôle des valeurs boursières pour la meilleure répartition des risques”). En este artículo, Arrow señalaba la apertura de un gran número de nuevos mercados financieros lo que requería a los agentes una enorme capacidad computacional. De ahí surgió la idea de crear mercados financieros para distribuir el número de mercados abiertos. La teoría moderna del equilibrio en los mercados financieros sigue la idea de Arrow.
Más tarde, Radner[11] en 1972 en su artículo ”Existencia de equilibrio de planes, precios y expectativas de precios en una secuencia de mercados” abre nuevos horizontes a la teoría del equilibrio. Radner amblia la teoría de Arrow a un marco dinamico y introduce una clase de activos más general. Además, Radner demuestra que incluso cuando hay pocos activos en juego, una economía de intercambio puede tener un equilibrio lo cual dará pie a la teoría de los mercados incompletos.

[8]Marie-Esprit Léon Walras (1834-1910) considerado por Joseph Schumpeter como ”el economista más importante de todos los tiempos” descubrió, conjuntamente con Carl Menger y W. Stanley Jevons la teoría de la utilidad marginal

[9]Abraham Wald (1902-1950) fue un matemático que hizo importantes contribuciones a la teoría de la decisión, la geometría, la economía y que fundó el análisis secuencial.

[10]Kenneth Arrow (1921-2017) es considerado uno de los economista más destacados de la teoría económica neoclásica en el periodo posterior a la Segunda Guerra Mundial.

[11]Roy Radner (1927-2022) fue un economista estadounidense, profesor de la Escuela Leonard N. Negocios Stern de la Universidad de Nueva York.

A continuación usaremos la notación siguiente:
Siendo x y y dos vectores en $\mathbb{R}^h$
$y \leq x$ si y sólo si $y_i \leq x_i$ para todo i=1,...,h
$x > y$ si y sólo si $x \geq y$ and $x \neq y$
$x \gg y$ si y sólo si $x_i > y_i$ para todo i=1,...,h
$x \cdot y$ denota el producto escalar entre dos vectores
$\mathbb{R}^h_+$ denota el conjunto de vectores x en $\mathbb{R}^h$ tal que $x \geq 0$ y $\mathbb{R}^h_{++}$ tal que $x \gg 0$

5.1 Equilibrio en una economía de intercambio estatica

Recordamos el concepto de economía de intercambio de la teoría de Arrow-Debreu. Una economía de intercambio de l-bienes y m-consumidores se describe mediante los siguientes datos:

1) Los conjuntos de los consumos de los agentes, que asumimos iguales a $\mathbb{R}^l_+$
2) Los conjuntos de dotaciones de los agentes, $e_i \in \mathbb{R}^l_{++}$ (i=1,...,m)
3) Los conjuntos de preferencias de los agentes que están representados por las funciones de utilidad $u_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$, (i=1,...,m).

En el caso de "competencia perfecta", los consumidores no pueden influir en los precios. Dado el conjunto de precios p=$(p^1, ..., p^l) \in \mathbb{R}^l_{++}$, el conjunto de bienes que el agente i puede comprar a un precio p biene dada por su dotación

$$B_i(p) = \left\{ c \in \mathbb{R}^l_+ | p \cdot c \leq p \cdot e_i \right\}$$

se llama conjunto presupuestario del agente i.

Definición 5.1.1. *Una colección (p,$d_i(p)$,i=1,...,m) es un equilibrio si:*

$$i) p \gg 0$$

$$ii) \sum_{i=1}^{m} d_i(p) = \sum_{i=1}^{m} e_i := e$$

El nombre "función de exceso de demanda agregada" es dado a la función $z = \sum_{i=1}^{m}(d_i - e_i)$. El sistema de precios p es un precio de equilibrio si y sólo si:

$$p \gg 0 \wedge z(p) = 0$$

Es asi como un precio de equilibrio tiene la propiedad de contener toda la información económica que requieren los agentes individuales. Además, si cada agente reacciona con sus propias dotaciones, preferencias y sin conocer la de los demás, entonces sus demandas individuales son globalmente coherentes

5.2 El enfoque de la demanda

Para este método, utilizaremos directamente la función de exceso de demanda z.

Proposición 5.2.1. *Tenemos las siguientes condiciones:*
1. z es homogéneo de grado 0, es decir $z(\alpha p)=z(p)$ para todo $p \gg 0$ y $\alpha > 0$.
2. z es continua en $\mathbb{R}^l_{++}$.
3. z satisface la ley de Walras: $p \cdot z(p) = 0$ para todo $p \gg 0$.
4. Si $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p$ y $p^j = 0$, entonces $\|z(p_n)\| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$
5. z esta acotada inferiormente: $z(p) \geq -e$ para todo p.

Como el exceso de demanda es positivo, asumimos que:

$$p \in \Delta^{l-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}^l_+, \sum_{k=1}^{l} p^k = 1 \right\}$$

Demostración : Ver [11] p581-582

Recordemos que una correspondencia F (también llamada función de muchos valores) de X a Y, es una aplicación de X a P(Y) el conjunto de subconjuntos de Y

Lemma 5.3. *Lemma de Gale-Nikaido-Debreu Sea S un subconjunto convexo cerrado de Δ^{l-1}. Sea f una función continua de S a $\mathbb{R}^l$ tal que $p \cdot f(p) = 0$ para todo p. Entonces existe $p^* \in S$ tal que:*

$$p \cdot f(p^*) \leq 0, \forall p \in S$$

Demostración : Ver 3.2 de "Direct Proofs of the Existence of Equilibrium, the Gale-Nikaido-Debreu Lemma and the Fixed Point Theorems using Sperner's Lemma" [7]

Mientras que el equilibrio de Walras se centra en el papel de los precios de acciones en una economía con un numero "grande" de agentes "pequeños", el concepto de equilibrio de Cournot-Nash[12] capta la posibilidad de interacción directa entre un número "pequeño" de agentes el cual se puede demostrar mediante el lema de Debreu-Gale-Nikaido.
Obseración : A menudo, el lema de Debreu-Gale-Nikaido es el paso clave para demostrar la existencia de un equilibrio de Walras.

Sea la condición **U1**: U es estrictamente cóncava, estrictamente creciente y de clase $\mathbf{C}^1$

Teorema 5.3.1. *Bajo el supuesto U1, existe un equilibrio.*

[12]Cournot-Nash supone que las empresas rivales producen un producto homogéneo y cada una intenta maximizar las ganancias eligiendo cuánto producir. Estas ganancias derivan del volumen máximo de ventas y precios más altos (beneficios mayores).

Demostración: Si pudiesemos aplicar el lema de Gale-Nikaido Debreu al simplex Δ^{l-1} y a la función z, la prueba de la existencia de un equilibrio sería inmediata. En efecto, si $c \cdot z$(p*)$\leq$ 0 para todo $p \in \Delta^{l-1}$ entonces z(p*)$\leq$ 0 pero $p * \cdot z(p*) = 0$ (ley de Walras) entonces necesariamente z(p^*)=0. Desgraciadamente, como la función de exceso de demanda no es continua en el límite del simplex, el lema Gale-Nikaido-Debreu no se puede aplicar a esta función. Esto nos lleva a dividir $\Delta l - 1$ en dos y trabajar usando limites.
Para n$\in$ **N** tenemos:

$$\Delta^{l-1} = \left\{ p \in \Delta_n^{l-1} | p^j \geq \frac{1}{n}, j \in 1, \ldots l \right\}$$

Como la restricción de z a Δ_n^{l-1} es continua, entonces por el lema del GND existe $p_n \in \Delta_n^{l-1}$ tal que

$$p \cdot z(p_n^*) \leq 0, p \in \Delta_n^{l-1}$$

Como la succesión (p_n^*) está en Δ_n^{l-1} entonces tiene un punto límite p^*. Demostremos que (p_n^*) está acotada. De acuerdo con las propiedades de la función, z está acotada inferiormente por –e. Además si $z(p_n^*) = (zk(p_n^*))l_{k=1}$, aplicando la ecuación anterior a $p^j = \frac{1}{l}$, para todo j y para un n suficientemente grande obtenemos:

$$z^l(p_n^*) \leq -\sum_{k=2}^{l} z^k(p_n^*) \leq \sum_{k=2}^{l} e^k$$

La sucesión $z^1(p_n^*)$ está por lo tanto acotada inferior y superiormente y podemos usar un razonamiento similar para demostrar que las sucesiones $z^k(p_n^*)$ para k=2,...,l también están acotadas por arriba.
Por lo tanto $p^* \gg 0$ y como z es continua entonces $z(p^*)$ es un punto límite de z(p_n^*). Como la sucesión de simplex partidos Δ_n^{l-1} es creciente entonces tenemos $p \cdot z(p^*) \leq 0$ para todo $p \in \Delta_n^{l-1}$ y aplicando $n \to \infty$, tenemos $p \cdot z(p^*) \leq 0$, $p \in \Delta_n^{l-1}$. Tenemos $z(p*) \leq 0$, Dado que $p^* \cdot z(p^* = 0$, tenemos $z(p^*) = 0$ y por lo tanto el equilibrio existe. $\square$

5.4 El método Negishi

En este apartado expondremos el método Negishi bajo supuestos bastante restrictivos de diferenciabilidad en las funciones de utilidad u_i
Además de los supuestos anteriores, a partir de ahora también tendremos en cuenta:

U2 Para todo i, u_i es C^2 en $\mathbb{R}_{++}^l$

U3 para todo i, u_i satisface "las condiciones de Inada": $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}(x) \to \infty$ si $x^j \to 0$ donde el resto de componentes de x están fijas.

Óptimo de Pareto

Definición 5.4.1. *Una asignación* $(c_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ *es óptima de Pareto si no existe* $(c_i')_{i=1}^m \in u_j(c_j)$ *para al menos un j*

Definición 5.4.2. *Una pareja* $\bar{p}, (\bar{c}_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ *es un equilibrio con transferencia de pagos si para todo i:*

$$\begin{cases} \bar{c}_i \text{ maximiza } u_i(c_i) \\ \quad \bar{p} \cdot c_i \leq \bar{p} \cdot \bar{c}_i \end{cases}$$

y si $\sum_{i=1}^m \bar{c}_i = e$

Así podemos ver que $\bar{p}, (\bar{c}_i)_{i=1}^m \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ sería un equilibrio si el agente i tuviera $\bar{c}_i$ como dotación inicial. Tendríamos que transferirle $\bar{p} \cdot (e_i - \bar{c}_i)$ para alcanzar el equilibrio.

5.5 La teoría de los mercados contingentes

Como hemos mencionado anteriormente, Arrow (1953) en "Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques" y Debreu (1953) en "Economie de l'incertain" mostraban cómo la teoría del equilibrio en una situación estática y determisnista se podía generalizar a un caso con diversos periodos Consideramos una economía de intercambio con dos fechas, m agentes y l bienes. A tiempo 1, el futuro es incierto, y hay k estados posibles del mundo. Existen mercados abiertos para todos los bienes en todos los estados del mundo. Es decir decir que un agente puede comprar un contrato para la entrega de una mercancía dada en un determinado estado. El contrato se paga, aunque la entrega no tenga lugar a menos que se produzca el acontecimiento especificado. El agente i puede por tanto, hacer planes de consumo $c_i(j) \in \mathbb{R}_+^l$ en el estado j. El vector $c_i = c_i(1), ..., c_i(k)) \in (\mathbb{R}_+^l)^k)$ se llama plan de consumo contingente. por tanto, hacer planes de consumo $c_i(j) \in \mathbb{R}_+^l$ en el estado j. Asumimos que el agente i tiene preferencias sobre el conjunto de planes de consumo contingente y que están representadas por una función de utilidad $u_i : (\mathbb{R}_+^l)^k \to \mathbb{R}$. Finalmente, sea $e_i = (e_i(1), ..., c_i(k))$ el vector de dotación del agente i, donde $e_i(j)$ es la dotación en bienes del agente i en el estado j.
Esta economía de intercambio se representa con la lista:

$$(\mathbb{R}_+^l)^k, u_i, e_i; i = 1, ..., m).$$

Sea $p^l(j)$ el precio de un bien l entregado cuando j ocurre. El vector $p = [p(1), ..., p(k)] \in (\mathbb{R}_+^l)^k$ es el conjunto de precios contingentes.
Dado un p $\in (\mathbb{R}_{++}^l)^k$, el agente su conjunto de presupuestos, es decir, el conjunto de planes que son compatibles con su conjunto de dotaciones:

$$B_i(p) = \left\{c_i \in (\mathbb{R}_+^l)^k | p \cdot c_i \leq p \cdot e_i\right\}$$

donde:

$$p \cdot c_i = \sum_{j=1}^{k} p(j) \cdot c_i(j)$$

Definición 5.5.1. *Un equilibrio contingente de Arrow-Debreu es un conjunto de precios contingentes* $p^* \in (\mathbb{R}^l_{++})^k$ *y un conjunto de planes de contingencia* $(c_i^m) \in (\mathbb{R}^l_+)^{km}$ *tal que:*
1. c_i^* *maximiza* $u_i(c_i)$ *bajo la restricción* $c_i \in B_i(p^*)$ *para todo i=1,...,m*
2. $\sum_{i=1}^m c_i^* = \sum_{i=1}^m ei$

Si suponemos U1, entonces existe un equilibrio de Arrow-Debreu contingente. Este enfoque tiene dos inconvenientes: en primer lugar requiere una gran cantidad de mercados abiertos (en el ejemplo anterior kl mercados). En segundo lugar, los bienes no siempre están a la venta. Por eso la idea de Arrow de introducir un número k de valores para mostrar que la economía puede organizarse con k+l mercados en lugar de kl mercados contingentes es interesante. Describimos este modelo en el caso de una economía con dos fechas, es decir para un periodo.

5.6 El equilibrio de Arrow-Radner en una economía de intercambio con mercados financieros en dos fechas

Como en el modelo anterior, aquí de nuevo tratamos un caso con dos fechas. En el momento 1, el futuro es incierto y hay k estados posibles en el momento 2. El agente i tiene tiene dotaciones inciertas y como antes $e_i(j)$ es la dotacion del agente i en el estado j. En este caso, no hay mercados para los bienes entregados a futuro. Por otro lado, los agentes pueden comprar bienes durante el primer periodo. Anticipando los niveles de precios en el momento 2, los agentes pueden hacer planes de consumo en términos de los ingresos que esperan obtener de sus dotaciomes exógenas y sus activos.
Suponemos en este modelo que los agentes tienen a"expectativas racionales" o dicho de otra manera: los precios que esperaban ocurren. Luego los agentes intercambian bienes en mercados que llamamos "mercados al contado". Veamos este modelo.
En un primer momento describiremos la parte financiera de la economía. Hay d títulos. Cada activo se caracteriza por un dividendo que produce en cada estado. Decimos que un activo es "real" si su dividendo se expresa en unidades del este bien. Decimos que es "nominal" si existe un numerario para cada estado y si el dividendo se expresa en unidades monetarias. En este último caso, la matriz V cuya i-ésima columna representa el dividendo del activo i en los diversos posibles estados se denomina "matriz de dividendos"

$$V = \begin{bmatrix} v_1^1 & ... & v_1^i & ... & v_1^d \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_j^1 & ... & v_j^i & ... & v_j^d \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ v_k^1 & ... & v_k^i & ... & v_k^d \end{bmatrix}$$

A partir de ahora , supondremos que todos los activos como nominales y que los agentes construyen carteras por sí mismos. Una cartera θ es un vector en $\mathbb{R}^d$, con componentes que pueden tener valores negativos (es posible la venta en corto). El pago de esta cartera en el estado j es $(V\theta)_j$. Los títulos se negocian en el momento 1 al precio $S \cdot \theta_i \leq 0$ para todo i, donde θ_i es la cartera del agente i
Dados los precios esperados p=[p(1),..,p(k)]$\in (\mathbb{R}_+^l)^k$, los agentes hacen planes de consummo para el momento 2: c=[c(1),...,c(k)]$\in (\mathbb{R}_+^l)^k$ donde c(j) es el consumo en el estado j.

Decimos que una pareja $(c_i, \theta_i) \in \mathbb{R}_+^{lk} \times \mathbb{R}^d$ es factible si cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} S \cdot \theta_i \leq 0 \\ \\ p(j) \cdot \leq (v\theta_i)_j \cdot e(j) \text{ para todo } j = 1, ...k \end{cases}$$

Definimos el conjunto presupuestario del agente i como el conjunto de planes de consumo que podría financiar utilizando sus dotaciones exógenas y los ingresos de los valores que compraron en el momento inicial (momento 1) sin endeudarse. Es decir:

$$B_i(p, S) = \left\{ c_i \in \mathbb{R}_+^{lk} | \exists \theta_i \in \mathbb{R}^d, (c_i, \theta_i) \right\}$$

Vemos como $B_i(p, S)$ cumple las condiciones de viabilidad.
Suponemos que los agentes tienen preferencias sobre el conjunto de planes de consumo y que estos están representados por funciones de utilidad $u_i : (\mathbb{R}_+^l)^k \to \mathbb{R}$ que satisfacen la función de utilidad **U1**.

Definición 5.6.1. *Un equilibrio de Radner se compone de:*
- *Un conjunto de precios para los títulos $\bar{S} \in \mathbb{R}_+^d$*
- *Precios esperados $\bar{p} \in (\mathbb{R}_+^d)^k$*
- *Carteras de activos $(\bar{\theta_1}, ..., \bar{\theta_m})$ y planes de consumo $(\bar{c_1}, ..., \bar{c}_m)$ tal que:*

1.

a) $\bar{c_i}$ maximiza $u_i(c_i)$ con la restricción: $c_i \in B_i(\bar{p}, \bar{S}) \forall i = 1, ..., m$
b) $(\bar{c_i}, \bar{\theta_i})$ satisface las condiciones de viabilidad.

2. Los mercados se compensan, es decir:

$$a)\ \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i = \sum_{i=1}^{m} e_i$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i = 0$$

Si asumimos que V es inyectiva, entonces la igualdad $\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i = 0$ satisface 1 y 2 b).
Supongamos que las preferencias son crecientes y que las restricciones son limitadas al óptimo.
Se da entonces el caso de que $\bar{p}_(j) \cdot (\bar{c}_i(j) - e_i(j)) = (V\bar{\theta}_i)_j$ para todo (i,j). Sumando sobre i y utilizando 2 a) obtenemos: $V(\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i)_j) = 0$

Supongamos ahora que ($\bar{p}, \bar{S}, \bar{c}_i, \bar{\theta}_i$;i=1,...,m) es un equilibrio de Radner. La condición necesaria es que no tengamos arbitraje, es decir que no exista una cartera $\theta \in \mathbb{R}^d$ satisfaciendo $\bar{S} \cdot \theta \leq 0$ y $V\theta > 0$ de lo contrario la riqueza de todos los agentes podría llegar a ser infinita, y no podría haber equilibrio.
En adelante distinguiremos dos casos: El caso en el que el rango V = k (caso de mercados completos) y el caso donde el rango $V < k$, (caso de mercados incompletos).

5.7 Caso de mercados completos

Teorema 5.7.1. *Si $(\bar{p}, \bar{S}, \bar{c}_i.\bar{\theta}_i; i = 1, ..., m)$ es un equilibrio de Radner, entonces existe $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ con $\bar{S} = V^T\beta$ tal que $(p^*, c_i; i = 1, ..., m)$ es un equilibrio contingente de Arrow-Debreu con $p^*(j) = \bar{p}(j)\beta_j$*
Por lo contrario, si $(p^*, \bar{c}^*_i; i = 1, ..., m)$ es un equilibrio contingente de Arrow-Debreu, entonces para cualquier $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$, existe $\bar{\theta}_i$,i=1,...,m tal que

$$(\bar{p}, V.^T\beta, \bar{c}_i, \theta_i; i = 1, ..., m)$$

es un equilibrio de Radner con $\bar{p}(j) = \frac{p^*(j)}{\beta_j}$

Demostración : Ver 6.6 [1]
Asumiendo que las funciones de utilidad son continuas, estrictamente cóncavas y crecientes, y las dotaciones de los agentes son estrictamente positivas en todos los estados:

Corolario 5.7.1. *Corolario Bajo la **U1**, si rang(V)= k (mercados completos), para todo $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$, existe un equilibrio con los mercados financieros donde S=$V^T\beta$.*

5.7.1 El caso de la economía del bien único

Supongamos que sólo existe un único bien de consumo en cada estado y tomémoslo como numerario (el dividendo que da un bien en cada estado se expresa en unidades del bien). En este caso, el precio al contado es igual a 1. Tenemos entonces el teorema anterior se convierte en el siguiente:

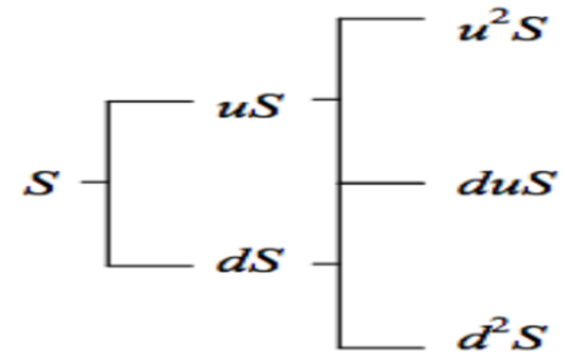
Teorema 5.7.2. *En el caso de una economía de un bien unico, si* $(\bar{S}, \bar{c}_i, \bar{\theta}_i; i=1,...,m)$ *es un equilibrio de Radner en el que el bien de consumo es numerario en cada uno de los estados, entonces existe* $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^k_{++}$ *tal que* $\bar{S} = V^T \bar{\beta}$ *y tal que* $(\bar{\beta}, \bar{c}_i; i = 1, ..., m)$ *es un equilibrio contingente de Arrow-Debreu*

Demostración : Idéntica al teorema anterior.

En el caso especial de una economía de un solo bien, vemos que hay tantos precios de equilibrio para los activos como precios de equilibrio contingentes de Arrow-Debreu en una economía. En general, el equilibrio no es único. Sin embargo, obsérvese el resultado fundamental, demostrado por Debreu para funciones de utilidad que se fijan "genéricamente con respecto a las dotaciones", una economía de intercambio tiene un número finito de equilibrios.
En el caso de mercados incompletos, la introducción de mercados financieros modifica el consumo de los agentes en equilibrio. Bajo el supuesto de un único bien de consumo en cada estado, tanto si los mercados son completos como si no, los precios de los activos vienen determinados por la igualdad de la oferta y la demanda. Si hay más de un bien de consumo en cada estado y si los activos son nominales, entonces los precios de los activos están sujetos a la condición de no arbitraje, y existe una indeterminación en el precio de los activos.

6 Arbol binomial y simulación

Los economistas y economistas John. C. Cox (MIT), Stephen A. Ross profesor de (Yale) y Mark Rubinstein (Berkely) propusieron en la revista Journal of Financial Economics en 1979 con su artículo “Option Pricing: A Simplified Approach” [2] un método para valorar acciones de una manera bastante sencilla. Posteriormente, este método pasaría a la posteridad como Arbol Binomial Cox-Ross-Rubinstein.
Este método reside esencialmente en las ecuaciones presentadas en el primer capítulo pero con el fin de dar un valor singular al trabajo propondremos un ejemplo de cálculo de opciones según el método Cox-Ross-Rubinstein.
Recordemos que este método utiliza los principios básicos de arbitraje, valor neutral al riesgo y la notación introducida en 1.1), podemos mostrar el grafico realizado por Cox, Ross y Rubinstein en [2]:

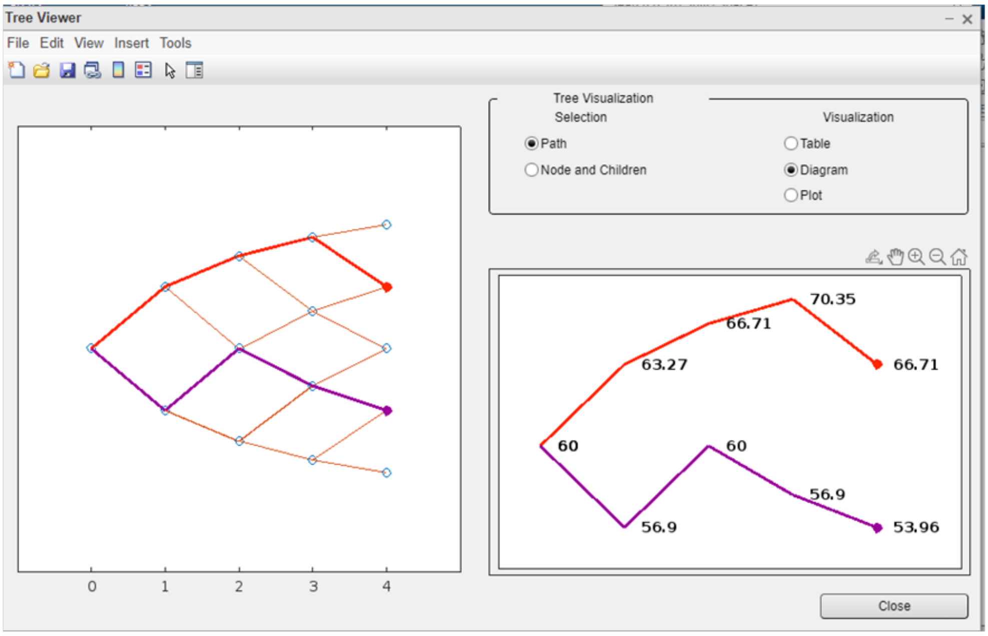


Fuente : *Option Pricing: A Simplified Approach* (Cox, Ross, Rubinstein. 1979)

Para nuestro ejemplo, aprovechando la potencia de cálculo de Matlab[13] utilizaremos un caso de cuatro etapas es decir cuatro unidades temporales aunque el mismo método puede ampliarse a más periodos resultando en un diagrama en forma horizontal (de ahí el nombre).
Analizaremos el siguiente ejemplo: La opción que analizaremos será un call con una acción subyacente con un precio de 60 $, un precio de ejercicio de 65$ y una duración de 6 meses. Asumiremos una tasa de interés en los activos libres de riesgo de 5% y la volatilidad de la acción es de 15%
Obtenemos los siguientes resultados:
Price Call= 1.2884
Price Put= 4.6835

[13]MATLAB es un sistema de cómputo numérico desarrollado por MathWorks que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio.

Con Matlab también podemos obtener la representación gráfica del Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein de nuestro ejemplo:



Hemos usado el siguiente codigo:

```
>> Sigma = 0.15;

AssetPrice = 60;

>> RateSpec = intenvset('Rates', 0.05, 'StartDates',...

'01-Jan-2023', 'EndDates', '31-Jul-2023', 'Compounding', -1);

>> StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);

>> ValuationDate = '01-Jan-2023'; Maturity = '01-Jul-2023';

TimeSpec = crrtimespec(ValuationDate, Maturity, 4);

>> CRRTree = crrtree(StockSpec, RateSpec, TimeSpec);

>> treeviewer(CRRTree)

>> Strike = 65;

>> Settle= '01-Jan-2023';

>> OptSpec = {'Call';'put'};

>> Price = optstockbycrr(CRRTree, OptSpec, Strike, Settle, '01-Jul-2023')

Price =

    1.2884
    4.6835
```

7 Introducción a las opciones de barrera en un mercado completo

Para profundizar sobre el tema de las opciones y su valoración, he considerado interesante estudiar brevemente un tipo de opción exótica ya que la valuación de esta se basa de cierta manera en el método utilizado anteriormente.
En el estado actual de las finanzas internacionales, la cantidad de opciones exóticas es cada vez más importante y se posicionan como las sucesoras de las opciones clásicas Europeas o americanas.

Aunque estos productos son negociados en los mercados OTC[14] y tienen una reputación negativa debido a su complejidad, dificultad para ser valorados, así como ser únicamente destinados a inversores experimentados, también presentan algunas ventajas. Entre ellas, se encuentra la flexibilidad en su negociación y la amplia variedad de activos subyacentes que se pueden negociar, como materias primas, renta fija, índices bursátiles, divisas, entre otros.
La valoración y la cobertura de opciones exóticas es cada vez mayor, es un tema que interesa a muchos profesionales que tratan de dar respuesta a la necesidad de sus clientes (en particular, en los mercados de divisas). Este último capítulo está dedicado a los problemas matemáticos relacionados con estos productos.
Las opciones exóticas, u opciones "dependientes de la trayectoria", son opciones cuya remuneración depende del comportamiento del precio del activo subyacente entre el momento 0 y el vencimiento.
Para la realización de este capitulo, nos hemos basado en el Paper: A discrete time approach for european and american barrier [4] de Matthias Reimer y Klaus Sandmann.

7.1 Opciones exóticas

Primero de todo definamos que son las opciones de barrera o Barrier options. Este tipo de derivado financiero es similar a las opciones de call y put estandares, sin embargo el pago solo puede producirse si durante el tiempo de seguimiento el precio del activo subyacente ha alcanzado o no una cota inferior o superior. Esta cota la definiremos como barrera y esta preestablecida en el momento de la adquisición de tal opción. En esta decada, este tipo de contratos se han convertido en las opciones exóticas más populares.

[14]Los mercados over the counter (OTC) son mercados extrabursátiles donde se negocian distintos instrumentos financieros (bonos, acciones, swaps, divisas...) directamente entre dos partes. Para ello se utilizan los contratos OTC, en los que las partes acuerdan la forma de liquidación de un instrumento.[10]

7.2 Modelo en tiempo discreto

Sea $T = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T\}$ una discretizacón del eje temporal. Supongamos $S(t_0)$ es el activo incial en el momento t_0. Sea $S(t_n, i)$ el precio del activo en el momento t_n después de i movimientos alcistas(u), tenemos:

$$S(t_n, i) = S(t_0)u^i d^{n-i} \forall i = 1, ..., n; \forall t_n \in T$$

tal que u y d son movimientos proporcionales alcistas y bajistas (respectivamente) independientes del tiempo y del estado del periodo con: $u > d > 0$ con $u \cdot d = 1$. Supondremos además que la tasa de interés r es constante durante el intervalo de tiempo [0;T]. El modelo binomial está libre de arbitraje si y sólo si existe una medida de probabilidad P tal que el proceso del precio actualizado del activo es una martingala bajo P. La probabildad de transición sería:

$$p = P[S(t_(n+1, ...) = S \cdot u | S(t_n, i) = S] = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

con $u > 1 + r > d$

Suponemos encontrarnos en un mercado completo por lo tanto, el precio de un valor de Arrow-Debreu $\pi(n, i)$ en t_0 que paga una unidad en el momento t_n si el precio del activo es igual a $S(t_0)u^i d^{n-i}$ y no paga nada en cualquier otro caso es:

$$\pi(n, i) = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Con las opciones de barrera, el sistema general para valorar opciones no puede ser aplicado ya que la condición ”barrera” para el pago hace que este no dependa únicamente del valor final del activo subyacentefinal sino también del valor a lo largo del intervalo [0,T]. Para solventar este problema, existe un método para calcular el precio sin arbitraje de una opción barrera Europea mediante una inducción hacia atrás [15]. Consideremos una opción put o call de tipo down-and-out con una barrera H. Entonces para generar un precio de arbitraje de estas opciones de barrera tenemos el siguiente algoritmo recursivo:

Sea $G_T(t_n, i)$ el valor de una opción barrera tipo down-and-out en el momento $t_n \in T$ y en el estado i=0,...,n con un vencimiento fijado en $t_N = T$. Debido a las especificaciones de este tipo de contrato, en el momento $t_N = T$, el valor de $G_T(t_N, i)$ tiene que ser igual al pago inmediato en todos los estados i=0,..,N: En el caso de un Call:

$$G_T(t_N, i) = \begin{cases} [S(t_0)u^i d^{N-i} - K]^+ & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} > H \\ 0 & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} \leq H \end{cases}$$

y $\forall t_n \in T \ \ \{t_N\}$

En el caso de un Put:

$$G_T(t_N, i) = \begin{cases} [K - S(t_0)u^i d^{N-i}]^+ & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} > H \\ 0 & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} \leq H \end{cases}$$

[15] En el caso de una opción down-and-out esto ya fue demostrado por Cox, Rubinstein (1985) en [2]

y $\forall t_n \in T \;\; \{t_N\}$

$$G_T(t_N, i) = \begin{cases} \frac{1}{1+r}[pG_T(t_{n+1}, i+1) + (1+p)G_T(t_{n+1}, i)] & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} > H \\ 0 & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} \leq H \end{cases}$$

Un algoritmo recursivo similar a éste se puede aplicar a opciones tipo up-and-out sea para calls o puts. Debido a la gran relación entre las opciones Europeas "clásicas" y las opciones de barrera, el método de inducción hacia atrás también puede ser usado en el caso de estas últimas. Modificando este algoritmo, podemos adaptarlo al caso de opciones americanas sean del tipo down-and-out o up-and-out para calls y puts. Tendríamos por ejemplo en el caso de una opción americana tipo down-and-out call:

$$G_T(t_N, i) =$$
$$\begin{cases} max\left\{S(t_0)u^i d^{n-i} - K; \frac{1}{1+r}[pG_T(t_{n+1}, i+1) + (1+p)G_T(t_{n+1}, i)]\right\} & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} > H \\ 0 & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} \leq H \end{cases}$$

De nuevo, podríamos adaptar este método un caso de tipo put. En cambio, con este algoritmo, no podemos deducir el precio de una opción americana de tipo in-. Veamos el caso de una opción europeo de nuevo.
Consideremos una opción tipo down-and-in put. Sea H la barrera inferior y supongamos que H es una posible situación final del activo en el momento $t_N = T$. Sea $J_H \in \mathbb{N}$ tal que $H = S(t_0 u^{J_H} d^{N-J_H}$. Como $u \cdot d = 1$, la simetría de la relación binomial implica que $N - 2J_H$ es el mínimo número de movimientos bajistas tal que el activo activo alcance la barrera por primera vez. Como H es la barrera inferior, tenemos $H < S$ y por lo tanto $N - 2J_H > 0$. Es también interesante ver que cuando una opción down-and-inen el momento t_n $S(t_N) = H$ con un vencimiento $t_N = N$ es igual a una opción europea clásica emitida en t_n. Podríamos dar el precio de arbitrage para una opción europea tipo put down-and-in:
$\forall i = 0, ..., N$

$$G_T(t_N, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} > H \\ [K - S(t_0)u^i d^{N-i}]^+ & \text{si } S(t_0)u^i d^{N-i} \leq H \end{cases}$$

y $\forall t_n \in T \;\; \{t_N\}$ $\forall t_n \in T \setminus \{t_N\}$; i=0,...,n

$$G_T(t_n, i) =$$
$$\begin{cases} \frac{1}{1+r}[pG_T(t_{n+1}, i+1) + (1-p)G_T(t_{n+1}, i)] & \text{si } S(T_0)u^i d^{n-i} \neq H \\ (\frac{1}{1+r})^{N-n} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [K - S(t_0)u^{i+j} d^{N-(i+j)}]^+ & \text{si } S(T_0)u^i d^{n-i} = H \end{cases}$$

En el caso de una opción americana, el algoritmo tiene que cambiarse significativamente.

El ejercicio de una opción in es admisible únicamente cuando el "camino" generado por el precio en los distintos momentos ha cumplido la condición "in". La condición inicial es la misma que el caso europeo, en cambio para las siguientes etapas ahora tendremos[16] :

$$A_T(t_N, i) = [K - S(t_0)u^i d^{N-i}]^+ \ \forall i = 0, ..., N \ \forall n = N-1, ..., 0$$

$$A_T(t_N, i) = max\left\{K - S(t_0)u^i d^{n-i}, \frac{1}{1+r}[pA_T(t_{n+1}, i+1) + (1-p)A_T(t_{n+1}, i)]\right\}$$

$$G_T(t_n, i) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+r}[pG_T(t_{n+1}, i+1) + (1-p)G_T(t_{n+1}, i)] & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} > H \\ A_T(t_n, i) & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} = H \\ max\left\{K - S(t_0)u^i d^{n-i}, \frac{1}{1+r}[pG_T(t_{n+1}, i+1) + (1-p)G_T(t_{n+1}, i)]\right\} & \text{si } S(t_0)u^i d^{n-i} < H \end{cases}$$

7.3 Fórmula para el cálculo de opciones barrera Europeas

Como método general cuando se trata de establecer el precio de una opción barrera, la inducción hacia atrás se puede aplicar de una u otra forma. Para estudiar la convergencia de este método tenemos que construir una fórmula biniomial cerrada para opciones barrera. Para ello, redefinimos la noción de valor de Arrow-Debreu tal que la barrera esté reflejada.

Definición 7.3.1. *Veamos los valores de Arrow-Debreu en este caso:*

i) Un valor down-and-in de Arrow-Debreu en el estado $S(t_N) = x$ esta definido por el pago en el momento t_n :

$$g_d(x, H) = \begin{cases} 1 & \textit{si y sólo si } S(t_N) = x \textit{ y } \exists t_n \in T \textit{ tal que } S(t_n) \leq H \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

ii) Un valor up-and-in de Arrow-Debreu en el estado $S(t_N) = x$ está definido por el pago en el momento t_n :

[16] Con $A_T(t_N, i)$, calculámos recursivamente el precio de arbitraje de una opción clásica americana tipo put. Para opciones tipo down-and-in call y up-and-down call o put, se pueden aplicar algoritmos similares

$$g_d(x,H) = \begin{cases} 1 & \textit{si y sólo si } S(t_N) = x \textit{ y } \exists t_n \in T \textit{ tal que } S(t_n) \geq H \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Proposición 7.3.1. *Sea H una realización final del precio del activo en el momento* t_N *y sea* $J_H \in H$ *tal que* $H = S(t_0)u^{J_H}d^{N-J_H}$

i) El precio de arbitraje $\pi_d(N,i,H)$ *en* t_0 *de un valor down-and-in de Arrow-Debreu en el estado* $S(t_N) = S(t_0)u^i d^{N-i}$ *con una barrera* $H < S(t_0)$ *es igual a:*

$$\pi_d(N,i,J_H) = \begin{cases} (\frac{1}{1+r})^N \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} & si\ i \leq J_H \\ (\frac{1}{1+r})^N \binom{N}{2J_H - i} p^i (1-p)^{N-i} & si\ J_H \leq i \leq 2J_H \\ 0 & si\ 2J_H < i \end{cases}$$

ii) El precio de arbitraje $\pi_u(N,i,H)$ *en* t_0 *para una opción up-and-in de Arrow-Debreu en* $S(t_N = S(t_0)u^i d^{N-i}$ *con barrera* $H > S(t_0)$ *es igual a:*

$$\pi_d(N,i,J_H) = \begin{cases} 0 & si\ i \leq \frac{J_H}{2} \\ (\frac{1}{1+r})^N \binom{N}{2J_H - i} p^i (1-p)^{N-i} & si\ \frac{J_H}{2} \leq i \leq J_H \\ (\frac{1}{1+r})^N \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} & si\ J_H \leq i \end{cases} \tag{9}$$

(10)

Demostración: Para H $< S(t_0)$, $J_H < \frac{N}{2}$, el principio de reflexión de Feller (1968) produce $Z_d(N,i,J_H)$ caminos de precios con valor terminal $S(t_0)u^i d^{N-i}$ que tocan o cruzan la barrera H $= S(t_0)u^{J_H}d^{N-J_H}$

$$Z_d(N,i,J_H = \begin{cases} \binom{N}{i} & \text{si } i \leq J_H \\ \binom{N}{2J_H - i} & \text{si } J_H \leq i \leq 2J_H \quad \forall i = 0,...,N \\ 0 & \text{si } i > 2J_H \end{cases}$$

Como la probabilidad de transmisión p define una única martingala equivalente de medida P, el precio de arbitraje de una opción down-and-in de Arrow-Debreu viene dada por:

$$\pi_d(N,i,H) = (\frac{1}{1+r})^N E_P[g_d(N,i,H)]$$

De forma similar haríamos para una opción tipo up-and-in.

□

Observación :
Para $J_H \leq \frac{N}{2}$ y por lo tanto $H \geq S(t_0)$ una opción down-and-in coincide con una opción tradicional (incondicional) de Arrow-Debreu. Si $J_H \leq \frac{N}{2}$ y por lo tanto $H \leq S(t_0$ una opción tipo up-and-in es igual a una tradicional. Por lo tanto, estas opciones condicionadas de Arrow-Debreu pueden utilizarse para calcular la fórmula binomial para todas las opciones barrera de tipo europeo.

8 Conclusión

Una vez finalizado este trabajo son muchas las conclusiones que podemos deducir. Estas conclusiones las podemos encontrar fácilmente en los resultados de los teoremas o fórmulas de cada capítulo.
Los modelos discretos de un activo y dos fechas son una buena manera de iniciarse en las inversiones financieras, aunque se quedan muy obsoletas frente a una situación real. Es por eso que los modelos presentados a continuación (de múltiples estados y activos) representan de forma más verídica la valoración de las opciones. En este trabajo también hemos podido presentar conceptos tan importantes como la medida neutral al riesgo, el equilibrio en mercados financieros o la función de utilidad. Finalmente hemos podido presentar un ejemplo práctico de valoración de una opción mediante el método del árbol binomial, lo que nos ha permitido presentar una breve introducción al cálculo de opciones tipo "barrera". También es importante resaltar que nuestros modelos discretos quedan sobrepasados en algunas situaciones por los modelos continuos y especialmente por el método de Black-Scholes[17] Igualmente podemos afirmar que el método de valoración de opciones en tiempo discreto es más adaptado en opciones americanas. Es por eso que las entidades financieras usan una combinación de todos estos métodos mediante cálculos computacionales para lograr un resultado más certero y por lo tanto más beneficioso para ellos.

A través de este trabajo, hemos descubierto que son los equilibrios financieros, las opciones, las opciones exóticas, y otro tipo de productos financieros. También hemos visto que todos estos productos dependen del funcionamiento correcto de mundo económico y que el precio de estos se puede calcular únicamente en tiempos "normales" es decir fuera de situaciones excepcionales como la reciente guerra de Ucrania o un crack financiero como el de 2008. Viendo como el mundo de los derivados financieros especulativos de alto riesgo ha crecido exponencialmente a lo largo de los últimos 30 años, quizá es momento de pensar en no aumentar este mercado por su debilidad frente a sucesos que alterarían la economía global. Tenemos que ser conscientes que todas las operaciones financieras de una gran entidad pueden debilitarla y por ente llevarla a la quiebra junto a todos sus clientes (como en el caso de Lehman Brothers Holdings Inc[18] . Nuestra prioridad debe ser en todo momento cubrirnos frente al riesgo antes de maximizar los beneficios ya que nuestra principal tarea es conservar la estabilidad de los ahorros de los clientes y el buen funcionamiento del ecosistema financiero.

[17]El modelo de Black-Scholes o ecuación de Black-Scholes es una ecuación usada en matemática financiera para determinar el precio de determinados activos financieros. Esta ecuación, basada ampliamente en la teoría de procesos estocásticos, modela variaciones de precios como un proceso de Wiener.

[18]Lehman Brothers Holdings Inc. era una sociedad global de servicios financieros en los Estados Unidos fundada en 1850. Destacaba en banca de inversión, gestión de activos financieros e inversiones de renta fija, banca comercial, gestión de inversiones y servicios bancarios integrales. La quiebra de Lehman Brothers es la mayor bancarrota en la historia de los Estados Unidos y está vigorosamente asociada con la crisis financiera mundial de 2008.

9 Referencias

[1] Rose-Anne Dana, Monique Jeanblanc y A.Kennedy: Financial markets in continuous time, Springer (2007)

[2] John. C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein: "Option Pricing: A Simplified Approach"

[3] Hans Fôllmer y Alexander Schied: Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time

[4] Matthias Reimer y Klaus Sandmann: A discrete time approach for european and american barrier

[5] Daniel García: Teoremas del punto fijo y aplicaciones (diposit ub)

[6] Daniel Arroyo Relión: Sobre un Teorema de Kakutani vía Martingalas

[7] Thanh le: Direct proofs of the Existence of Equilibrium, the Gale-Nikaido-Debreu Lemma and the Fixed Point Theorems using Sperner's Lemma

[8] DURÁN HERRERA, Juan José. Diccionario de Finanzas. 2011. ISBN 978-84-96877-47-4

[9] J. Agustín Cano Garcés: Valuación de opciones financieras mediante la teoría de la dualidad de la programación lineal

[10] BBVA MERCADOS FINANCIEROS Y ECONOMÍA MONETARIA Act. 28 ago 2020 https://www.bbva.com/es/que-son-los-mercados-over-the-counter-otc/

[11] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston: Microeconomic Theory