



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

# GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

## PROBLEMA DE SITNIKOV

---

Autor: Lídia Quera Coderch

Director: Dr. Ernest Fontich

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

## Abstract

The Sitnikov Problem is the study of the dynamics of a particular system in the restricted Three-Body Problem, where the masses interact with each other through Newton's law of universal gravitation. This paper studies the motion of the constrained mass of the Sitnikov Problem in order to demonstrate, through the Bernoulli Shift, the existence of periodic orbits.

**Key Words:** Sitnikov, Periodic orbits, Bernoulli, Symbolic Dynamics, Gravitation.

## Resum

El problema de Sitnikov és l'estudi de la dinàmica d'un sistema particular del problema de tres cossos restringit, en el qual les masses interactuen entre elles a través de la llei de la gravitació universal de Newton. Aquest treball estudia el moviment del cos de massa zero d'aquest problema per acabar demostrant, a través de la Shift de Bernoulli, l'existència d'òrbites periòdiques.

**Paraules clau:** Sitnikov, òrbites periòdiques, Bernoulli, Dinàmica simbòlica, Gravitació.

## Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Ernest Fontich i Julià, tot el recolzament i ànims rebuts des de la seva persona, així com el temps que m'ha dedicat. Ha sigut un plaer treballar amb ell i escoltar-l'ho.

M'agradaria també, agrair a la meva família el suport constant, no només en aquest treball sinò al llarg de tot el grau, en els moments fàcils i els que requerien més dedicació.

Per acabar, donar les gràcies als meus companys per fer-me costat durant les hores de biblioteca compartint estones d'estudi.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció a la mecànica celest</b>	<b>3</b>
1.1	La mecànica clàssica . . . . .	3
1.2	La mecànica celest . . . . .	3
1.2.1	Johannes Kepler . . . . .	3
1.2.2	Lleis de Kepler . . . . .	3
1.2.3	Isaac Newton . . . . .	4
1.2.4	Lleis de Newton . . . . .	4
1.2.5	Llei de la gravitació universal . . . . .	5
1.3	Problema de N-cossos . . . . .	5
1.4	Forces centrals . . . . .	5
1.5	Invariància per isometries . . . . .	6
1.6	El moment angular . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Dinàmica Simbòlica</b>	<b>7</b>
2.1	Shift de Bernoulli . . . . .	10
2.2	La funció $\sigma$ com a subsistema . . . . .	13
2.2.1	La funció de Horseshoe . . . . .	16
2.2.2	Construcció d'un subconjunt invariant respecte Horseshoe . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Problema de dos cossos</b>	<b>20</b>
3.1	Descripció del problema . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Problema de tres cossos</b>	<b>25</b>
4.1	Problema de tres cossos restringit . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Problema de Sitnikov</b>	<b>25</b>
5.1	Moviment del $m_3$ . . . . .	26
5.1.1	Comportament de les solucions a l'infinit . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>41</b>

## El projecte

El problema de Sitnikov és l'estudi d'un sistema particular del problema de tres cossos, en els quals un d'ells és considerat massa zero (Restricted three-body Problem). Aquest sistema és format per dos cossos amb massa idèntica  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$  que es mouen en un pla en forma d'el·lipses i amb un tercer cos, de massa zero, movent-se per una varietat invariant que passa pel punt del centre de masses.

Primer de tot, exposem les nocions bàsiques i necessàries de la mecànica clàssica, així com les lleis de Newton i Kepler i la llei de la Gravitació Universal de Newton.

També expliquem, de forma general, la funció Shift de Bernoulli. Aquesta ens permet, posteriorment, descriure d'una forma més senzilla les òrbites de la tercera massa en el nostre sistema.

Hi afegim la funció de Horseshoe, un cas particular on hi apliquem la shift com a subsistema. Té els mateixos passos a seguir que el nostre problema final.

Seguidament estudiem la dinàmica, a través d'equacions diferencials, de la massa restringida segons les possibles condicions inicials. Anunciem i demostrem un seguit de lemes, puntualment gràcies a la transformació de McGehee i, acabem reduïnt el nostre treball als casos en que l'òrbita de la  $m_3$  no escapa, però que la seva velocitat inicial és molt propera a la velocitat d'escapament.

Per acabar, acabem relacionant el capítol de la shift de Bernoulli amb la funció  $\phi$  del nostre problema. Amb això s'acaba demostrant l'existència d'òrbites periòdiques en la dinàmica del sistema, on es conclou l'estudi.

## Estructura de la Memòria

El primer capítol està dedicat a la introducció de la mecànica clàssica i mecànica celest. Fa referència als grans astrònoms Kepler i Newton i s'anuncien algunes de les seves lleis, les quals seran la base del nostre treball. També s'hi mencionen conceptes bàsics de mecànica, com les forces centrals o el moment angular.

Al segon capítol s'hi explica la dinàmica simbòlica i, de forma genèrica, la shift de Bernoulli. Aquesta funció serà imprescindible per demostracions posteriors. S'hi explica la funció de Horseshoe com un exemple de funció en la qual se li aplica la shift com a subsistema.

El problema de dos cossos ocupa el següent capítol del treball. Aquest conté informació sobre la dinàmica d'aquests cossos i s'extreu, pas a pas, l'equació que descriu el moviment de cada un d'ells respecte la seva distància a l'origen.

Finalment, després d'una breu explicació sobre el problema de tres cossos i el problema de tres cossos restringit, s'introdueix el problema de Sitnikov. Primer de tot, es presenten les hipòtesis del problema i seguidament s'estudia la dinàmica de la massa restringida. Finalment i amb el recolzament de la Shift de Bernoulli, s'acaba

demostrant l'existència d'òrbites periòdiques al moviment de  $m_3$  (cos de massa zero del problema de Sitnikov).

# 1 Introducció a la mecànica celest

## 1.1 La mecànica clàssica

La mecànica clàssica (o mecànica Newtoniana) és una branca de la física que es refereix a un conjunt de lleis físiques que descriuen el comportament dels cossos sotmesos a l'acció d'un sistema de forces. Estudia les lleis del comportament dels cossos físics macroscòpics en repòs i a velocitats petites (comparades amb la velocitat de la llum).

## 1.2 La mecànica celest

La mecànica celest és una branca de l'astronomia i la mecànica que estudia els moviments dels cossos celestos provocats pels efectes gravitatoris que es provoquen l'un a l'altre. L'objectiu de la mecànica celest és trobar solucions a un sistema d'equacions diferencials anomenat el problema dels N-cossos. Aquest problema descriu el moviment de N masses situades en un espai 3-dimensional atraient-se entre elles a través de la llei de gravitació universal de Newton.

### 1.2.1 Johannes Kepler

Johannes Kepler, astrònom i matemàtic alemany dels anys 1571-1630, va ser una figura clau en la revolució científica. Kepler va viure en una època on no hi havia una distinció clara entre l'astronomia i l'astrologia, però tampoc no hi havia una gran divisió entre l'astronomia i la física. Va incorporar arguments religiosos i raonaments en els seus treballs, motivats per la convicció que Déu havia creat el món d'acord amb un pla comprensible que era accessible per la llum natural de la raó.

Kepler descrigué la seva nova astronomia com 'física celest', com 'una excursió a la Metafísica d'Aristòtil'.

### 1.2.2 Lleis de Kepler

Aquestes lleis van ser enunciades pel mateix Johannes Kepler amb l'objectiu de descriure matemàticament el moviment dels planetes com a òrbites al voltant del Sol [1].

1. **Primera llei de Kepler (1609):** L'òrbita d'un cos és una el·lipse amb l'altre cos situat en un dels seus dos focus.
2. **Segona llei de Kepler (1609):** Un segment rectilini que uneix el primer cos amb el segon, escombra àrees iguals en intervals de temps iguals.
3. **Tercera llei de Kepler (1619):** El quadrat del període orbital d'un planeta és proporcional al cub del semieix major de la seva òrbita.

Aquestes lleis s'apliquen a qualsevol cos orbitant al voltant d'un altre sempre que negligim la influència de forces externes al sistema.

### 1.2.3 Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) [2] va néixer el 25 de desembre a Woolsthorpe Manor a Woolsthorpe-by-Colsterworth. Després d'aprendre les bases de la matemàtica i ser expulsat del 'King's School' de Grantham, Newton va començar a destacar d'entre la resta d'alumnes traient les millors notes. Al juny del 1661, va ser admès al Trinity College a la universitat de Cambridge, on va formar-se en astronomia i física llegint els astrònoms més prodigiosos de la història.

Ningú sap què va ser el que va portar a Newton a establir el vèncl crucial entre la força de gravetat que atrau la Lluna i la força de gravetat que tira una poma al terra. L'únic que es sap és que la gènesis de la llei de la gravetat universal de Newton es va produir en una època poc convencional i molt desastrosa. A l'agost del 1665, la pesta bubònica atacava Londres. Tal era la por de contagi a Cambridge que la universitat va decidir tancar les seves portes. Newton, que llavors era un perfecte desconegut de vint-i-dos anys, va emprendre el viatge de tornada cap a la granja familiar de Woolsthorpe, mitjançant tartana i a peu. Allà va succeir els coneguts successos de la poma que cau sobre el cap de Newton.

*Millones vieron caer la manzana pero Newton fue el único que preguntó por qué.*

[Bernard Baruch]

Va derivar de l'afirmació del matemàtic Johannes Kepler que els planetes es mouen en òrbites el·líptiques per acabar afirmant que les forces externes que suportaven els cossos venien donades per l'atracció d'unes masses sobre les altres. El fet de que la intensitat d'aquestes forces sigüés inversament proporcional al quadrat de la distància que separa els cossos, va permetre a Newton demostrar matemàticament les tres lleis de Kepler.

### 1.2.4 Lleis de Newton

#### 1. *Llei o principi d'inèrcia*

Els cossos es mantenen en repós o bé en moviment rectilini uniforme si aquest és el seu estat inicial i no rep cap força o bé, si en rep, aquestes estan en equilibri. És a dir, el sumatori de forces que rep un cos és zero si, i només si, la derivada de la seva velocitat respecte el temps (acceleració) és nul·la.

#### 2. *Llei o principi fonamental de la dinàmica*

La força que genera el moviment és directament proporcional al canvi del 'momentum' (quantitat de moviment:  $p=mv$ ) en cada unitat de temps. És a dir, la força és equivalent a la derivada del moment respecte el temps.



### 1.2.5 Llei de la gravitació universal

La llei de la gravitació universal és una llei de la mecànica clàssica que descriu la força o interacció gravitatòria d'entre cossos amb massa. Va ser formulada per Isaac Newton en el seu llibre (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) [3] publicat el 5 de juliol del 1687. A través d'aquesta llei, s'estableix, per primera vegada, una relació proporcional (deduïda empíricament) de la força d'atracció d'objectes amb massa. Aquesta llei implica que la proximitat i la massa dels dos cossos intervenen a la força d'atracció que aquests dos experimenten. No obstant, avui dia se sap que, a partir d'una certa quantitat de massa i velocitat, aquesta llei perd validesa (és el cas de cossos supermassius o amb velocitats pròximes a la velocitat de la llum). En aquests casos es fa necessari treballar amb la llei de Relativitat General formulada el 1915 per Albert Einstein.

La llei de la gravitació universal és útil per comprendre la major part dels fenòmens gravitatoris i ens serà útil per estudiar el nostre problema (El problema de Sitnikov).

**Proposició 1.1.** *La força amb la que s'atrauen dos objectes és proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa. La fórmula fundamental de la llei de Gravitació Universal és la següent:*

$$F = -G \frac{Mm}{|r|^2} \vec{r}$$

per  $G$  constant de gravitació,  $M, m$  les masses dels dos cossos que s'atrauen i  $r$  el vector que va d'una massa a l'altra.

### 1.3 Problema de N-cossos

El problema dels N-cossos és l'estudi de solucions en l'equació diferencial que descriu el moviment de N-cossos, per a  $N \geq 3$ , a un espai 3-dimensional que es mouen, únicament, per l'atracció de la llei de gravitació universal.

Siguin  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , els N vectors a l'espai de dimensió 3 que descriuen les posicions de les N masses  $m_k$  corresponents, el sistema d'equacions diferencials té la següent forma:

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{dU}{dx_k} \quad (1.1)$$

on

$$U = \sum_{1 \leq k < l \leq N, k \neq l} \frac{m_k m_l}{|x_k - x_l|}. \quad (1.2)$$

### 1.4 Forces centrals

Una força central en un espai  $\mathbb{R}^3$  és un camp de forces amb la direcció del vector posició amb un centre fix i una intensitat, que, depèn només de la distància a l'origen. Sigui  $f$ , una funció donada tal que  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

Veiem així que la força  $F$  només depèn de la posició de la massa i d'una funció  $f$  que depèn de  $|x|$ . El vector força sempre és paral·lel al vector posició.

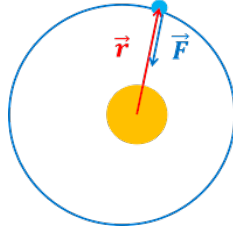


Figura 1: Paral·lelisme entre el vector posició i força

Com a conseqüència del paral·lelisme, el moment de forces és nul  $\tau := x \times F = 0$  i aleshores, el moment angular sempre és constant:  $c := x \times \dot{x} = \text{constant}$ , ja que la derivada és zero. Si es dona el cas que  $c = 0$ , aleshores es dedueix que  $x(t)$  i  $\dot{x}(t)$  són linealment dependents per tot  $t \in I$  on  $I \subset \mathbb{R}$  i, per tant, el cos descriu un moviment rectilini a través de la recta que l'uneix amb l'origen.

Per a cada funció  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se li correspon un camp de forces centrals  $F$ . Si  $f > 0$ , l'origen és repulsiu (el vector força apunta cap enfora) i si  $f < 0$ , l'origen serà atractiu (el vector força apunta cap al centre).

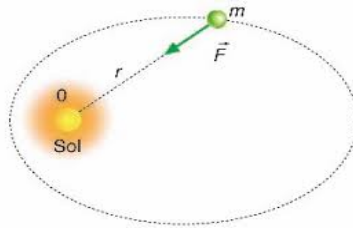


Figura 2: Força central amb el Sol d'origen

## 1.5 Invariància per isometries

Sigui una isometria lineal  $A \in M_3(\mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^3$  on  $AA^T = A^T A = I_3$  tenim la següent propietat: si  $A$  és ortogonal, aleshores  $|Ax| = |x|$  per  $x \in \mathbb{R}^3$ .

**Proposició 1.2.** *Sigui  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  un moviment en un camp de forces centrals*

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}$$

*i sigui  $A \in O(3)$  una matriu ortogonal on  $O(3) = \{\text{matrius ortogonals } 3 \times 3\}$ . Aleshores*

$$Ax : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad t \mapsto Ax(t)$$

*també és una solució.*

*Demostració.* Sigui  $x$  una solució del sistema amb

$$\ddot{x}(t) = f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|}.$$

Aleshores, veiem que  $Ax$  també ho és:

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ax(t)) = A\ddot{x}(t) = f(|x(t)|)\frac{Ax(t)}{|x(t)|}.$$

Per la propietat enunciada a l'inici de l'apartat,  $|Ax| = |x|$  tenim:

$$f(|x(t)|)\frac{Ax(t)}{|x(t)|} = f(|Ax(t)|)\frac{Ax(t)}{|Ax(t)|},$$

per tant:

$$A\ddot{x}(t) = f(|Ax(t)|)\frac{Ax(t)}{|Ax(t)|}$$

i  $Ax$  també és solució. □

## 1.6 El moment angular

El moment angular,[4], és una magnitud física que representa la quantitat de moviment de rotació d'un objecte.

**Definició 1.3.** *Sigui  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funció de classe  $C^1$  que representa el vector posició d'una partícula que es mou a l'espai. Definim el seu moment angular com la funció  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  donada per  $c(t) = x(t) \times \dot{x}(t), t \in I$*

Sigui el cas que una partícula  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  es mou sota l'acció d'un camp de forces centrals:

$$\ddot{x} = f(|x|)\frac{x}{|x|}.$$

Observem que  $c \in C^1(I, \mathbb{R}^3)$  ja que  $x, \dot{x}$  són funcions de classe  $C^1$  i, utilitzant que el producte vectorial és bilineal, derivem:

$$\dot{c} = \frac{d}{dt}(x \times \dot{x}) = \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x} = \frac{f(|x|)}{|x|}x \times x = 0.$$

Concluïm, per segona vegada, que dins dels efectes d'un camp de forces centrals, el moment angular és sempre un vector constant  $c \in \mathbb{R}^3$ . Per tant, podem deduir que si  $c \neq 0$ , el moviment està contingut en un pla que anomenem  $\pi$ , el pla ortogonal a  $c$  que passa per l'origen.  $x(t), \forall t \in I$ , està també en aquest pla.

Sempre es pot trobar una isometria que converteixi aquest pla  $\pi$  al pla  $\{z = 0\}$  per facilitar els càlculs.

## 2 Dinàmica Simbòlica

[5]Un dels objectius de la teoria dels sistemes dinàmics és descobrir i descriure les característiques de l'acció d'una transformació sobre un espai. Així doncs, donat un espai de punts i una transformació de l'espai en si mateix, a la dinàmica li correspon averiguar com es mouen els punts a l'aplicar successivament la transformació, per saber quin és l'estat del sistema en un temps futur.

La idea és caracteritzar les òrbites amb una seqüència de símbols o nombres. Denotem  $A$  un conjunt finit de  $N$  nombres o símbols. Aquests poden ser qualsevols però per facilitar la notació considerarem números naturals. Així doncs tenim  $A = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ ,  $N \geq 2$ .

Definim una distància pels elements d'aquest conjunt:

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases} \quad (2.1)$$

La distància  $d(\cdot, \cdot)$  satisfà els següents axiomes:

1.  $d(a, b) \geq 0$ ,  $\forall a, b \in A$
2.  $d(a, b) = 0 \iff a = b$
3.  $d(a, b) = d(b, a)$ ,  $\forall a, b \in A$
4.  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ ,  $\forall a, b, c \in A$

Per tant, ja que  $A$  és un conjunt no buit i  $d$  és una mètrica, podem considerar el parell  $(A, d)$  com un espai mètric. Considerem la topologia induïda per la mètrica  $d$  que anomenarem com a  $T$ .

**Proposició 2.1.** *El parell  $(A, d)$  on  $d$  és la mètrica anunciada a (2.1), és un espai mètric compacte i no connex.*

*Demostració.* Ja hem comentat anteriorment que al ser  $A$  un conjunt no nul i  $d$  una mètrica,  $(A, d)$  és un espai mètric.

Al ser  $A$  un conjunt finit podem afirmar la seva compacitat ja que per qualsevol recobriment obert de  $A$  es pot extreure, clarament, un subrecobriment finit.

Evidentment, també serà un espai no connex, ja que al ser  $A$  un espai finit de punts, existiran dos subconjunts  $B, B'$  oberts en  $A$  tals que

$$B \neq \emptyset, \quad B' \neq \emptyset, \quad B \cup B' \supseteq A, \quad B \cap B' = \emptyset.$$

□

Seguidament definim  $\sum^N$  com un producte cartesià infinit de conjunts  $A$ , és a dir:

$$\sum^N \equiv \dots \times A \times A \times A \times A \times \dots \equiv \prod_{i=-\infty}^{\infty} A_i, \quad \text{per } A_i = A, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

És a dir; siguin  $s_k \in A$ , representem una seqüència infinita d'aquests símbols:

$$s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$$

Al ser  $(A, d)$  un espai mètric, també podrem definir una mètrica per  $\sum^N$ . Considerem els següents dos elements de  $\sum^N$ :

$$s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$$

$$s' = (\dots, s'_{-2}, s'_{-1}, s'_0, s'_1, s'_2, \dots)$$

i definim una  $\bar{d}(s, s')$ :

$$\bar{d}(s, s') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i)} \quad (2.2)$$

on  $d(s_i, s'_i)$ , per  $s_i, s'_i \in A$ , és la distància (2.1).

Comprovem que  $\bar{d}$  és una mètrica:

1.  $\bar{d}(s, s') \geq 0, \quad \forall s, s' \in \Sigma^N.$

Utilitzant que  $d$  és una mètrica veiem que cada element del sumatori és més gran o igual que zero:  $\frac{1}{2^{|i|}} > 0$ ,  $d(s_i, s'_i) \geq 0$  per  $d$  mètrica i, per tant,  $\frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i)} \geq 0$ . Aleshores, cada element serà zero o positiu. És trivial que el sumatori de nombres positius/zero sigui més gran o igual a zero.

2.  $\bar{d}(s, s') = 0 \iff s = s'$

*D'esquerra a dreta*

Al punt anterior hem vist que cada sumand és positiu o zero, per tant, si la distància és zero, aleshores cada sumand ha de ser zero.  $\frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i)} = 0 \iff d(s_i, s'_i) = 0 \iff s_i = s'_i, \forall i$ , per tant,  $s = s'$ .

*De dreta a esquerra*

Si  $s = s'$ , és trivial veure que cada un dels sumands serà zero i, per tant, la  $\bar{d}(s, s') = 0$

3.  $\bar{d}(s, s') = \bar{d}(s', s), \quad \forall s, s' \in \Sigma^N$

És trivial la seva demostració ja que partim de la base que  $d$  és una mètrica i, per tant,  $d(s_i, s'_i) = d(s'_i, s_i)$ .

$$\bar{d}(s, s') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s'_i, s_i)}{1 + d(s'_i, s_i)} = \bar{d}(s', s)$$

4.  $\bar{d}(s, s'') \leq \bar{d}(s, s') + \bar{d}(s', s''), \quad \forall s, s', s'' \in \Sigma^N$

Ho demostrarem per cada un dels termes.

Sigui  $d(s_i, s''_i) \leq d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)$  i  $\frac{1}{1 + d(s_i, s''_i)} \geq \frac{1}{1 + d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)}$  per  $d$  mètrica, aleshores tenim que:

$$\begin{aligned} \bar{d}(s, s'') &= \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s''_i)}{1 + d(s_i, s''_i)} \leq \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)}{1 + d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)} = \\ &= \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)} + \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s'_i, s''_i)}{1 + d(s_i, s'_i) + d(s'_i, s''_i)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s_i, s'_i)}{1 + d(s_i, s'_i)} + \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(s'_i, s''_i)}{1 + d(s'_i, s''_i)} = \bar{d}(s, s') + \bar{d}(s', s'') \end{aligned}$$

**Proposició 2.2.** *L'espai  $\Sigma^N$  dotat de la mètrica (2.2) és*

1. compacte
2. no connex
3. perfecte

*Demostració.* 1. Al ser  $A$  un conjunt compacte, tenim que  $\Sigma^N$  és compacte pel teorema de Tychonov (Munkres [1975], Secció 5-1).

2. Al ser  $A$  totalment disconnex, aleshores  $\Sigma^N$  també serà totalment disconnex ja que el producte de conjunts disconnexos és disconnex (Dugundji [1966]).

3. Serà perfecte si és tancat i no conté punts aïllats.

$\Sigma^N$  és tancat ja que és compacte.

Per demostrar que no conté punts aïllats, considerarem un element qualsevol  $\bar{s} \in \Sigma^N$  i haurem de veure que per qualsevol entorn de  $\bar{s}$ , aquest conté  $s \neq \bar{s}$  per  $s \in \Sigma^N$ .

Sigui  $\epsilon > 0$ , definim un entorn de  $\bar{s}$  com el conjunt de  $s \in \Sigma^N$  tal que  $\bar{d}(\bar{s}, s) < \epsilon$ . Tal i com es demostra a la proposició (2.3) al punt 2, podem veure que per  $\epsilon > 0$ ,  $\exists M = M(\epsilon)$ , tal que si  $\bar{d}(\bar{s}, s) < \epsilon$ , aleshores  $s_i = \bar{s}_i$ ,  $\forall |i| \leq M(\epsilon)$ . Per tant, definim el conjunt

$$\Gamma^{M(\epsilon)}(\bar{s}) = \{s \in \Sigma^N; s_i = \bar{s}_i, \quad \forall |i| \leq M; \quad s_i, \bar{s}_i \in, \quad \forall i\}.$$

Així doncs, sigui  $s^* = \bar{s}_{M(\epsilon)+1}$ , el valor de  $\bar{s}$  en la posició  $M(\epsilon) + 1$ . Agafarem un altre valor diguem-li  $v = s^* + 1$  si  $s^* < N$  i  $v = s^* - 1$  si  $s^* = N$ . Seguidament, trobem que l'element

$$s = (\dots, \bar{s}_{-1}, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \dots, \bar{s}_{M(\epsilon)-1}, \bar{s}_{M(\epsilon)}, v, \bar{s}_{M(\epsilon)+1}, \dots)$$

és diferent a  $\bar{s}$  i també pertany a l'entorn  $\Gamma^{M(\epsilon)}$ .

Aquest procediment es pot repetir per qualsevol  $\epsilon$ , és a dir, per qualsevol entorn. Per tant, hem demostrat que l'espai  $\Sigma^N$  dotat de la mètrica (2.2) és perfecte.

□

## 2.1 Shift de Bernoulli

Definim una funció  $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$ . Sigui  $s \in \Sigma^N$ ,  $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Sigma^N$  tal que:

$$\sigma(s) = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$$

on  $[\sigma(s)]_i = s_{i+1}$ .

**Proposició 2.3.** 1.  $\sigma(\Sigma^N) = \Sigma^N$

2.  $\sigma$  és una funció contínua.

*Demostració.* 1. La prova de  $\sigma(\Sigma^N) = \Sigma^N$  és trivial.

2. Sigui  $f$  una funció, aquesta serà contínua si per  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\epsilon)$  tal que si  $\bar{d}(s, s') < \delta(\epsilon)$ , aleshores  $\bar{d}(\sigma(s), \sigma(s')) < \epsilon$  per  $s, s' \in \sum^N$ . Per demostrar-ho, suposem un  $\epsilon > 0$  i considerem un valor  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \epsilon$ . Seguidament considerem  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ .

Hem de veure que si  $\bar{d}(s, s') < \delta$ , aleshores  $s_i = s'_i, \quad \forall |i| \leq M$ . Per comprovar-ho, ho suposem cert inicialment i considerem  $j$  amb  $|j| \leq M$  tal que  $s_j \neq s'_j$ , llavors el sumand corresponent a l'índex  $j$  és

$$\frac{1}{2^{|j|}} \frac{d(s_j, s'_j)}{1 + d(s_j, s'_j)} = \frac{1}{2^{|j|}} \frac{1}{2}$$

Fàcilment creem un seguit de inequacions on:

$$\bar{d}(s, s') \geq \frac{1}{2^{|j|}} \frac{d(s_j, s'_j)}{1 + d(s_j, s'_j)} = \frac{1}{2^{|j|}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{|j|+1}} \geq \frac{1}{2^{M+1}},$$

que és una contradicció de la hipòtesi inicial de  $\bar{d}(s, s') < \delta$  per  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$ . Per tant, donem per demostrat que si  $\bar{d}(s, s') < \delta$ , aleshores  $s_i = s'_i, \quad \forall |i| \leq M$  per tant podem dir que  $[\sigma(s)]_i = [\sigma(s')]_i, \quad \forall |i| \leq M - 1$ . Si separem el sumatori de la següent manera, tenim:

$$\begin{aligned} \bar{d}(\sigma(s), \sigma(s')) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-M} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} + \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}. \end{aligned}$$

Per  $\frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} = \frac{1}{2}$  o bé  $\frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} = 0$  aleshores tenim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{-M} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} + \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)}{1 + d(\sigma(s)_i, \sigma(s')_i)} &\leq \sum_{i=-\infty}^{-M} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{1}{2} + \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{1}{2} = \\ &= 2 \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{1}{2} = 2 \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{M-1}}. \end{aligned}$$

Per tant, sigui  $\epsilon$  donada, existeix un  $\delta = \frac{1}{2^{M+1}}$  per  $M$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \epsilon$  llavors,  $\epsilon$ , si  $\bar{d}(s, s') < \delta$ , aleshores,  $\bar{d}(\sigma(s), \sigma(s')) < \epsilon$ :

$$\bar{d}(s, s') \leq \frac{1}{2^{M-1}} < \epsilon.$$

□

Seguidament, volem estudiar la dinàmica de la funció  $\sigma$  en  $\Sigma^N$ , és a dir, les òrbites dels punts de  $\Sigma^N$  respecte les iteracions de  $\sigma$ .

Veiem que la funció  $\sigma$  té exactament  $N$  punts fixos. Aquests punts seran  $p_i = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$ , per  $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, N\}$  tals que  $s_k = i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

També trobem punts  $p \in \Sigma^N$  que tenen un conjunt de valors que es repeteixen periòdicament. Podem considerar  $k$  la llargada d'aquest conjunt de valors. Veiem que les òrbites amb seqüències que es repeteixen periòdicament, són igualment periòdiques sota la funció  $\sigma$ , amb període  $k$ .

**Proposició 2.4.** *La funció  $\sigma$  té:*

1. *Una quantitat numerable d'òrbites periòdiques.*
2. *Una quantitat no numerable d'òrbites no periòdiques*

*Demostració.* 1. Sigui  $s \in \Sigma^N$  tal que  $s$  té òrbites periòdiques de període  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , si els elements del període fossin  $s_1 s_2 \dots s_k$  podem definir  $s = \{\overline{s_1 s_2 \dots s_k}\}$   
Per tant, si escrivim les òrbites per cada període  $k$ :

$$\text{Període 1 : } \{\overline{2}\}, \{\overline{3}\}, \{\overline{4}\}, \dots, \{\overline{N}\}$$

$$\text{Període 2 : } \{\overline{01}\}, \{\overline{10}\}, \{\overline{21}\}, \{\overline{12}\}, \dots, \{\overline{(N-1)N}\}$$

$$\text{Període 3 : } \{\overline{001}\}, \{\overline{010}\}, \{\overline{100}\}, \{\overline{002}\}, \dots, \{\overline{(N-1)(N-1)N}\}$$

...

Veiem que per cada període  $k$  hi ha un nombre finit d'òrbites periòdiques. Per tant, hi ha un nombre numerable d'òrbites periòdiques.

2. Sigui  $s \in \Sigma^N$  un element amb

$$s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots), \quad s_i \in A, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Podem associar la seqüència bi-infinita presentada per  $s$  amb una seqüència infinita de valors  $s_i \in A$  que representaran un nombre irracional. És a dir:

$$(\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) \rightarrow 0.s_0 s_1 s_{-1} s_2 s_{-2} s_3 s_{-3} \dots$$

on  $0.s_0 s_1 s_{-1} s_2 s_{-2} s_3 s_{-3} \dots$  representa un nombre irracional. Seguidament, podem passar aquest nombre irracional, que no conté seqüències periòdiques i és menor que 1, a un nombre de Base 2. Ens quedaria

$$0.s'_0 s'_1 s'_{-1} s'_2 s'_{-2} s'_3 s'_{-3} \dots,$$

per  $s'_i \in \{0, 1\}$ .

Utilitzarem el fet que els nombres irracionals  $c \in \mathbb{I}$  on  $c \in [0, 1]$ , formen un conjunt no numerable.

Per tant, tenim una correspondència entre un conjunt no numerable de punts i les òrbites que no tenen seqüències periòdiques, aleshores hi ha un conjunt no numerable d'òrbites no periòdiques.

□



## 2.2 La funció $\sigma$ com a subsistema

Assumim que tenim una regió quadrada  $Q$  tal que

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

i una funció contínua  $\phi$  a la regió quadrada  $Q$  tal que  $\phi(Q)$  interseca amb  $Q$  en  $N$  components que denotarem per  $U_k$ , per  $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Les preimatges d'aquestes components, seran anomenades  $V_k$  per  $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  tal que  $V_i = \phi^{-1}(U_i)$ . Considerarem que  $U_k$  són les bandes horitzontals de  $Q$  i  $V_k$  les bandes verticals de  $Q$ .

Definim una sèrie de conceptes que ens serviran per acabar formulant un teorema important per la matèria en qüestió.

Sigui  $\mu$  un nombre donat tal que  $0 \leq \mu \leq 1$ , denotem per  $y = u(x)$  la funció d'una corba horitzontal amb  $0 \leq u(x) \leq 1$ , per  $0 \leq x \leq 1$  i

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu|x_1 - x_2|, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1. \quad (2.3)$$

Amb aquesta equació estem assegurant que  $y = u(x)$  és una funció Lipschitziana amb constant de Lipschitz  $\mu$ . Aquesta condició ens indica que en cap punt de la funció, la pendent d'aquesta corba no es dispara.

Siguin  $u_1(x)$  i  $u_2(x)$  dues corbes horitzontals satisfent les condicions anteriors, si es compleix:

$$0 \leq u_1(x) < u_2(x) \leq 1,$$

definim la regió  $U$  com:

$$U = \{(x, y); \quad 0 \leq x \leq 1; \quad ; u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}, \quad (2.4)$$

que serà la banda horitzontal de  $Q$  delimitada per les corbes  $u_1(x)$  i  $u_2(x)$ . Denotarem per  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mu)$  el conjunt de totes les bandes horitzontals possibles.

Definim el diàmetre d'una banda  $U \in \mathbf{U}(\mu)$  com:

$$d(U) = \max_{0 \leq x \leq 1} (u_2(x) - u_1(x)).$$

A la Figura 3 hi tenim una representació d'aquesta banda:

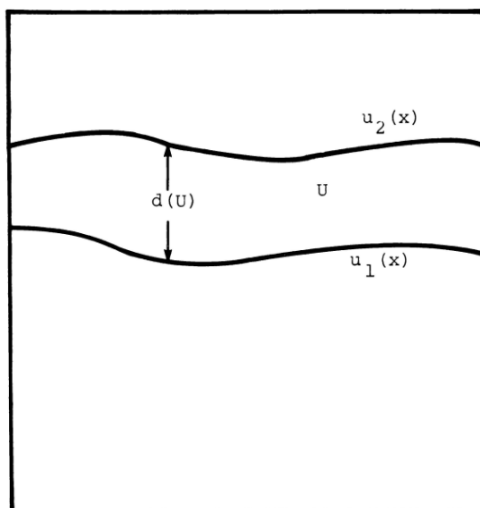


Figura 3: Banda horitzontal de  $Q$ .

De la mateixa manera podem definir les bandes verticals amb les corresponents funcions  $x = v(y)$ , per  $0 \leq y \leq 1$ . Aquesta funció  $v$  també haurà de complir les condicions:

1.  $0 \leq v(y) \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
2. La condició de Lipschitz:

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2|, \quad 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1.$$

En aquest cas, considerarem  $V$  la regió continguda entre dues corbes:

$$V = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1; \quad v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

per  $v_1$  i  $v_2$  dues corbes verticals. El seu corresponent diàmetre serà:

$$d(V) = \max_{0 \leq y \leq 1} (v_2(y) - v_1(y)).$$

De la mateixa manera que amb amb les bandes horitzontals, denotem per  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu)$  el conjunt de bandes verticals de  $Q$  que satisfan les condicions enunciades.

**Lema 2.5.** *Siguin  $U^1 \supset U^2 \supset U^3 \supset \dots$  una seqüència de bandes horitzontals  $U^k \in \mathbf{U}(\mu)$ , per  $k = 1, 2, 3, \dots$  i si  $d(U^k) \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$ , aleshores*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U^k$$

*defineix una corba horitzontal.*

*Demostració.* Per la definició de bandes horitzontals (2.4) tenim que és un conjunt tancat d'un espai mètric  $(Q, d_e)$  on  $d_e$  és la distància euclidiana. Pel Teorema de

Heine-Borel, tenim que  $(Q, d_e)$  és compacte i, tot subconjunt tancat d'un espai mètric compacte és compacte.

Per  $U^k$  compactes,  $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , tenim que  $U^k$  és tancat i acotat. Per tant, si considerem  $d(U^k) \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$ , on  $d$  és la distància màxima de les dues fronteres horitzontals que formen  $U^k$ . Aleshores, al ser  $U^k$  tancat i acotat, tenim que  $U^k$  tendeix a una corba horitzontal quan  $k \rightarrow \infty$ .

Per tant, la intersecció  $\bigcap_{k=1}^{\infty} U^k$  definirà una corba horitzontal.  $\square$

El cas amb bandes verticals es fa de forma anàloga.

**Lema 2.6.** *Sigui una corba horitzontal  $y = u(x)$  i una de vertical  $x = v(y)$ , aquestes intersequen en un punt.*

*Demostració.* Si hi hagués un punt intersecció entre les corbes  $u(x) = y$  i  $v(y) = x$ , aquest seria un punt  $(x, y)$  tal que  $x = v(u(x))$ . Hem de demostrar que  $x - v(u(x))$  té un únic zero. Gràcies a les condicions Lipschitz de les funcions  $u$  i  $v$  amb constant de Lipschitz  $\mu$ , tenim:

$$|v(u(x_1)) - v(u(x_2))| \leq \mu |u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu^2 |x_1 - x_2|$$

per  $\mu^2 < 1$ .

Sigui  $I$  l'interval tancat  $I = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ , és clar que  $I$  és un espai mètric complet. Considerant la funció  $g(x) = v(u(x))$  on

$$g : I \rightarrow I.$$

Per tant, tenim que  $g = v(u(x))$  és una funció contractiva, i pel teorema de la funció contractiva (Arnold [1973]) tenim que  $g$  té un únic punt fix.

$\square$

Suposem que la nostra funció  $\phi$  compleix les següents hipòtesis:

1. Sigui  $A = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  amb  $N < \infty$ , assumim que  $U_a, V_a$  per  $a \in A$  són bandes horitzontals i verticals, respectivament, i disjunctes en  $Q$ . Suposem que la nostra funció  $\phi$  envia homeomòrficament, la banda  $V_a$  a  $U_a$ , és a dir  $\phi(V_a) = U_a$ .  
També serà necessari que es compleixi que les fronteres verticals de  $V_a$  vagin a parar a fronteres verticals de  $U_a$  i anàlogament per les horitzontals.
2. Sigui  $V$  una banda vertical en  $\bigcup_{a \in A} V_a$ , aleshores per una  $a \in A$ , valorem la intersecció  $\phi^{-1}(V) \cap V_a = \bar{V}_a$  com una banda vertical no buida.  
Hi afegim que; sigui  $\nu$  tal que  $0 < \nu < 1$  un valor fix, s'haurà de complir que:

$$d(\bar{V}_a) \leq \nu d(V_a).$$

Anàlogament amb les bandes horitzontals.

Aquestes condicions ens permeten acabar enunciant un dels teoremes principals d'aquest treball:

**Teorema 2.7.** *Sigui  $\phi$  un homeomorfisme que satisfà les hipòtesis anteriors, 1 i 2, respecte les bandes horitzontals i verticals  $U_a$  i  $V_a$ , per  $a \in A$ , aleshores, es té que hi ha una funció shift de Bernoulli,  $\sigma$  respecte les seqüències dels elements d' $A$  com a subsistema. És a dir, existeix un homeomorfisme  $\tau$  de  $\Sigma^N$  a  $Q$  tal que*

$$\phi\tau = \tau\sigma.$$

*En particular, per  $N < \infty$ ,  $\tau(\Sigma^N)$  és un conjunt de  $Q$  invariant i acotat tal que, igual que  $\Sigma^N$ , és un conjunt de Cantor.*

*Demostració.* Demostració a [6] (Theorem 3.1) □

### 2.2.1 La funció de Horseshoe

[5] Considerem un conjunt  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  i una funció  $f$  tal que

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aquesta funció  $f$  es comporta de manera que si li apliques  $f$  al seu domini, el conjunt  $D$ , aquesta funció fa contraure  $D$  per  $x$  i allargar-lo per  $y$ . Seguidament li aplica un gir de  $180^\circ$  a la punta i ajunta la base superior amb la punta inferior dreta del conjunt inicial  $D$ .

Veiem-ho amb un seguit d'imatges:

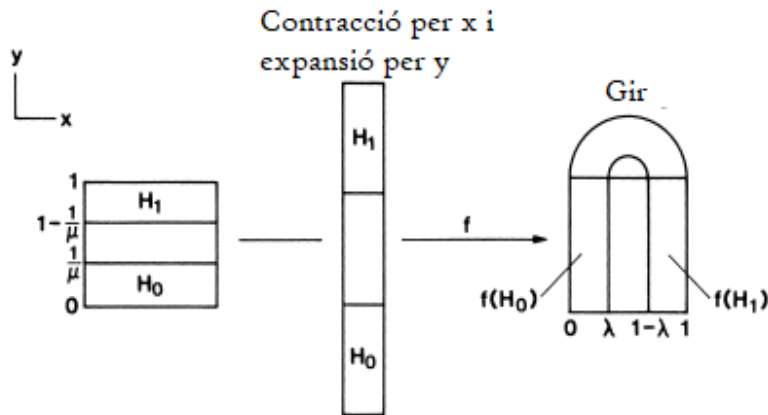


Figura 4: Transformació de  $D$  per  $f$

Veiem doncs, que sigui el quadrat esquerra de la figura (4) el conjunt que anomenem  $D$ , al aplicar-li la funció  $f$ , només uns quants valors de  $D$  tornen a caure a  $D$ . Els punts de  $D$  que tenen la imatge en  $D$  es poden descriure amb els següents conjunts:

$$H_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu}\}$$

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1\}$$

La resta de punts de  $D$  tenen la imatge, respecte  $f$ , fora del conjunt  $D$ . Aquests són els punts recollits en  $H_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1 - \frac{1}{\mu}\}$ . Centrem-nos amb  $H_0$  i  $H_1$ . Aquestes 'tires horitzontals', primer de tot, passen a ser verticals, a causa de la contracció per  $x$  i l'expansió per  $y$  (tal i com es pot veure a la segona figura). Per últim i, aplicant el gir de  $180^\circ$  als punts corresponents, veiem que els conjunts imatge de  $H_0$  i  $H_1$  són:

$$f(H_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \lambda, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

$$f(H_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \lambda \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

per un valor de  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  i un valor  $\mu > 2$ .

Si considerem la funció  $f$  inversa,  $f^{-1}$ , aleshores  $f^{-1}(f(H_0)) = H_0$  i  $f^{-1}(f(H_1)) = H_1$  que envia bandes verticals a bandes horitzontals. Es pot veure fàcilment amb la següent imatge:

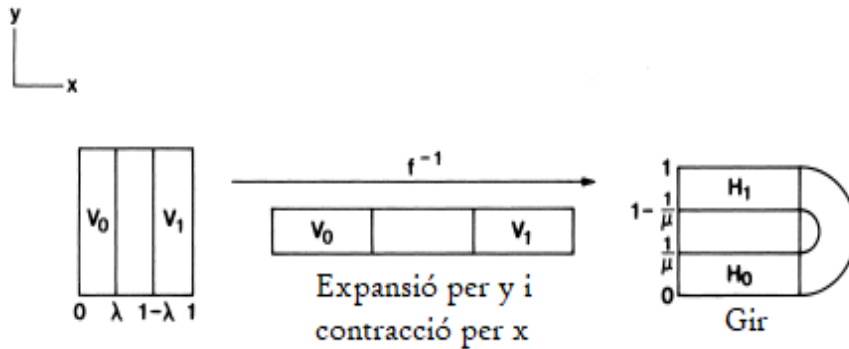


Figura 5: Transformació de  $D$  per  $f^{-1}$

Considerant que  $f(H_0) = V_0$  i  $f(H_1) = V_1$ .

**Lema 2.8.** Considerant  $V_*$  una banda vertical de  $D$  amb una amplada  $a_{v*}$ , si li apliquem  $f(V_*)$ , els punts que recauran sobre  $D$  resultaran ser dues bandes verticals  $V_{*0}$  i  $V_{*1}$  que estaran dins de  $V_0$  i  $V_1$  respectivament. L'amplada d'aquestes bandes verticals serà  $a_{v*} \cdot \lambda$ . Per cas invers, si considerem  $H_*$  una banda horitzontal de  $D$  amb una altura de  $h_{h*}$  i li apliquem, en el seu cas,  $f^{-1}(H_*)$ ,  $f^{-1}(H_*) \cap D$  seran dues bandes horitzontals que viuran dins de  $H_0$  i  $H_1$  respectivament i, l'altura d'aquestes bandes serà  $h_{h*} \cdot \frac{1}{\mu}$ .

*Demostració.* La prova és clara amb l'estructura i funcionament plantejats.  $\square$

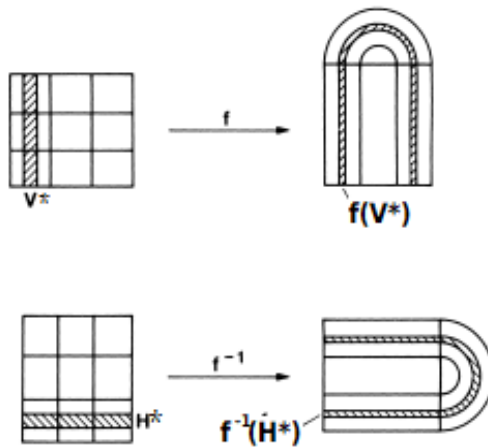


Figura 6:  $f(V^*)$  i  $f^{-1}(H^*)$

### 2.2.2 Construcció d'un subconjunt invariant respecte Horseshoe

Volem trobar un conjunt invariant de punts de  $D$ . L'anomenarem  $\Lambda$  i és el resultat de la intersecció infinita de totes les possibles iteracions de la funció  $f$ , és a dir:

$$\dots \cap f^{-n}(D) \cap \dots \cap f^{-2}(D) \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap \dots \cap f^n(D) \cap \dots$$

Per estudiar el resultat d'aquest seguit d'interseccions, podem començar per  $D \cap f(D) \cap f^2(D)$ . Pel lema (2.8) sabem que la intersecció entre una  $D \cap f(D)$  són dues bandes verticals  $V_0$  i  $V_1$  amb amplada  $\lambda$ . Si a aquestes dues bandes els hi aplico  $f$ , pel lema (2.8) tindrà que cada una d'elles es convertirà en dues bandes verticals, una de les quals viurà a  $V_0$  i l'altra  $V_1$ , per tant,  $f^2(D)$  es pot representar com quatre tires verticals d'amplada  $\lambda^2$ . Si consideréssim la intersecció  $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D)$ , aleshores tindriem vuit bandes verticals d'amplada  $\lambda^3$ .

Per entendre-ho, no hi ha millor manera que una successió d'imatges amb les bandes colorejades:

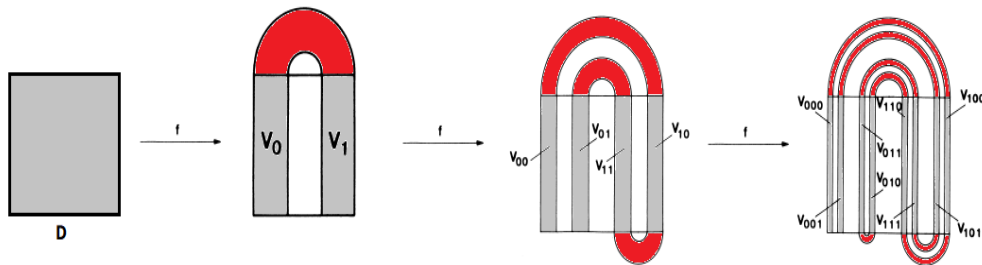


Figura 7: Evolució d'interseccions fins a  $f^3(D)$

Per [5] s'acaba de demostrar que el conjunt d'interseccions de les iteracions de  $f$  per  $D$  és un conjunt de Cantor. La funció de Horseshoe aplicades al conjunt  $D$  és un

exemple particular en dues dimensions del que ens trobarem al problema de Sitnikov. Amb els lemes i teoremes que s'anuncien més endavant (pel problema de Sitnikov), es pot acabar demostrant que, pel cas de Horseshoe, es té un homeomorfisme  $\omega$  de  $\Sigma^N$  a  $D$  tal que  $f\omega = \omega\sigma$ .

### 3 Problema de dos cossos

El problema de dos cossos, [7], és l'estudi del moviment de dues masses o partícules que només interactuen entre si. No ens referim a un sistema en concret sinó a tota una classe de sistemes de la mecànica clàssica. La interacció d'aquestes partícules/masses deriva d'un potencial que depèn de la distància d'entre elles i de la seva massa. La suma de forces externes és nul·la i, per tant, l'impuls lineal del sistema es conserva, així com l'energia del sistema (prové d'un potencial). Per tant, aplicant-li un canvi al sistema de referència i alguna transformació matemàtica al problema, podem reduir-lo a un problema d'un sol cos.

#### 3.1 Descripció del problema

Siguin dos cossos amb les seves respectives masses:  $m_1$  i  $m_2$  situats a les coordenades  $x_1$  i  $x_2$ . Newton determina que cada un d'aquests cossos aplica una força atractiva a l'altre:

$$F_{1,2} = m_1 \cdot \ddot{x}_1, \quad F_{2,1} = m_2 \cdot \ddot{x}_2 \quad (3.1)$$

on la  $F_{1,2}$  és la força que rep la massa 1 causada per la massa 2 i la  $F_{2,1}$  la força que rep la massa 2 a causa de la 1. Sigui  $F_{i,j}$  la força atractiva de gravetat de la massa  $j$  a la massa  $i$ , la podem escriure de la següent manera:

$$F_{i,j} = -G \cdot m_i \cdot \frac{m_j}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = x_i - x_j \quad (3.2)$$

Considerarem una d'aquestes equacions i la tractarem, també ho farem amb índexos globals  $i, j$ . Partim, aleshores, de la següent:

$$-G \cdot \frac{m_j}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r} = \ddot{x}_i$$

Considerant  $-G \cdot \frac{m_j}{|\vec{r}|} = f(r)$ , la funció  $f$  serà anomenada com 'lleis d'atracció' i podem confirmar la seva continuïtat  $\forall r, 0 < r < \infty$ . Se sap que la  $r$  representa la distància entre les dues masses del problema, no obstant, amb un simple canvi de sistema de referència, podríem passar a tenir la  $m_j$  com a punt  $O$  en el sistema. Un cop feta aquesta transformació, la variable  $r$  passarà a ser la distància que separa la  $m_i$  del centre  $O$ .

$$m_i \ddot{r} = -m_i f(r) |\vec{r}|^{-1} \vec{r}, \\ \ddot{r} = -f(r) |\vec{r}|^{-1} \vec{r}.$$

Sigui  $\vec{v}$  la velocitat que denota el vector  $\dot{r}$ . L'equació diferencial es podria escriure de la següent manera:

$$\dot{r} = \vec{v}, \quad \dot{v} = -f(r) |\vec{r}|^{-1} \vec{r}. \quad (3.3)$$

Si tornem a la definició de moment angular, podem comprovar que el moviment del nostre sistema es troba immers en un pla. Així doncs sabem gràcies a l'apartat



(1.6) que el moment angular és  $c(t) = r(t) \times \dot{r}(t), t \in I$ . Per tant, calculem la variació d'aquest moment angular:

$$\dot{c}(t) = \frac{d}{dt} r(t) \times \dot{r}(t)$$

Que per definició de derivada de producte vectorial tenim:

$$\dot{c}(t) = \dot{r}(t) \times \dot{r}(t) + r(t) \times \ddot{r}(t) = 0 + \frac{f(|r|)}{|r|} r(t) \times r(t) = 0$$

Aleshores, partint de que tenim la  $m_j$  a l'origen de coordenades i que el moviment del sistema està en un pla, considerarem que tenim un camp de forces centrals el qual sempre és conservatiu, és a dir, que l'energia potencial només dependrà de la distància a l'origen.

Sigui, doncs l'equació de la força que li aplica  $m_j$  a  $m_i$ :

$$F_{i,j} = -G \cdot m_i \cdot \frac{m_j}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{x}$$

on  $m_j$  hem fixat a l'origen  $O$  i  $x$  és el vector posició de la  $m_i$  respecte l'origen. Aleshores, podem expressar-lo de la següent forma:

$$F(x) = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$$

per  $\mu = G \cdot m_i \cdot m_j \cdot |x|$  i la funció  $f$  que defineix una força central és  $f(|x|) = \frac{-\mu}{|x|^2}$  tal que

$$F(x) = -G \cdot m_i \cdot \frac{m_j}{|\vec{x}|^2} \cdot \vec{x} = -\frac{\mu}{|x|^3} \cdot \vec{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}$$

Veiem que davant d'aquest camp de forces central, n'hi podem extreure un potencial. Sigui  $\phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva de  $f$ ,  $\phi(r) := \int_1^r f(\rho) d\rho, r > 0$ . Definim la funció  $\nu(x) = -\phi(|x|)$  per  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ . Aleshores  $\nu$  és de classe  $C^1$  i

$$\nabla \nu(x) = -\phi'(|x|) \nabla(|\cdot|)(x) = -f(|x|) \frac{x}{|x|} = -F(x), \quad x \neq 0$$

Així doncs, en el cas del nostre problema de dos cossos, tindrem  $\phi(r) = \frac{\mu}{x}$  i  $\nu(x) = -\frac{\mu}{|x|}$ , per  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  que serà el nostre potencial Newtonià.

Passem a trobar l'energia del sistema.

$$E = E_c + E_p$$

per  $E_c$  l'energia cinètica i  $E_p$  l'energia potencial. Si substituïm l' $E_p$  per la trobada anteriorment i la cinètica per la seva fórmula, tenim:

$$E = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \nu$$

$$E = \frac{1}{2} m_i |\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x|}$$

L'eix d'excentricitat és un paràmetre que determina el grau de desviació d'una secció cònica respecte a una circumferència. Per determinar aquest eix d'excentricitat començarem amb la següent igualtat:

$$\frac{d}{dt} \frac{x}{|x|} = \frac{(x \cdot x)\dot{x} - (x \cdot \dot{x})x}{|x|^3}$$

Per les propietats de producte vectorial, per  $v = \dot{x}$  i per definició de moment angular ho podem expressar:

$$\frac{d}{dt} \frac{x}{|x|} = \frac{(x \times v) \times x}{|x|^3} = \frac{c \times x}{|x|^3}$$

Si aquesta la multipliquem, dreta i esquerra, per l'element  $-\mu$  tenim:

$$-\mu \frac{d}{dt} \frac{x}{|x|} = c \times \frac{-\mu x}{|x|^3}$$

i per l'equació diferencial inicial (3.3) i el valor de  $\mu = G \cdot m_i \cdot m_j$  tenim que  $\frac{-\mu x}{|x|^3} = \dot{v}$  i per tant,

$$-\mu \frac{d}{dt} \frac{x}{|x|} = c \times \dot{v}.$$

Si integrem a les dues bandes, ens quedaria:

$$-\mu \left( e + \frac{x}{|x|} \right) = c \times v, \quad (3.4)$$

on  $e$  és la constant d'integració.

Amb aquesta última igualtat, podem veure que el vector resultant de  $\mu \left( e + \frac{x}{|x|} \right)$  és paral·lel a  $v \times c$ . Per tant, és perpendicular a  $v$  i a  $c$ . Aleshores, considerant que  $c \neq 0$ , si sabem que  $x \perp c$ , aleshores, només podem concloure que  $e \perp c$ , ja que sinó, la seva suma no seria perpendicular a  $c$  i, per tant, tampoc ho seria per  $v \times c$ . Seguim amb la búsqueda de l'eix d'excentricitat. Si multipliquem l'última expressió per  $x$ :

$$\mu \left( \frac{x}{|x|} \cdot x + e \cdot x \right) = -(c \times v) \cdot x$$

o bé:

$$\mu \left( \frac{x}{|x|} \cdot x + e \cdot x \right) = -c \cdot (v \times x) = |c|^2$$

que és equivalent a:

$$|x| + e \cdot x = \frac{|c|^2}{\mu}, \quad t \in I, \quad (3.5)$$

que indica que el moviment viu dins d'una cònica amb un focus a l'origen.

Per veure exactament el valor de l'eix d'excentricitat  $e$  podem partir de l'equació (3.4) i simplement aïllar-la:

$$e = \frac{1}{\mu} (v \times c) - \frac{x}{|x|}, \quad t \in I.$$

Existeixen quatre casos possibles de còniques segons el valor de  $e$ .

1.  $e = 0$

Si partim de l'equació (3.5) veiem que ens queda  $|x| = \frac{|c|^2}{\mu}$  i al ser  $c$  un vector constant i  $\mu$  també constant, ens queda que  $|x|$  també és constant. Per tant, estem davant d'una cercle.

2.  $0 < |e| < 1$

Ens trobem amb  $e \cdot x + |x| = \frac{|c|^2}{\mu}$ . Si desenvolupem el producte escalar dels dos vector  $e, x$ , ens queda  $|e||x| \cos \alpha + |x| = \frac{|c|^2}{\mu}$ . Treiem factor comú de  $|x|$  i ens queda:

$$|x|(|e| \cos \alpha + 1) = \frac{|c|^2}{\mu}.$$

A l'aïllar  $|x|$ , tenim el següent:  $|x| = \frac{|c|^2}{\mu} \frac{1}{1+|e| \cos \alpha}$ , on  $\alpha$  és l'angle entre els vectors  $e, x$ . Aquesta expressió, fa referència a un moviment el·líptic.

3.  $|e| = 1$

Seguint els passos de l'anterior cas, partim de  $|x| = \frac{|c|^2}{\mu} \frac{1}{1+|e| \cos \alpha}$  i substituïm pel valor de  $|e| = 1$ :  $|x| = \frac{|c|^2}{\mu} \frac{1}{1+\cos \alpha}$  que és el cas particular d'una paràbola

4.  $|e| > 1$

És el cas d'una hipèrbola.

Gràcies a l'equació anterior (3.5) hem vist que el nostre moviment viu en una cònica amb un focus a l'origen. Estudiarem el cas particular on  $0 < |e| < 1$  ja que en el problema de Sitnikov hi ha dos cossos movent-se a través d'el·lipses.

**Definició 3.1.** *Una el·lipse és un conjunt de punts del pla tals que la suma de les distàncies amb dos focus (dos punts específics del pla) és constant.*

Pel nostre problema considerarem  $A, O$  els dos focus, siguent  $O$  el centre de coordenades. Siguin  $d_1$  i  $d_2$  les distàncies entre el focus 1 i el punt  $x$  de l'el·lipse i el focus 2 i el punt  $x$ , tenim que  $d_1 + d_2 = c > 0$ . Aleshores tenim que  $d_1 = |A - x|$  i  $d_2 = |x - O|$  i com que  $O$  és el centre de coordenades ens queda que  $|x - O| = |x|$ , per tant,  $|x| + |A - x| = c$ ,  $|A - x| = c - |x|$ . Si ho elevem tot al quadrat:

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2$$

que equival a

$$|A|^2 + |x|^2 - 2A \cdot x = c^2 + |x|^2 - 2c|x|,$$

$$2c|x| - 2A \cdot x = c^2 - |A|^2,$$

$$2c(|x| - \frac{A \cdot x}{c}) = c^2 - |A|^2,$$

$$|x| - \frac{1}{c}A \cdot x = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}.$$

Considerem  $e = -\frac{1}{c}A$  i  $k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$  i per la desigualtat triangular,  $|A| < |x| + |A - x| = c$  per tant,  $|e| < 1$  i  $k > 0$ . Ens queda que la següent equació descriu les

el·lipses amb un focus a l'origen:

$$|x| + e \cdot x = k \quad (3.6)$$

$e \in \mathbb{R}^2$  és 'l'eix d'excentricitat'. Escrivim

$$e = \epsilon(\cos \omega, \sin \omega)$$

per  $\epsilon = |e|$  i  $\omega \in \mathbb{R}$ . A l' $\omega$  se l'anomena 'argument del pericentre' que és l'angle format pel vector de  $e$  amb el vector de l'eix de coordenades.

Representem un punt arbitrari  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  en coordenades polars,  $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$ . Substituint-lo a la fórmula (3.6) ens queda el següent:

$$r + r\epsilon((\cos \theta, \sin \theta) \cdot (\cos \omega, \sin \omega)) = k$$

és a dir:

$$r[1 + \epsilon(\theta - \omega)] = k.$$

Per tant, ja que la constant  $k$  és positiva, si tenim un punt  $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$ , per a  $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ . En el cas de les el·lipses tenim que  $\epsilon < 1$  que satisfà que  $1 + \epsilon(\theta - \omega) > 0$  condició necessària ja que  $k, r > 0$ . Aleshores, un punt pertanyerà a una el·lipse si i només si:

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \theta - \omega}. \quad (3.7)$$

Si desenvolupem per Taylor respecte  $\epsilon$  per  $\epsilon_0 = 0$  la següent expressió:  $\frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta - \omega}$ , ens quedaria el següent:  $1 - \epsilon \cos \theta - \omega + O(\epsilon^2)$ . Si fem el canvi a l'equació (3.7), tenim:

$$r = k(1 - \epsilon \cos \theta - \omega) + O(\epsilon^2)$$

Fent el canvi de variable de  $t = \theta - \omega$ :

$$r(t) = k(1 - \epsilon \cos t) + O(\epsilon^2) \quad (3.8)$$

i  $r(t)$  és una funció  $2\pi$  - *periòdica* que representa la posició del punt

$$x \in \mathbb{R}^2$$

que pertany a l'el·lipse, respecte el temps que ha passat des de l'inici del problema. Així doncs, podem relacionar l'equació (3.8) amb l'equació de la classificació de les còniques, quan  $0 < |e| < 1$ ,  $|x| = \frac{|c|^2}{\mu} \frac{1}{1 + |e| \cos \alpha}$ . Relacionant valors, veiem que  $k = \frac{|c|^2}{\mu}$  és a dir,  $k = \frac{|x \times \dot{x}|^2}{Gm_i m_j |x|}$

## 4 Problema de tres cossos

El problema dels tres cossos és l'estudi del moviment de tres masses segons la llei de gravitació universal donada per Newton, amb les seves tres posicions inicials i les seves corresponents velocitats inicials. És un cas particular del problema dels  $n$ -cossos. A diferència del problema dels dos cossos, no existeix una solució general, ja que el sistema dinàmic resultant és caòtic en la majoria de casos i generalment, es requereixen mètodes numèrics.

### 4.1 Problema de tres cossos restringit

El problema dels tres cossos restringit és un cas particular del problema de tres cossos, en el qual una de les tres masses és tan petita que es considera negligible o bé amb massa 0. També és anomenada 'planetoide'. En aquest cas, cada una de les dues masses positives afecten a l'altra i al planetoide, però aquesta tercera, al no tenir massa, no exerceix força a cap de les altres i no les afecta. Per aquest cas, el sistema es pot descriure en termes d'un problema de dos cossos.

## 5 Problema de Sitnikov

[8] Al 1907, Pavanini va descriure un model dinàmic en el qual un cos de massa zero es mou de forma perpendicular a dos cossos de massa idèntica que es mouen en òrbites de Kepler respecte el centre de masses. El cas en que les òrbites eren circulars, va ser estudiat al 1913 per MacMillan, que va mostrar que les equacions del moviment són integrables. No obstant, el problema en el qual les òrbites eren de forma el·líptiques va quedar obert durant 47 anys, fins que al 1960, K. Sitnikov va obtenir el primer resultat [9]. Tot i no descriure les solucions del model, la seva aportació va ser de tal importància que el problema es coneix, a dia d'avui, com a problema de Sitnikov.

Proposem un sistema de tres cossos restringit amb la peculiaritat de que les masses  $m_1$  i  $m_2$  són iguals i de valor  $\frac{1}{2}$ . Aquestes dues segueixen la trajectòria d'una el·lipse formada a causa de la llei de gravitació universal de Newton, estudiada anteriorment, amb un recorregut donat per  $r(t) = k(1 - \epsilon \cos t) + O(\epsilon^2)$ , tal i com hem trobat a l'apartat (3.1). En aquest cas particular, tenim un centre de masses constant ja que el sistema té simetria 'imparella'.

Els problemes de tres cossos restringits són característics per considerar una de les tres masses com a nul·la, negligint els efectes que causa a la resta de cossos del sistema. Per tant, considerem la  $m_3 = 0$ . Aquesta tercera no afecta ni al primer cos, ni al segon, però ells sí que afecten a aquesta última.

El nostre treball es basarà en l'estudi del moviment d'aquest tercer cos i en la demostració, pas a pas, de que existeixen òrbites periòdiques en el seu moviment.

Així doncs, presentem una imatge del que seria el nostre sistema de masses [6]:

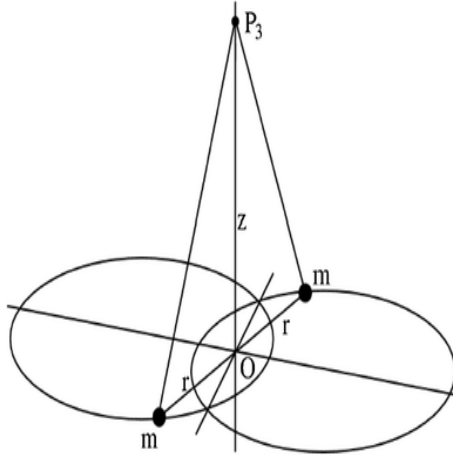


Figura 8: Representació del Problema de Sitnikov

## 5.1 Moviment del $m_3$

Sabem que el moviment de les dues masses correspon a dues el·lipses amb característiques iguals amb un centre de masses constant. Aquest centre de masses,  $x_{mc}$  és equivalent a  $x_{mc} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ . En el cas del nostre problema i aprofitant que tenim  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ , aleshores el centre de masses resultant és  $x_{mc} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ . Ja que el camp és invariant per isometries, podem fer un canvi en el sistema de coordenades per tal de que el centre de masses sigui, a més a més, el centre de coordenades  $O$ .

Veiem que tenim un sistema simètric i siguin  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  les posicions de les masses  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  respectivament, aleshores és trivial veure el següent:

$$|x_1 - x_3| = |x_2 - x_3|$$

on  $|x_k - x_l|$  denota la distància Euclidiana.

Partint de l'equació (1.1), al voler estudiar el moviment de la tercera massa, només ens caldrà substituir  $k$  per 3:

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{m_3 m_1}{|x_3 - x_1|} + \frac{m_3 m_2}{|x_3 - x_2|}\right)}{dx_3}.$$

És clar que es pot treure  $m_3$  de la derivada de la banda dreta i simplificar-la. També podem utilitzar els valors de les masses que tenim d'hipòtesi,  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$

$$\ddot{x}_3 = \frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{1}{|x_3 - x_1|} + \frac{1}{2} \frac{1}{|x_3 - x_2|}\right)}{dx_3}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{[(x_3 - x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} 2(x_3 - x_1) \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{[(x_3 - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}} 2(x_3 - x_2) \right]$$

Gràcies a les hipòtesis del nostre problema i al canvi de coordenades, tenim que  $x_3 = z$  i que dependrà del temps:  $z(t)$ .

També podem observar que al tenir, per hipòtesi, un problema de tres cossos restringit, el podem tractar com un problema de dos cossos ja que tenim el moviment de la  $m_1$  i la  $m_2$  restringit en un pla. Per tant, amb el punt del centre de masses com a centre de coordenades  $O$ , estem davant d'un sistema de forces central. Gràcies a la forma el·líptica del moviment de les masses, podem dir amb tota certesa que la posició d'una de les masses vindrà donada per l'equació (3.8), on  $k = \frac{1}{2}$  que defineix la posició de les masses 1 i 2 respecte el temps. Al ser un sistema simètric, tenim que  $x_1 = r(t)$ , aleshores  $x_2 = -r(t)$ . El cas en què  $x_1 = -r(t)$  i  $x_2 = r(t)$  es soluciona de forma anàloga.

Tenim:

$$(x_3 - x_i)^2 = |x_3 - x_i|^2$$

per  $i = 1, 2$ . Ja que els dos casos es resolten de la mateixa manera, definirem  $i = 1$ , tal que  $x_1 = r(t)$  i  $x_2 = -r(t)$

Si considerem el triangle amb els tres vèrtex  $x_1$ ,  $x_3$  i  $O$ , per Pitàgores podem afirmar que  $|x_3 - x_1|^2 = r^2(t) + z^2(t)$ . També tenim que  $|x_3 - x_2|^2 = (-r(t))^2 + z^2(t) = r^2(t) + z^2(t)$ . Ho substituïm a l'equació diferencial anterior amb una senzilla simplificació del  $\frac{1}{2} = 1$ .

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{[r^2(t) + z^2(t)]^{\frac{3}{2}}} (x_3 - x_1) \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{[(r^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}]} (x_3 - x_2) \right]$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{x_3 - x_1 + x_3 - x_2}{[r^2(t) + z^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Tal i com hem dit abans,  $x_2 = -x_1$ .

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{2x_3}{[r^2(t) + z^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

i finalment tenim l'equació diferencial en termes de  $z(t)$  i  $r(t)$ :

$$\ddot{z}(t) = -\frac{z(t)}{(r^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (5.1)$$

Sigui (5.1) l'equació diferencial que ens indica la posició de la  $m_3$  respecte el temps. La podem reescriure de la següent forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{z(t)}{(r^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Amb unes condicions inicials  $\dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$  de velocitat,  $z(t_0) = z_0$  com a posició inicial, per a  $t_0$  el temps inicial. Podem confirmar que sempre existiran zeros a  $z(t)$ , ja que si no existissin, podríem assumir que  $z(t) > 0$  per a tot valor de  $t$ . Aleshores  $\ddot{z}(t) < 0$  i  $z(t)$  seria còncava per a tot valor de  $t$ . Veiem que aquest cas és impossible i per tant, existeixen valors de  $t^* \in \mathbb{R}$  tals que  $z(t^*) = 0$ .

**Possibles solucions** Hi poden haver diversos tipologies de resultats. El moviment de la massa 3 es pot comportar totalment diferent segons les condicions inicials donades.

1. El tercer cos pot aparèixer des de  $l'∞$  i, després de passar per  $z = 0$ , marxar altra vegada fins a  $-∞$ .
2. Pot aparèixer des de l'infinit i quedar-se al sistema creant infinits zeros de l'equació diferencial. També podem considerar que comença al punt  $z = 0$  i amb la velocitat inicial, escapa del sistema.
3. Per últim, pot començar en el punt  $z = 0$  i amb una velocitat inicial menor a la velocitat d'escapament tal que el cos es queda pendolant al sistema i talla infinities vegades el punt  $z = 0$ .

En el nostre cas, volem estudiar les solucions amb velocitats molt pròximes a la velocitat d'escapament. Considerarem que  $z(t_0) = 0$ , i les solucions  $z(t)$  amb infinits zeros.

Siguin  $t_k$  per  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  els valors de temps tals que  $z(t_k) = 0$  i per a tot  $k$ ,  $t_k < t_{k+1}$ .

Definim:

$$s_k = \left[ \frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi} \right]$$

que són valors que defineixen el nombre de voltes que han donat els cossos 1 i 2 entre que el tercer cos ha sortit del punt  $O$  fins que hi torna a passar. Amb aquests valors podrem assignar a cada solució de l'equació diferencial una seqüència  $s$ .

Ja que l'equació diferencial és invariant per la reflexió del temps  $z \rightarrow -z$  considerarem les velocitats sempre amb valor absolut,  $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ .

Siguin les nostres condicions inicials següents:

$$z(t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0) = v_0$$

per a  $v_0 \neq 0$  ja que si la velocitat inicial fos nul·la, tindriem la solució trivial en què la  $m_3$  no es mou mai de la seva posició.

Sigui  $t_1$  el valor de temps en què  $z(t_1) = 0$ , aleshores tindrem que  $v_1$  serà la velocitat en que es troba la  $m_3$  en aquest moment  $t_1$ . Com ja hem dit, agafarem la velocitat en valor absolut  $|v_1|$ .

Amb aquestes nocions, definim una aplicació  $\phi$  que envia els valors  $(v_0, t_0)$  cap a  $(v_1, t_1)$ .

Estudiarem, primerament, en quina regió està definida aquesta aplicació.

### 5.1.1 Comportament de les solucions a l'infinit

Estudiarem les solucions de l'equació diferencial

$$\ddot{z}(t) = -\frac{z(t)}{(r^2(t) + z^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

on

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - \epsilon \cos t) + O(\epsilon^2)$$

Veiem que  $r(t)$  és una funció real analítica que satisfà:  $r(t + 2\pi) = r(t) = r(-t)$  gràcies a la periodicitat del  $\cos t$ .

Siguin les nostres condicions inicials

$$z(t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0) > 0 \tag{5.3}$$



Denotem, tal i com s'ha definit als apartats anteriors,  $t_1$  serà el nombre més petit on  $t_1 > t_0$  tal que  $z(t_1) = 0$ , és a dir, el següent moment, després de l'inici del moviment, en què la  $m_3$  torna a passar per l'origen. Si aquest valor de  $t_1$  no existís, direm que  $t_1 = \infty$ . Representem aquest parell de valors  $(\dot{z}(t_0), t_0)$  com coordenades polars a  $\mathbb{R}^2$  tal que la velocitat serà el radi i el temps serà l'angle.

Denotem per  $D_0$  el conjunt de punts de  $\mathbb{R}^2$  tals que  $t_1 < \infty$ , és a dir, els valors inicials del problema pels quals la solució no escapi. Per tant,  $D_0$  serà el conjunt de variables inicials  $(\dot{z}(t_0), t_0)$  tals que  $\exists t_1 > t_0$  on  $z(t_1) = 0$ .  $D_0$  és un conjunt obert.

Aquest apartat estudiarà les solucions que s'escapen, per tant, considera el parell de valors de  $\mathbb{R}^2$  que no pertanyen a  $D_0$ , és a dir, el complementari del conjunt  $D_0$ , que, evidentment, serà un conjunt tancat.

Sigui  $z(t)$  una solució de l'equació diferencial  $\ddot{z}(t)$  amb unes condicions inicials (5.3) i amb  $t_1 = \infty$ , aleshores és fàcil veure que  $\forall t > t_0$ ,  $\dot{z}(t) > 0$ . Per tant,

$$\text{Per } t \rightarrow \infty, \quad z(t) \rightarrow \infty.$$

Aleshores,  $\ddot{z} < 0$  per  $t > t_0$ . Ho veiem per l'equació de  $\ddot{z}$ . Com que  $\ddot{z} < 0$ , aleshores  $\dot{z}$  és monótonament decreixent i el seu límit a l'infinit existeix.

$$\dot{z}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) \geq 0.$$

Veiem que hi ha dos casos diferents:  $\dot{z}(\infty) = 0$  i  $\dot{z}(\infty) > 0$ . Als dos casos, la solució escapa, però de forma diferent. Per estudiar-los, farem una transformació de variables anomenada 'Transformació de McGehee's'.

### Transformació de McGehee

La transformació de McGehee va ser introduïda per Richard McGehee (A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics)[10] per estudiar la singularitat de la triple col·lisió al problema de N-cossos.

Fem els canvis de variable següents:

$$z = \frac{2}{q^2}, \quad \dot{z} = -p, \quad dt = 4q^{-3}ds \quad (5.4)$$

Per  $0 < q < \infty$  i quan  $q \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Llavors l'equació diferencial inicial, amb els canvis de variable aplicats presenta la següent forma:

$$\frac{dq}{ds} = p, \quad \frac{dp}{ds} = q\left(1 + \frac{q^4}{4}r^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{4}{q^3}$$

Ja que tenim que  $r$  és una variable periòdica respecte el temps, aleshores, podem considerar  $p = q = 0$  com una òrbita periòdica per la qual hi passen dues varietats invariants:

$$q = \chi(p, t) = p(1 + a_4p^4 + a_7(t)p^7 + \dots)$$

i  $q = \chi(-p, -t)$  on  $\chi$  té període  $2\pi$  respecte  $t$  i és una funció analítica per  $0 < p < a$  per algun  $a > 0$ .

Pel canvi de variable (5.4) tenim que converteix  $(z, \dot{z}, t) \rightarrow (z, -\dot{z}, -t)$  en  $(q, p, t) \rightarrow$

$(q, -p, -t)$ .

Per expressar aquesta varietat en coordenades cartesianes, definim:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(q - \chi(-p, -t)) = \frac{1}{4}(q + p) + \dots \\ y = \frac{1}{4}(q - \chi(p, t)) = \frac{1}{4}(q - p) + \dots \end{cases}$$

i obtenim les següents equacions diferencials:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x(1 + O_4) \\ \frac{dy}{ds} = -y(1 + O_4) \\ \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}\{(x + y)^3 + O_4\}^{-1} = 4q^{-3} \end{cases} \quad (5.5)$$

on  $O_n \in C^\infty$  de període  $2\pi$  respecte la variable  $t$ .

Les equacions diferencials (5.5) estan restringides al domini  $q = 2(x + y) + O_4$  on  $q = 0$  correspon a  $z = \infty$ .

Per estudiar les òrbites que són a prop de la singularitat  $x = y = 0$  eliminarem la variable  $s$  i ens queden les següents equacions:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t) = x(2(x + y)^3 + O_4) \\ \dot{y} &= g(x, y, t) = y(-2(x + y)^3 + O_4) \end{aligned}$$

**Lema 5.1.** *Sigui  $x(t)$  i  $y(t)$  per  $t \geq t_0$  una solució del domini  $q$  i un entorn prou petit  $|x|, |y| < a$ . La solució té un punt d'acumulació en  $x = y = 0$  si i només si  $x(t_0) = 0$ . A més a més, totes les solucions amb  $x = 0$  tendeixen a l'origen.*

*Demostració.* La demostració del Lema (5.1) es pot trobar a la referència [6] (cap. 4).  $\square$

Pel lema (5.1) tenim que les solucions del domini  $q$  que s'apropen a l'origen són aquelles que tenen  $x = 0$ .

Es pot veure l'existència de varietats invariants i l'explicació detallada del comportament del sistema amb el canvi de McGehee al capítol IV de [6].

Veiem una imatge de les solucions en un pla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

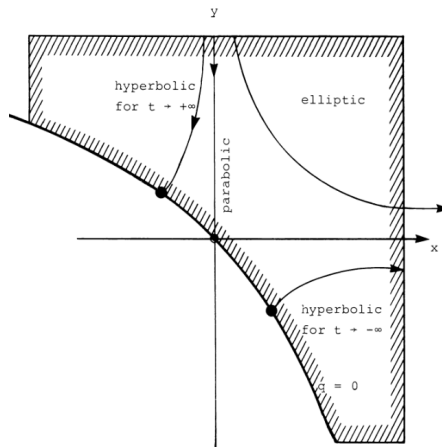


Figura 9: Varietats invariants i comportament de solucions.

**Lema 5.2.** *Existeix una curva analítica tancada en  $\mathbb{R}^2$  tal que els punts del seu interior  $D_0$  la funció  $\phi$  està definida. Els punts que no pertanyen a  $D_0$  corresponen a condicions inicials per les quals les solucions escapen.*

*Demostració.* Considerem, com hem fet fins ara, les variables inicials del nostre problema. Aquestes són:  $t = t_0$ ,  $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$  i  $z(t_0) = 0$  i considerem les variables  $v_0, t_0$  en polars al pla  $z = 0$ . Sigui  $D_0$  el conjunt de variables inicials  $(v', t')$  del pla  $z = 0$  tals que  $\exists t'_1 > t'_0$  on  $z(t'_1) = 0$ .  $D_0$  és un conjunt de punts obert. Si, pel contrari, ens fixem en el seu conjunt complementari, tindrem un conjunt tancat creat per punts  $(v^*, t^*)$  al pla  $z = 0$  tals que, siguent variables inicials de la nostre equació diferencial,  $\nexists t''_1$  tal que  $z(t''_1) = 0$ , és a dir, la solució s'escapa.

Podem dividir aquestes solucions en dos grups. Aquelles que  $|\dot{z}(\infty)| = 0$  seran solucions parabòliques i les solucions que  $|\dot{z}(\infty)| > 0$  seran hiperbòliques. És ràpid veure que les solucions parabòliques venen donades per les variables inicials tals que la velocitat inicial sigui exactament la mateixa que la velocitat d'escapament. Tenim que els punts que creen situacions parabòliques corresponen a una corba simple i tancada (ja que per cada valor  $t_0$ , existirà un únic valor de  $v_0$  d'escapament i al estar en coordenades polars, resulta ser una corba tancada). És trivial veure, que les solucions hiperbòliques provenen del complementari de  $D_0$  sense la frontera de  $D_0$ , per tant, és un conjunt obert.

Per demostrar que les òrbites parabòliques són representades al pla  $z = 0$  per una corba simple i tancada, ens basarem en la figura (9). Les solucions que escapen estan caracteritzades per  $x = 0, y > 0$  i amb  $t$  arbitrari. En particular, si considerem el pla  $y = a > 0, t$  arbitrari, es veu que interseca, transversalment, amb les òrbites parabòliques per  $x = 0$  i per  $t$  arbitrari. Com que  $t$  és una variable angular, la intersecció es pot representar com una corba tancada. Tenint en compte que una funció que envia  $(x, t) \rightarrow (\dot{z}_0, t_0)$  és real i analítica, pel teorema d'unicitat d'equacions diferencials tenim que és un difeomorfisme i  $(x, t + 2\pi) \rightarrow (\dot{z}_0, t_0 + 2\pi)$  si  $(x, t) \rightarrow (\dot{z}_0, t_0)$ .  $\square$

Pel següent lema, necessitarem definir la funció  $\rho$ :

$$\rho : (v, t) \rightarrow (v, -t).$$

**Lema 5.3.**  *$\phi$  projecta  $D_0$  a la imatge  $D_1 = \phi(D_0)$  que coincideix amb la imatge de la funció  $\rho$ ,  $D_1 = \rho(D_0)$ . A més a més,  $\phi$  conserva l'àrea  $v dv dt$  i si considerem la funció de reflexió  $\rho$ , es compleix el següent:*

$$\phi^{-1} = \rho^{-1} \phi \rho. \tag{5.6}$$

*Demostració.* Sigui

$$z = z(t; v_0, t_0)$$

una solució de l'equació diferencial (5.1) amb condicions inicials

$$z(t_0; v_0, t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0; v_0, t_0) = v_0,$$

on el parell  $(v_0, t_0)$  és representat en coordenades polars i viu a  $D_0$ . Al pertànyer al conjunt  $D_0$ , sabem que  $\exists t_1 > t_0$  tal que  $z(t_1) = 0$ .

Tenim que

$$v_1 = |\dot{z}(t_1; v_0, t_0)|,$$

per tant, podem afirmar que la funció  $\phi$  enviarà  $\phi((v_0, t_0)) \rightarrow (v_1, t_1)$ .

De forma anàloga, i considerant  $\phi^{-1}$ . Aquesta enviarà els valors  $(v_0, t_0) \rightarrow (v_{-1}, t_{-1})$  per  $t_{-1}$  el valor que està més a prop de  $t_0$  amb  $t_{-1} < t_0$  tal que  $z(t_{-1}) = 0$ . Igual que per  $v_1$ , trobarem la velocitat corresponent al valor de temps  $t_{-1}$  amb

$$v_{-1} = |\dot{z}(t_{-1}; v_0, t_0)|$$

El domini de  $\phi^{-1}$  el trobarem gràcies a que l'equació diferencial (5.2) és invariant respecte la reflexió  $(z, \dot{z}, t) \rightarrow (z, -\dot{z}, -t)$  ja que

$$r(t) = r(-t)$$

aleshores podem afirmar:

$$z(t; v_0, t_0) = z(t; -v_0, -t_0) = z(-t; -v_0, -t_0)$$

Per tant,

$$z(t; v_0, t_0) = z(-t; -v_0, -t_0)$$

Provarem que  $\phi^{-1} = \rho^{-1}\phi\rho$ :

$$\rho^{-1}\phi\rho(v_0, t_0) = \rho^{-1}\phi(v_0, -t_0)$$

Tenim que el moviment va a la inversa, ja que la variable del temps és negativa. Per tant, la imatge de  $\phi(v_0, -t_0)$  serà  $-t_{-1} < -t_0$  tal que  $z(-t_{-1}; v_0, -t_0) = 0$  i  $|\dot{z}(-t_{-1}; v_0, -t_0)| = v_{-1}$ . Aleshores  $\phi(v_0, -t_0) = (v_{-1}, -t_{-1})$ . Per tant:

$$\rho^{-1}(v_{-1}, -t_{-1}) = (v_{-1}, t_{-1}).$$

És a dir:

$$\phi^{-1}(v_0, t_0) = (v_{-1}, t_{-1}) = \rho^{-1}\phi\rho(v_0, t_0)$$

i  $\phi^{-1}$  és definit a  $\rho(D_0)$  i també és la imatge de de  $\phi$ . Per tant,  $D_1 = \phi(D_0) = \rho(D_0)$ . Per la demostració de la conservació de l'àrea  $vdvdt$  es pot consultar [6].

□

**Lema 5.4.** *Sigui  $\epsilon$  suficientment petit i positiu, aleshores,  $D_0 \neq D_1$  i les fronteres  $\partial D_0, \partial D_1$  intersequen no tangencialment a la línia de simetria a un punt que anomenarem  $P$ .*

*Demostració.* Es pot trobar la demostració detallada a [6].

□

Pel cas que  $\epsilon = 0$  tindriem que

$$r = \frac{1}{2}(1 - 0 \cos t) + O(\epsilon^2) = \frac{1}{2}$$

una funció constant. Substituint aquest valor a la funció d'energia

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} = c$$

ens queda:

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}} = c$$

amb  $c$  independent de  $t$ . En el cas que  $c < 0$ , l'energia cinètica és menor que la potencial i la  $m_3$  no escapa. En aquests casos,  $D_0$ ,  $D_1$  coincideixen en la mateixa corba tancada al pla  $z, \dot{z}$ . Pel contrari, en el cas que  $c \geq 0$  aquestes corbes l'extenen a l'infinit, ja que l'energia cinètica és més gran o igual que l'energia potencial.

En els casos que  $c < 0$ , tenim que les curves intersequen a  $z = 0$ . Per tant, busquem el punt d'intersecció quan  $r = \frac{1}{2}$ , *constant*:

$$v^2 = 2\left(c + \frac{1}{r}\right) = 2(c + 2) < 4$$

i els discos  $D_0$  i  $D_1$  són discos oberts amb  $v < 2$ . Veiem que per l'equació de l'energia  $\frac{1}{2}v^2 - 2 = c$  on  $c$  constant. Aleshores, la funció  $\phi$  per aquest problema ens enviarà  $\phi(v_0, t_0) = (v_1, t_1)$  si  $c < 0$ . Per la funció d'energia  $v_1 = v_0$  i  $t_1 > t_0$ .

Definim una altra funció  $T(v_0) = t_1 - t_0$  que depèn de la  $v_0$  ja que  $r$  és constant i el temps que tardaria la  $m_3$  en tornar a passar pel punt inicial només dependrà de la velocitat inicial. Evidentment, si la velocitat inicial és pròxima a zero,  $T(v_0)$  serà molt petit, en canvi si la velocitat inicial és pròxima a la velocitat d'escapament (en aquest cas, 2),  $T(v_0)$  serà molt més gran. És a dir, per  $v_0 \rightarrow 2$  llavors  $T(v_0) \rightarrow \infty$ .

$$\phi(v_0, t_0) = (v_0, t_0 + T(v_0))$$

És a dir  $v_0 = v_1$ . Amb això veiem cada vegada que li apliques  $\phi$  a un punt de variables inicials  $(v_0, t_0)$  de la regió  $D_0$  aquest punt presenta un gir d'angle  $T(v_0)$ . Tal i com hem dit abans, quan  $v_0$  s'apropa a 2,  $T(v_0) \rightarrow \infty$ , per tant, al aplicar-li  $\phi$ , el punt presentarà un gir d'un angle extremadament elevat.

Aquest cas és específicament per  $\epsilon = 0$ , no obstant, passaria de forma similar quan  $\epsilon > 0$ . Seguidament, tenim un lema que ens dictarà el comportament de  $\phi$  quan  $v_0$  és molt pròxima a la velocitat d'escapament.

**Lema 5.5.** *Sigui  $\gamma : v_0 = v_0(\lambda), t_0 = t_0(\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$  un  $C^1$ -arc tal que  $\gamma$  està dins de  $D_0$  fins que interseca de forma no tangencial a  $\partial D_0$ . Aquesta intersecció es dona quan  $\lambda = 0$  i l'anomenarem  $P$ . Aleshores la imatge de  $\gamma$  per  $\phi$ :*

$$\phi(\gamma) : v_1 = v_1(\lambda), \quad t_1 = t_1(\lambda)$$

*s'apropa a la frontera de  $D_1$  en forma d'espiral i  $t_1(\lambda) \rightarrow \infty$  quan  $\lambda \rightarrow 0$ .*

*Demostració.* Es pot trobar la corresponent demostració a [6]. □

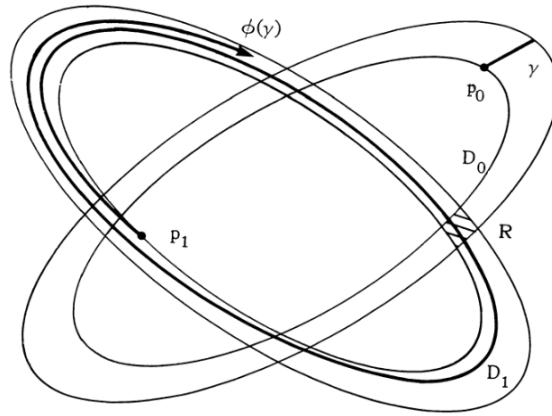


Figura 10: Imatge de l'arc  $\gamma$  de  $D_0$  en  $D_1$  quan  $\epsilon > 0$

Tal i com es pot veure a la figura, la imatge de l'arc  $\gamma$  es va acostant a  $\partial D_1$  amb forma d'espiral i, per  $\lambda \rightarrow 0$ , tenim els punts de  $D_0$  que es van acostant a  $\partial D_0$ , llavors  $t_1(\lambda) \rightarrow \infty$ . L'explicació és molt similar a la del cas  $\epsilon = 0$ . Al acostar-se la velocitat inicial a la velocitat d'escapament, la diferència de  $t_1 - t_0$  serà cada vegada més elevada. Per  $v_0 \rightarrow \partial D_0$ , llavors  $t_1 \rightarrow \infty$ . Com que el temps és una variable angular, la imatge del punt  $(v_0, t_0)$  serà un punt de  $D_1$  que haurà patit un gir d'angle  $\theta = (t_1 - t_0) \bmod 2\pi$ . Al acostar-se  $(v_0, t_0)$  a la frontera, el  $t_2$  augmenta i la diferència de  $t_1 - t_0$  és molt més elevada. Això explica la forma d'espiral.

En aquest treball ens interessa tractar les solucions amb una  $v_0$  que s'apropi molt a la velocitat d'escapament. Com que  $\partial D_0$  és contínua i diferenciable, podem associar un punt  $q$  de la frontera amb cada punt  $p = (v_0, t_1) \in D_0(\delta)$ . És a dir, ens interessen aquells punts  $(v_0, t_0)$  tals que  $|v_0 - q| < \delta$  considerant  $q$ , el punt de  $\partial D_0$  més pròxim a  $p = (v_0, t_0)$ .

Per englobar tots aquests punts, definim  $D_0(\delta)$ , per un  $\delta > 0$ , com el conjunt de  $D_0$  en el qual el seus punts es troben a una distància respecte  $\partial D_0$  menor que  $\delta$ .

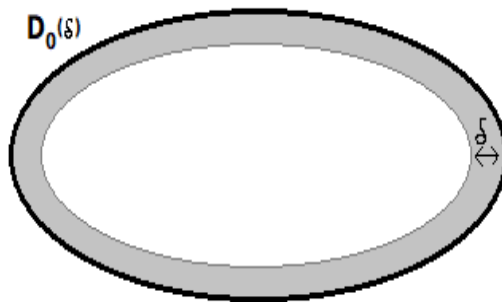


Figura 11:  $\Sigma_0$

Un cop definida aquesta zona  $D_0(\delta)$ , podem definir-hi dues regions diferents:

1.  $\Sigma_0 = \Sigma_0(\delta^{\frac{1}{3}})$ . Aquest sector assigna a cada punt  $p \in D_0(\delta)$  el conjunt de línies que formen un angle  $\alpha \leq \delta^{\frac{1}{3}}$  amb la línia que passa per  $p$  i és paral·lel a la tangent de  $\partial D_0$  que passa per  $q$ .

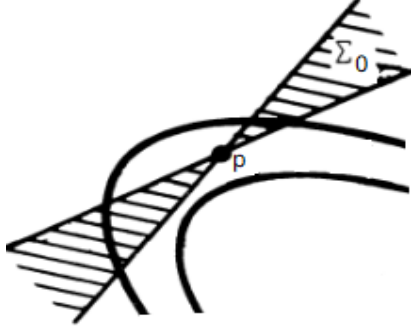


Figura 12:  $\Sigma_0$

2.  $\Sigma'_0$ . Aquest sector assigna a cada punt  $p \in D_0(\delta)$  el conjunt de línies que són complementàries al sector assignat per  $\Sigma_0$ . És a dir, a cada punt  $p \in D_0(\delta)$  se li assigna el conjunt de rectes que presenten un angle  $\alpha > \delta^{\frac{1}{3}}$  respecte la frontera.

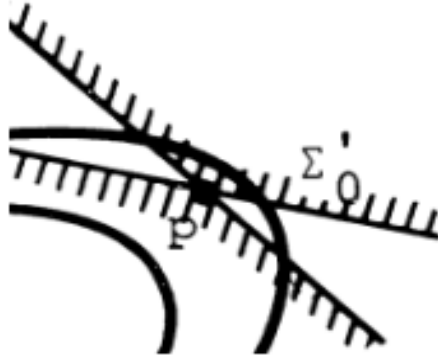


Figura 13:  $\Sigma'_0$

**Lema 5.6.** *Existeix  $\beta$  amb  $0 < \beta < 1$  tal que per un  $\delta$  prou petit, la funció  $\phi$  envia  $D_0(\delta)$  a  $D_0(\delta^\beta)$  i la funció  $d\phi$  envia  $\Sigma'_0 = \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  a  $\Sigma_1 = \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}})$ . En addició, si  $\zeta \in \Sigma'_0$ ,  $\zeta_1 = d\phi(\zeta_0)$  i  $\xi_0$  és la projecció ortogonal de  $\zeta_0$  a la línia central de  $\Sigma'_0$  i  $\xi_1$  la projecció ortogonal de  $\zeta_1$  respecte la línia central de  $\Sigma_1$ , aleshores es compleix:*

$$|\xi_1| \leq \delta^{-\frac{1}{3}} |\xi_0|$$

*Demostració.* Trobi's a [6]. □

Aquest lema ens explica el comportament de qualsevol arc de  $D_0(\delta)$ . Per exemple, si considerem el mateix arc que als apartats anteriors  $\gamma$  amb un extrem a  $\partial D_0$ , per  $\gamma$  diferenciable fins a la frontera, tindrem que  $\gamma$  formarà part del conjunt  $\sum'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  per un  $\delta$  suficientment petit. Això és clar ja que, tal i com hem definit abans l'arc  $\gamma$ , aquest no és tangencial a  $\partial D_0$ , per tant, escollint un punt  $p$  de  $\gamma$  i el seu punt més pròxim de la frontera  $q$ , entre  $\gamma$  i la tangent de  $\partial D_0$  que passa per  $q$  hi haurà un angle  $\alpha$ . Si escollim un  $\delta$  prou petit, aleshores  $\gamma \in \sum'_0$ .

Si li apliquem a  $\gamma$  la funció de  $d\phi$ , gràcies al lema podem afirmar que; sigui  $\gamma_1$  la imatge de  $\gamma$  per  $d\phi$ , aleshores  $\gamma_1 \in \sum_1(\delta^{\frac{\beta}{3}})$ , per  $0 < \beta < 1$ .

En altres paraules, sigui un punt  $p \in D_0(\delta)$  i el seu punt  $q \in \partial D_0$  el punt de  $\partial D_0$  més pròxim a  $p$ , si considerem  $\gamma$  que passa per  $p$  i té un angle amb la tangent de  $\partial D_0$  que passa per  $q$  superior a  $\delta^{\frac{1}{3}}$ , aleshores considerem la imatge de  $p$ ,  $\phi(p) = p'$ , que gràcies al lema sabem que  $p' \in D_1(\delta^\beta)$ . També tindrem  $q'$  el punt de  $\partial D_1$  més pròxim a  $p'$ . Aleshores, la imatge de  $\gamma$  serà una línia que passa per  $p'$  tal que l'angle que formarà entre ella i la tangent de  $\partial D_1$  que passa per  $q'$  serà menor o igual que  $\delta^{\frac{\beta}{3}}$ .

Amb aquest lema podem veure que  $\phi(\gamma)$  té una direcció molt propera a la direcció de la frontera. És a dir, s'acosta a la frontera tangencialment. En canvi, si tornéssim a aplicar-li  $\phi$  a l'arc  $\gamma' = \phi(\gamma)$ , la seva imatge seria un arc que tindria un angle més pronunciat entre ell i la frontera.

Extrapolant aquest resultat per qualsevol arc de  $D_0$  tenim que  $\phi$  envia els arcs amb un angle més pronunciat respecte la frontera, a arcs amb un angle ínfim, és a dir, que van en direcció gairebé paral·lela amb la frontera.

Veiem-ho amb una imatge:

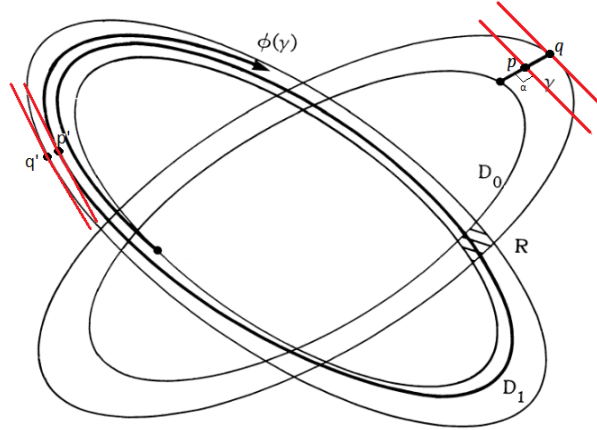


Figura 14: Representació de les imatges dels arcs.

**Teorema 5.7.** *La funció  $\phi$  en  $D_0$  (definida pel problema de Sitnikov) conté una funció de desplaçament  $\bar{\sigma}$  a  $D_{\bar{\sigma}} \subset \bar{S}$  com a subsistema. En addició, existeix un conjunt hiperbòlic invariant homeomòrfic a  $S$  en el qual  $\phi$  n'és topològicament equivalent per  $\sigma$ .*

Per acabar demostrant que es compleixen les condicions d'aquest teorema, conside-



rarem la regió  $R$  com la zona intersecció entre  $D_0(\delta)$  i  $D_1(\delta)$ , és a dir:

$$R = D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$$

Per un  $\delta$  suficientment petit, la regió  $R$  està delimitada per quatre corbes diferenciables. Aquestes són un arc de la  $\partial D_0$ , un altre arc de la frontera de  $D_1$ , la frontera interior de  $D_0(\delta)$  i la frontera interior de la delimitació de  $D_1(\delta)$ . Considerarem el punt  $p$  com a punt d'intersecció entre  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$ , que serà un punt de la frontera de  $R$ .

Podem veure el resultat de  $R$  a la següent imatge:

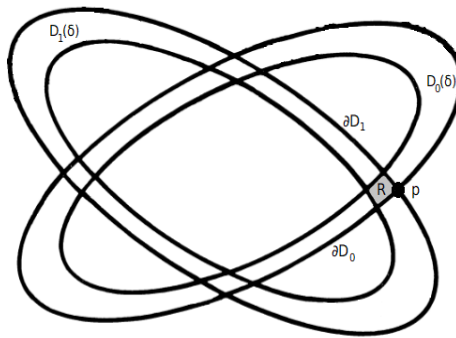


Figura 15: Representació de la regió  $R$ .

Veiem que aquest espai  $R$  en  $D_0$  està acotat per 4 corbes, de les quals dues, delimiten no tangencialment amb  $\partial D_0$ . Per tant, pel lema (5.5) tenim que les imatges d'aquestes dues corbes són corbes en  $D_1$  amb forma d'espiral acostant-se, cada vegada més a la frontera de  $D_1$ , de forma gairebé tangencial. Si considerem la imatge de tota la regió  $R$ , tindrem una regió sencera en  $D_1$  en forma d'espiral i que també tendirà a  $\partial D_1$  tangencialment. Veiem-ho al següent dibuix:

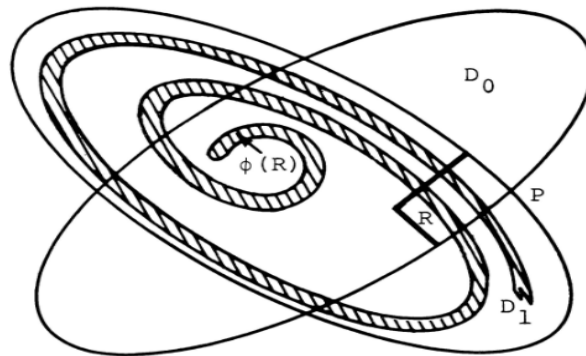


Figura 16:  $\phi(R)$ .

$\phi(R) \cap R$  serà un conjunt infinit de bandes que tindrà la direcció de la frontera  $D_1$ . Escollim unes quantes bandes que anomenarem  $V_k$  per  $k = 1, 2, 3, \dots$  que

seran no tangencials amb  $\partial D_0$  i les bandes  $U_k$  la imatge de cada una de les  $V_k$  per  $\phi$ .

Escollim un valor finit i natural  $N > 1$  de bandes. Volem verificar que aquestes regions;  $U_k$  i  $V_k$  per  $k \in N$  corresponen amb les bandes horitzontals i verticals del conjunt  $Q$  tractat als apartats anteriors.

Per fer-ho, necessitem provar que les bandes tenen una direcció molt semblant a la direcció de les fronteres corresponents. És a dir, hem de comprovar que les tangents de les fronteres de les bandes horitzontals  $U_k$  difereixin, com a molt, amb un angle  $\theta$  suficientment petit. Anàlogament per les bandes verticals  $V_k$ . Comprovant aquesta condició i sabent els costats de  $R$  tenen una llargada menor que  $\delta$ , podem obtenir una funció  $H = h + O(\delta)$  on  $h$  és linear i  $O(\delta) \in C^1$  tal que  $H(R) = Q$ .

Per tant, demostrem que les bandes horitzontals i verticals de  $R$  van en direccions pròximes a la frontera corresponent. Per fer-ho ens basarem amb el lema (5.6) que ens diu que l'angle entre les direccions de les bandes verticals i la frontera és menor que  $\delta^{\frac{1}{3}} + O(\delta) \leq 2\delta^{\frac{1}{3}}$ . De la mateixa manera ho podem fer amb les bandes horitzontals.

Sigui  $\phi$  una funció contínua i diferenciable en  $R$ , representem les seves coordenades com  $\phi(x_0, y_0) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) = (x_1, y_1)$  per  $(x_1, y_1)$  és la imatge de  $(x_0, y_0)$  per  $\phi$ . Ja que  $\phi$  diferenciable, podem estudiar la funció  $d\phi$  que porta vectors de  $D_0$  a vectors de  $D_1$ . Aleshores, definim els components de la funció  $d\phi$  de la següent manera:

$$\begin{cases} \xi_1 = f_x \xi_0 + f_y \eta_0 \\ \eta_1 = g_x \xi_0 + g_y \eta_0 \end{cases}$$

Per  $(\xi_0, \eta_0)$  un vector de  $D_0$  i  $\phi(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$  vector de  $D_1$ .

Anomenem  $S^+ : |\eta| \leq \mu|\xi|$  el conjunt de vectors que compleixen que la norma de la seva segona component és menor que  $\mu$  vegades la norma de la seva primera, per un  $0 < \mu < 1$ . Aquests estaran definits en la unió de bandes verticals  $\bigcup_{a \in A} V_a$  per  $A = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

Haurem de comprovar, pel nostre problema, que es compleixen les següents dues condicions:

1.  $d\phi(S^+) \subset S^+$
2. Sigui  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+$  i sigui  $(\xi_1, \eta_1) = d\phi(\xi_0, \eta_0)$ , aleshores

$$|\xi_1| \geq \mu^{-1}|\xi_0|$$

Anàlogament, s'haurà de comprovar pel sector  $S^- : |\xi| \leq \mu|\eta|$  definit per la unió de bandes horitzontals  $\bigcup_{a \in A} U_a$ . En aquest cas seran les següents condicions:

1.  $d\phi^{-1}(S^-) \subset S^-$
2. Per  $(\xi_1, \eta_1) \in S^-$  i  $(\xi_0, \eta_0) = d\phi^{-1}(\xi_1, \eta_1)$ , aleshores

$$|\eta_0| \geq \mu^{-1}|\eta_1|$$

Per verificar aquestes condicions en el nostre cas amb bandes  $U_a$  horitzontals i  $V_a$  verticals en  $R$ , ens basarem en el lema (5.6).

Fem un recordatori de les seccions de vectors  $\Sigma_0, \Sigma'_0, \Sigma_1$  i  $\Sigma'_1$ . La regió  $\Sigma_i = \Sigma_i(\delta^{\frac{1}{3}})$  per  $i = \{1, 2\}$ , és el conjunt de línies assignades a cada punt  $q \in D_i(\delta)$  que satisfan que l'angle que formen entre elles i la tangent del punt  $P$  intersecció de  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  és menor a  $\delta^{\frac{1}{3}} + O(\delta)$ . Els conjunts  $\Sigma'_i$  seran la resta de línies per cada punt, és a dir, seran les línies associades a un punt que formen un angle superior a  $\delta^{\frac{1}{3}} + O(\delta)$  amb la línia tangencial del punt  $P$ .

Pel lema (5.4) tenim que les fronteres  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  es tallen amb un angle  $\alpha > 0$  quan  $\epsilon > 0$ . Per tant, per un  $\delta$  prou petit, tenim que el sector  $\Sigma_1 \subset \Sigma'_0$ .

Demostrem-ho. Considerem  $\epsilon > 0$  i  $\alpha > 0$  l'angle que formen les fronteres de  $D_0$  i  $D_1$  al punt  $P$ , on  $P$  és la intersecció d'ambdues fronteres. Sigui  $\delta > 0$  prou petit, ens centrem amb la regió comuna de  $D_0(\delta), D_1(\delta)$  amb  $P$  un extrem. Sigui  $\Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  el conjunt de línies associades a un punt tals que formen un angle  $\theta > \delta^{\frac{1}{3}} + O(\delta)$ , pel Lema (5.6) tenim que, la imatge per  $d\phi$  de les línies de  $\Sigma'_0$  van a parar al conjunt  $\Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}})$  per  $0 < \beta < 1$ . Aleshores, les línies d'aquest conjunt tenen un angle  $\theta' \leq \delta^{\frac{\beta}{3}}$  respecte la línia tangencial de  $\partial D_1$  en el punt  $P$ . Per tant, l'angle d'aquestes línies, oscil·larà entre  $\theta' \in (\alpha - \delta^{\frac{\beta}{3}}, \alpha + \delta^{\frac{\beta}{3}})$  respecte la línia tangencial de  $\partial D_0$  que passa per  $P$ , ja que  $\alpha$  és l'angle entre les dues línies tangencials de les fronteres.

Per tant, agafant un  $\delta > 0$  tal que es compleixi que  $\alpha > 2\delta^{\frac{1}{3}}$ , assegures que  $\theta' > \delta^{\frac{1}{3}}$  respecte la línia tangencial de  $\partial D_0$  que passa per  $P$ .

$$\theta' \in (\alpha - \delta^{\frac{\beta}{3}}, \alpha + \delta^{\frac{\beta}{3}}),$$

per

$$\alpha > 2\delta^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \theta' \in (2\delta^{\frac{1}{3}} - \delta^{\frac{\beta}{3}}, 2\delta^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{\beta}{3}})$$

Per  $0 < \beta < 1$  tenim que  $\delta^{\frac{1}{3}} > \delta^{\frac{\beta}{3}}$ , aleshores tenim

$$2\delta^{\frac{1}{3}} - \delta^{\frac{\beta}{3}} > \delta^{\frac{1}{3}}$$

$$2\delta^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{\beta}{3}} > \delta^{\frac{1}{3}}$$

Per tant, tenim que la regió de línies compreses per  $\Sigma_1 = \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}})$  forma part del conjunt  $\Sigma'_0 = \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  ja que aquest conjunt conté totes les línies que formen un angle superior a  $\delta^{\frac{1}{3}}$  respecte la tangencial de  $\partial D_0$  que passa per  $P$ .

Per tant, per  $S^+ = \Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}})$  i apliquem una altra vegada  $d\phi$ , observem que  $d\phi$  condueix  $S^+ = \Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}})$  sobre el domini  $\phi^{-1}(R) \cap R$  cap a ell mateix Per tant, per

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \phi^{-1}(R) \cap R$$

satisfà la hipòtesi que volíem demostrar.

Anàlogament  $S^- = \Sigma_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  obtingut des de  $S^+$  per reflexió, si ho restringim a l'espai  $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ , tenim que per la funció  $d\phi^{-1}, d\phi^{-1}(S^-)$  cau sobre  $S^-$ .

El punt 2. de les condicions surt directe i trivial, ja que, considerant  $\mu = c\delta^{\frac{1}{3}}$  amb

$c > 0$  dependent només de l'angle  $\alpha$ , angle que formen les rectes tangencials de les dues fronteres que passen per  $P$ .

És clar que  $V_k$  i  $U_k$  per  $(k = 1, \dots)$ , són conjunts tancats i disjunts per  $V_k = \rho U_k$ . Tenim:

$$\phi^{-1}(R) \cap R = \phi^{-1}\rho(R) \cap \rho R = \rho(\phi(R) \cap R).$$

Això prova la condició 1 de l'apartat (2.2).

**Teorema 5.8.** *Sigui  $\phi$  una funció contínua i diferenciable que satisfà les condicions 1 i 2, acabades d'enunciar i la condició 1 de l'apartat (2.2) amb  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , aleshores la condició 2 de l'apartat (2.2) es compleix amb  $\nu = \mu(1 - \mu)^{-1}$ , i consegüentment, es compleix el teorema (2.7).*

*Demostració.* La prova d'aquest teorema es pot trobar a l'apartat III de la referència [6]. □

Complint el teorema (2.7) on s'anuncia l'existència d'un homeomorfisme  $\tau$  d'entre  $\Sigma^N$  i  $R$  i, a través de [6] també podem obtenir la shift  $\bar{\sigma}$  respecte el compacte  $\Sigma^N$  com a subsistema de  $\phi$ . Amb això es compleix el següent i últim teorema:

**Teorema 5.9.** *Sigui  $\phi$  una funció en  $D_0$ , aquesta conté la shift  $\bar{\sigma}$  a  $D(\bar{\sigma}) \subset \bar{S}$  com a subsistema. També existeix un conjunt invariant hiperbòlic homeomorf a  $\Sigma^N$  en el qual  $\phi$  és topològicament equivalent a  $\sigma$ .*

D'aquest darrer Teorema es conclou que; al tenir  $\phi$  conjugada a  $\sigma$  i aquesta tenir infinites òrbites periòdiques, l'aplicació  $\phi$  també té infinites òrbites periòdiques.

## 6 Conclusions

Com a conclusió del treball del problema de Sitnikov es té l'existència d'òrbites periòdiques en la dinàmica de la massa restringida del sistema tractat.

Com a conclusions personals, aquest treball m'ha permès endinsar-me, en la mesura del possible, en el món de l'astrofísica, que és un tema que sempre m'ha cridat molt l'atenció. No obstant, tot i tenir alguns conceptes físics, tot el contingut és purament matemàtic.

M'ha permès aplicar nocions bàsiques de la física a models matemàtics més complicats i he tingut el plaer d'aprendre sobre la dinàmica simbòlica i la seva importància en quan a l'estudi de sistemes dinàmics. També comentar el meu aprenentatge respecte la Shift de Bernoulli i la funció de Horseshoe, els quals, no en sabia de la seva existència amb anterioritat.

Concloure amb la meua complaença sobre la realització d'aquest treball per donar-me l'opció d'estudiar sistemes dinàmics d'un problema espacial. L'espai és un tema que sempre m'ha apassionat i tenir l'oportunitat d'aplicar les matemàtiques per estudiar el moviment de cossos espacials ha sigut una gran experiència.

## Referències

- [1] *Leyes de Kepler* - Wikipedia, la enciclopedia libre. URL: [https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes\\_de\\_Kepler](https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler).
- [2] *Isaac Newton — Biography, Facts, Discoveries, Laws, Inventions — Britannica*. URL: <https://www.britannica.com/biography/Isaac-Newton>.
- [3] George Smith. “Newton’s Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. A: (). ISSN: 1095-5054.
- [4] Rafael Ortega i Antonio J Ureña. “Introducción a la Mecánica Celeste”. A: ().
- [5] Stephen Wiggins. “Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos”. A: 2 (1990). DOI: 10.1007/978-1-4757-4067-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-4067-7>.
- [6] Jurgen Moser. “Stable and random motions in dynamical systems : with special emphasis on celestial mechanics”. A: (2001), pàg. 198. ISSN: 00319228. URL: [https://press.princeton.edu/titles/7052.html%0Ahttps://books.google.it/books?hl=it&lr=&id=1VpTfqK93ROC&oi=fnd&pg=PR3&dq=moser+theorem+kolmogorov&ots=6cCY8m498H&sig=WHFCS1K2WUwSbhZ1vQ\\_Hg5-zaco#v=onepage&q=mosertheoremkolmogorov&f=false](https://press.princeton.edu/titles/7052.html%0Ahttps://books.google.it/books?hl=it&lr=&id=1VpTfqK93ROC&oi=fnd&pg=PR3&dq=moser+theorem+kolmogorov&ots=6cCY8m498H&sig=WHFCS1K2WUwSbhZ1vQ_Hg5-zaco#v=onepage&q=mosertheoremkolmogorov&f=false).
- [7] D. A. Quadling. “Mathematical Introduction to Celestial Mechanics. By H. Pollard. Pp. x, 111. 40s. 1966. (Prentice-Hall)”. A: *The Mathematical Gazette* 51 (376 maig de 1967), pàg. 176-176. ISSN: 0025-5572. DOI: 10.2307/3614427. URL: <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/mathematical-introduction-to-celestial-mechanics-by-h-pollard-pp-x-111-40s-1966-prenticehall/6936E329D704E7A31B9348D>.
- [8] *Laberintos Infinitos — El problema de Sitnikov*. URL: <http://laberintos.itam.mx/el-problema-de-sitnikov/>.
- [9] K Sitnikov Dokl. Akad. Nauk SSSR i undefined 1960. “The existence of oscillatory motions in the three-body problem”. A: *th.nao.ac.jp* (). URL: <http://th.nao.ac.jp/MEMBER/tanikawa/list04/sitnik/sitnik.ps>.
- [10] Richard McGehee. “A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics”. A: *Journal of Differential Equations* 14 (1 jul. de 1973), pàg. 70-88. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/0022-0396(73)90077-6.