



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# El grup de trenes i espais de configuracions

---

**Autor: Jaime Leonardo Sánchez Salazar**

**Director: Dr. Javier José Gutiérrez Marín**

**Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica**

**Barcelona, 24 de gener de 2023**

What is it indeed that gives us  
the feeling of elegance in a  
solution, in a demonstration?

---

*Henri Poincaré, 1988*

## Abstract

Braid theory was first formally introduced by Emil Artin in the 1920s as a way to study the topology of knots. Since then, braid groups have been the subject of extensive research, leading to a wealth of results and applications. The main objective of this work is to understand what braids are in their entirety, first giving a geometric description of them and then an algebraic one. These two descriptions allow us to relate braids to other branches of mathematics that, a priori, may seem unrelated. With this, we introduce the existing connection between configuration spaces and braid group, which will allow us to demonstrate that any braid, as an element of a group, has infinite order. Finally we give another view of braids by relating them to the mapping class groups.

## Resum

La teoria de trenes va ser introduïda formalment per primera vegada per Emil Artin a la dècada de 1920 com una manera d'estudiar la topologia de nusos. Des d'aleshores, els grups de trenes han estat objecte d'una àmplia investigació, que ha portat a una gran quantitat de resultats i aplicacions. L'objectiu principal d'aquest treball és entendre què són les trenes en la seva totalitat, primerament donant una descripció geomètrica d'aquestes i seguidament una d'algebraica. Aquestes dues descripcions ens permeten relacionar les trenes amb altres branques de la matemàtica que, a priori, pot semblar que no guardin una relació. D'aquesta manera s'introdueixen els espais de configuració i la connexió existent amb el grup de trenes, la qual ens permetrà demostrar que qualsevol trena, com a element d'un grup, té ordre infinit. Finalment, donem una altra visió de les trenes relacionant-les amb els mapping class groups.

## Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agrair al supervisor d'aquest treball en Dr. Javier José Gutiérrez Marín per orientar-me sempre que ha estat necessari a com donar forma a aquest treball. El teu temps, esforç i comentaris han sigut molt importants per a poder desenvolupar una comprensió més profunda del tema i acabar sortint-me'n endavant.

A la meva família, gràcies pel suport i comprensió constants que heu tingut cap a la meva persona durant aquesta etapa. Els vostres consells, paciència i ànims han sigut clau i sense ells no seria qui sóc ni hauria aconseguit tot el que he aconseguit. De tot cor, gràcies.

Als meus amics, per haver-nos ajudat mútuament en moments difícils del grau, per tantes hores d'estudi en comú, per obligar-me a deixar d'estudiar i passar temps amb vosaltres. Gaudir i superar aquesta etapa universitària ha estat molt més fàcil gràcies a tots vosaltres.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de trenes</b>	<b>3</b>
2.1	Noció de trena . . . . .	3
2.1.1	Projecció d'una trena . . . . .	4
2.1.2	Equivalència de trenes . . . . .	5
2.2	Estructura de grup . . . . .	6
2.2.1	Presentació d'Artin . . . . .	9
2.3	Invariants . . . . .	13
2.3.1	Permutació associada a una trena . . . . .	13
2.3.2	L'exponent d'una trena . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Relació entre l'espai de configuracions i el grup de trenes</b>	<b>18</b>
3.1	Preliminars . . . . .	18
3.2	L'espai de configuracions del pla . . . . .	20
3.3	L'espai de configuracions de $\mathbb{R}^m$ amb $m \neq 2$ . . . . .	25
3.3.1	Cas $m = 1$ . . . . .	26
3.3.2	Cas $m > 2$ . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Torsió lliure de les trenes</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Mapping class groups</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>41</b>

# Capítol 1

## Introducció

La teoria de trenes és una branca de les matemàtiques que estudia les propietats topològiques de les trenes. L'estudi d'aquestes es remunta a l'antiguitat, on les trenes s'utilitzaven amb finalitats decoratives i funcionals. Per exemple, a l'antic Egipte, les trenes s'utilitzaven per estilitzar els cabells i en moltes cultures, les trenes es feien servir per crear articles funcionals com cordes i fils de pescar.

Tot i que el terme *grup de trenes* va ser utilitzat i definit per primera vegada pel matemàtic Emil Artin l'any 1925, qui va introduir els primers models algebraics, el concepte de trena ja havia estat considerat prèviament per Adolf Hurwitz l'any 1891. No obstant, Hurwitz va orientar la seva recerca des d'un altre punt de vista, com el que actualment coneixem com a grups fonamentals d'espais de configuracions de  $n$  punts en el pla. Més endavant, l'any 1934 Wilhelm Magnus va considerar el mateix grup des del punt de vista de mapping class groups.

En els darrers anys, la teoria de trenes s'ha aplicat a diversos camps com ara la teoria de nusos, la topologia de dimensions baixes i la física matemàtica. Així, aquesta teoria continua sent una àrea activa de recerca en matemàtiques, amb nous desenvolupaments i aplicacions que es descobreixen en diversos camps.

### Estructura de la Memòria

Una vegada hem contextualitzat i presentat l'objecte d'estudi d'aquest treball, ens centrarem ara en la part tècnica del mateix. Podem distingir quatre capítols en aquesta tesi; si bé s'acostuma a començar amb un capítol dotat de definicions i conceptes que s'usaran durant tot el treball, l'autor ha considerat oportú anar afegint-los al principi de cada capítol.

D'aquesta manera, en el primer capítol s'introdueix al lector a la teoria de trenes, tot descrivint-les des d'un punt de vista geomètric i algebraic. Per a fer-ho, es presenta el concepte d'equivalència entre trenes, donem una estructura de grup a les trenes (Artin) i acabem introduint invariants de trenes que ens permetran descartar l'equivalència de trenes.

En el segon capítol establim la relació entre el grup de trenes i l'espai de configuracions. Concretament, el grup fonamental de l'espai de configuracions (desordenat) del pla és el grup de trenes. Així, comencem recordant algunes definicions sobre els espais de configuracions i homotopia i acabem donant l'isomorfisme específic que els relaciona. En aquest punt, és natural preguntar-se que succeeix si substituïm el pla per l'espai  $m$ -dimensional dels reals. Una visió de l'espai de configuracions com arranament d'hiperplans i un recordatori de la teoria d'espais recobridors ens permetran analitzar-ho i establir una classificació segons  $m$ .

El tercer capítol està dedicat a respondre a una pregunta que es deixa oberta en el primer capítol: tenen les trenes ordre infinit? La teoria desenvolupada en el segon capítol i una introducció als grups d'homotopia donen resposta a aquesta pregunta. Finalment, a l'últim capítol introduïm els mapping class groups i la relació amb el grup de trenes, la qual ve donada pel disc perforat en el pla.

## Capítol 2

# Teoria de trenes

En aquest primer capítol de la memòria donarem els estris necessaris per a entendre què és una trena matemàtica, així com propietats sobre aquestes i l'estructura que formen amb una operació adient. Per a la redacció d'aquest capítol hem consultat, majoritàriament, les referències [10] i [11].

### 2.1 Noció de trena

Començarem donant una primera definició la qual dotarà al lector d'una idea geomètrica sobre què és una trena.

**Definició 2.1.1.** Considerem el cub unitat  $\mathbb{D} = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$  i una col·lecció de  $2n$  punts de l'espai  $\{P_k\}_{k=1}^n$  i  $\{Q_k\}_{k=1}^n$  ubicats respectivament a la base superior,  $\pi_1 = \{z = 1\}$ , i a la base inferior,  $\pi_2 = \{z = 0\}$ . Per simplicitat, suposarem que els punts es troben alineats, és a dir, els punts superiors són de la forma  $(C, \frac{k}{k+1}, 1)$  i els inferiors  $(C, \frac{k}{k+1}, 0)$ , on  $C \in [0, 1]$ . Sigui  $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  contínua complint que  $\alpha_k(0) = P_i$  i  $\alpha_k(1) = Q_j$  per algunes  $i, j$ . Anomenarem trena geomètrica, o  $n$ -trena a l'objecte que resulta d'unir els punts  $P_i$  i  $Q_j$  mitjançant  $n$  cordes o arcs,  $\alpha_k$ , tot respectant un seguit de restriccions:

- 1) Cap corda interseca amb una altra.
- 2) Cada corda interseca el pla  $z = t$  en únic punt per a tot  $t \in [0, 1]$ .

Si cada arc connecta els punts  $P_k$  i  $Q_k$ , aleshores es diu que la  $n$ -trena és pura.

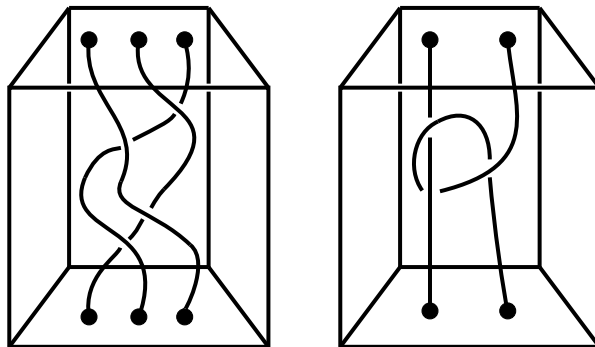


Figura 2.1: Una trena de tres cordes i una no-trena incomplint 2).



**Observació 2.1.2.** De la segona condició es desprèn la impossibilitat que un arc uneixi punts del mateix pla.

Hem definit la trena en el cub unitat, però la limitació en aquest espai no és necessària. Podríem haver escollit, per exemple, una esfera, un paral·lelepípede o haver-la definit simplement a  $\mathbb{R}^3$ .

Notem que  $0 < \frac{k}{k+1} < 1$  per a tot  $k > 0$  i, per tant,  $P_k$  i  $Q_k$  estan ben definits a  $\mathbb{D}$ .

Una pregunta natural que el lector es pot fer és si dues trenes poden semblar diferents, però acabar essent la mateixa trena. La resposta és afirmativa i en termes més formals estem parlant sobre l'equivalència de dues trenes. Abans però, introduïrem una representació més amena de les trenes.

### 2.1.1 Projectió d'una trena

**Definició 2.1.3.** Sigui  $\beta$  una  $n$ -trena i  $p$  l'aplicació definida com a

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (0, y, z).$$

Direm que  $p(\beta)$  es una projecció regular de  $\beta$  al pla  $yz$  si es compleixen les següents condicions:

- 1)  $p(\beta)$  té un nombre finit d'interseccions.
- 2) L'antiimatge de qualsevol punt en  $p(\beta)$  té com a molt 2 punts en  $\beta$ .
- 3) Un vèrtex de  $\beta$  mai s'assigna a un punt d'intersecció en  $p(\beta)$ . És a dir, si les cordes de  $\beta$  no s'estan creuant realment (únicament estan molt properes o, fins i tot, tocant-se) la seva projecció no representarà un punt d'intersecció en cap cas.

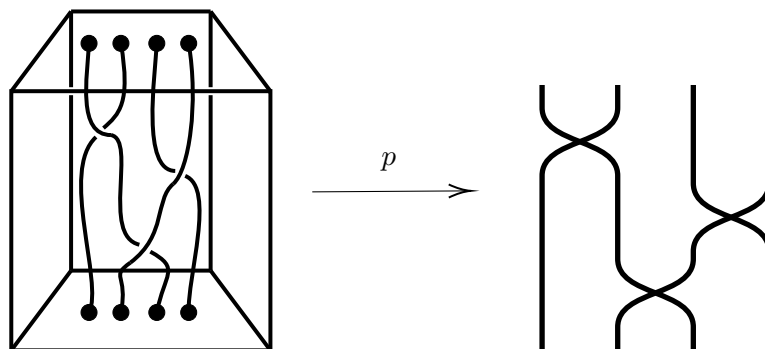


Figura 2.2: Projectió regular d'una trena.

**Observació 2.1.4.** Com es pot observar a la Figura 2.2, quan passem d'una trena a la seva projecció regular hi ha una pèrdua d'informació, la qual es veu reflectida en els punts dobles o d'intersecció. Per tant, és necessari establir un criteri mitjançant el qual puguem representar completament totes les característiques de la trena.

**Definició 2.1.5.** Sigui  $\beta$  una  $n$ -trena,  $p(\beta)$  una projecció regular de  $\beta$  i  $T$  un punt d'intersecció de  $p(\beta)$ . En un entorn de  $p(T)$  esborrarem una part d'una de les dues cordes, deixant una d'elles inalterada. Aquesta última serà la que passi **per sobre** de

l'altra. Un procés anàleg es defineix per aquelles cordes que passen **per sota**. És comú denominar-los **overpass** i **underpass**, respectivament.

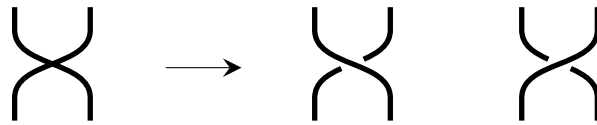


Figura 2.3: Overpass i underpass.

**Observació 2.1.6.** Per simplicitat, i tot fent un abús de notació, a partir d'ara no distingirem entre  $\beta$  i  $p(\beta)$  ni tampoc entre  $\alpha_k$  i  $p(\alpha_k)$ , anomenant a totes dues com trena i corda (o arc), respectivament, segons el context.

### 2.1.2 Equivalència de trenes

Un cop hem vist una millor manera de representar les trenes, ara introduïrem conceptes per tal de veure l'equivalència o no entre dues trenes. Intuïtivament, direm que dues trenes són equivalents si podem arribar d'una trena a l'altra d'una manera contínua. És a dir, tallar momentàniament les cordes o passar una de les cordes per fora del diagrama no està permès.

**Definició 2.1.7.** Sigui  $\alpha$  una corda d'una  $n$ -trena  $\beta$  i  $AB$  un segment de  $\alpha$ . Prenem un punt  $C$  que no pertanyi a cap corda, de tal manera que:

- 1) El triangle  $ABC$  no talla amb cap altra corda de la trena, a excepció del segment  $AB$ .
- 2)  $AC \cup CB$  talla a cada pla horitzontal en un únic punt.

Denotarem per  $\Omega$  a la substitució de  $AB$  per  $AC \cup CB$  i per  $\Omega^{-1}$  a la seva operació inversa. A qualssevol de les dues operacions les anomenarem moviment elemental.

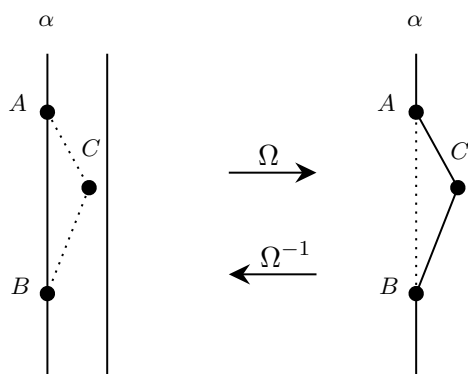


Figura 2.4: Moviments elementals.

**Observació 2.1.8.** És important recalcar que gràcies a la definició que acabem de veure, en aplicar moviments elementals a una trena  $\beta$  qualsevol, l'objecte resultant continua essent una trena.

**Definició 2.1.9.** Una  $n$ -trena  $\beta$  serà equivalent a una altra  $n$ -trena  $\hat{\beta}$ , i ho escriurem  $\beta \sim \hat{\beta}$ , si podem transformar/deformar  $\beta$  en  $\hat{\beta}$  mitjançant l'aplicació d'una sèrie finita de moviments elementals. És a dir, tindrem que  $\beta \sim \hat{\beta}$  si existeix una sèrie,

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \hat{\beta},$$

on per a cada  $i = 1, 2, \dots, m$  la  $n$ -trena  $\beta_i$  s'obté a partir de la  $n$ -trena  $\beta_{i-1}$  aplicant un moviment elemental,  $\Omega$  o  $\Omega^{-1}$ .

**Proposició 2.1.10.** *L'equivalència de trenes ( $\sim$ ) constitueix una relació d'equivalència sobre el conjunt de les  $n$ -trenes.*

*Demostració.* Que la relació compleix la propietat de reflexivitat és trivial, doncs no cal aplicar cap moviment elemental.

La propietat de simetria és immediata, donada la sèrie de moviments elementals que relaciona  $\beta \sim \hat{\beta}$ , únicament invertim els moviments elementals que la formen i obtenim  $\hat{\beta} \sim \beta$ .

Finalment, per demostrar la propietat de transitivitat n'hi ha prou amb unir les dues cadenes de moviments elementals.  $\square$

**Observació 2.1.11.** Denotarem per  $B_n$  el quocient del conjunt de  $n$ -trenes per la relació d'equivalència de trenes,  $\sim$ . En altres paraules,  $B_n$  representa el conjunt de  $n$ -trenes no equivalents. Recordem al lector que si  $\beta$  és una  $n$ -trena, és a dir,  $\beta \in B_n$ , aleshores  $\beta$  és una trena formada per  $n$  cordes. De nou, abusant de notació moltes vegades no escriurem  $[\beta]$ , per a denotar la classe de  $\beta$  i simplement escriurem  $\beta$ .

## 2.2 Estructura de grup

En aquest apartat del treball desmostrarem que el conjunt  $B_n$  de  $n$ -trenes no equivalents forma un grup no abelià amb una operació adequada.

**Definició 2.2.1.** *Siguin  $\beta_1$  i  $\beta_2$  dues  $n$ -trenes pertanyents a  $B_n$ ,  $\{P_k\}_{k=1}^n$ ,  $\{P'_k\}_{k=1}^n$  els punts superiors de  $\beta_1$  i  $\beta_2$  i  $\{Q_k\}_{k=1}^n$ ,  $\{Q'_k\}_{k=1}^n$  els punts inferiors de  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , respectivament. Es defineix el producte de dues trenes,  $\beta_1 * \beta_2$ , com la identificació dels punts  $\{Q_k\}_{k=1}^n$  i  $\{P'_k\}_{k=1}^n$ :  $Q_i$  amb  $P'_i$  per a tota  $i = 1, \dots, n$ , generant una tercera  $n$ -trena.*

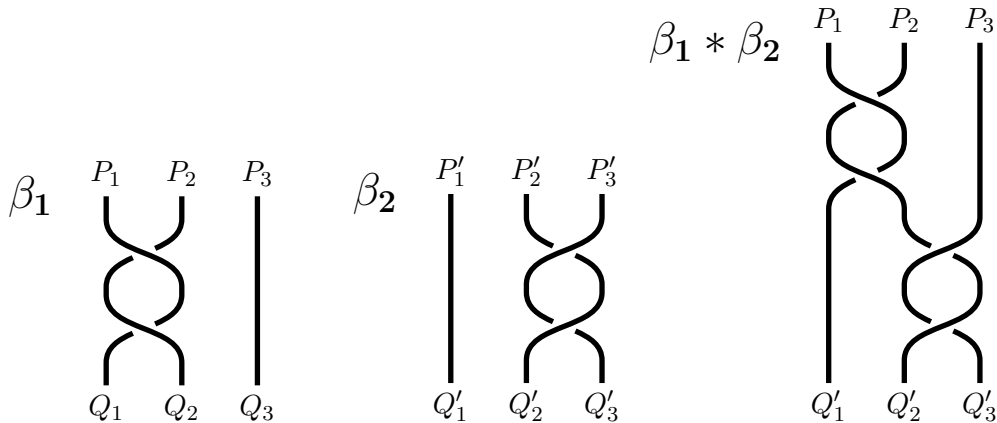


Figura 2.5: Producte de dues trenes.

**Proposició 2.2.2.** *El producte de trenes és intern i respecta l'equivalència de trenes. És a dir, si  $\beta \sim \beta'$  i  $\hat{\beta} \sim \hat{\beta}'$ , aleshores  $\beta * \hat{\beta} \sim \beta' * \hat{\beta}'$ .*

*Demostració.* Donades dues  $n$ -trenes, el seu producte també forma una  $n$ -trena perquè aquest consisteix a juxtaposar-les sense produir cap alteració en aquestes.

Per a la segona part, tot partint de l'equivalència de trenes, per hipòtesi tenim que:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta' ; \hat{\beta} = \hat{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \hat{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \hat{\beta}_l = \hat{\beta}'.$$

Així, tot utilitzant el producte de trenes acabat de definir

$$\beta * \hat{\beta} = \beta_0 * \hat{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 * \hat{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m * \hat{\beta} = \beta' * \hat{\beta}.$$

I ara,

$$\beta' * \hat{\beta} = \beta' * \hat{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta' * \hat{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta' * \hat{\beta}_l = \beta' * \hat{\beta}'.$$

Emprant la transitivitat de  $\sim$  s'arriba al resultat esperat.  $\square$

En concret, el que ens afirma aquesta proposició és que ens és indiferent quin representant escollim d'una trena, per tal del fer el producte amb una altra trena.

**Proposició 2.2.3.** *El producte de dues  $n$ -trenes és associatiu i no commutatiu en general.*

*Demostració.* Per a demostrar la segona propietat ens és suficient posant un contraexemple.

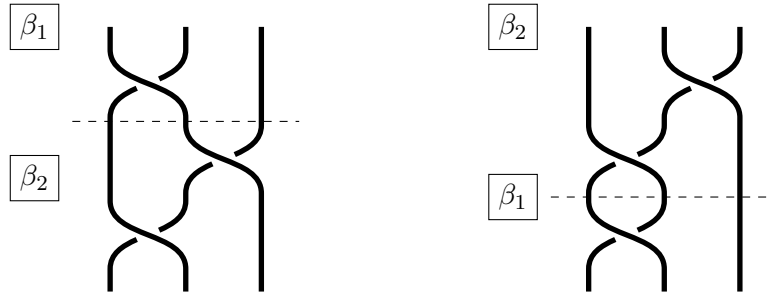


Figura 2.6: No commutativitat de trenes.

Observem la Figura 2.6, on s'ha realitzat el producte  $\beta_1 * \beta_2$  per una banda i  $\beta_2 * \beta_1$  per l'altra. Si aquestes dues trenes fossin equivalents, aleshores la disposició dels punts inferiors hauria de ser la mateixa. Hem vist que dues trenes són equivalents si existeix una cadena finita de moviments elementals que després de ser aplicats a una trena ens dona com a resultat l'altra trena. No obstant això, l'aplicació de moviments elementals no permuta l'ordre dels punts inferiors d'una trena i, per tant, aquestes trenes mai podran esdevenir equivalents. Si ens n'adonem, acabem de descriure un criteri (feble) per a descartar l'equivalència de dues trenes.

Pel que fa a l'associativitat, siguin  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in B_n$ , és evident que  $(\beta_1 * \beta_2) * \beta_3 \sim \beta_1 * (\beta_2 * \beta_3)$ , doncs hem definit el producte de trenes com la juxtaposició d'aquestes i, per tant, l'ordre no afecta el resultat final.  $\square$

**Definició 2.2.4.** *Sigui  $n \geq 1$ , definim la  $n$ -trena trivial o la  $n$ -trena identitat com aquella trena que uneix els seus punts superiors,  $\{P_k\}_{k=1}^n$ , i inferiors,  $\{Q_k\}_{k=1}^n$ , sense cap mena d'encreuament. La denotarem per  $1_n$ .*

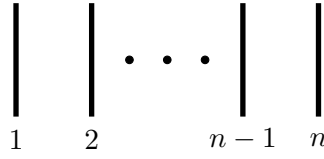


Figura 2.7: Trena  $1_n$ .

**Proposició 2.2.5.** *Sigui  $1_n$  la  $n$ -trena trivial, aleshores per a qualsevol  $n$ -trena  $\beta$  es compleix que  $1_n * \beta \sim \beta * 1_n \sim \beta$ .*

*Demostració.* L'enunciat és evident, ja que la multiplicació de qualssevol  $n$ -trena,  $\beta$ , per  $1_n$  consisteix en un allargament de les cordes de  $\beta$  i en deixar intactes els encreuaments d'aquesta. En conseqüència, la trena resultant és equivalent.  $\square$

**Definició 2.2.6.** *Sigui  $\beta \in B_n$ , pensem la base del diagrama com un mirall i considerem la trena  $\bar{\beta}$ , que resulta de reflectir  $\beta$  sobre la base. A la trena  $\bar{\beta}$  l'anomenarem trena mirall.*

**Proposició 2.2.7.** *Per a tota trena  $\beta \in B_n$ , existeix  $\bar{\beta}$  complint  $\beta * \bar{\beta} \sim \bar{\beta} * \beta \sim 1_n$ .*

*Demostració.* Sigui  $\beta \in B_n$  una  $n$ -trena, considerem  $\bar{\beta}$  construïda tal i com s'explica a la Definició 2.2.6. Formem la  $n$ -trena que resulta de multiplicar  $\beta * \bar{\beta}$  i realitzarem moviments elementals sobre aquesta nova trena per transformar-la en la trena trivial. D'ara en endavant, quan parlem de les trenes considerarem sempre la seva projecció. Recomanem al lector observar la Figura 2.8 (següent pàgina) alhora que llegeix la demostració.

Anomenem  $K$  a la recta que uneix el producte de les dues trenes, la qual actua d'eix de simetria. A continuació, escollim un encreuament  $T$  de  $\beta$ , format per les cordes  $\alpha_i$  i  $\alpha_j$  que, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que  $\alpha_i$  passa per sobre de  $\alpha_j$ . Notem que a la part inferior de  $K$  existeix un encreuament idèntic  $\bar{T}$  format per les mateixes cordes i amb la mateixa disposició. Així, existeix algun moviment elemental  $\Omega^{\pm 1}$  que elimina a  $T$  i  $\bar{T}$ . Com únicament hem aplicat un moviment elemental, la nova  $n$ -trena continua essent equivalent a  $\beta * \bar{\beta}$  i, a més, preserva la simetria inicial. Iterem aquest procés reduint el nombre d'encreuaments fins que arribi un moment en què la trena resultant no tindrà cap encreuament, i per tant, haurem arribat a la trena trivial. En conseqüència,  $\beta * \bar{\beta} \sim 1_n$ . Un raonament anàleg mostra com  $\bar{\beta} * \beta \sim 1_n$ .  $\square$

Tots els resultats vistos fins ara ens porten a enunciar el següent teorema.

**Teorema 2.2.8.** *Sigui  $n \geq 1$ , el conjunt  $B_n$  dotat del producte de trenes és un grup no abelià. És comú anomenar-lo el grup de  $n$ -trenes o el grup de trenes d'Artin.*

*Demostració.* El lector pot observar com la demostració del teorema és immediata a partir dels resultats que hem vist en aquesta secció. Tot fent un repàs, el que cal veure és:

El producte és intern i està ben definit, és a dir, respecta les diferents classes d'equivalències definides mitjançant  $\sim$ . (Proposició 2.2.2)

El producte de trenes és associatiu i no commutatiu. (Proposició 2.2.3)

La  $n$ -trena trivial,  $1_n$ , actua com a element neutre. (Proposició 2.2.5)

La  $n$ -trena mirall, donada una  $n$ -trena qualsevol  $\beta$ , juga el paper d'element invers,  $\beta^{-1}$ . (Proposició 2.2.7)  $\square$

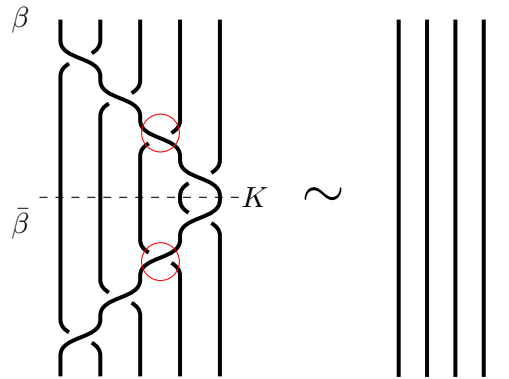


Figura 2.8: Trena mirall.

**Proposició 2.2.9.** *Sigui  $P_n$  el conjunt de trenes les cordes de les quals connecten els punts  $P_k$  i  $Q_k$  per a  $k = 1, \dots, n$  és un subgrup de  $B_n$  i l'anomenem subgrup de trenes pures.*

*Demostració.* Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in P_n$ , com el producte de trenes consisteix a juxtaposar-les, si ambdues trenes són pures el seu producte també ho serà. El producte és evidentment associatiu, la trena trivial  $1_n$  és, de fet, una trena pura i l'element invers d'una trena pura, tal com l'hem definit a la Proposició 2.2.6, forçosament ha de ser pura.  $\square$

### 2.2.1 Presentació d'Artin

Per a finalitzar aquesta secció, introduïm la presentació algebraica que va descriure Artin l'any 1925.

**Definició 2.2.10.** *Per a tota  $i = 1, \dots, n-1$ , una  $n$ -trena elemental,  $\sigma_i$ , és aquella trena que està formada per l'encreuament de la corda  $i$ -èsima per sobre de la corda  $(i+1)$ -èsima, i que deixa totes les altres  $n-2$  cordes restants sense encreuar. Anàlogament, a l'underpass, de la corda  $i$ -èsima amb la corda  $(i+1)$ -èsima, l'anomenem  $\sigma_i^{-1}$ .*

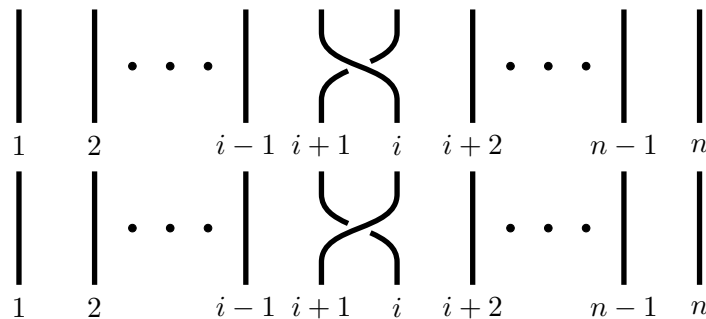


Figura 2.9: El generador  $\sigma_i$  i el seu invers  $\sigma_i^{-1}$ .

**Definició 2.2.11.** Una partició d'una  $n$ -trena  $\beta$  consisteix en la separació d'aquesta en  $n$ -trenes elementals. Aquesta s'aconsegueix separant el diagrama de la trena mitjançant rectes paral·leles horitzontals, de tal manera que entre diferents rectes consecutives només hi haurà un  $n$ -trena elemental.

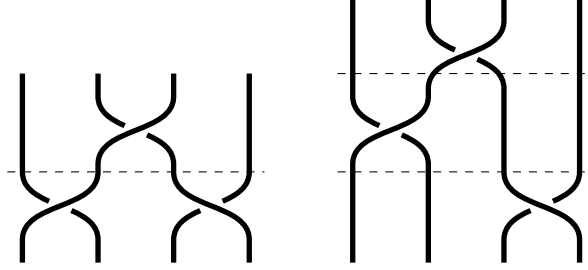


Figura 2.10: Partició d'una trena.

**Proposició 2.2.12.** Tota  $n$ -trena es pot expressar com a producte de  $n$ -trenes elementals.

*Demostració.* Sigui  $\beta$  una trena qualsevol de  $B_n$ , considerem una partició d'aquesta tal com es detalla a la Definició 2.2.11. Observem que si ens trobem en el cas en què coexisteixen dos encreuaments en una mateixa secció de la trena, sempre podem aplicar un (o més) moviment elemental adequat per tal de desplaçar-ne un d'ells. Obtenint així una única trena elemental per cada secció, tal i com volíem veure.

Notem que, una vegada hem fet una partició d'una trena, les subtrenes formades dins d'aquesta poden ser de  $2n - 2$  maneres diferents, ja que poden ser o bé de la forma  $\sigma_i$  o  $\sigma_i^{-1}$ , i de cada una d'aquestes n'hi ha  $n - 1$ .  $\square$

En conseqüència, sigui  $\beta \in B_n$  aleshores podem descriure-la com

$$\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$$

on  $i_k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  i  $e_i \in \{-1, 1\}$  per a tot  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Com és d'esperar, la descomposició d'una trena en trenes elementals no és única. A continuació mostrarem dues propietats que ho demostren.

**Proposició 2.2.13.** Siguin  $\sigma_i, \sigma_j$  dues trenes elementals, aleshores es satisfà  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  si  $|i - j| \geq 2$ .

*Demostració.* El que ens ve a dir aquesta primera propietat és que si succeeix un encreuament entre dues cordes que estan mínimament separades, aleshores l'ordre en el qual duem a terme els encreuaments és indiferent. En efecte, com tota trena es pot expressar com a producte de  $n$ -trenes elementals, aquesta separació ha de ser com a mínim d'una corda (Veure Figura 2.11).  $\square$

**Proposició 2.2.14.** Siguin  $\sigma_i, \sigma_{i+1}$  dues trenes elementals, aleshores es compleix que  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  per a  $i = 1, \dots, n - 2$ .

*Demostració.* Aparentment aquesta propietat és més difícil d'entendre que l'anterior proposició. No obstant, si observem la Figura 2.12 ens adonem que simplement es tracta de desplaçar cap avall la primera corda (sense formar cap encreuament) a la mateixa vegada

que desplaçem cap amunt l'encreuament format per les dues últimes cordes. Aquesta propietat, en essència, és l'aplicació d'un moviment elemental a la segona corda.  $\square$

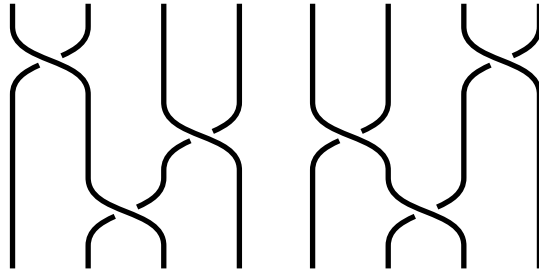


Figura 2.11:  $\beta_1 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2$ ,  $\beta_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2$ .

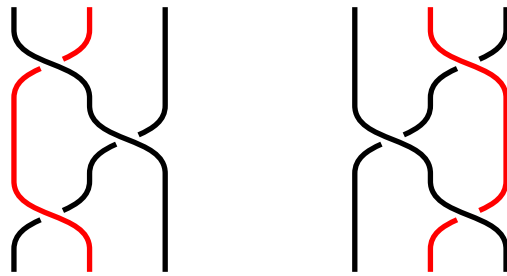


Figura 2.12:  $\beta_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ ,  $\beta_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ .

**Exemple 2.2.15.** Donem un exemple de trenes equivalents però que s'escriuen de manera diferent. D'esquerra a dreta:  $\beta_1 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$  i  $\beta_2 = \sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2$ . Notem que si apliquem la Proposició 2.2.14 a  $\beta_1$  obtenim  $\beta_2$ .

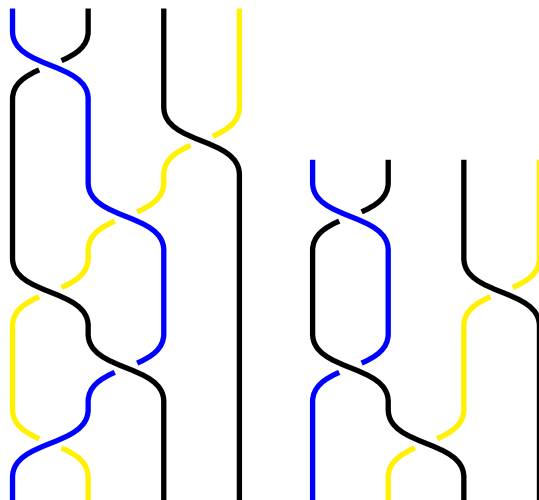


Figura 2.13: Trenes equivalents.

**Observació 2.2.16.** De fet, les propietats descrites a les Proposicions 2.2.13 i 2.2.14 són suficients per a expressar qualsevol trena que ens imaginem. Més encara, qualsevol altra relació que es pugui establir utilitzant trenes elementals, és una conseqüència d'aquestes dues proposicions.



L'observació 2.2.16 dóna peu al següent teorema.

**Teorema 2.2.17.** *Sigui  $n \geq 1$ . El grup de trenes  $B_n$  té la següent presentació*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{per a } i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \right\rangle$$

La demostració d'aquest teorema queda fora de l'abast d'aquest treball, el lector interessat la pot trobar a [10].

És a dir, un element de  $B_n$  es pot especificar com a producte de trenes elementals,  $\sigma_i$  i dels seus inversos,  $\sigma_i^{-1}$ , i dues paraules defineixen la mateixa trena si una es pot transformar en l'altra mitjançant les relacions descrites prèviament.

Ja hem vist anteriorment que  $P_n$  és un subgrup de  $B_n$ , seguidament mostrem gràficament els generadors que Artin va donar pel grup pur de trenes, a partir dels generadors de  $B_n$ . Les relacions que compleixen són un pèl enrevessades, pel que hem decidit no incorporar-les. Aquestes es poden trobar a [10]. Així, Artin va definir:

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1} \text{ per a } 1 \leq i < j \leq n.$$

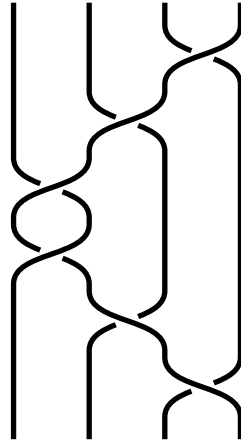


Figura 2.14:  $A_{1,4} = \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2 \sigma_3$ .

Observem com  $A_{i,j}$  defineix el moviment de la corda  $j$ -èsima per sobre de les altres cordes anteriors fins la corda  $i$ -èsima i després, com ha de ser una trena pura, torna a fer el mateix recorregut.

A continuació, descriurem breument els primers grups de trenes.

**Proposició 2.2.18.** *El grup format per una trena és isomorf al grup trivial i el grup de 2-trenes,  $B_2$  és isomorf a  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostració.* En efecte, si únicament tenim una corda  $B_1 = \langle 1_1 \rangle$  és el grup trivial, ja que amb només una corda no podem fer cap encreuament.

Sigui  $k_\beta$  el nombre d'encreuaments que hi ha en una trena  $\beta$ , tenint en compte que:  $\sigma_1 \rightarrow +1$  i  $\sigma_1^{-1} \rightarrow -1$  i  $1_2 \rightarrow 0$ . Definim  $\varphi : B_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  com  $\varphi(\beta) = k_\beta$ .

Aleshores  $\varphi$  és un isomorfisme entre  $B_2$  i  $\mathbb{Z}$ . Vegem primer que l'aplicació està ben definida. Sigui  $\beta \in B_2$  aleshores la trena està generada exclusivament per  $\sigma_1$  o  $\sigma_1^{-1}$ . Notem que

no poden haver-hi combinacions de  $\sigma_1$  i  $\sigma_1^{-1}$ , ja que evidentment  $\sigma_1\sigma_1^{-1} \sim 1_2$ . Així, suposem que  $\beta_1, \beta_2 \in B_2$  i que  $\beta_1 \sim \beta_2$ . Si les trenes són equivalents, forçosament s'ha de complir que ambdues estiguin generades per la mateixa trena elemental, ja que del contrari mai podríem convertir l'una en l'altra. Ara, l'única diferencia entre les trenes és les vegades que una corda passa per sobre de l'altra, és a dir, el nombre d'encreuaments. No obstant, com únicament hi ha dues cordes aquests encreuaments no poden ésser eliminats mitjançant moviments elementals i, en conseqüència, per tal que  $\beta_1 \sim \beta_2$ , necessàriament  $\varphi(\beta_1) = \varphi(\beta_2)$ .

Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in B_2$ , si ambdues trenes estan generades per  $\sigma_1$  o  $\sigma_1^{-1}$ , aleshores el seu producte consistirà en la juxtaposició de les trenes sumant-se el seu nombre d'encreuaments. Ara, si una d'elles està generada per  $\sigma_1$  i l'altra trena està generada per  $\sigma_1^{-1}$ , en unir-se les trenes es produiran simplificacions fins obtenir  $k_{\beta_1 * \beta_2}$  igual a la resta dels encreuaments de les trenes originals. En altres paraules,  $\varphi(\beta_1 * \beta_2) = \varphi(\beta_1) + \varphi(\beta_2)$ , i  $\varphi$  és morfisme de grups. Ara, sigui  $\beta \in B_2$ ,  $\varphi(\beta) = 0$  si i només si  $\beta \sim 1_2$  i, per tant,  $\text{Ker}\varphi = \{1_2\}$  d'on es desprèn que  $\varphi$  és injectiva. Finalment, sigui  $n \in \mathbb{Z}$ , la trena  $\sigma_1^n$  compleix que  $\varphi(\sigma_1^n) = n$ . En conclusió,  $\varphi$  és també exhaustiva i en conseqüència un isomorfisme.  $\square$

**Corol·lari 2.2.19.** *Si  $n \geq 2$ , el grup  $B_n$  és infinit.*

*Demostració.* Quan un grup té un conjunt d'elements infinit entenem que el grup és infinit. Considerem el cas  $n = 2$ . Acabem de veure que  $B_2 \cong \mathbb{Z}$  i, per tant,  $B_2$  és infinit. Si  $n > 2$ , notem que podem associar a cada 2-trena una  $n$ -trena, simplement mantenint les 2 primeres cordes igual que la 2-trena i les altres  $n - 2$  cordes resten com una  $(n - 2)$ -trena trivial. Per tant,  $B_2 \subset B_n$ , la qual cosa implica que  $B_n$  és infinit.  $\square$

Quan  $n = 3$ ,  $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$ , ja que amb només dues trenes no hi ha separació suficient entre trenes per tal que puguin commutar entre elles. A tall d'exemple, és conegut que  $B_3$  és isomorf al grup de nusos del nus trèvol.

## 2.3 Invariants

Una vegada som capaços d'associar paraules a trenes, mitjançant les trenes elementals  $\sigma_i$ , se'ns obre un nou món davant la possibilitat de saber si una trena és equivalent a una altra, únicament observant si aconseguim descriure les dues trenes amb la mateixa paraula; fent transformacions si s'escau. No obstant això, no sempre serà evident quina transformació cal fer per arribar a una altra paraula donada. En aquest context, seran de molta utilitat els invariants. Els invariants són objectes que no varien en ser aplicats a un objecte equivalent, en aquest cas, trenes. És a dir, si dues trenes són equivalents aleshores l'invariant ens donarà el mateix resultat. L'important d'això, és la negació d'aquest enunciat. En altres paraules, si en aplicar un invariant a dues trenes ens dona resultats diferents, aleshores podem afirmar que les trenes no són equivalents.

### 2.3.1 Permutació associada a una trena

Recordem que podem interpretar una  $n$ -trena com la unió de  $2n$  punts mitjançant arcs o cordes. Si numerem tant els punts superiors com els inferiors de forma ascendent, de l'1 a  $n$ , podem associar una permutació a una trena d'una manera relativament senzilla.

**Definició 2.3.1.** Sigui  $\beta \in B_n$  i  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  els arcs que la formen i anomenem  $Q_{k_i} = \alpha_i(1)$ . La permutació associada a  $\beta$ ,  $\mu(\beta)$ , serà

$$\mu : B_n \longrightarrow S_n \quad \mu(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

on  $S_n$  denota el grup de permutacions de  $n$  elements, també conegut com grup simètric.

**Proposició 2.3.2.** La permutació associada a una trena és un invariant de trenes.

*Demostració.* Hem de veure que si dues trenes són equivalents aleshores tenen la mateixa permutació associada. De fet, la demostració de l'associativitat de trenes en la Proposició 2.2.3 és exactament l'argument que prova aquesta proposició.  $\square$

**Exemple 2.3.3.** El recíproc no és cert en general, és a dir, dues trenes amb mateixa permutació associada no són necessàriament equivalents.

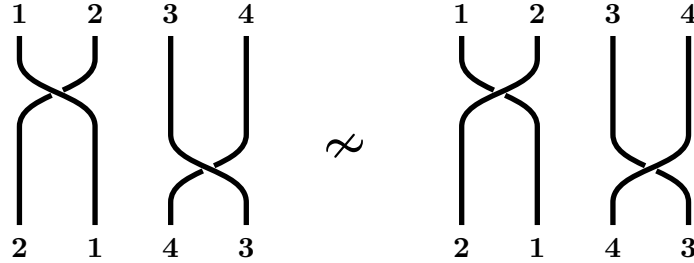


Figura 2.15:  $\beta_1 = \sigma_1\sigma_3$ ,  $\beta_2 = \sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}$ .

En efecte,  $\mu(\beta_1) = (1\ 2)(3\ 4) = \mu(\beta_2)$ , però clarament les trenes no són equivalents. A més a més, aquest exemple ens mostra també com  $\mu$  no és injectiva.

**Proposició 2.3.4.** L'aplicació  $\mu$  és un morfisme de grups.

*Demostració.* Ens és suficient comprovar que l'aplicació  $\mu$  satisfà les relacions del grup de trenes. Notem que  $\mu(\sigma_i) = (i\ i+1)$  per a tot  $i = 1, \dots, n-1$ .

Sigui  $1 \leq i \leq n-1$  amb  $|i-j| \geq 2$  aleshores:

$$\mu(\sigma_i\sigma_j) = \mu(\sigma_i)\mu(\sigma_j) = (i\ i+1)(j\ j+1) = (j\ j+1)(i\ i+1) = \mu(\sigma_j\sigma_i)$$

Per tant és compleix que  $\mu(\sigma_i\sigma_j) = \mu(\sigma_j\sigma_i)$ .

D'altra banda, sigui  $1 \leq i \leq n-1$  i tenint en compte que la relació  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$  és tracta de l'aplicació d'un moviment elemental, que no permuta l'ordre dels punts inferiors d'una trena, és evident que  $\mu(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \mu(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$ .

I, per tant,  $\mu$  és un morfisme de grups.  $\square$

**Teorema 2.3.5.** Sigui  $P_n$  el grup de trenes pures, aleshores  $P_n = \text{Ker}(\mu)$ . A més es compleix que  $P_n$  és normal en  $B_n$  i  $B_n/P_n \cong S_n$ .

<sup>1</sup>És molt important tenir en compte la condició  $|i-j| \geq 2$ , ja que si no aquest pas no és cert.

*Demostració.* Prèviament hem definit les trenes pures com aquelles trenes que uneixen els punts  $P_k$  amb els punts  $Q_k$ , amb  $k = 1, \dots, n$ , fent encreuaments amb les cordes si és el cas. Podem reescriure-les tot utilitzant el morfisme  $\mu$  posant  $P_n = \{\beta \in B_n \mid \mu(\beta) = 1_{S_n}\}$ .

Per definició,  $Ker(\mu) = \{\beta \in B_n \mid \mu(\beta) = 1_{S_n}\}$  amb el que la igualtat és evident.

Per veure que  $P_n$  és un subgrup normal en  $B_n$ , només cal aplicar que  $\mu$  és un morfisme de grups, i que per tant, el subgrup  $Ker(\mu) = P_n$  és normal en  $B_n$ . Finalment, aplicant el primer teorema d'isomorfia a  $\mu$ , tenim que  $B_n/P_n \cong Im(\mu)$ . Si veiem que  $Im(\mu) \cong S_n$  haurem provat el resultat.

Concretament, només hem de demostrar que el morfisme  $\mu$  és exhaustiu. Sigui  $\tau \in S_n$ , un resultat conegut és que aquesta permutació es pot expressar com a producte de transposicions. Encara més, cada transposició  $(i j)$  amb  $i < j$  es pot expressar de la forma

$$(i j) = (i i+1)(i+1 i+2) \cdots (j-2 j-1)(j-1 j)(j-2 j-1) \cdots (i+1 i+2)(i i+1). \quad (1)$$

Ara, a la demostració del Teorema 2.3.4, hem vist que  $\mu(\sigma_i) = (i i+1)$  per a tot  $i = 1, \dots, n-1$ . Suposem que  $\tau$  descomposa en un producte de  $k$  transposicions. A cada transposició, diguem-li  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ , li apliquem el procés descrit prèviament a (1). Per cada transposició  $\tau_i$  obtindrem un nou conjunt de transposicions, suposem que en són  $l_i$ , obtenint

$$\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_k = (\tau_{1,1} \cdot \tau_{1,2} \cdots \tau_{1,l_1}) \cdot (\tau_{2,1} \cdot \tau_{2,2} \cdots \tau_{2,l_2}) \cdots (\tau_{k,1} \cdot \tau_{k,2} \cdots \tau_{k,l_k}). \quad (2)$$

On ara cada  $\tau_{i,j}$  és una transposició de la forma  $(i i+1)$  per algun  $i$ , en conseqüència,  $(i i+1) = \mu(\sigma_i)$  on  $\sigma_i$  és una trena elemental. Sigui  $\sum_{i=1}^k l_i = m$  i tot aplicant el descrit a (2) obtenim

$$\tau = \prod_{j=1}^m \mu(\sigma_{i_j}) = \mu(\prod_{j=1}^m \sigma_{i_j})$$

on en la segona igualtat hem usat que  $\mu$  és un morfisme de grups.

Prenent  $\beta = \prod_{j=1}^m \sigma_{i_j}$  i fent servir la Proposició 2.2.12 tenim que  $\mu(\beta) = \tau$ . Així doncs,  $\mu$  és exhaustiva, tal i com volíem veure.  $\square$

**Observació 2.3.6.** Acabem de demostrar que  $P_n$  és un subgrup normal de  $B_n$ . És a dir, siguin  $\beta_1 \in B_n$  i  $\beta_2 \in P_n$  aleshores el producte  $\beta_1 * \beta_2 * \beta_1^{-1}$  és una trena pura. Partint de la idea que  $\beta_1 * \beta_1^{-1} \sim 1_n$  si afegim una trena pura abans de multiplicar per l'invers de  $\beta_1^{-1}$  és evident que la disposició dels punts no variarà. Per tant, té sentit que efectivament  $\beta_1 * \beta_2 * \beta_1^{-1}$  sigui una trena pura.

### 2.3.2 L'exponent d'una trena

**Definició 2.3.7.** Sigui  $\beta \in B_n$  una trena, expressada com  $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$ , on  $e_i \in \mathbb{Z}$  i  $i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  per a tot  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , definim l'exponent de  $\beta$  com

$$\begin{aligned} \text{exp} : B_n &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \beta &\longmapsto \sum_{i=1}^k e_i. \end{aligned}$$

**Observació 2.3.8.** Observem que ara hem pogut definir els exponents de les trenes elementals com a enters, ja que ara ja hem introduït la presentació donada per Artin.

Abans, però, només ens basàvem en el fet que tota trena es pot expressar com a producte de trenes elementals.

**Proposició 2.3.9.** *L'exponent de trenes és un invariant de trenes.*

*Demostració.* Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$  dues trenes equivalents. Pel Teorema 2.2.17 sabem que si dues trenes són equivalents, aleshores les seves paraules són equivalents. És a dir, a partir de la paraula de  $\beta_1$  podem arribar a la paraula de  $\beta_2$  emprant les relacions de la presentació del grup de trenes. Si demostrem que el fet d'emprar alguna d'aquestes relacions no altera l'exponent de la trena, hauréu provat l'enunciat, ja que necessàriament les trenes hauran de tenir el mateix exponent. Efectivament:

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_i \sigma_j) &= 2 = \exp(\sigma_j \sigma_i) \text{ si } |i - j| \geq 2, \\ \exp(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) &= 3 = \exp(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) \text{ per a } i = 1, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.3.10.** Observem com podem descartar l'equivalència de les trenes de la la Figura 2.15 mitjançant aquest nou invariant. En efecte,  $\exp(\beta_1) = 2$  i  $\exp(\beta_2) = -2$ , pel que  $\beta_1 \not\sim \beta_2$ .

**Proposició 2.3.11.** *L'exponent de trenes és un morfisme de grups exhaustiu.*

*Demostració.* Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ , descrites per les paraules

$$\beta_1 = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}, \beta_2 = \sigma_{j_1}^{e'_1} \sigma_{j_2}^{e'_2} \cdots \sigma_{j_l}^{e'_l},$$

on  $e_s, e'_s \in \mathbb{Z}$  i  $i_k, j_l \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  per a tot  $s \in \{1, 2, \dots, \max(k, l)\}$ . D'aquesta manera tenim que  $\exp(\beta_1) = \sum_{i=1}^k e_i$  i  $\exp(\beta_2) = \sum_{j=1}^l e'_j$ . Multiplicar dues trenes consisteix en multiplicar les trenes elementals que les formen, ajuntant-les en una única paraula. Per tant,  $\beta_1 * \beta_2 = (\sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}) \cdot (\sigma_{j_1}^{e'_1} \sigma_{j_2}^{e'_2} \cdots \sigma_{j_l}^{e'_l})$ , amb  $\exp(\beta_1 * \beta_2) = e_1 + \dots + e_k + e'_1 + \dots + e'_l = \exp(\beta_1) + \exp(\beta_2)$ . Per tant,  $\exp$  és un morfisme de grups. D'altra banda, donat un  $t \in \mathbb{Z}$ , la trena  $\sigma_i^t$  compleix que  $\exp(\sigma_i^t) = t$ , pel que el morfisme és exhaustiu. □

D'aquesta manera podrem descartar fàcilment l'equivalència de dues trenes únicament sumant els exponents de les trenes elementals que la formen. Si ambdós sumatoris difereixen, aleshores podrem afirmar que les dues trenes no són equivalents. No obstant, l'afirmació inversa no és certa. És a dir, si dues trenes tenen el mateix exponent o tenen la mateixa permutació associada no necessàriament han de ser equivalents. Un clar exemple són les trenes  $\beta_1 = \sigma_1$  i  $\beta_2 = \sigma_2$  a  $B_3$ .

En la secció anterior hem vist que el grup de trenes té infinits elements si  $n \geq 2$ . Introduïm a continuació una proposició que demostra que les trenes elementals tenen ordre infinit.

**Proposició 2.3.12.** *Sigui  $\sigma_i$  una trena elemental del grup de trenes  $B_n$ , aleshores  $\sigma_i^k \neq 1_n$  per a tot  $i = 1, \dots, n - 1$  i per a tot  $k \geq 1$ .*

*Demostració.* Per a  $i = 1, \dots, n - 1$  i  $k \geq 1$  considerem la trena elemental  $\sigma_i$ . La trena  $\sigma_i^k$  consisteix en  $k$  còpies de  $\sigma_i$  i és evident que  $\exp(\sigma_i^k) = k$ . D'altra banda la trena identitat d'ordre  $n$  té exponent igual a 0, ja que no requerim de cap trena elemental i, per tant, com  $k \neq 0$  podem afirmar que  $\sigma_i^k$  no és equivalent a la trena identitat. □

És natural preguntar-se si, donat que les trenes s'expressen com a producte de trenes elementals, això implica que qualsevol trena té ordre infinit. Amb les eines de què disposem actualment no som capaços de respondre la pregunta. Per això, i introduint un altre invariant homotòpic, en el següent capítol demostrarem que el grup fonamental d'un determinat espai topològic és precisament el grup de trenes  $B_n$ .

Aquesta nova visió del grup de trenes ens permetrà respondre a la pregunta que, de moment, deixem oberta.

## Capítol 3

# Relació entre l'espai de configuracions i el grup de trenes

Començarem aquest capítol de la memòria recordant al lector alguns conceptes relacionats amb els espais de configuracions i l'homotopia que seran crucials per a comprendre la demostració principal del mateix. Per redactar aquest capítol hem consultat a [2], [3], [5] i [10].

### 3.1 Preliminars

Molt sovint ens trobem davant del problema d'evitar col·lisions entre objectes del mateix tipus, com ara cotxes que es mouen per una superfície o avions que volen per l'aire. Una manera formal de tractar aquesta qüestió mitjançant la topologia és introduint els espais de configuracions. En matemàtiques, un espai de configuracions és una construcció estretament relacionada amb els espais d'estats o espais de fase en física. Concretament, en mecànica clàssica, l'espai de configuracions d'un sistema físic és l'espai de les posicions possibles d'un sistema. En el camp de la topologia, els espais de configuracions van ser estudiats el 1962 per Edward Fadell i Lee Neuwirth ([3]) en relació amb el grup de trenes d'Artin. Van demostrar que aquest grup no és sinó el grup fonamental de l'espai de configuracions de punts diferents en el pla, com veurem més endavant.

**Definició 3.1.1.** *Sigui  $X$  un espai topològic i  $n \geq 1$ , l'espai de configuracions de  $n$  punts ordenats és:*

$$F_n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

*Aquest espai es sol dotar de la topologia subespai a partir de la inclusió  $F_n(X)$  en  $X^n$ .*

Existeix una acció natural del grup simètric  $S_n$  sobre els punts de  $F_n(X)$ , donada per:

$$\begin{aligned} S_n \times F_n(X) &\longrightarrow F_n(X) \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Aquesta acció dóna lloc a la següent definició.

**Definició 3.1.2.** *Sigui  $X$  un espai topològic i  $n \geq 1$ , l'espai de configuracions de  $n$  punts desordenats és:*

$$C_n(X) = F_n(X)/S_n.$$

Intuïtivament, aquest segon espai oblida el “nom” dels punts, tal i com podem observar amb el següent exemple.

**Exemple 3.1.3.** Si  $X = [0, 1]$  i  $n = 2$ , aleshores tenim  $F_2(X) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \neq y\}$ .

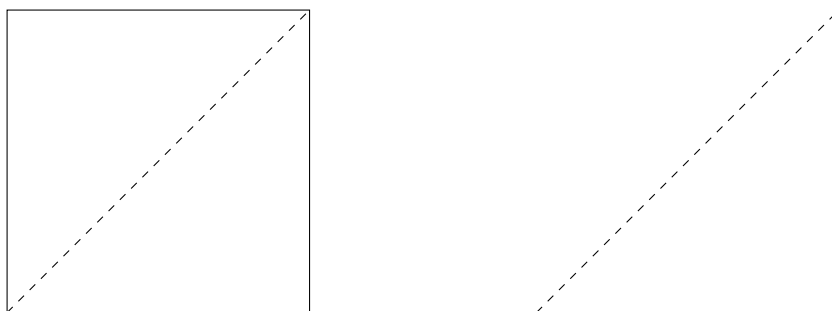


Figura 3.1:  $F_2([0, 1])$  (esquerra) i  $C_2([0, 1])$  (dreta).

Per altra banda a  $C_2([0, 1])$ , identifiquem els punts de la forma  $(x, y)$  i  $(y, x)$  de tal manera que únicament ens resta un triangle dels dos anteriors.

Donem una breu repàs sobre conceptes d'homotopia que són elementals per a l'enteniment d'aquest capítol.

**Definició 3.1.4.** *Siguin  $X$  i  $Y$  espais topològics i  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicacions contínues. Direm que  $f$  i  $g$  són homòtopes si existeix una aplicació contínua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  i  $F(x, 1) = g(x)$ . Aleshores escriurem  $f \simeq g$  i direm que l'aplicació  $F$  és una homotopia entre  $f$  i  $g$ .*

*Donat un conjunt  $A \subseteq X$ , si a més es compleix que  $f(a) = g(a)$  per a tot  $a \in A$  i  $F(x, t) = f(x)$  per a tot  $(x, t) \in A \times [0, 1]$  direm que l'homotopia és relativa al conjunt  $A$ .*

**Definició 3.1.5.** *Una aplicació contínua  $f : X \rightarrow Y$  és una equivalència homotòpica si existeix una funció  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g \simeq Id_Y$  i  $g \circ f \simeq Id_X$ . Es diu que els espais  $X$  i  $Y$  són homotòpicament equivalents o tenen el mateix tipus d'homotopia i es denota com a  $X \simeq Y$ .*

**Definició 3.1.6.** *Sigui  $X$  un espai topològic, un camí en  $X$  és una aplicació contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Direm que es tracta d'un llaç si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .*

**Notació.** A partir d'ara escriurem  $I = [0, 1]$ .

**Definició 3.1.7.** *Un homeomorfisme entre dos espais topològics és una funció contínua i bijectiva amb inversa contínua.*

**Definició 3.1.8.** *Siguin  $X, Y$  espais topològics. Un embedding és una funció  $f : X \rightarrow Y$  continua i injectiva tal que existeix un homeomorfisme entre  $X$  i la seva imatge  $f(X)$ .*

**Definició 3.1.9.** *Sigui  $X$  un espai topològic i  $x_0 \in X$ , denotem*

$$\Omega(X, x_0) = \{\gamma : I \rightarrow X \text{ contínua i tal que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$



el conjunt de llaços a  $X$  amb punt base  $x_0$ .

**Observació 3.1.10.** És fàcil veure que la relació d'homotopia ( $\simeq$ ) en el conjunt  $\Omega(X, x_0)$  defineix una relació d'equivalència, el lector pot consultar la demostració a [5].

**Definició 3.1.11.** Sigui  $X$  un espai topològic, siguin  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  dos camins tals que  $\alpha(1) = \beta(0)$  aleshores es defineix el producte de  $\alpha$  per  $\beta$  com el camí

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Definició 3.1.12.** Sigui  $X$  un espai topològic i  $x_0 \in X$  si considerem a  $\Omega(X, x_0)$  la relació d'homotopia de camins, aleshores al conjunt quocient  $\Omega(X, x_0) / \simeq$  el denotarem com  $\pi_1(X, x_0)$  i l'anomenarem grup fonamental<sup>2</sup> de  $X$  amb punt base  $x_0$ .

**Definició 3.1.13.** Sigui  $X$  un espai topològic, es diu que  $X$  és arc-connex si donats  $x_1, x_2 \in X$  existeix un camí continu  $\gamma : I \rightarrow X$  complint que  $\gamma(0) = x_1$  i  $\gamma(1) = x_2$ .

**Lema 3.1.14.** Sigui  $X$  un espai arc-connex, aleshores per a tota parella de punts  $x, y \in X$  els grups  $\pi_1(X, x)$  i  $\pi_1(X, y)$  són isomorfs.

*Demostració.* Es tracta d'un resultat conegut. Sigui  $\gamma : I \rightarrow X$  el camí complint  $\gamma(0) = x$  i  $\gamma(1) = y$ . Llavors, l'aplicació

$$\begin{aligned} f_\gamma : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma] \end{aligned}$$

dona l'isomorfisme de grups. □

## 3.2 L'espai de configuracions del pla

Començarem aquesta secció donant una nova relació entre trenes que, juntament amb la demostració d'un teorema i la interpretació d'un llaç ens permetran afrontar la demostració principal del capítol.

**Definició 3.2.1.** Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ , direm que les trenes  $\beta_1$  i  $\beta_2$  són isòtopes si existeix una aplicació contínua.

$$F : \beta_1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

complint que per a cada  $s \in I$

$$\begin{aligned} F_s : \beta_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I, \\ x &\longmapsto F(x, s) \end{aligned}$$

és un embedding la imatge de la qual és una  $n$ -trena.

$I$ , a més, se satisfà que  $F(\beta_1, 0) = \beta_1$ ,  $F(\beta_1, 1) = \beta_2$ .

<sup>2</sup>Que aquest quocient sigui un grup és un resultat conegut. El lector pot trobar una demostració a [5]

**Teorema 3.2.2.** *Siguin  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$ , els següents enunciats són equivalents:*

- 1)  $\beta_1$  i  $\beta_2$  són equivalents.
- 2)  $\beta_1$  i  $\beta_2$  són isòtopes.

La demostració d'aquesta proposició queda fora de l'abast d'aquest treball. El lector pot consultar [10] si està interessat.

**Observació 3.2.3.** Per tal d'estudiar el grup fonamental de l'espai  $F_n(\mathbb{R}^2)$  cal interpretar prèviament com són els llaços en aquest espai.

Considerem un punt  $x_0 \in F_n(\mathbb{R}^2)$  que consisteix en escollir  $n$  punts ordenats  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  on  $P_i \in \mathbb{R}^2$ . Ara, donat un llaç  $\gamma : I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  amb punt base  $x_0$ , per a tot  $t \in I$  tenim que  $\gamma(t)$  és una nova configuració de  $n$  punts ordenats al pla complint que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ .

Alternativament, podem descriure  $\gamma$  com un conjunt de trajectòries  $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $n$  partícules movent-se pel pla amb la condició que no se'ls permet xocar entre elles i començant i acabant en el punt  $x_0 = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ . És a dir,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$  per a tot  $t \in I$ , complint  $\gamma(0) = \gamma(1)$  que equival a demanar que  $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = P_i$  per a tot  $i = 1, 2, \dots, n$ .

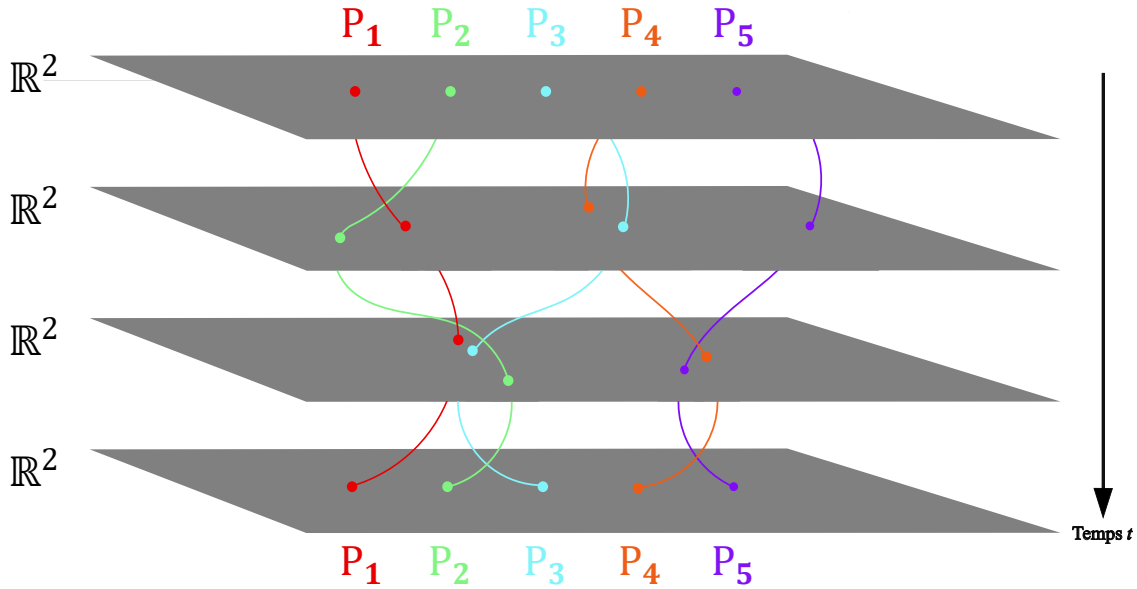


Figura 3.2: Un llaç a l'espai  $F_5(\mathbb{R}^2)$ .

Així doncs, d'aquesta manera hom pot veure a la Figura 3.2 com un llaç a  $F_n(\mathbb{R}^2)$  no és més que una trena de  $n$  cordes. Un llaç a  $C_n(\mathbb{R}^2)$  s'assimila de la mateixa manera, tenint en compte que  $C_n(X) = F_n(X)/S_n$ . És a dir, si el punt on comença la trena és  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , el punt final de llaç no cal que sigui exactament el mateix, sinó que pot venir alterat per una permutació qualsevol de les seves coordenades.

**Teorema 3.2.4.** *Sigui  $m \geq 2$  i  $X = \mathbb{R}^m$  un espai arc-connex i Hausdorff, aleshores  $F_n(X)$  és un espai arc-connex.*

*Demostració.* Siguin  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  i  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  punts de  $F_n(X)$ , hem de trobar un camí  $\gamma$  que connecti  $x$  amb  $y$ .

Suposem que  $x_i \neq y_j$  per a tot  $i, j \leq n$  i definim  $z^k := (y_1, y_2 \dots y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in F_n(X)$ . Considerem el camí  $\gamma_1 : I \rightarrow X \setminus \{x_2, \dots, x_n\}$  complint que  $\gamma_1(0) = x_1$  i  $\gamma_1(1) = y_1$ . Aquest camí existeix ja que si  $X$  és arc-conex,  $X \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  també és arc-conex, on  $p_i \in X$  per a tot  $i$ . Així,  $\hat{\gamma}_1 : I \rightarrow X^n$ ,  $\hat{\gamma}_1(t) = (\gamma_1(t), x_2, \dots, x_m)$  és un camí de  $x$  a  $z^1$ . A més com la primera coordenada no coincidirà amb cap de les altres, per construcció, és evident que  $\hat{\gamma}_1 \in F_n(X)$ .

A continuació considerem el camí  $\gamma_2 : I \rightarrow X \setminus \{y_1, x_3, \dots, x_n\}$  complint que  $\gamma_2(0) = x_2$  i  $\gamma_2(1) = y_2$ . De nou, sigui  $\hat{\gamma}_2 : I \rightarrow X^n$ ,  $\hat{\gamma}_2(t) = (y_1, \gamma_2(t), x_3, \dots, x_m)$  és un camí ben definit de  $z^1$  a  $z^2$ . Procedint inductivament hom arriba a la construcció de camins que connecten  $z^k$  amb  $z^{k+1}$  per a tot  $k = 0, \dots, n-1$ .

Per tant, definint  $\gamma = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \dots \cdot \hat{\gamma}_{n-1}$  obtenim un camí complint  $\gamma(0) = x$  i  $\gamma(1) = y$ .

Suposem ara que no es compleix la condició  $x_i \neq y_j$  per a tot  $i, j$ , aleshores tenim que  $z^k \notin F_n(X)$ . Només cal trobar un punt  $p \in F_n(X)$  complint que  $p_i \neq x_j$  i  $p_i \neq y_s$  per a tot  $i, j, s \leq n$ . Com  $X$  és de Hausdorff, podem prendre conjunts oberts  $U_i$  i  $V_j$  de  $x_i$  i  $y_j$  respectivament complint que  $U_i \cap U_j = \emptyset = V_i \cap V_j$  per a tot  $i, j \leq n$ . Aleshores prenem  $p_i \in U_i \cup V_i \setminus \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$  i obtindrem que  $p = (p_1, \dots, p_n) \in F_n(X)$ . Finalment,  $\gamma$  consistirà en la unió de dos camins; el primer anant de  $x$  a  $p$  i el segon de  $p$  a  $y$ .  $\square$

**Corol·lari 3.2.5.** *Sigui  $m \geq 2$  i  $X = \mathbb{R}^m$  un espai arc-connex i Hausdorff, aleshores  $C_n(X)$  és un espai arc-connex.*

*Demostració.* El resultat és immediat a partir de la demostració anterior. La diferència entre  $F_n(X)$  i  $C_n(X)$  rau en el fet que en el segon espai dos punts poden esdevenir el mateix punt si comparteixen les mateixes coordenades però no l'ordre. No obstant, la creació del punt  $p$  auxiliar que hem fet servir en la demostració del teorema previ, ens assegura que  $z^k$  està ben definit i, en conseqüència, que  $C_n(X)$  és arc-connex.  $\square$

En general, si  $X$  és un espai topològic arc-connex i de Hausdorff no és segur que  $X$  menys un conjunt finit de punts sigui també arc-connex. Per exemple, si  $X = \mathbb{R}$  hom pot veure que succeeix el mateix que a l'Exemple 3.1.3. Així doncs, el Teorema 3.2.4 i el Corol·lari-3.2.5 es poden generalitzar si afegim la hipòtesis que  $X$  menys un conjunt finit de punts sigui també un espai arc-connex.

Una vegada vistos tots aquests resultats, podem enunciar i demostrar el següent teorema.

**Teorema 3.2.6.** *Sigui  $P_n$  el grup de trenes pures i  $x_0 \in F_n(\mathbb{R}^2)$ , aleshores*

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), x_0) \cong P_n.$$

*Demostració.* Com  $\mathbb{R}^2$  és arc-connex i Hausdorff, pel Teorema 3.2.4 l'espai  $F_n(\mathbb{R}^2)$  és arc-connex i fent servir el Lema 3.1.14, escriurem  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$  elidint el punt  $x_0$ , ja que l'elecció d'aquest és indiferent. Considerem les següents aplicacions  $\Psi$  i  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Psi : P_n &\longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) & \Phi(\beta) : I &\longrightarrow F_n(\mathbb{R}^2) \\ [\beta] &\longmapsto [\Phi(\beta)] & t &\longmapsto (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)), \end{aligned}$$

on  $r_i(t)$  és la intersecció de la  $i$ -èsima corda,  $\alpha_i$ , de  $\beta$  amb  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  projectat a  $\mathbb{R}^2$ .

Com s'ha vist prèviament a l'Observació 3.2.3, efectivament l'aplicació  $\Phi$  consisteix en l'assignació d'una trena a la seva representació vista com un llaç dins de  $F_n(\mathbb{R}^2)$ . El fet de fer la projecció de la trena justifica la continuïtat de  $\Phi$ .

Veurem que  $\Psi$  defineix un isomorfisme de grups i haurem provat el teorema.

Comencem veiem que l'aplicació està ben definida. Hem de veure que donades  $\beta, \hat{\beta} \in P_n$  complint que  $\beta \sim \hat{\beta}$ , aleshores  $\Psi(\beta) = \Psi(\hat{\beta})$ .

Com  $\beta \sim \hat{\beta}$  aleshores existeix una isotopia

$$F : \beta \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I.$$

Si considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} H : I \times I &\longrightarrow F_n(\mathbb{R}^2) \\ (s, t) &\longmapsto \Phi(F(\beta, t))(s), \end{aligned}$$

tenim que com  $F$  i  $\Phi$  són funcions contínues,  $H$  també ho és. Ara,

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \Phi(F(\beta, 0))(s) = \Phi(\beta)(s), & H(s, 1) &= \Phi(F(\beta, 1))(s) = \Phi(\hat{\beta})(s), \\ H(0, s) &= \Phi(F(\beta, t))(0) = x_0, & H(1, s) &= \Phi(F(\beta, t))(1) = x_0. \end{aligned}$$

Per tant,  $H$  defineix una homotopia entre  $\Phi(\beta)$  i  $\Phi(\hat{\beta})$ , és a dir,  $\Psi(\beta) = \Psi(\hat{\beta})$ .

A continuació provarem que  $\Psi$  defineix un morfisme de grups. Hem de veure que donades  $\beta, \hat{\beta} \in P_n$ ,  $\Psi(\beta * \hat{\beta}) = \Psi(\beta) \cdot \Psi(\hat{\beta})$ . Sigui  $\beta$  i  $\hat{\beta}$  trenes, sabem que el seu producte consisteix en la juxtaposició d'aquestes dues. En aplicar  $\Psi$  a aquesta nova trena simplement obtenim la representació geomètrica com a llaç dins de l'espai de configuracions. D'altra banda i tenint en compte la definició del producte de llaços, resulta evident que  $\Psi(\beta * \hat{\beta}) = \Psi(\beta) \cdot \Psi(\hat{\beta})$ .

Finalment veurem que l'aplicació és injectiva i exhaustiva. Pel que fa a la primera propietat, suposem que  $\Psi(\beta) = \Psi(\hat{\beta})$  i acabarem veient que  $\beta \sim \hat{\beta}$ .

Sigui  $H$  la homotopia de  $\Psi(\beta)$  a  $\Psi(\hat{\beta})$ . Tenint en compte l'Observació 3.2.3, l'homotopia  $H$  indueix un conjunt d'homotopies, una per a cada trajectòria, entre camins a  $\mathbb{R}^2$ . Anomenem  $H_i$  per a  $i = 1, \dots, n$  i definim la isotopia  $F$  que va de  $\beta$  a  $\hat{\beta}$  com segueix

$$\begin{aligned} F : \beta \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ (x, s) &\longmapsto (H_i(t, s), t), \end{aligned}$$

on  $i$  és el subíndex de cada corda  $\alpha_i \subset \beta$  i  $x$  es pot escriure com  $x = (r_i(t), t)$  per alguna  $t \in I$ .

De la continuïtat de  $H_i$  i  $t$  en variar  $x$  se'n dedueix la continuïtat de  $F$ . Ara veurem que  $F_s$  defineix un embedding. Recordem que  $F_s = F(x, s)$  i que treballem amb la topologia euclidiana habitual.

Notem que  $\beta$  és un compacte com a subconjunt de  $\mathbb{R}^3$ . En efecte, podem reescriure la trena com  $\beta = \cup_{i=1}^n \alpha_i$ . Ara,  $\beta^C = \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{i=1}^n \alpha_i$  és evidentment un conjunt obert. D'altra banda, com  $\beta \subset [0, 1]^3$ ,  $\beta$  és un conjunt acotat. Així, pel teorema de Heine-Borel,  $\beta$  és un compacte. També, en ser  $\mathbb{R}^2 \times I$  un espai mètric, és automàtic que és de Hausdorff.

Com  $F_s$  és una funció que va d'un espai compacte a un espai Hausdorff, la funció és tancada. Certament, sigui  $C$  un subconjunt tancat en  $\beta$ , com  $\beta$  és un compacte i  $C$

és tancat, aleshores  $C$  és compacte. Ara, com  $F_s$  és contínua  $F_s(C)$  és un compacte. Finalment, com l'espai d'arribada és de Hausdorff,  $F_s(C)$  és un tancat.

Sigui  $C$  un tancat de  $\beta$ ,  $(F_s^{-1})^{-1}(C) = F_s(C)$  és un tancat de  $\mathbb{R}^2 \times I$  i, per tant,  $F_s^{-1}$  és contínua.

Siguin  $x, x' \in \beta$  complint  $x \neq x'$ . Aleshores, per definició,  $x = (r_i(t), t)$ ,  $x' = (r_j(t'), t')$  per  $i \neq j$  o  $t \neq t'$  (o les dues alhora). Ara, com  $H_i(t, s) \neq H_j(t', s)$  per a tot  $t \in I$  si  $i \neq j$  i  $F_s(x) = (H_i(t, s), t)$ ,  $F_s(x') = (H_j(t', s), t')$  és evident que  $F_s(x) \neq F_s(x')$ .

Per veure que  $F_s$  és exhaustiva, sigui  $((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ , com  $\Psi(\beta)$  i  $\Psi(\hat{\beta})$  són homòtopes, existeixen  $(i, t) \in (\mathbb{N}, I)$  tal que  $((x, y), t) = (H_i(t, s), t) = F((r_i(t), t), s)$ . Per tant,  $F_s$  és un embedding.

Finalment, partint de la continuïtat de les  $H_i$  i de la definició de  $F$  és clar que  $F_s(\beta)$  és una  $n$ -trena i, a més:

$$F(\beta, 0) = (H_i(t, 0), 0) = \beta, F(\beta, 1) = (H_i(t, 1), 1) = \hat{\beta}.$$

Ja que,  $H_i$  conformen l'homotopia  $H$  que va de  $\Psi(\beta)$  a  $\Psi(\hat{\beta})$ . Així doncs,  $F$  és una isotopia entre  $\beta$  i  $\hat{\beta}$  i  $\Psi$  és injectiva.

Per veure que  $\Psi$  és exhaustiva, hem de veure que  $Im\Psi = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$ . És a dir, sigui  $\gamma \in F_n(\mathbb{R}^2)$  un llaç, podem descriure com abans

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow F_n(\mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)). \end{aligned}$$

Observem que la treua  $\hat{\beta} = \cup_{t \in I} \gamma(t) \times \{t\}$  compleix que  $\phi(\hat{\beta}) = \gamma$  d'on es desprèn que  $\Psi$  és exhaustiva.  $\square$

Un cop hem vist la demostració per a  $F_n(\mathbb{R}^2)$ , introduïrem el concepte de seqüència exacta, que ens permetrà demostrar l'anàleg del Teorema 3.2.6 per a  $C_n(\mathbb{R}^2)$  d'una manera elegant emprant el conegut, lema dels 5.

**Definició 3.2.7.** *Siguin  $G_0, \dots, G_n$  grups amb les seves respectives operacions i  $f_1, \dots, f_n$  morfismes de grups diem que la seqüència*

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

*és exacta si es compleix que  $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$  per a tot  $i = 1, \dots, n - 1$ .*

**Lema 3.2.8.** *(Lema dels 5) Si el següent diagrama és commutatiu, les dues files són seqüències exactes,  $h_2$  i  $h_4$  són isomorfismes,  $h_1$  un epimorfisme i  $h_5$  un monomorfisme, aleshores  $h_3$  és també un isomorfisme.*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow & & \downarrow h_5 \\ A' & \xrightarrow{g_1} & B' & \xrightarrow{g_2} & C' & \xrightarrow{g_3} & D' & \xrightarrow{g_4} & E' \end{array}$$

*Demostració.* Comencem veient que  $h_3$  és un epimorfisme. Sigui  $c' \in C'$ , com  $h_4$  és un exhaustiva ha d'existir un element  $d \in D$  complint que  $h_4(d) = g_3(c')$  i com el diagrama commuta tenim que  $g_4(h_4(d)) = h_5(f_4(d))$ . Ara, emprant que la seqüència és exacta

sabem que  $Im(g_3) = Ker(g_4)$  i que per tant  $0 = g_4(g_3(c')) = g_4(h_4(d)) = h_5(f_4(d))$ . Com  $h_5$  és injectiu, això implica que  $f_4(d) = 0$  i que  $d \in Ker(f_4) = Im(f_3)$ . Per tant, existeix un  $c \in C$  satisfent  $f_3(c) = d$ . Utilitzant de nou que el diagrama commuta tenim que  $g_3(h_3(c)) = h_4(f_3(c)) = g_3(c')$ , que com  $g_3$  és morfisme de grups ens dona que  $g_3(c' - h_3(c)) = 0$ . Com  $Im(g_2) = Ker(g_3)$ , existeix un  $b' \in B'$  complint que  $g_2(b') = c' - h_3(c)$  i per ser  $h_2$  és exhaustiva també existeix  $b \in B$  tal que  $h_2(b) = b'$ . Finalment, per commutativitat tenim que  $h_3(f_2(b)) = g_2(h_2(b)) = c' - h_3(c)$  i com  $h_3$  és morfisme de grups  $h_3(f_2(b) + c) = h_3(f_2(b)) + h_3(c) = c'$  i, per tant,  $h_3$  és un epimorfisme.

Si ens fixem durant tota la demostració únicament hem emprat la part dreta del diagrama. Atès que per a demostrar la injectivitat de  $h_3$  es procedeix de la mateixa manera però utilitzant la part esquerra del diagrama, la demostració es deixa com a exercici pel lector.

□

**Corol·lari 3.2.9.** *Sigui  $B_n$  el grup de trenes i  $x_0 \in C_n(\mathbb{R}^2)$ , aleshores*

$$\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), x_0) \cong B_n.$$

*Demostració.* Per tal d'aplicar el lema previ, emprarem el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \xrightarrow{f} & P_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{\mu} & S_n & \xrightarrow{g} & 1 \\ Id \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Psi' \downarrow & & Id \downarrow & & \downarrow Id \\ 1 & \xrightarrow{f'} & \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{i'} & \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{\mu'} & S_n & \xrightarrow{g} & 1. \end{array}$$

De nou, pel Corol·lari 3.2.5 elidim la dependència del punt base. Comencem demostrant que les dues files són seqüències exactes. Pel que fa a la primera, la funció  $f$  és aquella que envia el neutre a la trena identitat  $1_n$ ,  $i$  consisteix en la inclusió,  $\mu$  és la funció explicada a la Definició 2.3.4 i  $g$  envia qualsevol permutació a l'element neutre. Pel que fa a la segona fila,  $f'$  es defineix igual que  $f$  però ara enviant el neutre al llaç constant (quin sigui el punt base) en  $F_n(\mathbb{R}^2)$ ,  $i'$  denota la inclusió i sigui  $\gamma \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$ ,  $\mu'$  assigna la permutació que existeix entre els punts  $\gamma(0)$  i  $\gamma(1)$ .

És evident que totes les funcions definides són morfismes de grups i a més,  $Im(f) = 1_n = Ker(i)$ ,  $Im(i) = P_n = Ker(\mu)$ ,  $Im(\mu) = S_n = Ker(g)$ , amb el que la primera fila és una seqüència exacta. Anàlogament,  $Im(f') = 1_n = Ker(i')$ ,  $Im(i') = \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) = Ker(\mu')$ ,  $Im(\mu') = S_n = Ker(g)$  i la segona fila també és una seqüència exacta.

Ara, definint  $\Psi' : B_n \rightarrow \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$  i  $\Phi' : I \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2)$  de manera idèntica a  $\Psi$  i  $\Phi$  en el Teorema 3.2.6 i tenint en compte la Observació 3.2.3 és fàcil veure que el diagrama és commutatiu. Finalment, com ja hem vist que  $\Psi$  és un isomorfisme i la funció identitat és, de fet, un isomorfisme, pel Lema 3.2.8 es dedueix que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong B_n$ . □

### 3.3 L'espai de configuracions de $\mathbb{R}^m$ amb $m \neq 2$

En la secció anterior hem estudiat el cas  $m = 2$ ; per a completar tota la casuística ens falta veure els casos  $m = 1$  i  $m > 2$ . Veurem com, en el primer escenari una representació més amena de l'espai, donada per hiperplans, ens facilitarà el càlcul del grup fonamental. En ambdós casos començarem estudiant primer l'espai de configuracions ordenat i a continuació el desordenat ( $F_n(\mathbb{R}^m)$  i  $C_n(\mathbb{R}^m)$  respectivament).

### 3.3.1 Cas $m = 1$

Prement  $m = 1$ , l'espai a estudiar és  $F_n(\mathbb{R}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$ . Si definim  $H_{ij}$  com l'hiperplà en  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $H_{ij} : \{x_i - x_j = 0, \text{ per a } 1 \leq i < j \leq n\}$  és fàcil veure que podem reescriure el primer espai com  $F_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \setminus \cup_{1 \leq i < j \leq n} H_{ij}$ . Un càlcul ràpid ens dona que el nombre d'hiperplans que tenim és  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Si bé és relativament fàcil imaginar-se l'espai  $F_n(\mathbb{R})$  per a  $n = 1, 2, 3$  quan  $n \geq 4$  no sabem quina estructura té aquest espai. Comencem doncs veient com actuen aquests hiperplans sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposició 3.3.1.** *Els  $\binom{n}{2}$  hiperplans  $H_{ij}$  separen  $\mathbb{R}^n$  en  $n!$  regions connexes.*

*Demostració.* Farem ús de la combinatòria per a demostrar aquesta proposició. El cas  $n = 1$  és evident, ja que per a qualssevol espai topològic  $X$ ,  $F_1(X) \cong X$ , i el cas  $n = 2$  consisteix en  $\mathbb{R}^2$  menys la bisectriu del primer quadrant, la qual separa  $\mathbb{R}^2$  en dues regions, la formada per  $x > y$  i per  $x < y$ .

Un procediment anàleg es defineix per a  $n = 3$ , on ara disposem de tres plans;  $H_{12} : \{x = y\}$ ,  $H_{13} : \{x = z\}$  i  $H_{23} : \{y = z\}$ , la intersecció dels quals està formada per la recta  $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$  amb  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Per saber en quantes regions ens divideixen l'espai tridimensional aquests plans prenem un pla aleatori, per exemple,  $H_{12}$ . De nou, diferenciem les dues regions que separa  $H_{12}$  a partir de les dues desigualtats  $x > y$  i  $x < y$ . Fixant la regió  $x > y$  i variant  $z$  obtenim tres regions diferents:  $\{x > y > z\}$ ,  $\{x > z > y\}$  i  $\{z > x > y\}$ . De la mateixa manera, escollint  $x < y$  obtenim tres noves regions que, juntament amb les altres 3 prèvies, separen l'espai en  $3! = 6$  regions connexes.

De fet, tot i no ser visual per a  $n \geq 4$ , el raonament a seguir és el mateix. El problema és reduir a ordenar  $n$  variables (segons la relació d'ordre als nombres reals) de manera diferent, que equival al nombre de permutacions  $n!$ . Si bé l'elecció d'un hiperplà com en el cas  $n = 3$  no és necessària, d'haver-ho fet hauríem obtingut  $\frac{n!}{2}$  regions per cada desigualtat i, en conseqüència, el mateix resultat.  $\square$

**Observació 3.3.2.** Acabem de veure que existeixen  $n!$  regions diferents i que aquestes venen donades per la relació d'ordre de les  $n$  coordenades d'un punt. D'aquest fet es dedueix que sigui  $x \in F_n(\mathbb{R})$ , existeixen  $n!$  permutacions que fan moure a  $x$  per cada una de les regions. Per tal de visualitzar millor el que hem descrit fins ara, recomanem observar la Figura 3.3 on apareix l'espai  $F_3(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.3.3.** *Les  $n!$  regions connexes són contràctils.*

*Demostració.* Sigui  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R})$  i  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  l'única regió en la qual  $x$  es troba, definim  $z = (1, 2, \dots, n) \in F_n(\mathbb{R})$ . Notem que, tal i com s'explica a l'Observació 3.3.2, existeixen  $n!$  permutacions que fan variar de regió a  $x$ . Per veure que cada regió és contràctil crearem una homotopia que va des de qualssevol punt  $x \in U_x$  a la permutació adequada del punt  $z$ , per tal que  $z$  pertanyi a la regió en qüestió.

$$H : F_n(\mathbb{R}) \times I \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$$

$$(x, t) \longmapsto (1-t)x + tz.$$

Aquesta funció és contínua i és homòtopa al punt  $z$ . No obstant, hem de tenir en compte que aquesta homotopia és vàlida només dins de cada una de les  $n!$  regions, ja que sinó en algun moment el segment que uneix  $x$  amb  $z$  no pertanyeria a  $F_n(\mathbb{R})$ , és a dir, intersecaria amb algun dels hiperplans.  $\square$

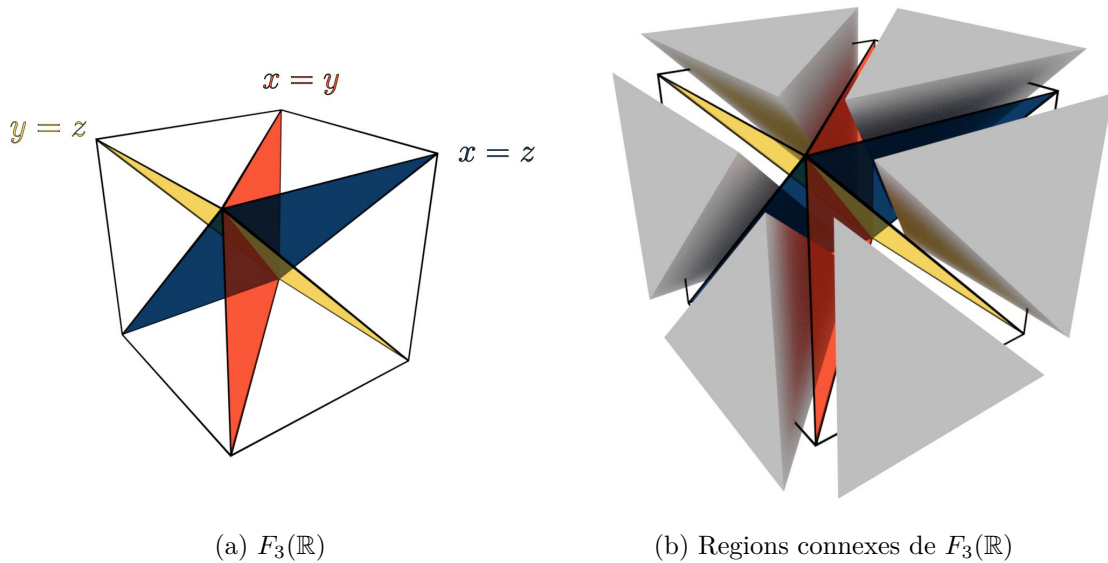


Figura 3.3: Imatge extreta de [7].

**Teorema 3.3.4.** *Sigui  $n \geq 1$  i  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , aleshores  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}), x_0) = \{1\}$*

*Demostració.* Si  $n = 1$ , tenim que  $F_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  i, per tant,  $\pi_1(F_1(\mathbb{R})) = \{1\}$  ja que  $\mathbb{R}$  és contràctil. Si  $n \geq 2$ , fem servir l'argument del teorema previ; com  $F_n(\mathbb{R})$  és equivalent a  $n!$  regions connexes de  $\mathbb{R}^n$  separades pels hiperplans  $H_{ij}$  i cada regió és contràctil l'espai global és també contràctil. En efecte, com tota regió és contràctil l'elecció del punt base ens és indiferent, tot i no ser l'espai arc-connex.  $\square$

**Corol·lari 3.3.5.** *Sigui  $n \geq 1$ , aleshores  $\pi_1(C_n(\mathbb{R})) = \{1\}$ .*

*Demostració.* Fixem-nos que, per definició,  $C_n(\mathbb{R}) = F_n(\mathbb{R})/S_n$ , i pel que hem vist a l'Observació 3.3.2 l'espai  $C_n(\mathbb{R})$  únicament consisteix en agafar una de les  $n!$  regions (l'elecció d'aquesta és indiferent) ja que sota l'acció de  $S_n$  totes elles són equivalents. Així doncs, l'espai  $C_n(\mathbb{R})$  és una regió contràctil, d'on es dedueix que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R})) = \{1\}$ .  $\square$

### 3.3.2 Cas $m > 2$

Si  $m > 2$  la nova interpretació que acabem d'emprar no ens és útil. Per això, ens caldrà definir nous conceptes juntament amb la demostració d'un lema que ens facilitarà la demostració final.

**Definició 3.3.6.** *Siguin  $X, Y, Z$  espais topològics i  $\pi : X \rightarrow Y$ ,  $f : Z \rightarrow Y$  funcions contínues, direm que  $\hat{f} : Z \rightarrow X$  és una elevació de  $f$  si es compleix que  $\pi \circ \hat{f} = f$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \hat{f} & \downarrow \pi \\
 Z & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$



**Definició 3.3.7.** Siguin  $X, Y$  espais topològics i sigui  $f : X \rightarrow Y$  una funció contínua i exhaustiva. Un conjunt obert  $U \subset Y$  es diu que està cobert per  $f$  si la imatge inversa  $f^{-1}(U)$  es pot escriure com una unió disjunta de conjunts oberts  $V_i \subset X$ , complint que per a cada  $i$  la restricció  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  és un homeomorfisme.

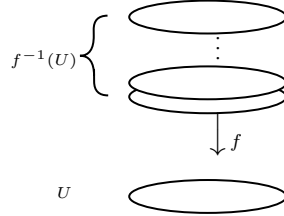


Figura 3.4: El conjunt  $U$  cobert per  $f$

**Definició 3.3.8.** Siguin  $X, Y$  espais topològics i sigui  $f : X \rightarrow Y$  una funció contínua i exhaustiva. Direm que  $f$  és un revestiment si per a tot punt  $y \in Y$  existeix un entorn  $U \subset Y$  que està cobert per  $f$ .

A continuació introduïrem dos lemes que ens facilitaran la demostració d'un tercer lema. La demostració dels dos primers es veu a l'assignatura de Topologia del grau.

**Lema 3.3.9.** (d'elevació de camins) Siguin  $X, Y$  espais topològics,  $\pi : X \rightarrow Y$  un revestiment i  $\gamma : I \rightarrow Y$  un camí complint  $\gamma(0) = y \in Y$ . Aleshores existeix un únic camí  $\hat{\gamma} : I \rightarrow X$  que eleva  $\gamma$  complint  $\hat{\gamma}(0) = x$  on  $x \in \pi^{-1}(y)$ .

**Lema 3.3.10.** (d'elevació d'homotopies) Siguin  $X, Y, Z$  espais topològics,  $\pi : X \rightarrow Y$  un revestiment, una homotopia  $f_t : Z \times I \rightarrow Y$  i  $f_0 : Z \rightarrow X$  una elevació de  $f_0$ , aleshores existeix una única homotopia  $\hat{f}_t : Z \times I \rightarrow X$  que eleva  $f_t$ .

**Definició 3.3.11.** Siguin  $E, B, Z$  espais topològics i  $p : E \rightarrow B$  una funció, diem que  $p$  és una fibració si satisfà la propietat d'elevació d'homotopies per a qualsevol espai  $Z$ .

Seguidament introduïm dos teoremes sense demostració (veure [5] i [2] respectivament). Noteu que en el primer teorema apareix el concepte de grups d'homotopia, que encara (veure capítol 4) no hem tractat en aquest treball, no serà pas cap problema, ja que només ens interessa aplicar una part del teorema, concretament, la relacionada amb els grups fonamentals.

**Teorema 3.3.12.** Siqui  $p : E \rightarrow B$  una fibració,  $b_0 \in B$  i  $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ , aleshores existeix una seqüència exacta llarga de grups d'homotopia donada per:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i^*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p^*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0)$$

On els morfismes  $i^*, p^*$  són els morfismes induïts per la inclusió  $i : F \hookrightarrow E$  i la fibració  $p$ .

**Teorema 3.3.13.** Siqui  $S$  una superfície sense frontera, l'aplicació

$$p : F_n(S) \rightarrow F_{n-1}(S) \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

és una fibració.

**Proposició 3.3.14.** *La composició de fibracions és una fibració.*

*Demostració.* Siguin  $E, F, B, X$  espais topològics i  $p_1 : E \rightarrow F$ ,  $p_2 : F \rightarrow B$  dues fibracions, volem veure que  $p_2 \circ p_1 : E \rightarrow B$  és una fibració. Sigui  $f : X \times I \rightarrow F$  (on  $I = [0, 1]$  com de costum) i  $\hat{f}_0 : X \rightarrow E$  una elevació de  $f|_{X \times 0}$ , volem construir una elevació  $\hat{f} : X \times I \rightarrow E$  de  $f$  extenent  $\hat{f}_0$ .

Observem que  $p_1 \circ \hat{f}_0$  és, de fet, una elevació de  $f|_{X \times 0}$  a  $F$ . Com  $p_2$  és una fibració, existeix un elevació  $g : X \times I \rightarrow F$  de  $f$  extenent  $p_1 \circ \hat{f}_0$ . Ara,  $\hat{f}_0$  és una elevació de  $p_1 \circ \hat{f}_0 = g|_{X \times 0}$  a  $E$ . De nou, com  $p_1$  és una fibració, existeix una elevació  $\hat{f} : X \times I \rightarrow E$  de  $g$  extenent  $\hat{f}_0$ . Per tant,  $p_2 \circ p_1$  satisfà la propietat d'elevació d'homotopies per a qualsevol espai  $X$ .  $\square$

**Teorema 3.3.15.** *Sigui  $m \geq 3$ , aleshores  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) \cong \{1\}$ .*

*Demostració.* Apliquem el Teorema 3.3.13 a  $\mathbb{R}^m$ , per la Proposició 3.3.14 l'aplicació

$$\begin{aligned} p : F_n(\mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto x_n \end{aligned}$$

és una fibració. Sigui  $b_1 \in \mathbb{R}^m$ , definim  $F = p^{-1}(b_1)$  i notem que  $F$  consisteix en escollir  $n-1$  punts diferents de  $\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\}$ . Per tant, tenim la igualtat de conjunts  $F = F_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\})$ . Pel Teorema 3.3.12 existeix una seqüència exacta llarga de grups d'homotopia. En el nostre cas, ens serà d'especial interès fixar-nos en únicament una part d'aquesta seqüència, més concretament:

$$\pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\})) \xrightarrow{i^*} \pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) \xrightarrow{p^*} \pi_1(\mathbb{R}^m) \quad (3.3.1)$$

De nou, elidim la dependència del punt base, ja que els espais en qüestió són arc-connexos. Suposem que en la seqüència (3.3.1), tenim que els dos grups fonamentals dels extrems són trivials, aleshores el grup fonamental del mig també ho serà.

En efecte, com  $i^*$  és un morfisme de grups i  $\pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\})) \cong \{1\}$ , és evident que  $Im(i^*) = \{1\}$ . Ara,  $Im(i^*) = Ker(p^*) = \{1\}$  amb el que  $p^*$  és injectiva. Finalment, del fet que  $p^*$  sigui un morfisme de grups i injectiva deduïm que  $Im(p^*) = \{1\}$  i, en conseqüència,  $p^*$  és un isomorfisme, pel que  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) \cong \{1\}$ . Aquest raonament l'emprarem al final de la demostració.

Fixem-nos que ara podem definir una altra fibració a partir de  $F$ :

$$\begin{aligned} q : F_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\}) &\rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{b_1\} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &\mapsto x_{n-1} \end{aligned}$$

De nou, sigui  $b_1 \neq b_2 \in \mathbb{R}^m$  definint  $G = q^{-1}(b_2) = F_{n-2}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, b_2\})$  obtenim la seqüència

$$\pi_1(F_{n-2}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, b_2\})) \xrightarrow{i^*} \pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) \setminus \{b_1\} \xrightarrow{p^*} \pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\})$$

Repetim aquest argument  $n-1$  vegades fins arribar a  $F_1(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-1}\}) \cong \mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-1}\}$ , ja que es tracta de l'espai de configuracions d'un únic punt, obtenint en la última iteració:

$$\pi_1(F_1(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-1}\})) \xrightarrow{i^*} \pi_1(F_2(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-2}\})) \xrightarrow{p^*} \pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-2}\})$$

És conegut que per a tot  $k$  i per a  $m \geq 3$ , el grup fonamental de  $\mathbb{R}^m \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  és trivial, ja que és homòtop a  $\bigvee_{i=1}^k S^{m-1}$  i aquest últim espai és simplement connex. Així doncs, observem com a l'última seqüència, els grups fonamentals dels extrems són trivials i, pel que hem comentat prèviament, això implica que el grup fonamental de  $F_2(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1, \dots, b_{m-2}\})$  també és trivial. Reiterant aquest raonament (a les  $n-1$  seqüències prèviament definides) hom arriba a la seqüència definida a partir de  $p$  (3.3.1), obtenint que  $\pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{b_1\})) = \{1\}$  i, per tant,  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) = \{1\}$ , tal i com volíem demostrar.  $\square$

Així, hem obtingut que per a  $m \geq 3$  el grup fonamental de l'espai de configuracions ordenat de  $\mathbb{R}^m$  és trivial. Seguidament introduïrem un teorema i un lema que ens permetran treure conclusions sobre l'espai de configuracions desordenat.

**Definició 3.3.16.** *Sigui  $X$  un espai topològic i  $G$  el grup d'homeomorfismes de  $X$  en  $X$  l'acció de  $G$  en  $X$  ve definida per*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g(x). \end{aligned}$$

**Definició 3.3.17.** *Sigui  $X$  un espai topològic i  $G$  el grup d'homeomorfismes en  $X$ , direm que  $G$  actua de manera pròpiament discontinua<sup>3</sup> si es compleix que per a tot punt  $x \in X$  existeix un entorn obert  $U_x$  de  $x$ , satisfent  $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$  per a tot  $g \in G \setminus \{1_G\}$ .*

**Observació 3.3.18.** De la pròpia Definició 3.3.17 es dedueix que  $g(U_x) \cap h(U_x) = \emptyset$  si  $g \neq h$ , ja que sinó tindríem que  $U_x \cap g^{-1}h(U_x) \neq \emptyset$ , contradient la definició.

**Definició 3.3.19.** *Sigui  $X$  un espai topològic, direm que  $X$  és localment arc-connex si per a tot  $x \in X$  i tot  $U \subset X$  entorn de  $x$  existeix un entorn  $V \subset U$  obert i arc-connex de  $x$ .*

**Teorema 3.3.20.** *Sigui  $X$  un espai arc-connex i localment arc-connex i  $G$  un grup d'homeomorfismes en  $X$ . La funció  $\pi : X \longrightarrow X/G$  és un revestiment si i només si l'acció de  $G$  en  $X$  és pròpiament discontinua.*

*Demostració.* Observem primer que  $\pi$  és una funció oberta; sigui  $U$  un obert de  $X$  hem de veure que  $\pi(U)$  és obert en  $X/G$ . Considerant a  $X/G$  la topologia quotient,  $\pi(U)$  serà obert si  $\pi^{-1}(\pi(U))$  és un obert. Ara,  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$  que, com cada  $g$  són homeomorfismes en  $X$  i  $U$  és obert obtenim que  $g(U)$  és obert i, per tant, la unió d'aquests també ho és. Així mateix,  $\pi$  és contínua per definició de la topologia quotient.

Suposem que  $G$  actua en  $X$  de manera pròpiament discontinua. Donat un  $x \in X$ , sigui  $U_x$  l'entorn de  $x$  complint que  $g(U_x) \cap h(U_x) = \emptyset$  per a  $g, h \in G$  i  $g \neq h$ . Aleshores es té que  $\pi(U_x)$  està cobert per  $\pi$  i, com hem escollit  $x$  arbitrari, això implica que  $\pi$  és un revestiment. Efectivament,  $\pi^{-1}(\pi(U_x))$  és igual a la unió disjunta dels conjunts oberts  $g(U_x)$  per a cada  $g \in G$ . Així doncs, ens resta comprovar que la restricció  $\pi|_{g(U_x)} : g(U_x) \longrightarrow \pi(U_x)$  és un homeomorfisme. És fàcil veure que és contínua (restricció de  $\pi$ ) i que és oberta i exhaustiva. Demostrem, però, que és injectiva. Siguin  $x_1, x_2 \in U_x$  tal

<sup>3</sup>Aquest terme es contradia a si mateix, en efecte, aquest tipus d'accions són contínues. El motiu d'aquest és de caràcter històric.

que  $\pi(g(x_1)) = \pi(g(x_2))$ , aleshores tenim la següent igualtat de classes d'equivalències en  $X/G$   $[x_1] = [g(x_1)] = [g(x_2)] = [x_2]$ . Sigui  $g \in G$  complint que  $g(x_2) = x_1$ , com  $x_1 \in U_x$  i  $g(x_2) \in g(U_x)$ , això implica que  $U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset$ , pel que deduïm que  $g = 1_G$  i, per tant,  $g(x_2) = g(x_1)$  i la funció és injectiva. En definitiva, la restricció és un homeomorfisme ja que és contínua, bijectiva i oberta.

Veiem ara l'altra implicació i comencem suposant que  $\pi$  és un revestiment. Sigui  $x \in X$  i  $V_x$  un entorn de  $\pi(x)$  que està cobert per  $\pi$ . Sigui  $U_0$  el conjunt que conté a  $x$  (dins de tota la partició de  $\pi^{-1}(V_x)$ ) i donada una  $g \in G$  amb  $g \neq 1_G$ , el conjunt  $g(U_0)$  ha de ser disjunt de  $U_0$ , ja que si no ho fos dos punts de  $U_0$  pertanyerien a la mateixa òrbita i la restricció  $\pi|_{U_0}$  no seria injectiva.  $\square$

**Lema 3.3.21.** *Sigui  $X$  un espai topològic simplement connex i  $G$  un grup d'homeomorfismes actuant de manera pròpiament discontinua en  $X$ , aleshores  $\pi_1(X/G) \cong G$ .*

*Demostració.* Considerem la funció  $\pi : X \rightarrow X/G$ . Donats un punt  $x_0 \in X$  i  $g \in G$ , considerem el camí definit per  $\gamma : I \rightarrow X$ , satisfent  $\gamma(0) = x_0$  i  $\gamma(1) = g(x_0)$ . Notem que ara, la composició  $\pi \circ \gamma : I \rightarrow X/G$  és un llaç amb punt base  $\pi(x_0)$ . En efecte,  $\pi(\gamma(0)) = \pi(x_0)$  i  $\pi(\gamma(1)) = \pi(g(x_0)) = \pi(x_0)$ , ja que a  $X/G$ ,  $x \sim g(x)$  per a tot  $(x, g) \in X \times G$ . Així, definim la funció  $f : G \rightarrow \pi_1(X/G)$ ,  $f(g) = [\pi \circ \gamma]$  i veurem que  $f$  és un isomorfisme de grups.

Comencem veient que  $f$  està ben definida. Fixat un  $x \in X$  i per a qualsevol  $g \in G$ , considerem el camí  $\gamma_g : I \rightarrow X$  que connecta  $x$  amb  $g(x)$ . Igual que abans,  $\pi \circ \gamma_g$  és un llaç a  $X/G$  amb punt base  $[x]$ . Com  $X$  és simplement connex, qualsevol altre camí,  $\beta_h$ , que escollim a  $X$  serà homòtop a  $\gamma_g$ , en conseqüència, també tindrem que  $[\pi \circ \gamma_g] \sim [\pi \circ \beta_h]$ . Per tant, si  $f(g) = f(h)$ , necessàriament  $g = h$ .

Per veure que  $f$  és morfisme de grups hem de comprovar que donats  $g, h \in G$  es compleix que  $f(gh) = f(g) \cdot f(h)$ . Considerem un punt  $x \in X$ ,  $g, h \in G$  i definim els camins  $\gamma_g, \gamma_h : I \rightarrow X$  que comencen ambdós a  $x$  i acaben a  $g(x), h(x)$  respectivament. Observem com el camí  $\alpha(t) = g(\gamma_h(t))$  comença a  $g(x)$  i acaba a  $g(h(x)) = (g \circ h)(x)$ . Així doncs, podem unir els camins  $\gamma_g$  i  $\alpha$  creant un camí  $\gamma$ , que va de  $x$  a  $(g \circ h)(x)$ . Per tant,  $f(gh) = [\pi \circ \gamma] = [\pi \circ \gamma_g \cdot \alpha] = [\pi \circ \gamma_g \cdot g(\gamma_h)] = [\pi(\gamma_g) \cdot \pi(g(\gamma_h))] = [\pi(\gamma_g) \cdot \pi(\gamma_h)] = f(g) \cdot f(h)$ .

Sigui  $\alpha \in X/G$  un llaç amb punt base  $[x]$ , pel Lema 3.3.9 existeix una elevació  $\hat{\alpha}$  en  $X$  complint  $\hat{\alpha}(0) = x$ . Ara bé, el punt final  $\hat{\alpha}(1)$  es troba a  $\pi^{-1}([x])$ , és a dir,  $\hat{\alpha}(1) \sim x$  i existeix  $g \in G$  tal que  $\hat{\alpha}(1) = g(x)$ . Per tant,  $f(g) = [\pi \circ \hat{\alpha}] = [\alpha]$  i  $f$  és exhaustiva.

Finalment, sigui  $g \in \text{Ker}(f)$ , aleshores  $f(g) = [\pi \circ \gamma_g] \simeq [x]$ , on  $\gamma_g$  és el camí que va de  $x$  a  $g(x)$ . Pel Lema 3.3.10, això implica que  $\gamma_g$  és homòtop al camí constant  $\gamma(t) = x$  i, per tant,  $g(x) = x$ . Ara, com  $g$  actua de manera pròpiament discontinua, és necessari que  $g = 1_G$  i arribem a la conclusió que  $\text{Ker}(f) = \{1\}$   $\square$

**Teorema 3.3.22.** *Sigui  $m \geq 3$ , aleshores  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^m)) \cong S_n$*

*Demostració.* Sigui  $m \geq 3$ , pel Teorema 3.2.4  $F_n(\mathbb{R}^m)$  és arc-connex i pel Teorema 3.3.15  $F_n(\mathbb{R}^m)$  és contràctil. L'acció de  $S_n$  sobre  $F_n(\mathbb{R}^m)$ , permutant les coordenades dels punts, és pròpiament discontinua. En efecte, donat el punt  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_n(\mathbb{R}^m)$ , per a cada  $k = 1, \dots, n$  considerem l'obert  $U_k \subset \mathbb{R}^m$  que conté a  $x_k$  satisfent que  $^4 \text{diam}(U_k) < \frac{1}{2} \min(d(x_i, x_j))$  per a  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . La construcció de  $U_k$  ens assegura que si prenem

<sup>4</sup>Recordem que  $\text{diam}(U_k) = \sup_{p, q \in U_k} d(p, q)$  on  $d$  denota la distància euclidiana habitual.

$U_x = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$  com un entorn obert de  $x$  i  $\sigma \in S_n$  es compleix que  $U_x \cap \sigma(U_x) = \emptyset$ , per a tot  $\sigma \in S_n \setminus \{1_{S_n}\}$  i, per tant, aplicant el Lema 3.3.21 obtenim que  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)/S_n) \cong S_n$ , tal i com volíem demostrar.  $\square$

Fent un breu resum dels resultats que hem obtingut en aquest capítol:

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^m)) \cong \begin{cases} P_n & m = 2, \\ \{1\} & m \neq 2. \end{cases}$$

$$\pi_1(C_n(\mathbb{R}^m)) \cong \begin{cases} \{1\} & m = 1, \\ B_n & m = 2, \\ S_n & m \geq 3. \end{cases}$$

## Capítol 4

# Torsió lliure de les trenes

En aquest capítol donarem resposta a una pregunta que havíem deixat oberta al final del segon capítol. L'exponent de trenes, com a invariant, ens ha ajudat a veure que amb  $k$  còpies d'una trena elemental mai acabarem obtenint la trena identitat. Arran d'aquesta proposició és natural preguntar-se si succeix el mateix per a una trena qualssevol, formada a través de més d'una trena elemental. La resposta és afirmativa, i per a veure-ho ens ajudarà la nova visió que hem adquirit de les trenes com a grup fonamental de l'espai de configuracions del pla.

**Definició 4.0.1.** *Sigui  $G$  un grup, direm que  $G$  és un grup lliure de torsió si l'únic element d'ordre finit és el neutre de  $G$ .*

D'aquesta manera el nostre problema es tradueix a demostrar que el grup de trenes és lliure de torsió. Per a veure-ho, introduïrem dos conceptes: els grups d'homotopia i els espais d'Eilenberg-MacLane. Detallarem els conceptes principals relacionats amb els grups d'homotopia per a entendre què són i poder treballar amb ells. Si el lector troba que necessita més informació recomanem el llibre [5].

**Definició 4.0.2.** *Sigui  $S^n$  la  $n$ -esfera, i  $X$  un espai topològic, escollim punts bases  $a \in S^n, x_0 \in X$  i definim  $\pi_n(X, x_0)$  com el conjunt de classes d'homotopia de les funcions*

$$f : S^n \longrightarrow X, f(a) = x_0.$$

**Definició 4.0.3.** *El conjunt  $\pi_n(X, x_0)$  forma un grup amb l'operació definida com segueix:  $f + g : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n \longrightarrow X$ , on en la primera aplicació es col·lapsa l'equador en dues  $n$ -esferes i la següent aplicació assigna  $f$  si es troba en la primera  $n$ -esfera i  $g$  en l'altra.*

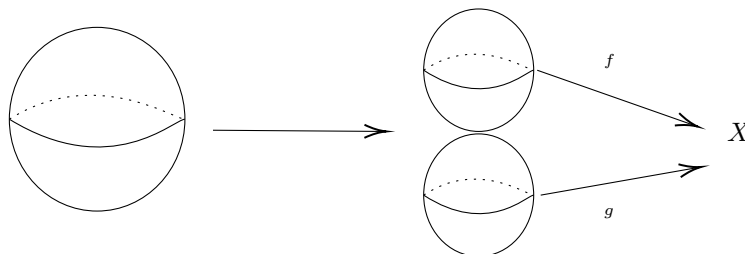


Figura 4.1: Producte dels grups d'homotopia

Enunciem algunes de les generalitzacions del grup fonamental per als grups d'homotopia amb  $n \geq 1$ , que emprarem durant aquesta secció.

**Proposició 4.0.4.** *Siguin  $X, Y$  espais topològic  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  i  $n \geq 1$ ,*

- 1) *Si  $X$  és contràctil, aleshores  $\pi_n(X, x_0) \cong \{1\}$ .*
- 2) *Si  $X$  és arc-connex, aleshores l'elecció del punt base és indiferent.*
- 3) *Si  $X \simeq Y$ , aleshores  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ .*

Havent introduït els grups d'homotopia, estem preparats per donar la següent definició.

**Definició 4.0.5.** *Sigui  $G$  un grup,  $X$  un espai topològic connex i  $n \in \mathbb{N}$ . Diem que  $X$  és un espai d'Eilenberg-MacLane si el  $n$ -èsim grup d'homotopia  $\pi_n(X)$  és isomorf a  $G$  i tots els altres grups d'homotopia amb  $m \neq n$  són trivials. Es denota com  $K(G, n)$ .*

Enunciarem un teorema i una proposició sense demostració, la qual es pot trobar a [5].

**Teorema 4.0.6.** *El grup fonamental d'un espai  $K(G, 1)$  és lliure de torsió.*

**Proposició 4.0.7.** *Siguin  $X, Y, Z$  espais topològics,  $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$  un revestiment i  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una aplicació, si  $X$  és arc-connex i localment arc-connex aleshores existeix una elevació  $\hat{f} : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$  de  $f$  si i només si  $f^*(\pi_1(X, x_0)) \subset p^*(\pi_1(Z, z_0))$ .*

Pel capítol anterior, sabem que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong B_n$  i que  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \cong P_n$ , per tant, el nostre objectiu serà veure que precisament  $C_n(\mathbb{R}^2)$  i  $F_n(\mathbb{R}^2)$  són  $K(B_n, 1)$  i  $K(P_n, 1)$  respectivament. Abans, però, demostrarem una sèrie de resultats que ens facilitaran el camí.

**Proposició 4.0.8.** *Sigui  $p : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  un revestiment, aleshores l'aplicació induïda  $p^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  és un isomorfisme per a  $n \geq 2$ .*

*Demostració.* Demostrarem la injectivitat pel cas  $n = 1$ , ja que la demostració per a  $n \geq 2$  és molt similar. Sigui  $f \in \text{Ker}(p^*)$ , aleshores existeix una homotopia  $f_t : I \times I \rightarrow Y$  complint que  $f_0 = p \circ f$  i  $f_1 = g$  on  $g : I \rightarrow Y$  és un camí constant. Pel lema d'elevació d'homotopies, (veure Lema 3.3.10) existeix una única homotopia que eleva  $f_t$ . Per tant,  $f \sim h$  on  $h$  és un camí constant en  $X$ , d'on és després que  $p^*$  és injectiva.

Pel que fa a l'exhaustivitat, emprem la Proposició 4.0.7. Sigui  $f : (S^n, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , com  $S^n$  és simplement connex per a  $n \geq 2$ , tenim que existeix una elevació de  $f$ ,  $\hat{f} : (S^n, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  complint que  $p \circ \hat{f} = f$ .  $\square$

**Proposició 4.0.9.** *Sigui  $n \geq 2$ , aleshores  $\pi_n(S^1) \cong \{1\}$ .*

*Demostració.* Sigui  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida com  $\pi(x) = (\cos(x), \sin(x))$ , és sabut que  $\pi$  és un revestiment. Per la Proposició 4.0.8, sabem que  $\pi_n(\mathbb{R}, x_0) \cong \pi_n(S^1, y_0)$  per a tot  $n \geq 2$ . Ara, com  $\mathbb{R}$  és contràctil obtenim que  $\pi_n(S^1) \cong \{1\}$ .  $\square$

**Notació.** Per comoditat, a partir d'ara anomenarem  $\mathbb{R}_n^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Corol·lari 4.0.10.** *Siguin  $z_1, z_2, \dots, z_n$  punts diferents del pla i  $k \geq 2$ , aleshores  $\pi_k(\mathbb{R}_n^2) \cong \{1\}$ .*

*Demostració.* Sabem que  $\mathbb{R}_n^2$  és del mateix tipus d'homotopia que la unió de  $n$  circumferències, per tant, tenim que  $\pi_k(\mathbb{R}_n^2) \cong \pi_k(\bigvee_{i=1}^n S^1)$ . Emprant la proposició prèvia hom obté que  $\pi_k(\mathbb{R}_n^2) \cong \{1\}$ .  $\square$

**Observació 4.0.11.** El lector pot veure com de la proposició i corollari anteriors es desprèn que la circumferència és un espai  $K(\mathbb{Z}, 1)$  i que la unió puntual de  $n$  circumferències, és un espai  $K(F_n, 1)$  on  $F_n$  denota el grup lliure d'ordre  $n$ .

Finalment, introduïm un morfisme entre trenes pures que apareixerà en el teorema principal d'aquest capítol.

**Proposició 4.0.12.** *Sigui  $P_n$  el grup pur de trenes, l'aplicació  $\rho : P_{n+1} \rightarrow P_n$  que consisteix en eliminar l'última corda d'una trena és un epimorfisme.*

*Demostració.* Sigui  $\beta_1, \beta_2 \in P_{n+1}$ , notem que és evident que  $\rho(\beta_1 * \beta_2) = \rho(\beta_1) * \rho(\beta_2)$ . Destaquem la importància que la trena sigui pura, ja que si no ho fos, en eliminar l'última corda de la trena el resultat final no seria una trena.

Es tracta d'un epimorfisme, en efecte sigui  $\beta_1 \in P_n$  si considerem a  $\beta_2 \in P_{n+1}$  com la trena que consisteix en una rèplica exacta de  $\beta_1$  i deixant la última corda (extra) sense cap encreuament, obtenim que  $\rho(\beta_2) = \beta_1$ . Noti's que  $\beta_2$  no és única, doncs una altra trena equivalent a  $\beta_1$  però amb algun encreuament amb la última corda també tindria com a imatge  $\beta_1$ .  $\square$

**Teorema 4.0.13.** *L'espai de configuracions del pla és  $K(P_n, 1)$ .*

*Demostració.* Considerem la següent aplicació

$$p : F_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pel Teorema 3.3.13 es tracta d'una fibració. Observem que si  $b \in F_n(\mathbb{R}^2)$ , amb  $b = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , aleshores  $p^{-1}(b)$  consisteix en escollir un punt de  $\mathbb{R}_{n+1}^2$ . Per tant,  $p$  és una fibració amb fibra  $\mathbb{R}_n^2$ .

Aplicant el Teorema 3.3.12, a la fibració  $p$ , tot considerant  $E = F_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ ,  $B = F_n(\mathbb{R}^2)$ ,  $F = \mathbb{R}_n^2$  i elidint la notació del punts base perquè tots els espais són arc-connexos, obtenim:

$$\pi_2(\mathbb{R}_n^2) \rightarrow \pi_2(F_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_2(F_n(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}_n^2) \rightarrow \pi_1(F_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow$$

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}_n^2)$$

L'últim element d'aquesta seqüència és  $\pi_0(\mathbb{R}_n^2)$  i, en ser  $\mathbb{R}_n^2$  arc-connex, es té que efectivament  $\pi_0(\mathbb{R}_n^2) \cong \{1\}$  (en el següent capítol justificarem més detalladament aquesta afirmació sobre  $\pi_0$ ). Notem que pel capítol anterior  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \cong P_n$  i pel Corollari 4.0.10 sabem que  $\pi_2(\mathbb{R}_n^2) \cong \{1\}$  i  $\pi_1(\mathbb{R}_n^2) \cong F_n$  on  $F_n$  denota el grup lliure d'ordre  $n$ . Substituint a la seqüència obtenim que per a tot  $n \geq 1$

$$1 \rightarrow \pi_2(F_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_2(F_n(\mathbb{R}^2)) \rightarrow F_n \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow 1$$

Fixant  $n = 1$  i centrant-nos en la part esquerra de la seqüència, obtenim que  $\pi_2(F_2(\mathbb{R}^2)) \cong \{1\}$ , ja que  $\pi_2(F_1(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_2(\mathbb{R}^2) \cong \{1\}$ . Podem repetir aquest argument augmentant  $n$  conclouent que  $\pi_2(F_n(\mathbb{R}^2)) \cong \{1\}$  per a tot  $n \geq 1$ . Aquest resultat ens permet recórrer la seqüència cap a l'esquerra de tal manera que, per a  $n \geq 1$  i  $k > 2$

$$\pi_k(\mathbb{R}_n^2) \rightarrow \pi_k(F_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_k(F_n(\mathbb{R}^2)) \rightarrow \pi_{k-1}(\mathbb{R}_n^2)$$



Com  $\pi_k(\mathbb{R}_n^2) = \{1\}$  per a tot  $k > 1$ , obtenim que  $\pi_k(F_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_k(F_n(\mathbb{R}^2))$  per a tot  $n \geq 1$ . Ara, de nou,  $\pi_k(F_1(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_k(\mathbb{R}^2) \cong \{1\}$  pel que deduïm que  $\pi_k(F_n(\mathbb{R}^2)) \cong \{1\}$  per a tot  $n \geq 1$  i  $k > 1$ . Per tant, concloem que l'espai  $F_n(\mathbb{R}^2)$  és un espai  $K(P_n, 1)$ .  $\square$

**Corol·lari 4.0.14.** *L'espai de configuracions desordenat del pla és  $K(B_n, 1)$ .*

*Demostració.* En el capítol anterior hem vist que  $F_n(\mathbb{R}^m)$  és un espai recobridor de  $C_n(\mathbb{R}^m)$ . Així, fixant  $m = 2$  i usant la Proposició 4.0.8, tenim que  $\pi_k(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong \{1\}$  per a tot  $n \geq 1$  i  $k > 1$ .  $\square$

Per a concloure aquest capítol donarem algunes propietats de la fibració que hem definit en l'anterior teorema.

**Definició 4.0.15.** *Siguin  $E, B$  espais topològics i  $p : E \rightarrow B$  una fibració, direm que  $s : B \rightarrow E$  és una secció de la fibració si  $s$  és contínua i satisfà  $p \circ s = Id_B$ .*

**Proposició 4.0.16.** *La fibració  $p : F_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  del Teorema 4.0.13 té una secció.*

*Demostració.* Definint

$$s : F_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{n+1}(\mathbb{R}^2)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, \sum_{i=1}^n |x_i| + 1)$$

tenim que evidentment la funció és contínua i a més a més la composició és la identitat en  $F_{n+1}(\mathbb{R}^2)$  (notem que a l'última coordenada fem que  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ). Comprovem que està ben definida, en efecte, per definició tenim que  $x_i \neq x_j$  per a tot  $i \neq j$  amb  $i, j < n$ . Ara, volem veure que per a tot  $i \leq n$   $x_i \neq \sum_{i=1}^n |x_i| + 1$ . Escrivim  $x_i = (a, b)$  amb  $a, b \in \mathbb{R}$ . Observem que el terme de la dreta, en ser un sumatori de termes positius s'escriurà de la forma  $(a^2 + b^2 + \alpha + 1, 0)$  amb  $\alpha > 0$ . Per tal que es compleixi la igualtat s'ha de complir que  $b = 0$ , és a dir,  $x_i = (a, 0)$ . Ara tenim una equació de segon grau en termes del paràmetre  $a$ :  $a^2 - a + \alpha + 1 = 0$ . El discriminant d'aquesta equació és  $1 - 4(\alpha + 1)$  que únicament serà positiu si  $\alpha < \frac{-3}{4}$ , però  $\alpha$  és positiu per hipòtesi. Així concloem que  $s$  està ben definida i que és una secció de  $p$ .  $\square$

Fixem-nos ara en la següent seqüència exacta curta extreta, també, de l'anterior teorema.

$$1 \longrightarrow F_n \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\rho} P_n \longrightarrow 1$$

De la mateixa manera que  $\rho$  és el morfisme induït de  $p$ , si definim  $s^* : P_n \rightarrow P_{n+1}$  com l'aplicació consistent en donada una trena  $\beta \in P_n$  afegir-li una corda sense cap encreuament,  $s^*$  és el morfisme induït de  $s$ . Així, la secció de  $s$  indueix una secció de grups, arribant a la conclusió que la seqüència escindeix (splits, en anglès). És sabut que si la seqüència exacta curta escindeix aleshores existeix un isomorfisme donat per  $: P_n \cong F_{n-1} \times P_n$ , on  $\times$  denota el producte semidirecte. Això ens dona una altra interpretació de les trenes pures, que desgraciadament queda fora de l'abast d'aquest treball.

## Capítol 5

# Mapping class groups

En l'últim capítol del treball hem volgut donar una altra visió del grup de trenes. Per a fer-ho, començarem introduint què són els mapping class groups. Per a la redacció d'aquest capítol hem consultat [1] i [4].

**Definició 5.0.1.** *Sigui  $S$  una superfície i  $(\text{Homeo}(S), \circ)$  el grup de tots els homeomorfismes de  $S \rightarrow S$ . Aleshores  $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$  és el subgrup de  $\text{Homeo}(S)$  contenint tots els homeomorfismes que preserven la orientació de  $S$  a  $S$  i que fixen la frontera  $\partial S$ .*

**Definició 5.0.2.** *Siguin  $X, Y$  espais topològics i  $C(X, Y)$  el conjunt de funcions contínues de  $X$  a  $Y$ . La topologia compacta-oberta en  $C(X, Y)$  és aquella que té com a sub-base els conjunts de la forma*

$$B(K, U) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U\}$$

*On  $K \subseteq X$  és un compacte i  $U \subseteq Y$  és un obert.*

**Observació 5.0.3.** Notem que si dotem al grup  $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$  de la topologia compacta-oberta, obtenim un grup topològic. D'aquesta manera, cobra sentit la noció de camins entre elements (funcions), pel que la següent definició està ben definida.

**Definició 5.0.4.** *Sigui  $S$  una superfície, i  $f, g \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ . Diem que  $f$  i  $g$  són isòtopes si existeix una homotopia  $F : S \times I \rightarrow S$  entre  $f$  i  $g$  complint que  $F_t(s)$  és un homeomorfisme per a tot  $t \in I$ .*

**Proposició 5.0.5.** *Sigui  $S$  una superfície, la relació d'isotopia ( $\simeq$ ) defineix una relació d'equivalència en el conjunt  $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$ .*

*Demostració.* La demostració és idèntica a la demostració que la relació d'homotopia és d'equivalència. □

**Definició 5.0.6.** *Sigui  $S$  una superfície compacta, connexa, orientable i amb frontera  $\partial S$ . El mapping class group de  $S$  és*

$$\text{MCG}(S) = \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \simeq = \pi_0(\text{Homeo}^+(S, \partial S)).$$

De la definició es dedueix que efectivament  $\text{MCG}(S)$  és un grup, doncs no és més que el quocient d'un subgrup per una relació d'equivalència. En el capítol anterior hem introduït els grups d'homotopia però no hem parat atenció al cas  $n = 0$ . Una definició alternativa i equivalent del cas  $n = 0$  és la següent.

**Definició 5.0.7.** Sigui  $X$  un espai topològic, definim  $\pi_0(X)$  com el conjunt de components arc-connexes de  $X$ . En altres paraules, es tracta del conjunt de classes d'equivalència de  $X$  sota la relació d'equivalència :  $xRy$  si i només si existeix un camí de  $x$  a  $y$  en  $X$ .

Així, si  $X$  és un espai topològic,  $\pi_0(X, x)$  denota la component arc-connexa en què es troba  $x \in X$ .

**Exemple 5.0.8.** Notem que si  $X$  és un espai arc-connex,  $\pi_0(X) = \{e\}$ . Per exemple,  $\pi_0(S^1 \times S^1) = \{e\} = \pi_0(\mathbb{D}^2)$ . D'altra banda, si  $X$  és un espai totalment disconnex, aleshores es té que  $\pi_0(X) \cong X$ . Per exemple,  $\pi_0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ .

Un cop definits els nous conceptes, introduïrem ara les eines necessàries per a establir la relació entre la teoria de trenes i els mapping class groups. Per a fer-ho, comencem demostrant que  $MCG(\mathbb{D}^2) = \{1\}$ .

**Teorema 5.0.9.** (Truc d'Alexander) Sigui  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2)$ , si  $f$  fixa la frontera  $S^1$  aleshores  $f$  és isòtopa a la identitat.

*Demostració.* Sigui  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  un homeomorfisme complint que  $f(x) = x$  per a tot  $x \in S^1$ , definim la següent funció  $f_t : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  per a  $t \in [0, 1]$

$$f_t(x) = \begin{cases} tf(\frac{x}{t}) & 0 \leq \|x\| < t, \\ x & t \leq \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

On  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana habitual. Observem que si  $\|x\| = t$ , aleshores  $tf(\frac{x}{t}) = \|x\|f(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\|(\frac{x}{\|x\|}) = x$ , ja que  $\frac{x}{\|x\|} \in S^1$ . Per tant, com  $f_t$  és una composició de funcions homeomorfes,  $f_t$  també ho és. Així, definint  $H$  com

$$H : \text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2) \times I \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2) \\ (f, t) \mapsto f_t.$$

tenim que  $f_0 = Id_{\mathbb{D}^2}$  i  $f_1 = f$  i, en conseqüència,  $H$  és la isotopia que buscàvem.  $\square$

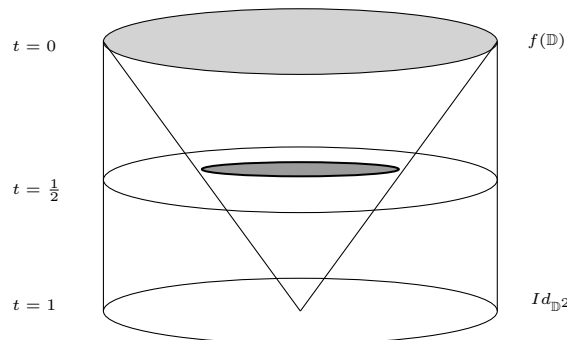


Figura 5.1: Exemple de com actua la isotopia  $H$  per a  $n = 2$ . L'àrea grisa representa la part del disc on  $f$  hi actua de manera no trivial, la qual es va reduint de forma contínua.

**Definició 5.0.10.** Considerem el disc  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$  i  $n$  punts diferents  $p_1, p_2, \dots, p_n$  de l'interior del disc. Definim el disc perforat com

$$\mathbb{D}_n = \mathbb{D}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

**Observació 5.0.11.** Considerem  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n)$ , escollim un representant de la classe a què pertany  $f$  i suposem que volem estendre la funció a  $\text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2)$ . Hom pot veure que només cal definir les imatges dels punts  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; en efecte, com  $[f]$  ha de ser bijectiva l'única possibilitat per estendre  $[f]$  adequadament és assignar la imatge d'un punt  $p_i$  a un altre punt  $p_j$ , amb  $i$  i  $j$  no necessàriament diferents. A aquesta extensió de  $[f]$  l'anomenarem  $\bar{f}$ .

**Teorema 5.0.12.** *Si  $n \geq 1$ ,  $MCG(\mathbb{D}_n) \cong B_n$ , on  $B_n$  denota el grup de trenes.*

*Demostració.* Comencem donant una idea geomètrica sobre en què es basa aquesta demostració. Donat un homeomorfisme  $f \in MCG(\mathbb{D}_n)$ , podem estendre  $f$  omplint els forats  $p_1, p_2, \dots, p_n$  seguint l'observació prèvia. Ara, pel truc d'Alexander (veure Teorema 5.0.9) qualssevol homeomorfisme que fixi la frontera del disc és isotòpic (fixant també la frontera) a la identitat. Per tant, existeix una isotopia  $f_t$  complint que  $f_0 = Id_{\mathbb{D}^2}$  i  $f_1 = \bar{f}$ . Així, cada "forat" segueix un camí  $f_t(p_i)$ , a mesura que  $t$  varia, i la unió d'aquests camins és precisament una trena.

Siguin  $p_1, p_2, \dots, p_n$  punts diferents de l'interior del disc  $\mathbb{D}^2$ , definim  $\mathbb{D}_n$  i considerem la següent funció:

$$\begin{aligned} \varphi : MCG(\mathbb{D}_n) &\longrightarrow B_n \\ [f] &\longmapsto (f_t(p_1), f_t(p_2), \dots, f_t(p_n)). \end{aligned}$$

Veurem que  $\varphi$  és un isomorfisme de grups i haurem provat el teorema. Per a començar, anem a justificar que  $\varphi(f)$  és, en efecte, una trena. Per tal de fer-ho, comprovarem que se satisfan les condicions definides al principi del treball (Definició 2.1.1).

Cada coordenada  $f_t(p_i)$  representa el moviment d'una de les cordes de la trena, ara com  $f_t$  és un homeomorfisme al disc, per a certa  $t_0 \in I$  i per a  $i \neq j$  es compleix que  $f_{t_0}(p_i) \neq f_{t_0}(p_j)$  i, en conseqüència, les cordes mai s'intersequen entre elles. En concret,  $\varphi(f) \in F_n(\mathbb{D}^2)$ . Per altra banda, donada la definició de  $\varphi(f)$ , variant en funció de  $t \in I$  és evident que la condició que per a cada pla la corda interseca en únic punt se satisfà.

Així doncs, veiem que  $\varphi$  està ben definida. Siguin  $f, g \in MCG(\mathbb{D}_n)$  complint que  $f \simeq g$ , com  $f$  i  $g$  pertanyen a la mateixa classe d'equivalència, tenen la mateixa extensió, és a dir,  $\bar{f} = \bar{g}$ . Com  $\varphi(f)$  ve determinada per l'extensió de  $f$  obtenim que les isotopies  $f_t$  i  $g_t$  forçosament hauran de ser isòtopes i, per tant,  $\varphi(f) \sim \varphi(g)$ .

És clar que  $\varphi$  és un morfisme de grups, en efecte, siguin  $f, g \in MCG(\mathbb{D}_n)$  per la banda dreta,  $\varphi(f) = (f_t(p_1), f_t(p_2), \dots, f_t(p_n))$  i  $\varphi(g) = (g_t(p_1), g_t(p_2), \dots, g_t(p_n))$  on  $f_t, g_t$  són les respectives isotopies entre  $\bar{f}, \bar{g}$  i la identitat en el disc. Ja hem vist que  $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2)) \cong B_n$  pel que podem interpretar  $\varphi(f) * \varphi(g)$  com a producte de llaços. Per la banda esquerra, sigui  $\bar{h}$  la extensió de la composició de  $f$  i  $g$  que respecta les extensions de  $f$  i  $g$  podem definir

$$F_t(x) = \begin{cases} f_t(x) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g_{2t-1}(x) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Aleshores  $F_t$  és isòtopa a la identitat en el disc i tenim la igualtat  $(F_t(p_1), F_t(p_2), \dots, F_t(p_n)) = \varphi(f) * \varphi(g)$ .

Suposem que  $\varphi(f) \sim \varphi(g)$  per a  $f, g \in MCG(\mathbb{D}_n)$ , això vol dir que existeix una isotopia  $H_s$  entre  $\varphi(f)$  i  $\varphi(g)$  complint que  $H_0(\varphi(f)) = \varphi(f)$  i  $H_1(\varphi(f)) = \varphi(g)$ . Fixem-nos que si en la imatge de  $f$  i  $g$  per  $\varphi$  prenem  $t = 0$  obtenim que  $\bar{f} \simeq \bar{g}$  en el disc, fet que implica que  $f \simeq g$  en  $\mathbb{D}_n$  i, per tant, la funció és injectiva.

Sigui  $\beta \in B_n$  amb permutació associada als seus punts donada per  $\mu(\beta) \in S_n$  i  $f \in MCG(\mathbb{D}_n)$ . Si extenem  $f$  al disc de tal manera que els punts  $p_1, p_2, \dots, p_n$  satisfacin la permutació  $\mu$ , és clar que aleshores  $\varphi(f) = \beta$ . Això demostra l'exhaustivitat de  $\varphi$ .  $\square$

**Corol·lari 5.0.13.** *Sigui  $n \geq 1$ ,  $MCG(\mathbb{D}_n) \cong P_n$ , on  $P_n$  denota el grup pur de trenes.*

*Demostració.* Una funció pertany a  $MCG(\mathbb{D}_n)$  si només permetem que la seva extensió  $\bar{f}$  sigui la donada per la permutació identitat. És a dir,  $\bar{f}(p_i) = p_i$  per a tot  $i = 1, \dots, n$ . D'aquesta manera, és fàcil deduir a partir del teorema previ que ara acabarem obtenint únicament trenes que comencen i acaben en el mateix punt.  $\square$

## Capítol 6

# Conclusions

Després d'haver finalitzat aquest treball es poden extreure diverses conclusions. A nivell personal, ha estat una experiència enriquidora. La redacció d'aquesta tesi culmina l'etapa universitària i m'ha permès adonar-me d'una evolució personal. Quan comences el grau es fa palès un canvi en la manera d'explicar les coses; es comença donant uns axiomes a partir dels quals s'anirà demostrant qualsevol fet.

A mesura que vas avançant en el grau te n'adones que cada vegada disposes d'un bagatge més ampli i acabes obtenint una perspectiva diferent. El fet d'haver de redactar un treball sobre un tema específic i veure com pots aplicar el que has anat aprenent durant el grau és realment gratificant. A més a més, un altre aspecte a destacar ha estat veure de primera mà que, tot i haver diverses branques i àrees de les matemàtiques, sempre hi ha un nexa que les uneix. És precisament aquesta connexió la que permet, en molts casos, acabar obtenint més informació sobre un tema i, perquè no, resoldre dubtes o fins i tot demostrar nous teoremes que amb l'anterior perspectiva mai se t'haurien vingut al cap.

Pel que fa a la part teòrica del treball es pot concloure que hem complert amb l'objectiu. Ens hem endinsat en la teoria de trenes, demostrant diferents propietats d'aquestes i som capaços d'imaginar-les des de diferents perspectives; com a grup, com a llaços dins d'un determinat espai topològic o com a l'imatge d'una família d'homeomorfismes en un disc. Lligant amb el que es comentava prèviament, hem partit des d'una primera idea aparentment inofensiva de les trenes i hem establert la connexió amb els espais de configuració. Aquesta ha estat clau per a poder demostrar que qualsevol trena té ordre infinit i ens ha ajudat a entendre, si més no a visualitzar, la relació amb els mapping class groups.

No obstant això, hi ha molts altres aspectes que ens hagués agradat estudiar, però que no ha estat possible per la limitació de temps. Així, una possible extensió del treball podria venir donada estudiant la relació entre les trenes i els nusos, la criptografia o els grafs.

# Bibliografia

- [1] BIRMAN, J.; BRENDLE, T.; *Braids: A survey*. U.S.National Science Foundation, 2004.
- [2] COHEN, F.; *Introduction to configuration spaces and their applications*. National Science Foundation, Singapur, 2006.
- [3] FADELL, E., NEUWIRTH, L; *Configuration spaces*. Math. Scand., 10:111–118, 1962.
- [4] FARB, B.; MARGALIT, D *A primer on mapping class groups*. Princeton University Press, 2011.
- [5] HATCHER, A.; *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [6] KASSEL,C. TURAEV,V; *Braid groups*. Graduate Texts in Mathematics, 247. Springer, New York, 2008.
- [7] KEISER, A.; *An Introduction to Configuration Spaces and Braid Groups*. University of Michigan, 2021.
- [8] MENESES, J.; *Basic results on braid groups*. Annales Mathématiques Blaise Pascal, França, 2010.
- [9] MUNKRES, J.; *Topology*. Pearson New International Edition, Edinburgh, 2014.
- [10] MURASUGI, K.; KURPITA, B.I.; *A study of Braids*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1999.
- [11] WILSON, J.; *The geometry and topology of braid groups*. University of Chicago, Chicago, 2018.

