Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Argand i la representació geomètrica dels nombres complexos

Autor: Martín Torrecilla Salueña

Director: Dr. Carles Dorce
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

## Abstract

Jean-Robert Argand developed, at the beginning of the 19th century, a new theory for the geometric representation of complex numbers. In a fertile and underexplored field of science at the time, a little-known geometer gave ideas and results that contributed to the expansion and acceptance of complex mathematics. In this work we analyze his essay and the subsequent correspondence with other mathematicians.



## Resum

Jean-Robert Argand va desenvolupar, a principis del segle XIX, una nova teoria per la representació geomètrica dels nombres complexos. En un camp fèrtil i poc explorat de la ciència de l'època, un geòmetra poc conegut va donar idees i resultats que van contribuir a l'expansió i acceptació de la matemàtica complexa. En aquest treball analitzem la seva obra i la consegüent correspondència amb altres matemàtics.



2020 Mathematics Subject Classification. 01A40, 01A45, 01A50, 01A55, 30-03, 51M15, 97I80

## Agraïments

A la meva família i als meus pares Jesús i Clara pel suport i l'escalf durant la realització d'aquest treball i durant tot el grau. Al Dr. Carles Dorce, el meu tutor, per l'ajuda rebuda. Al canal de Youtube Veritasium, per la inspiració inicial. Als Chicago Bulls, per acompanyar-me tantes nits. A tots els amics que he fet a la universitat, que m'han ajudat a seguir avançant, tant els de la doble titulació quan vaig començar, com als de matemàtiques quan vaig deixar informàtica i al grup que vam fer per continuar estudiant en pandèmia. Al Jordi especialment, que sempre hi és. I sobretot a la meva parella, la Kamar, que sempre ha estat la que més m'ha ajudat des que la vaig conèixer, i sense qui no hauria estat possible aquest treball.

# Índex

# 1 Introducció

Els nombres complexos o imaginaris han viscut una història de rebuig, apareixent des de l'antiguitat als resultats calculístics, i sent descartats com a absurds o falsos. La dificultat per sentir-los, per la seva naturalesa abstracta, va fer molt complicada la seva acceptació.

Va ser Raffaele Bombelli a 1572 el primer a no considerar-los com a elements sense sentit i a calcular arrels cúbiques i quadràtiques amb resultats complexos, però sense anar més enllà i amb força dubtes sobre la seva utilitat.

El primer a intentar fer-ne una representació geomètrica va ser John Wallis el 1685 al seu llibre *A treatise of Algebra* amb una aplicació ingeniosa del teorema de Pitàgores.

Durant el segle XVIII, matemàtics de gran importància com Euler o De Moivre van utilitzar expressions complexes per simplificar càlculs trigonomètrics, desembocant al tombant de segle en un clima propici per a noves teories sobre els nombres complexos.

Casper Wessel, Jean-Robert Argand i Carl Friedrich Gauss van desenvolupar, independentment els uns dels altres, teories sobre la representació geomètrica dels nombres complexos.

Wessel, cartògraf noruec, va descriure el seu mètode ja el 1787, i el va publicar sota el nom *Om directionens analytiske betegning* a través de l'Acadèmia Reial Danesa el 1799. Lamentablement, aquest escrit va quedar oblidat durant gairebé un segle, i va perdre l'oportunitat d'esdevenir un text fundador de la matemàtica complexa del segle XIX.

Gauss, per la seva part, havia desenvolupat una interpretació geomètrica dels nombres complexos el 1797, segons el seu diari. Tot i això, no va publicar-ne els resultats fins al 1831 a *Theoria Residuorum Biquadraticorum.* Aquest sí que va rebre una forta repercussió i difusió, gràcies a la notorietat de l'autor i a la qualitat i rigor del mètode.

De totes maneres, hem preferit escollir el treball d'Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions geométriques* de 1806, perquè reuneix unes qualitats concretes que el poden fer més interessant des d'un punt de vista històric. L'autor era un matemàtic amateur, com Wessel, comptable de professió, interessat per la Geometria. Al contrari que Wessel, el seu text sí que va tenir una mínima difusió, i per tant diversos matemàtics de l'època i posteriors se'n van fer ressò. En canvi, Gauss, que a més no va publicar fins a 1831, era un dels matemàtics més importants del món, i les seves contribucions, a un gran ventall d'àmbits científics, són gairebé insuperables.

Argand representa un aspecte de la història de la matemàtica que sembla completament aliè avui dia; un desconegut que desenvolupa una nova teoria, amb cara i ulls, en un àmbit en ple creixement i ple d'oportunitats. Així com podria haver passat desapercebut o errar completament en les seves conjectures, de la teoria de les línies dirigides per representar geomètricament les quantitats imaginàries se'n pot extreure molta substància, i fins i tot aplicar-la per trobar una de les primeres demostracions rigoroses del Teorema fonamental de l'àlgebra.

## 1.1 Metodologia

Al llarg del treball s'han consultat els llibres i articles que apareixen a la bibliografia. L'obra principal del treball és la segona edició de l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions geométriques* de Jean-Robert Argand, editat per Jules Hoüel, que conté la totalitat de l'obra original de 1806 així com els articles i les correspondències amb Jacques Français, Joseph Gergonne, i François-Joseph Servois que van aparèixer de 1813 a 1815 als *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées.* Les cites s'han traduït directament de la versió original francesa. S'utilitzarà en general la notació emprada pels autors.

## 2 Repàs històric

L'arrel quadrada d'un nombre negatiu s'intueix per primer cop a *Stereometrica*, possiblement escrit per Heró d'Alexandria al segle I. Després de donar una fórmula correcta per determinar el volum del tronc d'una piràmide i aplicar-la exitosament pel cas en què el costat de la base inferior és 10, el de la superior és 2 i l'aresta és 9, l'autor intenta resoldre el cas on les mesures són 28, 4 i 15 respectivament. Aplicant la seva fórmula sortiria:

$$h = \sqrt{(15)^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(12)^2} = \sqrt{81 - 144}$$

Tot i això, el resultat que apareix al llibre és $\sqrt{81 - 144} = \sqrt{63}$. (No s'ha determinat si es tracta d'un error de l'autor, o d'un copista).

Al segle III, Diofant d'Alexandria examina 3 tipus d'equacions quadràtiques:
$ax^2 + bx = c$; $ax^2 = bx + c$; $ax^2 + c = bx$ amb $a$, $b$, $c$ positius.

En diversos casos, arriba a solucions amb arrels quadrades negatives o irracionals, i les rebutja, titllant-les d'inútils o absurdes.

Els següents passos es prenen a l'Índia. Gràcies als avenços de Brahmagupta al segle VII, que va assentar les bases dels nombres negatius i del zero utilitzant deutes i fortunes com a eina per explicar-los, diversos matemàtics desenvolupen les seves teories i es troben amb casos d'arrels negatives. Mahaviracharya al segle IX i Bhaskaracharya al segle XII es fan ressò de la teòrica impossibilitat de les arrels negatives: "Com a la naturalesa de les coses, una quantitat negativa no és una quadrada, no té, per tant, arrel quadrada.", "El quadrat d'un nombre, positiu o negatiu, és positiu: i l'arrel d'un nombre positiu té dos valors, un de positiu i un de negatiu; no hi ha arrel quadrada d'un nombre negatiu, ja que un nombre negatiu no és quadrat".

No és fins al segle XVI que es comencen a fer descobriments en aquest sentit. El 1494 Luca Pacioli publica *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita precipitevolissimevolmente*, on afirma que no existeix una solució general per les equacions cúbiques. Aquesta afirmació dins un dels llibres de referència de la ciència i matemàtica Italiana de finals del segle XV ajuda a reflotar el problema.

Scipione del Ferro, professor a la universitat de Bolonya, desenvolupa entre 1500 i 1515 un mètode per trobar solucions a les cúbiques reduïdes de la forma $x^3 + ax = b$. Tot i això, mai no publica ni anuncia els seus resultats, i només en fa saber del seu descobriment poc abans de morir al seu deixeble Antonio Maria Fiore i al seu successor a Bolonya, Annibale dalla Nave (qui possiblement també fou el seu gendre).

La vida acadèmica a la Itàlia del segle XVI era molt diferent de l'actual. Els nomenaments universitaris eren majoritàriament temporals i subjectes a renovacions periòdiques per part del senat universitari. Una de les maneres en què un professor podia convèncer el senat que era digne de continuar en el seu càrrec, o un candidat de ser considerat per aquest, era guanyant reptes públics. Dos aspirants a una posició determinada es presenten mútuament amb una llista de problemes i, en un fòrum públic un temps després, cadascun exposa les seves solucions als problemes de l'altre. Sovint, quantitats considerables de diners, a part dels mateixos càrrecs universitaris, depenien del resultat d'aquest repte. Com a resultat, si un professor descobria un nou mètode per resoldre determinats problemes, li era avantatjós mantenir-lo en secret en cas de ser reptat per un altre acadèmic.

Tot i que cap dels hereus de la fórmula de Del Ferro ho van publicitar, va començar a circular entre els matemàtics italians que el problema de la cúbica havia estat, o aviat seria resolt. Niccolò Tartaglia per la seva part, presumia d'haver resolt un altre dels casos de la cúbica: $x^3 + bx^2 = d$. És així com el 1535 Antonio Maria Fiore va desafiar Tartaglia a un repte públic; el deixeble de Del Ferro va proposar 30 problemes, tots tractant sobre les cúbiques que el seu mestre havia après a resoldre. Tartaglia, millor matemàtic que el seu oponent, va aconseguir trobar la manera de solucionar aquests problemes el 12 de Febrer de 1535 segons el seu propi testimoni, i a més va proposar 30 problemes heterogenis a Fiore, tractant diversos camps de les matemàtiques a més de la cúbica, que aquest no va saber resoldre.

Aviat, les notícies d'aquest repte i de les noves solucions de l'equació cúbica es van escampar per Itàlia, arribant a oïdes de Gerolamo Cardano, matemàtic i metge de l'aristocràcia Milanesa. Cardano va escriure Tartaglia demanant que li ensenyés la solució de la cúbica, per poder incloure-la, correctament acreditada, al llibre d'aritmètica que estava preparant. Tartaglia s'hi va negar inicialment, però després de molta insistència i la promesa de Cardano d'introduir-lo a la cort Milanesa, es van reunir a la ciutat Llombarda el 1539.

Tartaglia, després de fer jurar a Cardano que no publicaria els seus resultats, ja que pretenia fer-ho ell mateix més endavant, va mostrar-li les solucions de tres formes diferents de l'equació cúbica en la forma d'un poema. Aquí apareix la solució de $x^3 + px = q$.

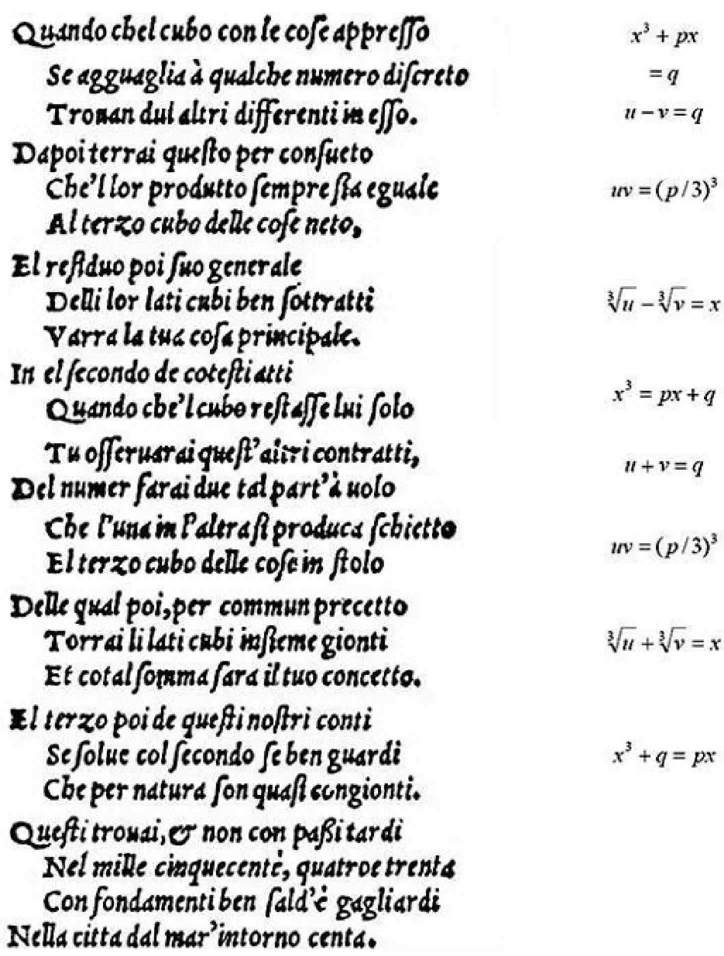
Quando chel cubo con le cose appresso $x^3 + px$
Se agguaglia à qualche numero discreto $= q$
Trouan dui altri differenti in esso. $u - v = q$
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale $uv = (p/3)^3$
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo $x^3 = px + q$
Tu osseruarai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo $u + v = q$
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo $uv = (p/3)^3$
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$
Et cotal somma sara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi $x^3 + q = px$
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, & non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Figura 1.

Cardano va complir amb la seva paraula, publicant *Practica arithmetice et mensurandi singularis* sense el resultat de Tartaglia i enviant-li una còpia com a mostra de bona voluntat.

Tot i això, Cardano, juntament amb el seu deixeble Ludovico Ferrari, va començar a treballar en les solucions i justificacions dels diferents casos de l'equació cúbica. Com Tartaglia continuava sense publicar els seus resultats i Cardano creia que fora molt important que la resolució de la cúbica fos coneguda per tothom, però no volia trencar la seva promesa. És per això que, junt amb Ferrari, van viatjar a Bolonya per trobar els escrits originals de Del Ferro. No queda clar si va ser gràcies a Dalla Nave, el successor de Del Ferro a la universitat, o Fiore, en un últim acte de revenja contra Tartaglia, però la solució de Del Ferro va arribar a mans de Cardano. Una vegada ratificat que aquesta era anterior a la de Tartaglia, Cardano ja no trencava el seu jurament si la publicava, i la va incloure en la seva obra més important: *Ars magna, sive de regulis algebraicis.*

Tartaglia, tot i aparèixer mencionat com a un dels primers a descobrir el mètode de resolució de la cúbica, es va sentir enganyat. El mèrit del seu descobriment li va ser arrabassat, i la fórmula de resolució de l'equació cúbica portaria d'ençà el nom de Cardano.

Un dels problemes que Cardano anomena “manifestament impossible” era el següent; Dividim 10 en dues parts tal que el seu producte sigui 40, i.e. $x + y = 10, xy = 40$ o expressat com una equació quadràtica $40 - x(10 - x) = x^2 - 10x + 40 = 0$ que té les arrels $5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano les multiplica i obté 40, però conclou que aquest resultat és “tan subtil com inútil”. Això marca la primera aparició explícita d'una arrel d'un nombre negatiu.

Per la cúbica $x^3 = ax + b$ la fórmula de Cardano ens dona:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

I aplicada a $x^3 = 15x + 4$ s'obté $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

L'autor afirma que en aquests casos no es pot aplicar la seva fórmula general a causa de l'aparició d'una arrel negativa, però aquestes ja no es poden descartar tan fàcilment. Així com per una quadràtica de la forma $x^2 + 1 = 0$ es podria afirmar que no hi ha solució, en el cas de $x^3 = 15x + 4$ totes tres solucions són reals, $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Faltava reconciliar la solució evident $x = 4$ amb les solucions “sense sentit” que trobava la fórmula de Cardano.

Malgrat la seva importància, marcant el primer avenç substantiu sobre l'àlgebra islàmica, l'*Ars Magna* era un llibre feixuc, enrevessat i escrit en llatí. Raffaele Bombeli, enginyer Bolonyès, va publicar *L'Algebra* el 1572 (els 3 primers volums; el 4t i el 5è es van publicar el 1929). Treballant sobre les idees de Cardano, es tracta un text més simple i sistemàtic en italià, buscant que els estudiants poguessin entendre'l i aprendre'n.

Tot i que en qüestions relatives a arrels múltiples d'equacions cúbiques no va assolir tant com Cardano, *L'Algebra* marca el punt àlgid de l'àlgebra italiana Renaixentista.

Al final del primer volum, Bombelli va introduir ün altre tipus d'arrel cúbica molt diferent de l'anterior, [...] aquest tipus d'arrel té els seus propis algorismes per a diverses operacions i un nou nom”. Aquesta arrel és la que es dóna en les equacions cúbiques de la forma $x^3 = cx + d$ quan $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3$ és negatiu. Bombelli va proposar un nou nom per a aquests nombres, que no són ni positius (*più*) ni negatius (*meno*), és a dir, els nombres imaginaris moderns. Els nombres escrits avui com a b$i$ - b$i$, respectivament, Bombelli els anomena *più di meno* (més de menys) i *meno di meno* (menys de menys).

Tornant a l'exemple anterior, Bombelli tenia la idea que com $2+\sqrt{-121}$ i $2-\sqrt{-121}$ només diferien en signe, podria passar el mateix amb les seves arrels cúbiques. Per tant, posant $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ i $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$ i resolent per $a$ i $b$ manipulant aquestes expressions per analogia amb les regles reals, va deduir que $a = 2$ i $b = 1$, donant el resultat esperat:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$$

Bombelli havia donat significat al "sense sentit", i aquest esdeveniment marca el naixement dels complexos. Així, es van forçar en relació amb les solucions d'equacions cúbiques en lloc de les equacions de segon grau.

Per formalitzar el seu descobriment, Bombelli va desenvolupar un càlcul d'operacions amb nombres complexos:

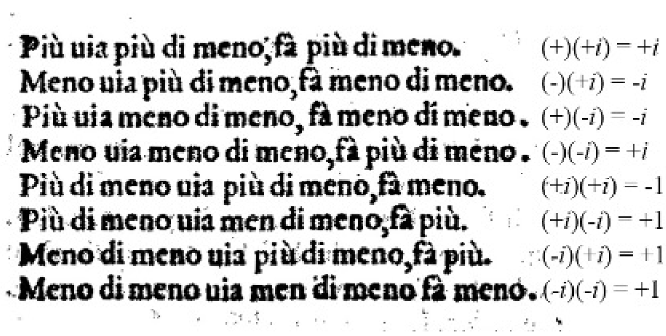
Più uia più di meno, fà più di meno. (+)(+i) = +i
Meno uia più di meno, fà meno di meno. (-)(+i) = -i
Più uia meno di meno, fà meno di meno. (+)(-i) = -i
Meno uia meno di meno, fà più di meno. (-)(-i) = +i
Più di meno uia più di meno, fà meno. (+i)(+i) = -1
Più di meno uia men di meno, fà più. (+i)(-i) = +1
Meno di meno uia più di meno, fà più. (-i)(+i) = +1
Meno di meno uia men di meno fà meno. (-i)(-i) = +1

Figura 2.

Per il·lustrar aquestes noves regles, Bombelli dona diversos exemples d'equacions cúbiques, entre d'altes l'exemple anterior, i també va demostrar que aquests nous nombres podien utilitzar-se per resoldre equacions quadràtiques que fins aleshores no tenien solució. Per exemple, va demostrar que l'equació $x^2+20=8x$ té les solucions $x=4\pm 2i$.

Encara que no va poder respondre totes les preguntes sobre l'ús de nombres complexos, la seva capacitat d'utilitzar-los per resoldre determinats problemes va proporcionar als matemàtics el primer indici que hi havia algun sentit en tractar-los. Tot i això els nombres complexos van continuar envoltats de misteri, i sovint ignorats.

Bombelli va ser l'últim dels grans algebristes italians del Renaixement, i el següent desenvolupament no va arribar fins al segle XVII.

Descartes al seu assaig *La Géométrie* (1637) va assentar els pilars de la geometria analítica, i havia aconseguit entre d'altres fer construccions geomètriques per trobar arrels quadrades d'una longitud donada. Aquestes construccions no tenien sentit per a longituds negatives, i per tant Descartes afirmà que la construcció geomètrica d'elements amb longituds iguals a una arrel negativa eren impossibles. Aquesta idea és correcta dins el pla cartesià, però aviat es buscarien alternatives per poder treballar.

John Wallis va publicar *A treatise of Algebra* el 1685 on, per començar, dona una interpretació geomètrica dels nombres negatius. Els matemàtics eren, fins i tot fins al segle XVII, desconfiats dels nombres negatius. Tot i que van trobar ús en comptabilitat, cap matemàtic fins ara no havia trobat la manera d'assignar-los un significat geomètric. Va ser Wallis qui va suggerir la construcció d'una recta numèrica per a la representació de nombres negatius, és a dir, on els nombres cada cop més negatius representen posicions cada cop més a l'esquerra de l'origen, i on els nombres cada cop més positius representen posicions cada cop més a la dreta.

Va aprofitar d'aquesta descoberta per posar-la en pràctica en les seves construccions geomètriques, la més important pel nostre cas és la de les arrels d'una equació quadràtica del tipus $x^2 \pm bx - c = 0$.

Primer construeix un triangle. Donats $AP$, $BP$ i $\widehat{PAB}$, s'ha de trobar la base $AB$.

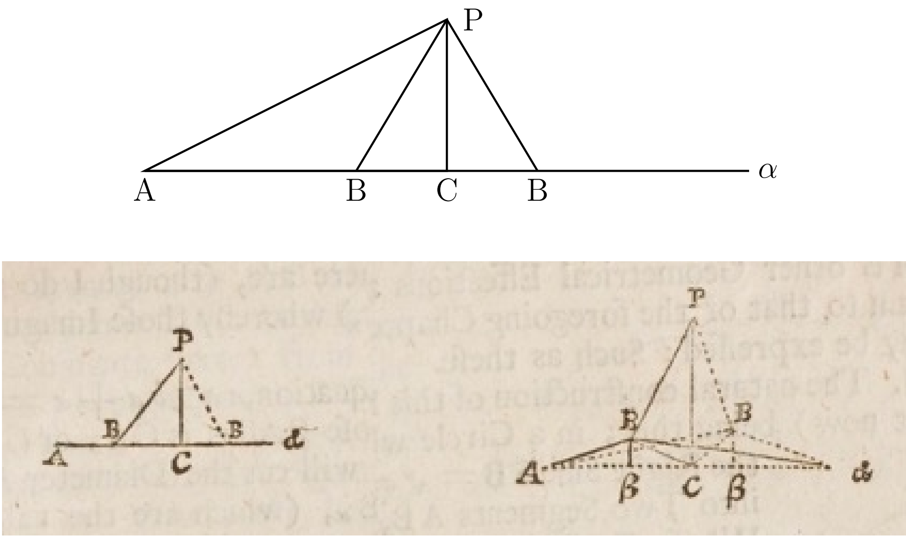


Figura 3.

> "Sobre $AC\alpha$, bisecada en $C$, construeix una perpendicular $CP = \sqrt{a}$. Agafant $PB = \frac{b}{2}$, fes (del costat de $CP$ que prefereixis), $PBC$ un triangle rectangle, que tindrà l'angle recte sobre $C$ o $B$, segons $PB$ o $PC$ sigui més gran, i d'acord amb això, $BC$ un sinus o una tangent (al radi $PB$) acabat en $PC$.
>
> Les línies rectes $AB$, $B\alpha$ són els dos valors de $a$. Ambdues positives si (a l'equació) és $-ba$ i positives si $+ba$. Els valors seran reals si l'angle recte és a $C$, i imaginàries si són a $B$."

Perquè sigui una arrel negativa, s'ha de donar el cas de $PB < PC$, i per tant $B$ ha d'abandonar la recta $A\alpha$, així doncs per visualitzar un nombre complex es requereix un pla.

Wallis fa un primer pas, però només s'apropa al pla complex modern. També arriba a la idea que "l'arrel d'una quantitat negativa és una mitjana proporcional entre una quantitat positiva i una negativa". Però tot i que la seva interpretació de la recta real guanya adeptes, la seva representació geomètrica dels complexos, no en una recta sinó en un pla, es mostra incomprensible pels matemàtics de l'època.

Durant el segle XVIII, matemàtics com Abraham de Moivre o Leonhard Euler van estudiar i desenvolupar noves teories, ja que la manipulació formal d'expressions complexes es podria fer servir per simplificar els càlculs que impliquen funcions trigonomètriques. D'aquí surten les fórmules de Moivre i d'Euler respectivament:

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

És també degut a Euler que apareix la notació $i = \sqrt{-1}$, encara que fins a Gauss no es popularitza.

No és fins més de 100 anys després de Wallis, quasi simultàniament a França, Noruega i Alemanya, que finalment s'assoleix una representació dels complexos més satisfactòria i ben arrelada, que donarà peu a una discussió i posterior acceptació gradual d'aquests mètodes. D'aquestes noves idees germinarà l'estudi de la variable complexa durant la resta del segle XIX.

# 3 Jean-Robert Argand

## 3.1 Biografia: un matemàtic desconegut

Poc se'n sap de la vida d'Argand. Es pressuposa que el seu nom era Jean-Robert, va néixer a Ginebra el 18 de juliol de 1768 i va morir, probablement a París, el 13 d'agost 1822.

La gran majoria d'informació biogràfica ve de Jules Hoüel, que va confeccionar i publicar la reedició dels treballs d'Argand el 1874. Coneixent de l'existència d'un físic i químic ginebrí de la segona meitat del segle XVIII conegut com a Ami Argand, va suposar que aquest nou Argand podia ésser també natural de Ginebra. Hoüel es va posar en contacte amb R. Wolf, expert en la història científica de Suïssa, per trobar un possible perfil per aquest enigmàtic matemàtic, que li va contestar el següent:

> "Vaig trobar la inscripció del naixement, el 22 de juliol de 1768, de Jean-Robert Argand, fill de Jacques Argand i Ève Canac. És molt probablement l'autor de l'assaig de Matemàtiques en qüestió. Pel que em va explicar algú que coneixia la seva família, aquest home va ser comptable durant molt de temps a París, i suposo que allà va morir."

Més enllà d'aquesta informació no se'n coneix cap més, i ni tan sols se n'està segur que aquesta sigui correcta. L'únic del que es té la certesa és que tant el 1806 com el 1813, Argand es trobava a París.

La història dels seus escrits és molt més clara, encara que no menys enrevessada. Argand publica el 1806 el seu *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. En fa una curta tirada, i no rep cap tipus de repercussió. N'entrega una còpia a Adrien-Marie Legendre, que la comenta amb François-Joseph Français en una carta el 2 de novembre de 1806, on explica:

> "Hi ha gent que conrea la ciència amb gran èxit sense ser coneguda i sense buscar la fama. Fa poc vaig conèixer un jove que em va demanar que llegís un treball que havia fet sobre nombres imaginaris; no em va explicar gaire bé el seu objecte, però em va fer entendre que considerava les anomenades quantitats imaginàries tan reals com les altres, i les representava amb línies. Al principi vaig fer-li saber dels meus dubtes, però li vaig prometre llegir les seves memòries. Vaig trobar, contràriament a les meves expectatives, idees força originals, molt ben presentades, recolzades en un coneixement força profund del càlcul, i finalment que condueixen a conseqüències molt exactes com la majoria de fórmules de trigonometria, el teorema de Cotes, etc. Aquí teniu un esbós d'aquesta obra que us pot interessar i que us permetrà jutjar la resta. Només dono

aquí una petita part de les seves idees, però ho compensareu, i potser trobareu, com jo, que són prou originals com per merèixer atenció."

François-Joseph Français va morir el 1810 i va ser el seu germà Jacques Frédéric, també matemàtic, qui va recollir, desenvolupar i publicar els seus escrits. Va ser així com el 1813 Jacques Français publica als *Annales de mathématiques pures et appliquées*, una revista matemàtica publicada per Joseph Diez Gergonne (més coneguda com a *Annales de Gergonne*), un escrit basat en les idees que Legendre li havia fet arribar al seu germà 7 anys enrere, buscant alhora que la publicitat que li farà la publicació als *Annales* ajudi a trobar-ne l'autor original.

Argand, que era lector habitual i fins i tot havia participat en la resolució d'alguns problemes de geometria plantejats als *Annales de Gergonne*, acudeix a la crida de Français i es desvetlla com a autor original de l'escrit i publica un extracte del seu assaig, més treballat i perfeccionat que aquell de 1806, a la vegada que envia una còpia de l'original a Gergonne. (Aquí, després de la seva trobada amb Legendre a París el 1806, és l'altra data on es té la certesa que Argand estava a la capital francesa, enviant la carta des de casa seva al número 12 de la Rue du chemin de Gentilly). Aquella còpia, que després va passar a mans de Chasles, és l'única que es conserva de l'original, i la que va permetre la seva reedició posterior.

## 3.2 *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*

Argand comença el seu assaig amb un intent d'avaluar les diferents situacions que, en els problemes, porten al rebuig o l'acceptació de les quantitats negatives. Començant per una sèrie de quantitats: $a$, $2a$, $3a$, $4a$... Aquesta es pot ampliar infinitament sense cap problema, però en el cas d'una sèrie inversa: ...$4a$, $3a$, $2a$, $a$ arribem a un impàs. Com s'interpreta $-a$? Què vol dir $0 - a$? Com es pot restar una cosa a res? Amb aquestes preguntes Argand resumeix la situació que motiva la negativa d'un gran nombre de matemàtics envers aquestes quantitats. Seguidament, proposa uns exemples per fer entendre que aquestes quantitats són tan naturals com qualsevol altra.

Agafant un pes, per exemple un gram, arribem a la mateixa successió ...$4a$, $3a$, $2a$, $a$, 0 i, diu Argand: "Així, els termes que haurien de seguir 0 només poden existir en la imaginació; per això mateix es podrien anomenar imaginaris." Pretén, a través d'unes quantitats en general més acceptades i utilitzades, minar la idea d'una quantitat matemàtica imaginària.

Si ara considerem una balança que té dos plats, $A$ i $B$, i li afegim un aparell format per una molla que tindrà la funció de fer que el moviment dels braços de la balança sigui proporcional als pesos dipositats sobre els plats, i que en lloc de tenir en compte els "pesos materials", considerem les desviacions que provoquen, per exemple, a l'extrem del braç A, obtenim un experiment que fa possible les magnituds negatives. A un pes $n$ col·locat al plat A, li correspondrà una variació $n'$ de l'extrem del braç $A$; afegint successivament un pes $n$ en aquest mateix plat, construïm així la sèrie de variacions $2n'$, $3n'$, $4n'$... Si en comptes de sumar, restem el pes d'una quantitat determinada i fixa llavors obtindrà la seqüència $2n'$, $n'$, 0. Tot i que seguint l'exemple anterior aquesta seqüència no pot tenir termes addicionals, veiem referint-nos a la placa $B$ que no és el cas. Restar $n$ pesos del plat $A$ equival a afegir els mateixos pesos al plat B; la primera és finita, però la segona pot continuar indefinidament, creant variacions de pes de $-n'$, $-2n'$..., i aquests termes negatius representen quantitats tan reals com els positius.

D'altra banda, continua amb un exemple amb monedes (francs). -1 franc, -2 francs tornen a ser "quantitats imaginàries". Per eliminar aquest obstacle l'autor introdueix el "franc de compte" per avaluar la fortuna d'un individu, que estarà composta per valors actius (els béns) i valors passius (deutes). Ara -1, -100, -500 francs representen fortunes on els valors passius són més grans que els valors actius. Tornem a obtenir valors negatius que representen quantitats tan reals com els valors positius, i comenta:

> "Simplement preteníem fer dos apunts sobre les quantitats negatives. La primera és que, segons l'espècie de magnituds a les quals s'aplica la numeració, la quantitat negativa és real o "imaginària". La segona és

> que, comparant dues quantitats d'una espècie capaç de donar valors negatius entre si, la idea de la seva relació és complexa. Inclou: 1r la idea de la relació numèrica en funció de les seves respectives magnituds absolutes; 2n la idea de la relació de les direccions o sentits a què pertanyen, una relació que és d'identitat o oposició."

Se centra sobre la relació de direccions, i afirma que es redueix als dos casos de les proporcions següents:

$$+1 : +1 :: -1 : -1 \quad i.e. \quad \frac{+1}{+1} = \frac{-1}{-1}$$

$$+1 : -1 :: -1 : +1 \quad i.e. \quad \frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$$

Ja que $-1 : -1 :: +1 : +1$ es redueix a la primera i $-1 : +1 :: +1 : -1$ a la segona. Es proposa seguidament de trobar la mitjana proporcional geomètrica entre dues quantitats de signes diferents, és a dir una $x$ tal que: $+1 : x :: x : -1$.

Ens aturem aquí igual que ens aturàvem en la progressió $4a, 3a, 2a, a, 0$, no hi ha cap nombre, positiu o negatiu, que compleixi aquesta equació, però Argand vol procedir igual que ho ha fet abans, introduint-hi la direcció.

La "quantitat negativa" només pot ser imaginària si no s'introdueix una idea de direcció en la interpretació; i aquesta només requereix a les "quantitats positives" una simple oposició per a ser aconseguida. És a partir d'aquesta observació, de la qual emergeixen les idees de "magnitud absoluta" i "direcció", que Argand condueix per analogia al descobriment de la interpretació geomètrica de la "quantitat imaginària" $a + b\sqrt{-1}$. Ara la simple oposició no és suficient per superar aquest nou problema, perquè la proporció anterior imposa a la magnitud "+1" que sigui per "$+x$" el que aquesta és per "$-1$".

> "Pensant-ho, semblava que arribaríem a aquest objectiu, si poguéssim trobar una mena de magnituds amb les quals es pogués combinar la idea de direcció, de manera que, adoptant-se dues direccions oposades, una per als valors positius, l'altre per als valors negatius, existeixi una tercera de tal manera que la direcció positiva sigui cap a aquesta, com aquesta última és cap a la direcció negativa."

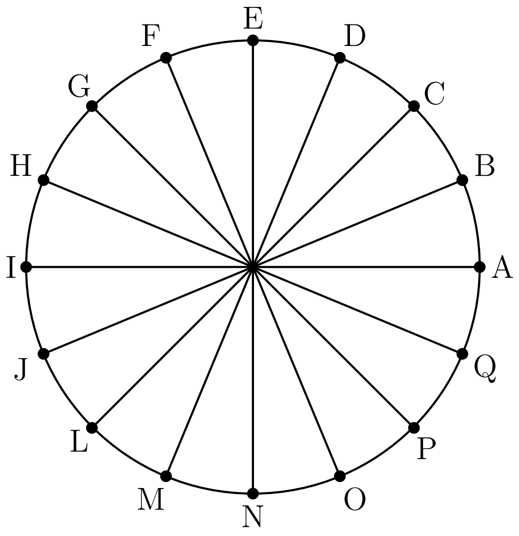

Figura 4.

Fixant $K$ com a l'origen, i $KA$ com a unitat positiva, anant de $K$ a $A$ i que anomenarem $\overline{KA}$, per distingir-la de $KA$ que serà la magnitud absoluta. $\overline{KI}$ serà la unitat negativa, i aquella que complirà amb la relació buscada entre les dues serà $\overline{KE}$. Es pot observar que $\overline{KN}$ també compleix la relació, $\overline{KE}$ i $\overline{KN}$ representen entre sí l'equivalent a $+1$ i $-1$, el que coneixem com a $+\sqrt{-1}$ i $-\sqrt{-1}$.

Anàlogament, es poden continuar construint les mitjanes proporcionals fent les bisectrius dels angles, i creant angles proporcionals.

Si s'ha de construir, per exemple, dos mitjanes, $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ i $\overline{KB}$, el que ha de donar lloc a tres relacions $\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB}$ hem de tenir

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB}$$

On la línia superior indica que aquests angles es troben en una posició homòloga sobre les bases $AK$, $PK$, $QK$.

Argand afegeix que, perquè existeixin aquestes relacions entre $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$... no és necessari que el punt d'origen estigui fixat a un $K$ únic. Ja no és un objecte inherent a un lloc precís del pla cartesià que es té en compte, perquè es pot triar, per exemple, en lloc de $\overline{KA}$, indiferentment $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, etc. sempre que $KA = K'A'$; $KA = K''A''$, etc. i la direcció continuï sent la mateixa. Aquesta noció d'equipol·lència, permet alliberar l'objecte considerat atorgant-li multitud de representants.

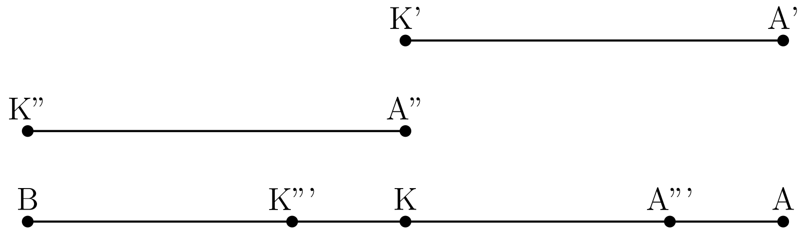


Figura 5.

En un pla cartesià es determina l’objecte pel lloc geomètric que ocupa. Per exemple $K'A'$ i $K''A''$ de la figura anterior, paral·lels i amb la mateixa longitud, serien dos objectes diferents si no estan superposats. Amb Argand, els objectes $\overline{K'A'}$ i $\overline{K''A''}$ són iguals, són dos representants de la mateixa classe d’objectes, treballem amb representants d’un objecte ideal d’una certa magnitud, amb una certa direcció, amb un cert sentit:

> “Com a resultat d’aquestes reflexions, podrem generalitzar el significat d’expressions de la forma $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, etc., i qualsevol expressió semblant designarà d’ara endavant una línia d’una certa longitud, paral·lela a una determinada direcció, presa en un sentit determinat entre els dos sentits oposats que presenta aquesta direcció, on l’origen es troba en un punt qualsevol, podent aquestes línies ser elles mateixes l’expressió de magnituds d’un altre tipus.
>
> Com que seran l’objecte de les investigacions que segueixen, convé donar-los una denominació determinada. S’anomenaran línies considerades com a pertanyents a una determinada direcció o, més simplement, línies dirigides (*lignes dirigées*). Així, es distingiran de les línies absolutes, per les quals només es considera la longitud, sense tenir en compte la direcció.”

Argand continua donant sentit al seu nou concepte de línies dirigides; aquelles paral·leles a la unitat primitiva $\overline{KA}$ designen els nombres reals, les perpendiculars són imaginaris de la forma $\pm a\sqrt{-1}$, i la resta són les de la forma $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ compostes per una part real i una d’imaginària. Aquí és on reprèn el seu argument original sobre els nombres negatius: Aquestes línies són tan reals com la unitat primitiva, deriven de la combinació de direcció, magnitud i sentit. Ja no s’han d’imaginar de forma abstracta, no són impossibles o absurdes, i els resultats que s’obtenen utilitzant aquestes quantitats anomenades com a imaginàries són conformes amb aquells obtinguts utilitzant quantitats reals.

A l’autor no li agrada anomenar com a imaginàries (terme encunyat per Descartes amb connotació despectiva) a aquestes quantitats; aquelles que derivin de la unitat primitiva seran primes, les perpendiculars seran mitjanes (*médianes*), i les altres seran intermèdies (*intermédianes*). Tot i això, Argand exposa la seva teoria com una sèrie d’hipòtesis, i no pretén assentar un precedent amb aquestes denominacions, sinó evitar emprar termes que tinguin un significat contrari a les idees que proposa.

Un altre canvi que proposa Argand és el d'eliminar la notació $\sqrt{-1}$: encara que es presenti com un factor que multiplica un real $a\sqrt{-1}$, no és gaire diferent del factor $+1$ per $+a$, i, en canvi, no escrivim $+1 \cdot a$. Per tant, suggereix $\sim a$ per $a\sqrt{-1}$ i $\nsim a$ per $-a\sqrt{-1}$, sent $\sim$ el positiu i $\nsim$ el negatiu.

Apunta que multiplicats per si mateixos donen -, entre si donen +, i estableix una regla per a tots quatre signes: cada traç recte tindrà valor 2, i cada traça sinusoidal tindrà valor

$$1: \qquad \sim\ = 1 \qquad - = 2 \qquad \nsim\ = 3 \qquad + = 4$$

Per realitzar operacions explica: "Prenem la suma del valor de tots els factors; i restem tantes vegades 4 com sigui necessari perquè la resta sigui un dels nombres 1, 2, 3, 4; aquesta resta serà el valor del signe del producte; i, de la mateixa manera, per a la divisió, restem la suma de les línies del divisor de la de les línies del dividend, a la qual haurem afegit, si cal, un múltiple de 4 i la resta indicarà el signe del quocient".

Ens quedarà, gràcies a aquest càlcul mòdul 4, la taula següent:

$$\begin{aligned}
&\sim \cdot \sim\ = 1 + 1 = 2 = -\\
&\nsim \cdot \nsim\ = 3 + 3 = 6 - 4 = 2 = -\\
&\sim \cdot \nsim\ = 1 + 3 = 4 = +\\
&\nsim \cdot \sim\ = 3 + 1 = 4 = +
\end{aligned}$$

El que ens porta a veure directament la periodicitat de les potències de la unitat imaginària:

$$\begin{aligned}
\sim^1 &= \sim\\
\sim^2 &= \sim \cdot \sim\ = -\\
\sim^3 &= \sim^2 \cdot \sim\ = - \cdot \sim\ = 2 + 1 = 3 = \nsim\\
\sim^4 &= \sim^3 \cdot \sim\ = \nsim \cdot \sim\ = +\\
\sim^5 &= \sim^4 \cdot \sim\ = + \cdot \sim\ = \sim\\
\sim^6 &= \sim^5 \cdot \sim\ = \sim \cdot \sim\ = -\\
\sim^7 &= \sim^6 \cdot \sim\ = - \cdot \sim\ = \nsim\\
\sim^8 &= \sim^7 \cdot \sim\ = \nsim \cdot \sim\ = +
\end{aligned}$$

Aquesta notació té mancances, i de fet Argand no la tornarà a utilitzar als seus escrits posteriors. Comparada amb la $i$ d'Euler, ja inventada, però encara no adoptada, dona peu a diversos problemes. La $i$ també elimina l'element $\pm\sqrt{-1}$ de les operacions, però ho fa sense evocar dubtes nous; $a \sim b$ té l'aparença d'una operació, amaga un símbol que es podria entendre com a complicat però en lloc de substituir-lo ($i = \sqrt{-1}$) en canvia l'essència. És una notació d'interès geomètric, però perd potència en el sentit aritmètic. Crea un nou objecte, una quantitat intermèdia $a \sim b$ en lloc de buscar a legitimar $a + b\sqrt{-1}$ com a un nombre de plens poders. La notació que crearà Hamilton més endavant, la dupla de reals $(a, b)$, arriba molt millor a l'objectiu que buscava Argand. Contràriament al que volia, $a \sim b$ sembla una relació operativa entre $a$ i $b$. Encara que Argand imposés d'entrada una convenció que ens permetria mantenir l'ordre dels nombres $a$ i $b$ en l'expressió $a \sim b$, no podríem evitar, en el càlcul, de preguntar-se sobre les propietats de l'operació $\sim$ per comprovar si per exemple és commutativa, i transmet una dificultat provocada pel conflicte que té lloc entre les operacions que actuen sobre l'objecte $a \sim b$ i l'operació interna $\sim$.

D'altra banda, Argand només mostra com multiplicar amb la seva notació els imaginaris purs de la forma $\sim m\sqrt{c} \cdot \nmid n\sqrt{cd} = +mnc\sqrt{d}$. Sembla que cal traduir les seves noves expressions al formalisme antic, operar, i tornar a expressar el resultat obtingut en el nou.

Tot seguit, Argand torna a les línies dirigides per definir-ne les operacions de suma i multiplicació, una tasca molt més fructuosa i interessant que aquesta nova notació.

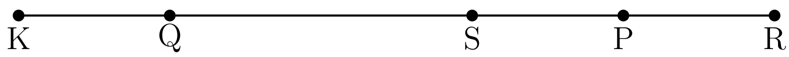


Figura 6.

Comença per la més senzilla, sumant dues línies primes positives $\overline{KP}$ i $\overline{KQ}$, i diu que aquesta operació es farà igual que amb les línies absolutes $KP$ i $KQ$, és a dir, prolongant $KP$ amb $KQ = PR$, donant $KR$.

Aquest procediment és possible gràcies a la pròpia definició de línia dirigida que inclou la possibilitat de posar les dues línies de punta a punta; tenim dret a escollir els representants dels termes implicats en la suma, elecció que no modifica el resultat de l'operació. $\overline{KP} + \overline{KQ} = \overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}$.

Per les línies primitives negatives opera anàlogament, el que ens dona que per dos línies primitives $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ de la mateixa espècie, s'agafen $PQ = AB, QR = AC$ en la direcció que correspongui i s'obté: $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{PR}$.

I per línies primitives, una positiva $\overline{KP}$ i l'altra negativa $\overline{QK}$, agafem a partir de $P$ i en el sentit negatiu $PS = QK$ i tenim: $\overline{KP} + \overline{QK} = \overline{KS} = \overline{QP}$.

Resumint, Argand diu: "El principi d'aquestes construccions és mirar el punt d'arribada $P$ de la línia $\overline{KP}$ com el punt inicial de la línia que s'ha d'afegir, i prendre, respectivament, per als punts inicial i final de la suma, el punt inicial de $\overline{KP}$ i el punt final de la línia que cal afegir. Aplicant aquest mateix principi a les rectes dels altres ordres, conclourem que per $K, P, R$ qualssevol sempre tenim $\overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}$".

Aquests $\overline{KP}$ i $\overline{KR}$ poden ser sumes d'altres línies, i aquestes d'altres més, amb el que arribem a la conclusió general que per $A, B, M, N, O, ...R, S, T$ qualssevol podem tenir:

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NO} + ... + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TB}$$

Aquests punts poden coincidir, posar-se de tal manera que les línies es creuin, siguin iguals o oposades, i això no afectarà el resultat.

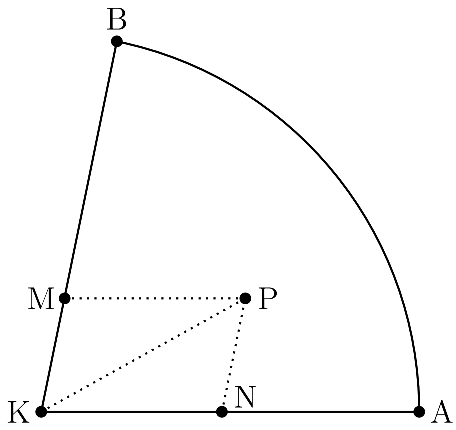


Figura 7.

Per descompondre $\overline{KP}$ en dues parts, una de l'ordre de $\overline{KA}$ i l'altre del de $\overline{KB}$, posem $N$ a $AK$ tal que $PN$ sigui paral·lela a $BK$ i obtenim $\overline{KN} + \overline{NP} = \overline{KP}$. També es podria posar $M$ a $BK$ tal que $PM$ sigui paral·lela a $AK$, obtenint $\overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KP}$. Aquestes expressions són idèntiques, ja que $\overline{KM} = \overline{NP}$ i $\overline{KN} = \overline{MP}$. Com només hi ha dues maneres de descompondre, si $A$ i $A'$ són d'ordre a i $B, B'$ d'ordre $b$, i $A + B = A' + B'$, resulta que $A = A', B = B'$. Al que arriben realment és que la igualtat $a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$ ens porta a dues igualtats, entre les parts reals i imaginàries: $a = a'$ i $b = b'$.

A continuació defineix la multiplicació de les línies dirigides, amb la construcció del producte $\overline{KB} \times \overline{KC}$, amb els angles $\overline{CKD} = \overline{AKB}$.

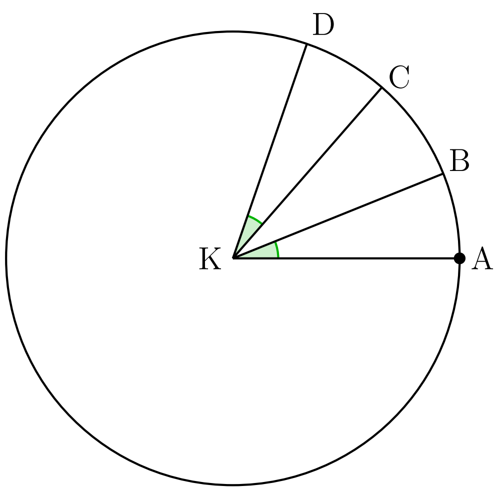


Figura 8.

Tindrem $\overline{KA} : \overline{KB} :: \overline{KC} : \overline{KD}$ , d'on surt $\overline{KA} \times \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC}$. Si observem que $\overline{KA}$ és la línia dirigida primitiva o la unitat, tenim $\overline{KA} = +1$, per tant, $\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KD}$.

Per construir el producte de dos radis dirigits, cal prendre, partint de l'origen dels arcs $A$, la suma dels dos arcs $(AB, AC)$ que pertanyen a aquests radis, i l'extrem de l'arc suma $(D)$ determinarà la posició del radi-producte $(KD)$.

Aquesta multiplicació s'ha d'estendre a qualsevol línia dirigida. Hem vist com es fa un producte així amb unitats. Argand continua:

> "Si els factors no són unitats, els podem posar en la forma $m \cdot \overline{KB}$, $n \cdot \overline{KC}$, ... sent $m, n$ coeficients o rectes primes positives; i el producte serà:
>
> $$(mn...)(\overline{KB} \cdot \overline{KC} \cdot ...) = (mn...)\overline{KP}$$
>
> Ara bé, el producte de la línia prima positiva $(mn...)$ pel radi $\overline{KP}$ no és altra cosa que aquesta mateixa línia dibuixada en la direcció d'aquest raig."

Així apareixen dues propietats fonamentals per anar més enllà: la primera és plantejar per definició que una línia dirigida correspon a un nombre determinat de vegades una unitat, prima, mediana o intermèdia. El segon és afirmar que la longitud absoluta del producte de dues línies dirigides és igual al producte de les longituds absolutes d'aquestes dues.

A més, amb això evita crear una nova definició pel producte d'un nombre amb una línia dirigida. Cada nombre $m, n, ...$ és una línia prima positiva, per tant, el producte és entre dues línies dirigides, que ja hem definit. A més, el producte ja està generalitzat a més de dos factors.

Una vegada introduïdes totes les eines necessàries, Argand dona per terminada la part teòrica i proposa un seguit d'exemples.

La primera aplicació condueix a la fórmula de Moivre. Si dibuixem un semicercle de centre $K$, amb $KA$ la unitat primera positiva, i $n$ arcs iguals $AB, BC, CD, ..., EN$:

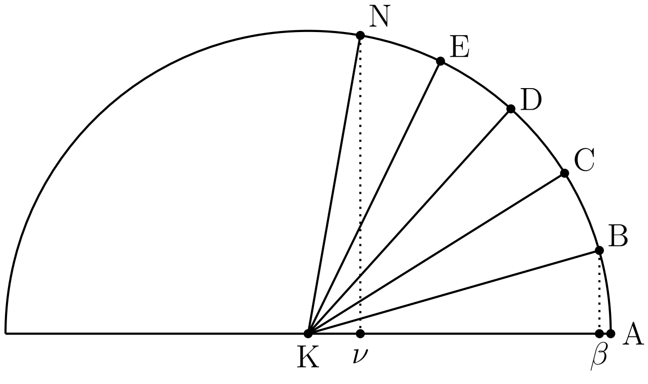


Figura 9.

Multiplicant radis dirigits obtenim $\overline{KN} = \overline{KB}^n$, i si projectem $\overline{KN}$ i $\overline{KB}$ tenim: $\overline{KN} = \overline{K\nu} + \overline{\nu N}$ i $\overline{KB} = \overline{K\beta} + \overline{\beta B}$, d'on obtenim: $\overline{K\nu} + \overline{\nu N} = (\overline{K\beta} + \overline{\nu N})^n$

Ara agafant $AB = A$ i, per tant, $AN = na$

$$\overline{K\beta} = \cos a \quad \overline{K\nu} = \cos na$$

$$\overline{\beta B} = \sim \sin a \quad \overline{\nu N} = \sim \sin na$$

Per tant, substituint a l'equació anterior surt: $\cos na \sim \sin na = (\cos a \sim \sin a)^n$.

O en la nostra notació habitual $\cos a + \sqrt{-1} \sin na = (\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^n$.

Argand continua desenvolupant nombroses aplicacions que es deriven d'aquestes relacions. L'autor aborda una gran part de la trigonometria amb aquest nou mètode. Com a tast de la multitud d'exemples examinarem el desenvolupament:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

Partint d'un sector circular de centre $K$, amb $KA$ la unitat primera positiva, amb l'arc $AB = a$ i l'arc $AC = b$ i $CD = AB$:

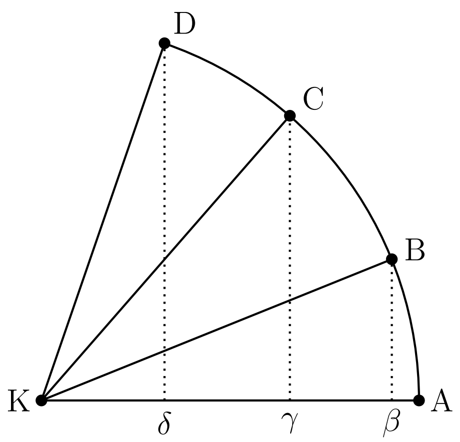


Figura 10.

Tenim $\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KD}$, però:

$$\overline{KD} = \overline{K\delta} + \overline{\delta D} = \cos(a+b) \sim \sin(a+b)$$

$$\overline{KB} = \overline{K\beta} + \overline{\beta B} = \cos a \sim \sin a$$

$$\overline{KC} = \overline{K\gamma} + \overline{\gamma C} = \cos b \sim \sin b$$

Per tant: $\cos(a+b) \sim \sin(a+b) = (\cos a \sim \sin a)(\cos b \sim \sin b)$

Desenvolupant el segon terme obtenim:

$$
\begin{aligned}
&(\cos a \sim \sin a)(\cos b \sim \sin b)\\
&\qquad = \cos a \cdot \cos b \sim \sin b \cdot \cos a \sim \sin a \cdot \cos b \sim\sim \sin a \cdot \sin b\\
&\qquad = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \sim (\sin b \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos b)
\end{aligned}
$$

I separant els dos termes

$$\cos{(a+b)} = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin{(a+b)} = \sin a \cdot \cos b \cdot \sin b \cdot \cos a$$

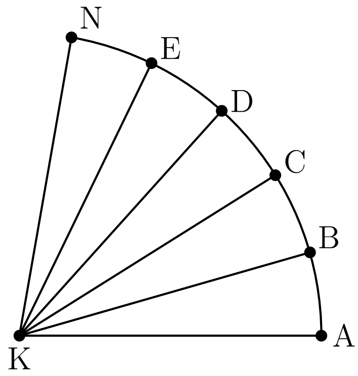


Figura 11.

Seguidament, mostra que si es divideix l'arc $AN$ en $n$ parts iguals, els radis $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ... , $\overline{KN}$ formen una progressió geomètrica, i els arcs corresponents en formen una d'aritmètica, per tant, es poden agafar com els logaritmes dels radis.

Un cop exposats un gran nombre d'exemples trigonomètrics, Argand diu:

> "El que precedeix és suficient per demostrar que el mètode del qual presentem un assaig es pot aplicar a la recerca de teoremes trigonomètrics. També podria ser d'alguna utilitat en geometria elemental i àlgebra. Farem una visió general d'aquesta feina."

En dona 3 exemples. El primer és molt senzill:

Per a la figura 12, amb centre $K, KA$ unitat primera positiva, arc $AB = GA, BN = NG$

$$\overline{KB} \times \overline{KG} = \overline{KA}^2 \qquad \overline{KB} = \overline{KN} + \overline{NB} \qquad \overline{KG} = \overline{KN} + \overline{NG}$$

$$\overline{KA}^2 = (\overline{KN} + \overline{NB}) \times (\overline{KN} + \overline{NG})$$

Posant $KA = h$, $KN = a$; $NB = b$, tenim:

$$h^2 = (a \sim b)(a \rlap{\,|}{\sim} \, b) = a^2 + b^2$$

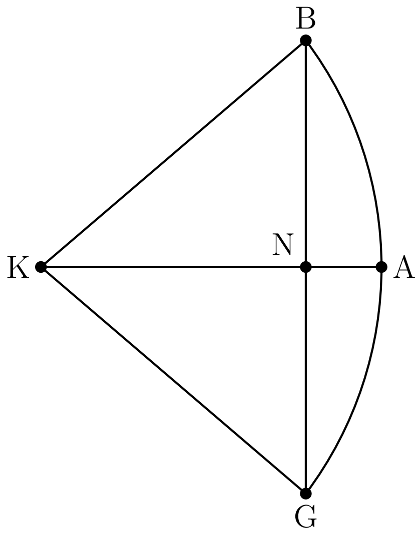


Figura 12.

Les altres dues aplicacions geomètriques que proposa l'autor posen en acció les línies intermèdies i aporten comentaris addicionals sobre el seu mètode, com per exemple:

$$\overline{MN} = -\overline{NM}$$
$$\overline{PS} \cdot \overline{PR} = \overline{PS} \cdot (\overline{PQ} + \overline{QR}) = \overline{PS} \cdot \overline{PQ} + \overline{PS} \cdot \overline{QR}$$

El procés de construcció geomètrica desenvolupat per Argand també ens ofereix la possibilitat de comprovar si les solucions reals o imaginàries, trobades durant la resolució d'una equació de qualsevol grau, són realment les seves arrels:

Sigui $y = x^2 - 4x + 5$, amb arrels $x_0 = 2 + \sqrt{-1}$ i $x_1 = 2 - \sqrt{-1}$, mirem geomètricament si les línies dirigides corresponents tornen l'equació en una línia dirigida nul·la (on les extremitats coincideixen).

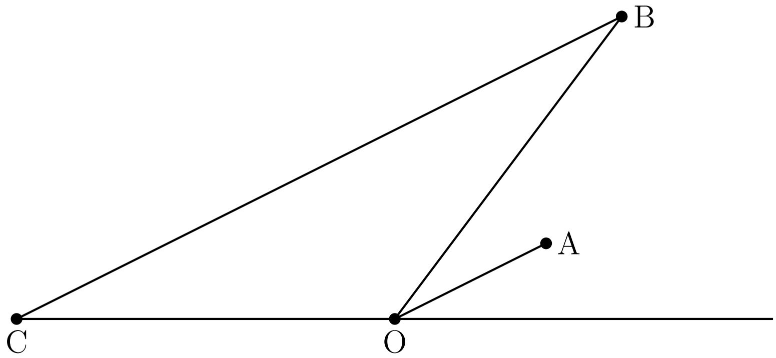


Figura 13a.

$$x_0 = \overline{OA}, \qquad x_0^2 = \overline{OB}, \qquad -4x_0 = 4\overline{AO} = \overline{BC}, \qquad 5 = \overline{CO}$$

$$\overline{OA}^2 - 4\overline{AO} + 5 = \overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CO} = \overline{OO}$$

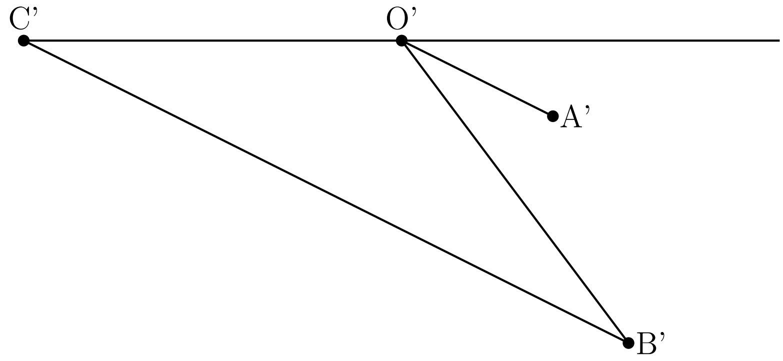


Figura 13b.

$$x_1 = \overline{O'A'}, \qquad x_1^2 = \overline{O'B'}, \qquad -4x_1 = 4\overline{A'O'} = \overline{B'C'}, \qquad 5 = \overline{C'O'}$$

$$\overline{O'A'}^2 - 4\overline{A'O'} + 5 = \overline{O'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'O'} = \overline{O'O'}$$

Per acabar, l'últim exemple que dona Argand és una demostració del Teorema Fonamental de l'Àlgebra, la primera a utilitzar termes complexos i no només reals, en la qual ens fixarem més endavant.

I finalment, l'autor s'adreça en un últim punt al lector i a la comunitat matemàtica. És conscient de la fragilitat dels principis sobre els quals es construeix la seva teoria; proposa l'esquema d'un nou mètode i l'ofereix obertament a les crítiques dels matemàtics, que podran, amb un raonament més rigorós, dir si s'accepta o es rebutja.

> "El mètode es basa en dos principis, un per a la multiplicació, l'altre per a la suma de les línies dirigides; i s'ha observat que els principis resultants d'inducccions que no posseeixen un grau d'evidència suficient, en l'actualitat només podrien ser admesos com a hipòtesis."

Malgrat aquesta manca de rigor, es pot tenir en compte aquest mètode perquè constitueix:

> "Un mitjà d'investigació, que, en determinats casos, pot ser útil, per l'avantatge que tenen les construccions geomètriques de presentar als ulls una imatge capaç de facilitar a vegades les operacions. A més, sempre serà possible traduir les demostracions extretes d'aquest mètode al llenguatge habitual."

# 4 Publicacions i discussió a *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*

## 4.1 *Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires*

L'escrit anterior va ser el que va arribar a mans de Legendre, que en va fer arribar un resum a François-Joseph Français. El seu germà Jacques Frédéric va treballar-hi profundament, i el 6 de juliol de 1813 va enviar a Joseph Gergonne per la publicació de la seva revista *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* un escrit titulat *Nouveaux principes de Géométrie de position et interprétation géométrique des symboles imaginaires* on explicava la seva teoria i el seu mètode basats en les idees d'Argand. Aquest és una millora evident sobre el treball original. Amb noves definicions precises, raonaments rigorosos, de caràcter més convencional, Français apuntala la teoria de les línies dirigides.

Comença el seu escrit amb una sort de crida; la teoria que vol exposar no hauria de sonar gens estranya:

> "És tan natural considerar al mateix temps, en Geometria, la magnitud i la posició de les línies, que tan bon punt vam començar a conrear aquesta ciència, hauríem d'haver necessitat expressar relacions de magnitud i de posició entre les diferents línies que componen qualsevol figura. M'atreveixo a dir que és sorprenent, després de tot això, que els primers principis de la Geometria Posicional encara no estiguin del tot establerts."

A continuació introdueix la notació que utilitzarà; la magnitud d'una recta es representa per una simple lletra minúscula, $a, b, c, ...$, i per indicar els angles que aquestes fan amb una recta fixa i indefinida (d'ara endavant l'eix de les abscisses positives) s'afegirà una lletra grega al subíndex. Per tant, $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, ...$ representaran les rectes amb magnitud absoluta $a, b, c, ...$ que formen els angles $\alpha, \beta, \gamma, ...$ amb l'eix de les x positives. Seguidament dona les primeres definicions:

> "Definició 1. Anomenem relació de magnituds la relació numèrica entre les magnituds de dues rectes, i relació de posició la inclinació de dues rectes entre si, o l'angle que formen entre elles. Definició 2. Direm que quatre rectes estan en proporció de magnitud i posició, quan entre les dues darreres hi haurà la mateixa relació de magnitud i la mateixa relació de posició que entre les dues primeres."

Per tenir quatre rectes en proporció de magnitud i posició tal que $a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$, s'han de complir les dues igualtats següents:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

D'aquí surt que la condició perquè $b_\beta$ sigui la mitjana proporcional entre $a_\alpha$ i $c_\gamma$, i parteixi l'angle format per aquestes en dues parts iguals és:

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$$

I per una progressió $a_\alpha : b_\beta : c_\gamma : d_\delta : ... : l_\lambda : m_\mu$ necessitarem les condicions anàlogues

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = ... = \frac{m}{l}, \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma = ... = \mu - \lambda$$

D'on treu el següent corol·lari, que ja havia trobat Argand:

> "En una progressió les magnituds absolutes de les rectes estan en progressió geomètrica, mentre que els angles que formen amb l'eix positiu d'abscisses augmenten en progressió aritmètica"

A l'apunt de notació següent, Françaìs proposa una nova caracterització de la seva escriptura simbòlica $a_\alpha$, que utilitzarà per considerar la interpretació geomètrica del que ell anomena "símbols imaginaris"

$$a_0 = a, \qquad 1_0 = 1; \qquad 1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$$

D'on

$$a_\alpha = a \cdot 1_\alpha$$

Ara podem representar la recta $a_\alpha$ com $a \cdot 1_\alpha$ on $a$ és la magnitud absoluta i $1_\alpha$ el signe de posició.

Una recta serà positiva si és paral·lela a l'eix de les abscisses i va d'esquerra a dreta; si va de dreta a esquerra, serà negativa. Els angles positius seran aquells que "pugin" des de l'eix de les abscisses, i els negatius seran els que "baixin".

Vinculant totes aquestes nocions ordinàries o habituals, amb les definicions anteriors, l'autor dedueix "una manera senzilla, uniforme i fructífera de representar les línies de magnitud i posició". Les primeres identificacions són:

$$+1 = 1_0, \qquad -1 = 1_{\pm\pi}$$

La segona és lleugerament enrevessada donat que fa correspondre dos signes de posició a una mateixa recta negativa -1. Se soluciona veient que la posició $1_\theta$ indica la mateixa que $1_{\theta - 2\pi}$; al primer cas "pugem" des de l'eix x cap a la posició corresponent a $\theta$, i al segon arribem a la mateixa posició "baixant". Quan $\theta = \pi$, tenim $1_{+\pi} = 1_{-\pi} - 1$.

I d'aquí:

$$+a = a \times (+1) = a \cdot 1_0, \qquad -a = a \times (-1) = a \cdot 1_{\pm\pi}$$

Després, aplicant que $+1 = e^{0\pi\sqrt{-1}}, \ -1 = e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ :

$$+a = a \times (+1) = a \cdot e^{0\pi\sqrt{-1}}, \qquad -a = a \times (-1) = a \cdot e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$$

Français apunta que de forma general tenim, amb $n$ enter

$$+1 = e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}}, \qquad -1 = e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}}$$

Però dins la Geometria de posició no fa falta més que un gir de circumferència per determinar la posició d'una recta, per tant, $n = 0$ i es pot utilitzar la forma anterior per $\pm 1$.

Després d'haver exposat tant les concepcions, les definicions, com l'escriptura simbòlica del seu mètode, Français té el camp lliure per arribar al cor de la qüestió:

> "Teorema 1. Les quantitats imaginàries de la forma $\pm a\sqrt{-1}$ representen, en Geometria de posició, rectes perpendiculars a l'eix de les abscisses; i per recíprocament les perpendiculars a l'eix de les abscisses són imaginaris de la mateixa forma."

$\pm a\sqrt{-1}$ és una mitjana proporcional de magnitud i posició entre $+a = a_0$ i $-a = a_{\pm\pi}$, per tant, $a_{\pm\frac{\pi}{2}}$ serà el valor de la mitjana proporcional, i tindrem:

$$+a\sqrt{-1} = a_{+\frac{\pi}{2}}, \qquad -a\sqrt{-1} = a_{-\frac{\pi}{2}}$$

Es veu que $\pm\sqrt{-1}$ és un signe de posició idèntic a $1_{\pm\frac{\pi}{2}}$ i que

$$\pm\sqrt{-1} = 1_{\pm\frac{\pi}{2}} = e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

I retrobem un argument conegut:

> "Corol·lari 3. Les anomenades quantitats imaginàries són tan reals com les magnituds positives i negatives, i només es diferencien d'elles per la seva posició, que és perpendicular a les d'aquestes."

Abans de continuar amb el 2n teorema, Français fa un incís on suggereix rebutjar els dos principis (eixos) presentats per la teoria geomètrica consagrada pels matemàtics i adoptar els que ell proposa, en pro d'alliberar-se del pla cartesià. Aquest imposa uns eixos perpendiculars i un punt fixat, l'origen, que divideix cadascun en quantitats negatives i positives. Aquestes dues espècies només ho són aparentment, estem davant d'una mateixa concepció duplicada, no es pot dir a simple vista si un negatiu és una abscissa o una ordenada, manca de sentit, i a més impedeixen, governant tot el pla, considerar una representació geomètrica d'unes quantitats que, arran d'això, haurem d'anomenar imaginàries.

Segons l'autor, aquest rebuig dels principis artificials i antagònics serà en benefici de la recta de magnitud i posició, que malgrat la seva complexitat serveix per resoldre fàcilment les dificultats del pensament i operació amb nombres complexos.

El teorema 2 enuncia que el signe de posició $1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, i com a conseqüència

$$\alpha\sqrt{-1} = \log(1_\alpha)$$

El que ens porta a veure que, a la Geometria de posició, els arcs de cercle són els logaritmes dels radis corresponents. Aquests arcs estan afectats del signe de posició $\sqrt{-1}$, perquè la seva direcció és en certa manera perpendicular a l'eix de les abscisses.

L'autor comenta que el resultat anterior explica la idea que els arcs de cercle imaginaris són logaritmes, i dona sentit a l'expressió

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1}$$

Després d'enunciar els resultats

$$a_\alpha = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}, \qquad e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$$

$$a_\alpha = a \cdot \cos\alpha + a \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{-1}$$

Diu:

> "Per expressar una recta de magnitud i posició, cal fer la suma de les seves projeccions sobre dos eixos de coordenades rectangulars. Per descomptat, cada projecció es prendrà amb el seu signe de posició."

I d'aquí dedueix que una recta qualsevol de magnitud i de posició es podrà substituir per tantes altres rectes com es vulgui, metre la suma de totes les projeccions d'aquestes sigui igual a la projecció original. Aquesta és la mateixa descomposició que feia Argand. Français escriu:

$$x \cdot e^{\epsilon\sqrt{-1}} = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} + b \cdot e^{\beta\sqrt{-1}} + c \cdot e^{\gamma\sqrt{-1}} + ... + m \cdot e^{\mu\sqrt{-1}}$$

$$\begin{cases} x \cdot \cos\epsilon = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma + ... + m \cdot \cos\mu \\ x \cdot \sin\epsilon = a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma + ... + m \cdot \sin\mu \end{cases}$$

Français completa el seu escrit fent constar de les aplicacions d'aquesta nova teoria sobre la mecànica. Una força, amb una intensitat i una direcció donades, es pot representar per una recta de magnitud i posició. Això permetria reduir problemes de composició de forces a una qüestió de Geometria de posició.

Finalment, igual que feia Argand, proposa un enllaç amb el teorema fonamental de l'àlgebra: "Totes les arrels d'una equació de grau qualsevol són reals i es poden representar per rectes de magnitud i posició donades".

Per acabar, s'adreça també al lector;

> "Tal és l'esbós, molt abreujat, dels nous principis sobre els quals sembla adequat i fins i tot necessari fundar la Geometria de posició, i que sotmeto al judici dels Geòmetres. Estant els principis en oposició formal a les idees acceptades fins ara sobre la naturalesa de les quantitats anomenades imaginàries, he d'esperar nombroses objeccions; però m'atreveixo a creure que un examen exhaustiu d'aquests mateixos principis els trobarà correctes, i que les conseqüències que n'he deduït, per estranyes que puguin semblar a primera vista en altres llocs, es consideraran, tanmateix, conformes a les regles de la dialèctica més rigorosa."

I a Argand;

> "A més, he de ser just i declarar que el fons d'aquestes noves idees no em pertany. Ho vaig trobar en una carta de M. Legendre al meu germà difunt, en la qual aquest gran geòmetre l'informa (com d'alguna cosa que se li va comunicar, i com a objecte de pura curiositat) del rerefons de les meves definicions 2ª i 3ª, del meu 1r teorema, i del 3r corol·lari del meu 2n teorema; però aquest últim només es justificava per l'exactitud d'algunes aplicacions. El que em pertany es redueix, doncs, a la manera d'exposar i demostrar aquests principis, a la notació i a la idea del meu signe de posició $1_{\pm\alpha}$.
> Desitjo que la publicitat que dono als resultats als quals he arribat pugui aconseguir determinar el primer autor d'aquestes idees per donar-se a conèixer, i treure a la llum el treball que ha fet sobre aquest tema."

És curiosa, sobretot en comparació amb l'assaig d'Argand, l'omissió total de figures geomètriques en l'escrit de Français. L'autor opta per un enfocament més teòric, clàssic, per demostrar que els imaginaris no ho són tant, i que es poden adherir a la teoria preexistent. No es tracta de buscar una realització geomètrica simple que satisfés els ulls, cal elaborar una teoria geomètrica sòlida.

Gergonne va publicar l'article, que va aparèixer al volum 4 dels *Annales de Mathématiques*. Interessat per la nova teoria, apunta que en una correspondència amb un altre matemàtic, va produir una taula de valors emplaçant els enters en una línia horitzontal centrada i les quantitats imaginàries pures perpendiculars, amb la resta d'imaginaris a les altres posicions.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\begin{array}{llllll}
..., & -2+2\sqrt{-1}, & -1+2\sqrt{-1}, & +2\sqrt{-1}, & +1+2\sqrt{-1}, & +2+2\sqrt{-1}, & ... \\
..., & -2+\sqrt{-1}, & -1+\sqrt{-1}, & +\sqrt{-1}, & +1+\sqrt{-1}, & +2+\sqrt{-1}, & ... \\
..., & -2, & -1, & 0, & +1 & +2, & ... \\
..., & -2-1\sqrt{-1}, & -1-\sqrt{-1}, & -\sqrt{-1}, & +1-\sqrt{-1}, & +2-\sqrt{-1}, & ... \\
..., & -2-2\sqrt{-1}, & -1-2\sqrt{-1}, & -2\sqrt{-1}, & +1-2\sqrt{-1}, & +2-2\sqrt{-1}, & ...
\end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Figura 14.

Amb això vol legitimar les idees de Français (i d'Argand, encara desconegut), ensenyant que aquest raonament no és tan estrany i ben segur ha germinat en diversos matemàtics, i val la pena fer-ne estudi. Tot i això, fa notar de l'estat embrionari i de la més que probable oposició d'alguns dins la comunitat matemàtica:

> "Sens dubte caldrà fer molt més per superar totes les objeccions, per aclarir totes les dificultats, per dissipar tots els núvols, per estendre i perfeccionar la nova teoria, i per fer evident el seu esperit, el seu objectiu i els seus avantatges; però aquests resultats només es poden esperar del temps i esforç combinats de tots aquells que no descartaran aquesta teoria amb menyspreu, sense haver-la examinat seriosament."

Français proporciona els fonaments d'aquesta teoria donant definicions precises a partir de les quals el seu raonament deductiu segueix una lògica sòlida, i també aporta una escriptura simbòlica més fàcil que la d'Argand i més similar a la nostra. Tant és així que el mateix Argand la preferirà en detriment de la seva pròpia.

## 4.2 Reconeixement d'Argand i reaparició de l'assaig

Argand era lector dels *Annales de Gergonne*, i de fet havia enviat al febrer de 1813 les seves respostes a dos problemes proposats. Quan va llegir l'escrit de Français, amb la crida a l'autor original al final, es va sentir interpel·lat i va enviar un resum més concís, d'una quinzena de pàgines, del seu assaig original de 1806. A més, va fer arribar una còpia de l'original a Gergonne.

Argand comença el seu nou article amb el mateix exemple de la balança per il·lustrar la realitat dels nombres negatius, i després introdueix les relacions de direcció.

Adopta la simbologia de Français, buscant una direcció $d$ tal que la seva relació amb la direcció positiva sigui la mateixa que amb la negativa, i.e. $+1 : 1_d :: 1_d : -1$, i per tant aquest $1_d$ serà una quantitat imaginària.

La seva teoria continua estant basada en les línies dirigides, amb la notació $\overline{KA}$ per la línia entre $K$ i $A$, equivalent a qualsevol altra amb la mateixa direcció i magnitud, sent $\overline{AK}$ la línia oposada.

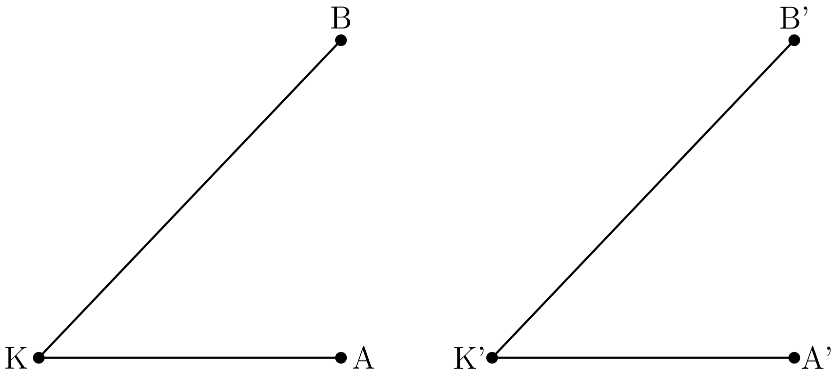


Figura 15.

Fa un nou dibuix per introduir de manera més concisa el principi fonamental de la seva teoria. Si els angles $AKB = A'K'B'$ tenim, abstraient-se de les magnituds absolutes: $KA : KB :: K'A' : K'B'$.

També introdueix les regles de suma i multiplicació de les línies dirigides, igual que al text original, i passa ràpidament als exemples trigonomètrics i algebraics.

D'altra banda, Argand abandona definitivament la notació $\sim = \sqrt{-1}$, $\rlap{|}\sim = -\sqrt{-1}$, perdent pel camí el mètode per reconèixer la periodicitat de les potències de la unitat imaginària.

La gran diferència, a part de ser un text més succint, és l'afegitó d'un apartat on intenta exportar la seva teoria a les 3 dimensions:

Partint d'un disc de centre $K$, $\overline{KA}=+1$, $\overline{KC}=-1$, $\overline{KB}=+\sqrt{-1}$, $\overline{KD}=-\sqrt{-1}$.

A més, qualsevol radi $\overline{KN}$ que sigui al mateix pla serà de la forma $p+q\sqrt{-1}$, i recíprocament qualsevol expressió de la forma anterior serà una línia dirigida d'aquest pla.

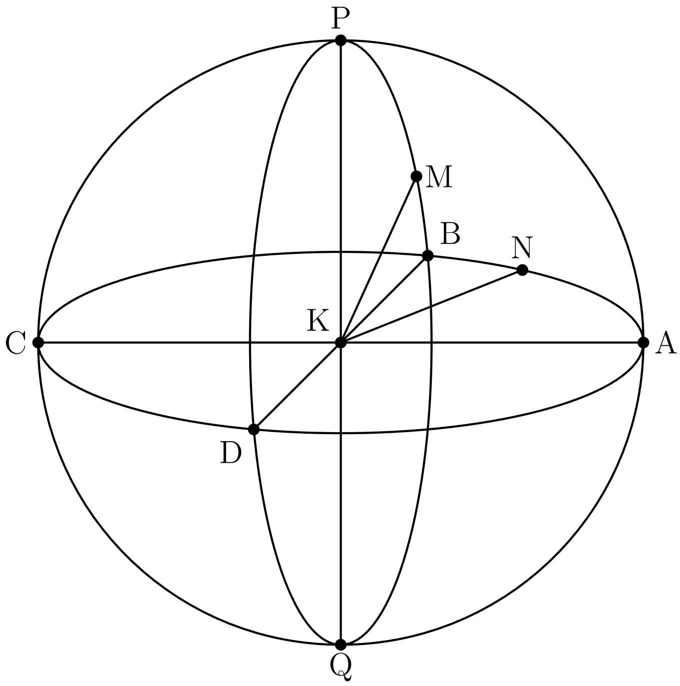


Figura 16.

Ara, tira una perpendicular $KP$ a $KA$ i es pregunta:

> "Com serà aquesta línia dirigida $\overline{KP}$ en relació amb les precedents? Serà completament heterogènia per aquestes, o podem relacionar-la analíticament amb la unitat primitiva $\overline{KA}$, i assignar-ne una expressió algebraica, com la de $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ...?"

Posant $\alpha$ com l'angle total de la circumferència, el divideix i utilitzant la notació de Français, escriu $\overline{KA}=1_0$, $\overline{KB}=1_{\frac{1}{4}}$, $\overline{KC}=1_{\frac{1}{2}}$, $\overline{KD}=1_{\frac{3}{4}}$, $\overline{AKB}=+\frac{1}{4}$, $\overline{AKD}=-\frac{1}{4}$.

I operant per analogia, obté l'angle $\overline{AKP}=+\frac{1}{4}\sqrt{-1}=\frac{1}{4}\cdot 1_{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}{}_{\frac{1}{4}}$.

D'on conclou $\overline{KP}=1_{\frac{1}{4}\cdot 1_{\frac{1}{4}}}=1_{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-1}}=1^{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-1}}=\left(1^{\frac{1}{4}}\right)^{\sqrt{-1}}=(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$.

Seguint aquesta lògica, per un angle $\overline{BKM}=\mu$, l'angle $\overline{AKM}$ serà:

$$\overline{AKM}=\frac{1}{4}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)$$

I posant $\cos\mu + \sqrt{-1}\sin\mu = \rho$

$$\overline{KM} = 1_{\frac{1}{4}\rho} = 1^{\frac{1}{4}\cdot\rho} = \left(1^{\frac{1}{4}}\right)^{\rho} = (\sqrt{-1})^{\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu}$$

Serà l'expressió general de tots els radis perpendiculars al radi primitiu $\overline{KA}$

Calcula també l'angle $\overline{BKM}$ i obté $\overline{BKM} = \frac{1}{4}(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$

El problema d'aquesta construcció es fa evident quan explicita que donats els resultats, la qüestió de si tot nombre es pot reduir a la forma $p + q\sqrt{-1}$ queda refutada, i que $\overline{KP} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ofereix l'exemple més senzill d'una quantitat irreductible a aquesta forma.

Argand sap que s'han desenvolupat demostracions que afirmen que qualsevol quantitat de la forma $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ es pot reduir a $p + q\sqrt{-1}$, però remarca:

> "Observem sobre aquestes demostracions que les que utilitzen el desenvolupament en sèrie només podrien ser concloents en la mesura que es demostrés que p i q tenen valors finits. Succeeix sovint en l'anàlisi, que una sèrie que, per la seva naturalesa, només pot expressar magnituds reals, pren un valor, o més aviat un nombre infinit, quan ha de representar una quantitat imaginària; i de la mateixa manera podem suposar que una sèrie composta per termes de la forma $p + q\sqrt{-1}$ o $a_b$ pot arribar a ser infinita, si ha d'expressar una quantitat de l'ordre $a_{b_c}$.
>
> Pel que fa a les demostracions que fan servir logaritmes, també deixen, ens sembla, alguns núvols a la ment, perquè encara no tenim nocions molt precises de logaritmes imaginaris. També caldria comprovar si un mateix logaritme no podria pertànyer alhora a diverses quantitats d'ordres diferents $a$, $a_b$, $a_{b_c}$. A més, la multiplicitat de valors deguda als radicals de l'expressió proposada és una altra font d'incertesa, de manera que es podria aconseguir, de la manera més rigorosa, reduir $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ a la forma $p + q\sqrt{-1}$ sense que se'n dedueixi necessàriament que aquesta funció no tingui altres valors de l'ordre $a_{b_c}$, no reductibles a aquesta forma."

Són aquests últims punts, sobre el pas de la teoria de línies dirigides a tres dimensions, els que incitaran respostes i crítiques a la seva obra.

## 4.3 Correspondència i discussió amb Français i Servois

El primer a contestar és Français, que ha arribat a la mateixa idea de buscar els angles imaginaris als plans perpendiculars al pla original, on es troben els nombres reals i els imaginaris.

Si tenim els angles $\pm\beta$ al pla $xy$, argumenta Français, l'angle imaginari $\pm\beta\sqrt{-1}$ estarà situat respecte a $+\beta$ igual que ho està $-\beta$ respecte a ell, i això només es pot donar quan el pla que conté $\pm\beta\sqrt{-1}$ és perpendicular a $xy$.

Posa:

$$1_{\beta\sqrt{-1}} = e^{(\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{-\beta} = 1^{\frac{\beta\sqrt{-1}}{2\pi}} = \cos(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\cdot\sin(\beta\sqrt{-1})$$

$$1_\alpha \cdot 1_{\beta\sqrt{-1}} = \cos\alpha\cos(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha\cos(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}\sin(\alpha\sqrt{-1})$$

I afirma que les projeccions de $a$ sobre els tres eixos de coordenades seran:

$$a\cdot\cos\alpha\cos(\beta\sqrt{-1}),\quad a\cdot\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha\cos(\beta\sqrt{-1}),\quad a\cdot\sqrt{-1}\cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}\sin(\alpha\sqrt{-1})$$

Tot i això, Français no està gaire satisfet amb el seu resultat, ja que li agradaria poder eliminar la notació imaginària, com havia fet per la geometria en dues dimensions passant de $A + B\sqrt{-1}$ a $a_\alpha$. Pensa en $a_{\alpha_A}$, on $a$ és la magnitud de la recta, $\alpha$ l'angle amb l'eix de les abscisses, i $A$ l'angle que fa $\alpha$ amb el pla $xy$, però tots els seus intents són infructuosos.

Un d'ells el porta a un resultat similar a Argand. Per analogia a $a_\alpha$ posa:

$$\alpha_A = \alpha\cdot e^{A\sqrt{-1}} = \alpha(\cos A + \sin A\cdot\sqrt{-1})$$

I per tant treu

$$1_{\alpha_A} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^{e^{A\sqrt{-1}}} = (\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\sqrt{-1})^{\cos A + \sin A\cdot\sqrt{-1}}$$

Substituint arriba al mateix resultat

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\quad A = \frac{\pi}{2},\quad 1_{\frac{\pi}{2}\cdot 1_{\frac{\pi}{2}}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$$

Però continuant el desenvolupament del cas general arriba a:

$$1_{\alpha_A} = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha\cos(A\sqrt{-1}))\times\left(1 + \frac{\sin\alpha\sin(A\sqrt{-1})}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2(A\sqrt{-1})}}\sqrt{-1}\right)$$

Per tant, arriba a la conclusió que $\alpha_A$ no es determina de la mateixa manera que $a_\alpha$ i que l'analogia suposada entre angles i línies no existeix.

Per acabar la seva nova carta als *Annales*, Français corregeix a Argand i demostra com reduir $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ a la forma $A + B\sqrt{-1}$.

$$c\sqrt{-1} = e^{\log(c\sqrt{-1})} = e^{\log c + \log(\sqrt{-1})} = e^{\log c + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = e^{\log c} \cdot e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

$$(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}} = e^{(d\log c)\sqrt{-1}} \cdot e^{-d\frac{\pi}{2}} = e^{-d\frac{\pi}{2}}(\cos(d\log c) + \sqrt{-1} \cdot \sin(d\log c))$$

Que és de la forma $A + B\sqrt{-1}$.

Per tant, diu Français, no està d'acord amb assignar $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}$ a la tercera coordenada de la seva extensió a tres dimensions.

La resposta següent és la de François-Joseph Servois, molt menys moderada en la seva crítica.

No s'oposa al progrés d'aquesta teoria, sinó que se centra a assenyalar els seus defectes i denunciar l'ús d'analogies i que els exemples i aplicacions siguin suficients per confirmar un nou mètode.

No està convençut del fet que segons Français $\pm a\sqrt{-1}$ sigui una mitjana proporcional de magnitud i posició entre $+a$ i $-a$. Servois creu evident que $\pm a\sqrt{-1}$ sigui mitjana de magnitud, però que no s'ha demostrat que sigui de posició, i tota la teoria reposa sobre aquests principis.

Gergonne, a peu de pàgina, respon a algunes de les crítiques de Servois; en aquest cas explica que la mitjana de magnitud entre $+a$ i $-a$ no és altra que $a$, donat que en termes de magnitud obviem els signes. Agafant $\pm a\sqrt{-1}$ com a mitjana proporcional tenim en compte la posició inversa de $+a$ i $-a$, i la interpretació d'aquesta és la recta que està posada respecte a $+a$ igual que ho està $-a$ amb ella.

Gergonne també s'oposa al punt de vista de Servois envers el desenvolupament de noves teories. Argumenta que cap nou descobriment es fa ràpidament i a gust de tots, i dona l'exemple del càlcul diferencial:

> "Sens dubte, seria molt desitjable que la ment humana procedís constantment com ho fem als Tractats i a les escoles, però malauradament això gairebé mai no passa. Ha oblidat el senyor Servois que només després de més d'un segle de meditacions i intents infructuosos vam aconseguir finalment situar l'anomenat càlcul infinitesimal sobre fonaments sòlids? On seríem si els primers inventors d'aquest càlcul haguessin hagut de demostrar amb rigor els seus mètodes abans d'aplicar-los? Ha passat exactament el mateix amb les magnituds negatives aïllades, i sempre serà així amb totes les teories; l'home les percep per una mena d'instint, molt abans d'estar en condicions de demostrar-les amb rigor."

Servois apunta que la nova notació li sembla només una màscara geomètrica aplicada a formes analítiques, i Gergonne respon que tot i això és important per desfer-se de les formes inintel·ligibles $\sqrt{-1}$, i això és el que pretenia Argand.

També critica alguns dels exemples trigonomètrics donats per Argand, als quals arriba sense necessitat d'utilitzar les línies dirigides, així com la seva demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra, i retreu a aquest que no conegui el resultat d'Euler

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

D'altra banda, comenta que la magnitud i la posició d'una recta són dues quantitats que es podrien entendre com a homogènies, i per tant haurien d'estar lligades. Així que hauria d'existir una funció $\psi(a, \alpha)$ que representi una línia dirigida. Aquesta haurà de complir:

– $\psi(a, 2\pi n) = +a, \quad \psi(a, (2n+1)\pi) = -a$, per $n$ enter

– $\psi(a, \alpha) = \psi(b, \beta)$ implica $a = b$, $\alpha = \beta$

– $\frac{\psi(a,\alpha)}{\psi(b,\beta)} = \frac{\psi(c,\gamma)}{\psi(d,\delta)}$ implica $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i $\alpha - \beta = \gamma - \delta$

L'expressió $\psi(a, \alpha) = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$ les satisfà totes, però Servois no creu que sigui l'única, i que aquesta només és un cas particular.

L'últim comentari, i també el més important, no el fa com a crítica, sinó que es fixa en la taula que havia fet Gergonne:

> "La taula de doble argument que vostè proposa, aplicant-se a un pla dividit per punts o quadrats infinitesimals, de manera que cada quadrat correspongui a un nombre que seria el seu índex, seria molt adequada per indicar la magnitud i la posició dels radis que giraríem al voltant del punt o quadrat central $\pm 0$."

Això s'apropa molt al pla complex tal com el coneixem avui, que va desenvolupar Gauss més endavant, i a més afegeix que l'expressió $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$ d'Argand i Français s'adaptaria bé a aquesta idea.

També reflexiona sobre la possibilitat de veure la taula com el tall central d'una taula de tres arguments, que podria servir per fixar en magnitud i posició les rectes en l'espai. Igual que Français, no troba quin seria el tercer coeficient d'aquest passat a tres dimensions. Per analogia troba el trinomi

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$$

On $\alpha, \beta, \gamma$ són els angles d'una recta amb els tres eixos rectangulars, i imposa:

$$(p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma)(p'\cos\alpha + q'\cos\beta + r'\cos\gamma) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Els valors de $p, q, r, p', q', r'$ que satisfan aquesta condició serien "absurds" diu Servois, però es pregunta si serien imaginàries, reductibles a la forma $A + B\sqrt{-1}$. Ell creu que no, i que, per tant, no tota funció analítica no real es pot reduir a $A + B\sqrt{-1}$.

Français contesta a Servois amb una petita carta en la qual agraeix Gergonne pels seus comentaris, defensant la nova teoria, i aportant una sèrie d'exemples passant de la seva notació a la notació ordinària amb resultats coneguts.

L'últim article dels *Annales de Gergonne* que veurem serà *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires*, escrit per Argand el 1815.

Aquí, l'autor explica que aquesta nova teoria té dos objectius principals: el primer és donar un significat intel·ligible a les expressions que estaven obligats d'acceptar i utilitzar dins l'Anàlisi, però que no havien aconseguit relacionar amb cap quantitat coneguda i avaluable, i el segon és oferir un mètode de càlcul o una notació que utilitza signes geomètrics i algebraics simultàniament per abordar problemes d'una forma diferent.

D'aquí en treu dues preguntes: Demostra rigorosament la nova teoria que $\sqrt{-1}$ expressa una perpendicular a l'eix de $-1$ i $+1$? Pot la notació de les línies dirigides, en alguns casos, proveir demostracions i solucions més simples i breus que aquelles que volen reemplaçar?

Per la primera diu que sempre estarà subjecte a discussió mentre busquem d'establir el significat de $\sqrt{-1}$ per analogia amb les nocions conegudes de les quantitats positives i negatives i la proporció entre elles. Si encara es discutia sobre les quantitats negatives, amb més raó es podrà objectar a les imàginaries. En canvi, si definim la relació de magnitud i posició entre rectes com fa Français, aquesta dificultat desapareix; la relació entre dues línies de magnitud i direcció es concep amb tota la precisió geomètrica necessària. Queda veure si a aquesta relació se li pot donar el nom de proporció, que ja té un significat fix dins l'Anàlisi. Argand argumenta que aquesta nova accepció només afegeix a l'antiga, sense canviar-ne res. L'antiga definició seria un cas particular de la nova, i no s'hauria de buscar demostracions. Dona com a exemple que el primer analista que va donar l'equació $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ no ho va fer com un teorema a demostrar, sinó com a definició de les potències negatives; generalitzant la definició de les potències positives conegudes fins aquell moment, i el mateix s'aplica amb els exponents fraccionaris, irracionals o imaginaris. Això ho enllaça amb la defensa del seu escepticisme envers les demostracions del resultat $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Explica que la demostració ve de l'expressió $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$, i que per demostrar que una determinada expressió té un cert valor, primer cal haver-la definit. Però no existeixen definicions de potències amb exponents negatius prèvies a la demostració Euler. Especula que aquest, a la recerca d'avaluar $e^{x\sqrt{-1}}$, va considerar el teorema $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + ...$, demostrat prèviament per a tot $z$ real. Agafant $z = x\sqrt{-1}$ troba $e^z = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} + ...$ d'on conclou $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Si definíssim l'expressió $e^{x\sqrt{-1}}$ dient que representa una quantitat igual a $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$, les potències amb exponents reals i amb exponents imaginaris estarien lligades per una llei comuna, per tant ens trobem també davant d'una extensió de principis, i no d'una demostració d'un nou teorema. Ell també ha operat per extensió de principis per interpretar $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ com la perpendicular al pla que conté $\pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$. Argand concedeix que el seu resultat es contradiu amb el d'Euler, i no preten fer prevaldre el seu, sinó fer entendre als seus crítics que les consideracions preses per desenvolupar el resultat d'Euler són de la mateixa naturalesa que les seves. Creu que és pertinent preguntar-se quina serà l'expressió de la perpendicular en qüestió, o trobar una expressió que serveixi per a totes les línies dirigides de qualsevol pla, per lligar-les totes igual que ho estan al pla que conté $\pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$.

De la segona pregunta en diu que és evident es podria arribar als mateixos resultats obtinguts amb la teoria de les línies dirigides utilitzant els mètodes ordinaris, però s'ha de jutjar si la nova teoria ajuda i simplifica el pensament i el càlcul en casos concrets. Diu Argand que l'avantatge dels matemàtics moderns sobre els antics es basa en el progrés de la ciència, per tant, quan es presenta una nova idea s'ha d'examinar per avaluar si se'n pot extreure quelcom d'útil. Servois ha estat l'únic en donar la seva opinió sobre les noves idees de Français i Argand, i aquest últim demana que sigui considerada per més matemàtics. Li sembla que, tot i ser nova i exigir una certa agilitat amb les eines que fa servir, facilita la demostració d'alguns dels teoremes, que ha donat com a exemple, comparat amb el mètode analític comú. Per il·lustrar-ho reprèn, de forma més exhaustiva, la seva demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra, del qual parlarem més endavant.

Per operar introdueix una nova notació: si $a = m + n\sqrt{-1}$, $a' = \sqrt{m^2 + n^2}$, i diu que en podriem dir mòdul, representant la magnitud absoluta d'una línia.

Enuncia, deixant la demostració a "calculadors més hàbils", dues propietats d'aquesta nova eina:

- El mòdul de la suma de diversos elements no és més gran que la suma de mòduls, el que avui dia seria la desigualtat triangular $|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|$.
- El mòdul del producte de diversos elements és igual al producte de mòduls, $|z_1 \pm ... \pm z_n| = |z_1| \pm ... \pm |z_n|$.

Així termina la implicació d'Argand en l'àmbit dels nombres complexos, donant una nova definició que perdura fins avui en dia.

# 5 Argand i el teorema fonamental de l'àlgebra

El Teorema fonamental de l'àlgebra diu que tot polinomi de coeficients complexos i de grau $n(n \geq 1)$ té exactament $n$ arrels.

El primer matemàtic a enunciar-lo va ser Albert Girard el 1629 al seu escrit *Invention nouvelle en l'algèbre* dient que totes les equacions d'àlgebra tenen tantes solucions com grau tingui el seu polinomi. No el va poder demostrar, en part degut a la falta de coneixement sobre els nombres complexos.

Euler va fer dues temptatives de demostració, publicades el 1749 a les *Memòries de l'Acadèmia de Berlin.* Aquestes no eren del tot satisfactòries però contenien diverses idees que van ser utilitzades a posteriori: tota equació algebraica es pot escriure de la forma

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + ... + Mx + N = 0$$

I que buscar les arrels de l'equació es redueix a buscar els n factors simples del polinomi, ja que el polinomi de grau $n$ es pot escriure com el producte

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)...(x + \eta)$$

Va ser enunciat per Jean Le Rond d'Alembert el 1746:

> "Sigui $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + ... + fx + g$ un polinomi qualsevol, tal que no hi hagi cap quantitat real que sent substituïda a $x$ porti a 0 tots els elements. Hi haurà sempre una quantitat $p + q\sqrt{-1}$ que substituïda a $x$ porti a 0 el polinomi."

i en va proposar una demostració. Per un polinomi $f$ agafa $b, c$ reals tal que $f(b) = c$, i mostra que hi ha complexos $z_1$ i $w_1$ tals que $|z_1| < |b|$, $|w_1| < |c|$, i després itera el procés per convergir a una arrel de $f$. Aquesta demostració no estava completa i planteja alguns problemes.

Gauss va dedicar la seva tesi doctoral de 1799 a la demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra, discutint i criticant els intents de d'Alembert i Euler. Desenvolupa tres demostracions més al llarg de la seva carrera, dos el 1816 i una el 1849, pel 50è aniversari de la primera. Tot i la crítica a d'Alembert, Gauss concedeix que es podria construir una demostració rigorosa sobre la mateixa base.

Argand, en un context en què encara no hi ha consens sobre la demostració, decideix aportar la seva versió utilitzant la seva nova idea de les línies dirigides, que apareix a la part final del seu escrit de 1806. Quan publica un resum del seu assaig als Annales de Gergonne inclou la mateixa demostració, basada en la idea de demostració de d'Alembert.

Aquesta és objecte de crítica per Servois, que diu:

> "No n'hi ha prou, em sembla, amb trobar valors de x que donin al polinomi valors constantment decreixents; cal, a més, que la llei de les disminucions porti necessàriament el polinomi a zero, o que sigui tal que zero no sigui, si es pot expressar així, l'asímptota del polinomi."

Al seu escrit de 1814 Argand amplia la seva demostració, tant per resoldre els dubtes de Servois com per ensenyar amb més detall com sorgeix fàcilment dels nous principis.

Per començar comenta que les demostracions fetes fins ara es poden classificar en dues classes.

Les primeres estan fundades sobre principis relatius a les funcions i la inversió d'equacions, principis que, segons Argand, són certs en si mateixos però no són susceptibles d'una demostració rigorosa:

> "Són espècies d'axiomes, la veritat dels quals només es pot sentir quan ja es posseeix l'esperit del càlcul algebraic; mentre que, per reconèixer la veritat d'un teorema, n'hi ha prou de posseir els principis d'aquest càlcul, és a dir, conèixer-ne les definicions i anotacions."

Aquest tipus de demostracions, per tant, són susceptibles de crítiques, igual que ho han sigut els exemples que donava al seu assaig.

A les segones s'ataca frontalment la proposició a establir, mostrant que existeix almenys una quantitat de la forma $a + b\sqrt{1}$ que substituint a $x$ anul·li el polinomi proposat, o veient que es pot factoritzar aquest polinomi en factors reals de primer i segon grau. Aquest va ser el mètode emprat per Lagrange, que segons Argand va mostrar que les demostracions anteriors com les d'Euler i d'Alembert estaven incompletes. Algunes utilitzaven desenvolupaments en sèries i altres equacions subsidiàries, però no demostraven que els coeficients d'aquestes sèries i equacions fossin sempre reals, admetent implícitament que si per determinar una incògnita es pot resoldre de $n$ maneres, l'equació resultant ha de ser de grau $n$. Argand es pregunta si aquest principi, que sembla cert, es podria considerar com un axioma com al cas anterior, ja que no està demostrat. Argand busca oferir una demostració directa, simple i rigorosa.

Utilitzant les propietats de suma i multiplicació de les línies dirigides, que representaran nombres de la forma $a + b\sqrt{-1}$, així com la nova notació del mòdul $a = m + n\sqrt{-1}$, $a' = \sqrt{m^2 + n^2}$, proposa:

$$y_x = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + fx + g$$

un polinomi, amb n enter i $a, b, ..., f, g$ de la forma $m + n\sqrt{-1}$. L'objectiu és demostrar que sempre es pot trobar un valor, també de la forma $m + n\sqrt{-1}$, que substituint a $x$ ens doni $y_x = 0$.

Per un valor qualsevol de $x$, es pot construir el polinomi agafant $K$ com a punt inicial i $P$ com a punt final, per tant, $\overline{KP}$ representa aquest polinomi i busquem el valor de $x$ tal que $P$ coincideixi amb $K$. Si cap valor complís aquesta condició la línia $\overline{KP}$ no s'anul·laria mai, i hi hauria un valor de $KP$ més petit que tots els altres. Aquest últim apunt és el punt més feble de la demostració d'Argand, ja que aquest resultat que sembla intuïtiu no serà demostrat fins 50 anys després per Karl Weierstrass.

Sigui $z$ el valor de $x$ que ens dona el mínim, no tindríem mai

$$y'_{z+h} < y'_z$$

Però desenvolupant $y_{z+h}$ en funció de $h$ obté

$$y_{z+h} = y_z + Rh^r + Sh^s + ... + Vh^v + h^n$$

Amb tots els coeficients $R, S, ..., V$ no nuls i els exponents $r, s, ..., v, n$ creixents.

En el cas on els coeficients són tots nuls tenim $y_{z+h} = y_z + h^n$, i agafant $h = \sqrt[n]{-y_z}$ tindríem $y_{z+h} = 0$ i, per tant, hauríem demostrat el teorema. Suposem llavors que l'equació tingui com a mínim tres termes.

Ara construïm $y_{z+h}$ agafant $\overline{KP} = y_z$, $\overline{PA} = Rh^r$, $\overline{AB} = Sh^s$,..., $\overline{FG} = Vh^v$, $\overline{GH} = h^n$, per tant, estarà representada per $\overline{KPAB...FGH} = \overline{KH}$.

Tindrem els mòduls $y'_z = KP$, $R'h^r = PA$, $S'h^s = AB$,..., $V'h^v = FG$, $h^n = GH$.

Hem de demostrar $KH < KP$, i $h$ pot variar de direcció i magnitud:

Si tenim $\overline{KP} = y_z$, $\overline{PA_1} = Rh_1^r$ podem escollir la direcció de h tal que el punt A definit per $\overline{PA} = Rh^r$ sigui un punt de la semirecta $[PK)$. Posant angle$(\overline{KP}, \overline{PA_1} = \alpha_1$, agafem $\arg h = \arg h_1 + \frac{\pi - \alpha_1}{r}$ i per tant, $\arg h^r = \arg{(h_1)^r} + \pi - \alpha_1$, angle$(\overline{PA_1}, \overline{PA}) = \pi - \alpha_1$ i angle$(\overline{KP}, \overline{PA}) = \pi$.

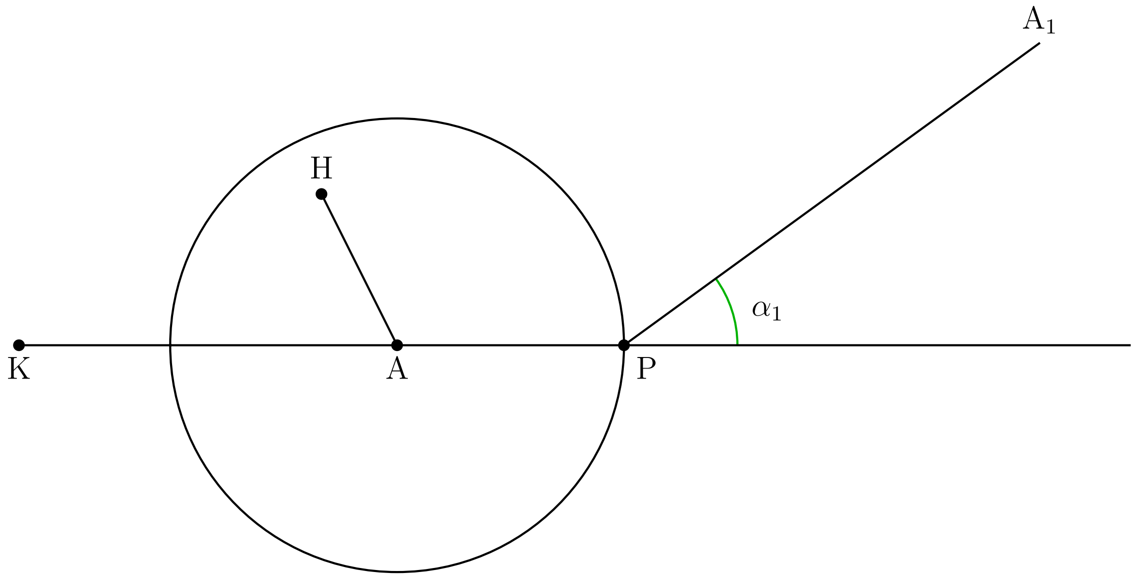


Figura 17.

Una vegada fixada la direcció $h$, podem variar-ne la magnitud. Si $PA > KP$, podem reduir $h$ fins a obtenir $PA < KP$, de manera que A estigui entre $K$ i $P$. A continuació si $h$ encara no és tal que

$$R'h^r > S'h^s + ... + V'h^v + h^n$$

Podem reduir $h$ encara més per obtenir-la, ja que $r$ és l'exponent més petit de tots per definició. D'aquí obtenim

$$PA > AB + ... + FG + GH$$

La distància $AH$ serà doncs més petita que $PA$.

Només queda mostrar que $KH < KP$ amb la $h$ que tenim. $KH \leq KA + AH$ per definició, i hem construït $H$ tal que $AH < AP$, per tant, $KH < KA + AP$, i com hem obtingut que $A$ està alineat entre $K$ i $P$, $KA + KP = KP$.

Així que $KH < KP$, o el que és el mateix $y'_{z+h} < y'_z$

Argand confirma que aquesta demostració que proposa és un teorema d'existència de les arrels, no un mètode d'aproximació a les arrels:

> "És gairebé superflu aturar-se en una objecció que es podria fer al que precedeix, dient que, si volguéssim determinar el valor de x seguint el procediment que es descriu per a la disminució progressiva de $y'_x$, seria possible no arribar-hi mai, perquè el valor de h, en les successives substitucions, només podria disminuir en graus cada cop més petits. No està demostrat el contrari, de fet; però no en resulta res més, excepte que les

> consideracions que precedeixen no podrien proporcionar, almenys sense nous desenvolupaments, un mètode d'aproximació; i això de cap manera invalida la demostració del teorema."

I finalment contesta al dubte de Servois:

> "L'exigència del senyor Servois deriva, sens dubte, de la consideració de la hipèrbole $y = \frac{1}{x}$. És cert que, tot i que es pot, en aquesta equació, trobar per a $y$ un valor inferior a qualsevol límit donat, aquesta $y$ només pot arribar a ser zero si suposem $x$ infinit. Però aquesta circumstància no es dona en la nostra demostració: perquè certament no és per un valor infinit de $x$ que farem zero el polinomi."

La demostració d'Argand es pot completar amb els coneixements actuals:

Sigui $f$ un polinomi de coeficients i variables complexos, $z'$ un valor tal que la imatge $f(z')$ no és nul·la, i $P$ un nombre real positiu tal que:

$$0 < |f(z')| < P$$

Suposem f mònic i de grau n i posem $f(z) = z^n\psi(z)$, on $\psi$ és una funció real tal que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \psi(z) = 1$

Existeixen reals estrictament positius $R_1$ i $R_2$ tals que

$$|z| \geq R_1 \Rightarrow |\psi(z)| \geq \frac{1}{2}, \qquad |z| \geq R_2 \Rightarrow |z^n| \geq 2P$$

I per tant existeix $R = \sup(R_1, R_2)$ tal que

$$|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \geq P, \qquad |f(z)| < P \Rightarrow |z| < R$$

La funció polinòmica $f$ no està fitada.

En particular, de $|f(z')| < P$ podem deduir que $|z'| < R$

Sent la funció $|f|$ contínua sobre el compacte $\overline{D}$ de centre $O$ i radi $R$, el conjunt imatge $|f|(\overline{D})$ admet un element mínim (aquest és el resultat que li faltava a Argand).

Per tant, existeix $z_1 \in \overline{D}$ tal que:

$$|z| < R \Rightarrow |f(z_1)| < |f(z)|$$

I com $|z'| < R$, $|f(z_1)| < |f(z')|$. També és evident que $|f(z_1)| < P$ i $|z_1| < R$, per tant, $z$ és dins del disc obert $D$.

Si $|f(z_1)| \neq 0$, podem trobar en un entorn de $z_1$, un element $z_2$ tal que

$$|f(z_2)| < |f(z_1)|$$

(Aquest és el resultat del qual Argand dona la demostració geomètrica)

I per tant $|f(z_2)| < P$ i $|z_2| < R$

Com hem definit $z_1$ amb $|z| < R \Rightarrow |f(z_1)| < |f(z)|$, haurem de tenir

$$|f(z_1)| < |f(z_2)|$$

I arribem a una contradicció, per tant $|f(z_1)| = 0$ i el teorema d'existència de les arrels queda demostrat.

# 6 Estat de les coses i repercussió

La història d'Argand i els nombres complexos s'acaba el 1815, i la representació d'un vector al pla complex portarà el seu nom més endavant. Publicarà un grapat més de respostes als *Annales de Gergonne* responent a problemes proposats.

Pel que fa a la representació geomètrica dels nombres complexos, gairebé la totalitat de la teoria, tal com la coneixem avui dia, ja està descoberta. Matemàtics com Buée, el 1806 com Argand, o Mourey i Warren el 1828, també publiquen escrits sobre la matèria.

Carl Friedrich Gauss presentarà a l'acadèmia de les ciències de Göttingen el 1831 *Theoria Residuorum Biquadraticorum*, on exposa les seves teories en aquest sentit. A través dels seus diaris se sap que tenia una idea embrionària de la representació geomètrica tan aviat com el 1797. Gràcies al seu reconeixement com a matemàtic i a la qualitat del seu escrit, va tenir molt d'impacte sobre el món científic, portant a boca de tothom aquestes teories que en realitat portaven desenvolupades, i no només per Argand, des de feia gairebé vint anys. Però Gauss introdueix les quantitats imaginàries definint-les com a objectes abstractes susceptibles d'aplicacions. Aquesta és una distinció fonamental que subratlla la proximitat de Gauss a la nostra manera de concebre les matemàtiques. Actuant així, Gauss mostra que les quantitats imaginàries s'han de concebre com a nombres que tenen el seu lloc en l'Aritmètica i constitueixen la màxima extensió que es pot tenir per als nombres reals. A més encunya el terme de nombres complexos.

Un altre gran matemàtic d'aquell temps, Augustin Louis Cauchy, va desenvolupar l'Anàlisi complexa i va ajudar a eliminar els últims dubtes sobre la legitimitat i la utilitat dels nombres complexos, en part convençut pels treballs de caràcter geomètric que havien realitzat Argand i Français entre d'altres.

Des d'un punt de vista més concret, dins els escrits d'Argand hi trobem idees pioneres en diversos camps a part de la representació de les quantitats imaginàries.

Quan suma línies dirigides està fent la suma de vectors en un pla vectorial. Quan descompon les línies dirigides en d'altres amb la mateixa direcció que les primitives està realitzant la descomposició d'un vector en una base, i la pròpia notació $\overline{KA}$ és precursora de la vectorial $\overrightarrow{KA}$. A més les línies dirigides són abstractes, estan vinculades als representants de la figura per una relació d'equipol·lència, les propietats de descomposició i unicitat són vàlides per l'entitat abstracta, i tindrà infinitat de representacions al pla. Serà Giusto Bellavitis qui el 1835 desenvolupi l'equipol·lència.

La seva notació original, amb els signes especials $\sim$ i $\sim\!\!\!\!\!\mid\;$, deixava veure la periodicitat de les potències de la unitat imaginària, tot i que més endavant se'n va desfer.

La demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra que apareix al *Cours d'Analyse* de Cauchy el 1821, no és més que la que va desenvolupar Argand a l'escrit de 1815, sense acreditar, el que alguns consideren com la primera demostració rigorosa publicada d'aquest gran teorema. De la mateixa manera s'atribueix erròniament a Cauchy el terme de mòdul d'un nombre complex, que també apareix per primer cop a les *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires.*

Anys més tard, a *Mémoires sur les quantités geomètriques*, Cauchy cita Argand i Français remarcant la importància dels seus treballs. George Peacock i William Rowan Hamilton van llegir a Argand i a Français, i de fet aquest últim diu a *Lectures on Quaternions*:

> "Res més lúcid que les afirmacions del mateix Argand pel que fa als principis fonamentals de la teoria de la suma i la multiplicació de rectes coplanars, ha aparegut que jo sàpiga, ni tan sols en els escrits del professor De Morgan sobre l'àlgebra doble."

Hamilton també elogia Servois, que veu en la forma trinomial per passar del pla a l'espai, amb dels valors $p, q, r, p', q', r'$ de l'equació

$$(p\cos\alpha+q\cos\beta+r\cos\gamma)(p'\cos\alpha+q'\cos\beta+r'\cos\gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

> "L'aproximació més propera a una anticipació dels quaternions, o almenys a una anticipació dels triplets."

Per acabar l'editor de la segona edició de l'obra d'Argand, Jules Hoüel, comenta:

> "El llibre d'aquest modest erudit ginebrí conté l'embrió de diverses sèries d'investigacions, algunes de les quals han aportat una llum inesperada sobre els misteris que han regnat durant tant de temps sobre la veritable naturalesa de les quantitats negatives i les quantitats imaginàries, i han aportat una gran llum en la teoria de les funcions, en fer-la susceptible d'una representació sensible als ulls; els altres, menys importants fins ara, però als quals el futur pot reservar un gran paper, han donat lloc a la creació de nous mètodes de geometria analítica, entre els quals n'hi haurà prou amb citar els de Möbius, de Bellavitis, de Hamilton, de Grassman."

# 7 Conclusions

Hem presentat en aquest treball un anàlisi de la representació geomètrica dels complexos basada en la teoria de les línies dirigides d'Argand, recolzant-nos al text original de 1806 així com al resum de 1813, les aportacions de Français, i la correspondència entre aquests i Servois.

S'han estudiat els mèrits i també els problemes o raonaments erronis, que van donar peu a discussió i a una evolució posterior de les diferents teories.

El mètode de les línies dirigides d'Argand o el de les rectes de magnitud i posició de Français es complementen i formen una teoria sòlida, encara que no perfecta, per representar nombres complexos en el pla i donar-los un sentit geomètric. Les temptatives de passar a una representació espacial en tres dimensions no donen fruits matemàtics, però sí que porten a una discussió constructiva i a un replanteig del rigor dins les demostracions per quantitats imaginàries obtingudes per analogia amb els reals.

S'han estudiat també tot una sèrie d'idees pertanyents a l'obra, que tenen en si la llavor de mètodes matemàtics tangencials a la teoria principal, com el pla vectorial i l'equipol·lència, els quaternions, o l'aplicació per demostrar el Teorema fonamental de l'àlgebra.

Hem vist la gran vàlua d'aquests textos que a priori, per la seva provinença podrien caure en l'oblit o ser de poca utilitat, però que per sort, amb la intervenció de Lagrange per fer arribar el text a Français, i que Argand llegís la seva publicació als *Annales de Gergonne*, i per competència matemàtica, per arribar a uns resultats en gran mesura satisfactoris, van deixar empremta en la història de la matemàtica complexa i tot el que l'envolta.

Ja havíem dit que no va ser l'únic ni el primer esbós ben arrelat de la representació geomètrica dels nombres complexos, però això ens serveix per il·lustrar que l'inici del segle XIX era el moment ideal per conrear aquestes noves teories sobre els nombres complexos, que van continuar evolucionant gràcies a aquests descobriments durant la resta del segle.

# Referències

[1] Agarwal, R. P., Perera, K., & Pinelas, S. (2010). History of Complex Numbers. En *An Introduction to Complex Analysis* (pp. 321-325). Springer.

[2] Argand, J. R. (1806). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Gauthier Villars.

[3] Baltus, C. (2004). D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra. *Historia Mathematica*, 31(4), 414-428. `https://doi.org/10.1016/j.hm.2003.12.001`

[4] Bogomolny, A. *First Geometric Interpretation of Negative and Complex Numbers*. Cut The Knot. Recuperat desembre de 2022, de `https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/JohnWallis.shtml`

[5] Bogomolny, A. *Remarks on the History of Complex Numbers*. Cut The Knot. Recuperat desembre de 2022, de `https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/HistoricalRemarks.shtml`

[6] Cauchy, Augustin L. (1840). Mémoire sur les Quantités Géométriques. En *Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome 4* (pp. 157-180). Bachelier.

[7] Cauchy, Augustin Louis. (1821). Chapitre X. En *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* (pp. 329-364). Debure frères.

[8] Dorce, C. (2013). *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia fins al Renaixement*. Edicions de la Universitat de Barcelona.

[9] Dorce, C. (2014). *Història de la matemàtica. Des del segle XVII fins a l'inici de l'època contemporània*. Edicions de la Universitat de Barcelona.

[10] Flament, D. (2003). *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. CNRS ÉDITIONS.

[11] Gérini, C. (2009). La représentation géométrique des nombres imaginaires par Argand. *Bibnum [Online]*. `http://journals.openedition.org/bibnum/633`

[12] Jones, P. S. (1954). Complex numbers: an example of recurring themes in the development of mathematics—I. *The Mathematics Teacher*, 47(2), 106-114. `https://doi.org/10.5951/MT.47.2.0106`

[13] Katz, V. J. (2009). Algebra in the Renaissance. En *A History of Mathematics. An Introduction* (pp. 383-422). Pearson Education.

[14] Katz, V. J. (2009). Analysis in the Nineteenth Century. En *A History of Mathematics. An Introduction* (pp. 764-817). Pearson Education.

[15] Kouteynikoff, O. (2006). La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre. *Bulletin de l'APMEP* , 462, 122-137.

[16] Mandic, D., & Goh, V. S. L. (2009). The Magic of Complex Numbers. En *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models* (pp. 1-11). ISTE Ltd and John Wiley & Sons.

[17] Massa, R. (2014). Història de la Matemàtica. UPC Commons. https://upcommons.upc.ed/bitstream/handle/2117/189913/historia_de_la_matematica_fme_materials_definitiu.pdf

[18] Noel, L. H. (1991). *The fundamental theorem of algebra: A survey of history and proofs*. Oklahoma State University.

[19] O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1996). *The fundamental theorem of algebra*. MacTutor History of Mathematics Archive. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra/

[20] O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2019). *Jean Robert Argand*. MacTutor History of Mathematics Archive. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Argand/

[21] Sinkevich, G. I. (2020). On the history of negative and complex numbers interpretation. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2001.10400

[22] Veritasium. (2021). *How Imaginary Numbers Were Invented*. Veritasium. https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo

[23] Wagner, R. (2010). The natures of numbers in and around Bombelli's ≪L'algebra≫. *Archive for History of Exact Sciences*, 64(5), 485-523.

[24] Wallis, J. (1685). Of Negative Squares and their Imaginary Roots in Algebra. En *A Treatise of Algebra* (pp. 264-266).

[25] Wallis, J. (1685). Other Geometrical Construcions thereunto relating. En *A Treatise of Algebra* (pp. 270-273).

[26] Wallis, J. (1685). The Geometrical Construction accomodated hereunto. En *A Treatise of Algebra* (pp. 268-269).

[27] Wallis, J. (1685). The same Exemplified in Geometry. En *A Treatise of Algebra* (pp. 266-268).