Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Un primer contacte amb la lògica temporal

Autora: Emma Amaro Velasco

Director: Dr. Joan Bagaria i Pigrau
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2023

Abstract

Temporal logic is a field of study full of interest both in theory and in practice. In this report we will introduce a propositional temporal logic and a temporal first order logic while comparing the properties each one holds. We will show completeness and decidability for the first one, and the completeness of certain fragments and non-decidability for the second. Finally, we will present the PLTL logic, used in computer science, and we will explore a particular application: model checking.

Resum

La lògica temporal és un tema d'estudi amb interès tant teòric com aplicat. En aquesta memòria farem una introducció a la lògica proposicional temporal i a la lògica temporal de primer ordre, comparant les propietats d'una i l'altra. En veurem la completesa i la decidibilitat de la primera, i la completesa d'alguns fragments i la no-decidibilitat de la segona. Per acabar, presentarem una lògica utilitzada per a la ciència computacional, la lògica PLTL, i explorarem amb l'ajuda d'autòmats una aplicació concreta: el model checking.

2020 Mathematics Subject Classification. 03B44

Agraïments

Al Dr. Joan Bagaria, per tota la seva ajuda.

A la meva família i a l'Ana R., l'Emma, l'Ana C., la Carla, la Mar, la Marta, l'Adri i la Mercè, pel suport emocional.

Índex

1 Introducció

El projecte

La lògica temporal va ser introduïda oficialment en l'àmbit matemàtic de la mà del lògic neozelandès Arthur Prior amb la publicació de *Time and Modality* l'any 1957, basat en les seves conferències a les *John Locke Lectures*. Tot i la gran evolució que ha experimentat des d'aleshores, la lògica temporal és encara una branca molt jove i en continua evolució de l'estudi de la lògica. Cada any múltiples investigacions, algunes molt recents, fan camí en aquesta disciplina, i malgrat això queda encara molt per explorar.

La més important aplicació de la lògica temporal i la motivació principal de la majoria de recerques que s'hi enfoquen és el seu paper com a eina en la ciència computacional, on es pot fer servir per modelitzar diferents sistemes i, d'aquesta manera, estudiar-los de forma rigorosa. Amb aquest impuls s'han dedicat molts esforços a definir lògiques temporals pensades exclusivament per a la modelització de sistemes computacionals, a demostrar-ne el bon funcionament i a perfeccionar les metodologies a mesura que avancen les demandes de la tecnologia. Podem trobar usos per a la lògica temporal en anàlisi de protocols de seguretat, identificació de patrons temporals, simulacions utilitzant intervals, planificacions...

Tot i així, també hi ha un fort interès purament filosòfic, i aquest repercuteix de forma directa en la caracterització de la lògica: en particular, la concepció filosòfica de la idea de *temps* que adoptem decidirà les definicions matemàtiques que la formalitzaran. Per aquest motiu hi ha moltes maneres diferents de construir una lògica temporal. En aquest treball en veurem només algunes, les que resulten més senzilles i intuïtives amb coneixements bàsics de lògica clàssica i una noció quotidiana del temps.

He escollit dedicar el treball de final de grau a fer una primera introducció a la lògica temporal pel meu interès en la lògica modal, i per l'oportunitat d'utilitzar els coneixements adquirits havent cursat recentment assignatures relacionades amb la computabilitat. L'objectiu d'aquesta memòria és analitzar el funcionament de la lògica temporal, estudiar com la seva efectivitat i el seu comportament canvien en potenciar el seu poder expressiu, i explorar com es pot aplicar de forma pràctica en la ciència computacional.

Estructura de la Memòria

El treball està organitzat en tres seccions.

En la primera, estudiarem la lògica temporal de Prior, la més propera a la lògica proposicional clàssica. En veurem la definició, el càlcul, la completesa i la decidibilitat.

En la segona secció veurem com respon la lògica temporal de primer ordre a les mateixes preguntes que hem fet a la secció anterior, i examinarem els fragments que funcionen de forma més satisfactòria.

Per últim, en la tercera secció aplicarem la lògica temporal a la computabilitat veient un exemple d'aplicació: el *model checking*.

2 La lògica temporal de Prior

En aquesta primera secció veurem el llenguatge, la semàntica i la sintaxi de la lògica proposicional temporal, o lògica temporal de Prior. Comprovarem que afegir una dimensió temporal a la lògica proposicional clàssica no li resta completesa o decidibilitat, i donarem una demostració de les dues propietats.

2.1 Llenguatge de la lògica de Prior

Definirem el llenguatge de la lògica temporal de Prior, o TL, estenent el llenguatge de la lògica proposicional clàssica amb quatre operadors nous, que reflecteixen les següents idees intuïtives que busquem poder expressar en una lògica temporal:

P : "En algun moment del passat ha estat el cas que..."

F : "En algun moment del futur serà el cas que..."

H : "En tot moment passat ha estat el cas que..."

G : "En tot moment futur serà el cas que..."

Un cop tenim els nous connectors, podem definir el conjunt de fórmules de la lògica.

Definició 2.1. *Definim el conjunt de fórmules de TL recursivament com*

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid P\varphi \mid F\varphi,$$

on $PROP$ és el conjunt de proposicions. Com en el cas de la lògica proposicional clàssica, definim les connectives $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge$ a partir de $\neg, \vee$ com

$$\begin{aligned} &\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi);\\ &\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi;\\ &\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

Observem que podem expressar H en funció de P, i G en funció de F. Sigui φ una fórmula,

$$H\varphi \equiv \neg P\neg\varphi, \text{ i } G\varphi \equiv \neg F\neg\varphi.$$

Per tant, podem definir TL només afegint P i F als operadors clàssics.

Amb aquests nous operadors temporals podem capturar el significat d'oracions utilitzant les conjugacions pròpies del llenguatge quotidià: per exemple, si p correspon a *"plou"*, podem considerar la frase

$$p \rightarrow GPp,$$

que es traduiria com: *"Si plou, aleshores en tot moment futur serà veritat que ha plogut en el passat."*

2.2 Semàntica de la lògica de Prior

Així com hem definit el llenguatge de TL com una extensió del llenguatge de la lògica proposicional clàssica, la semàntica de la lògica temporal proposicional és una extensió de la semàntica clàssica.

Sigui Φ el conjunt de variables proposicionals. En lògica proposicional clàssica, coneixem la validesa de les fórmules mitjançant interpretacions, és a dir, funcions $I : \Phi \to \{0, 1\}$ que assignen a cada variable proposicional un valor de veritat (0 per representar "fals" i 1 per representar "cert"). En el cas de la lògica temporal volem reflectir el concepte de fórmula que pot ser certa en un instant t però falsa en un altre instant t'. Formalitzarem aquesta idea assignant una interpretació a cada instant. Però primer haurem de definir el conjunt d'instants i expressar com estan relacionats entre ells.

Definició 2.2. *Un marc temporal és una estructura $\mathcal{T} = (T, <)$, on $<$ és una relació binària sobre T transitiva i irreflexiva que anomenem relació d'accessibilitat, i on els elements t de T són instants de temps.*

La relació $<$ ens indica l'ordre temporal en què es troben els instants de T. Si el parell (t, t') és a $<$, aleshores diem que t és anterior a t'. Les restriccions de $<$ ens indicaran el tipus de marc temporal en què treballem; com a mínim demanem que sigui irreflexiva i transitiva, per respectar la idea intuïtiva de temps.

Ara podem definir una interpretació en TL.

Definició 2.3. *Sigui $\mathcal{T} = (T, <)$ un marc temporal, una interpretació en $\mathcal{T}$ és una funció h que té com a domini T i que assigna a cada instant $t \in T$ una interpretació clàssica $h(t) : \Phi \to \{0, 1\}$. Anomenarem model temporal a l'estructura $\mathcal{M} = (T, <, h)$.*

Ara podem definir per recursivitat la noció de veritat d'una fórmula φ en un instant t en un model $\mathcal{M} = (T, <, h)$. Si φ és vertadera en un model $\mathcal{M}$ en un instant t, escriurem $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$. Aleshores:

$\mathcal{M}, t \vDash q$ si, i només si, $h(t)(q) = 1$,

$\mathcal{M}, t \vDash \neg\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \nvDash \varphi$,

$\mathcal{M}, t \vDash \varphi \vee \psi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}, t \vDash \psi$,

$\mathcal{M}, t \vDash P\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ per algun instant t' amb $t' < t$,

$\mathcal{M}, t \vDash F\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ per algun instant t' amb $t' > t$.

D'aquí podem deduir que

$\mathcal{M}, t \vDash \varphi \wedge \psi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ i $\mathcal{M}, t \vDash \psi$,

$\mathcal{M}, t \vDash \varphi \to \psi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ implica que $\mathcal{M}, t \vDash \psi$,

$\mathcal{M}, t \vDash H\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ per tot instant t' amb $t' < t$,

$\mathcal{M}, t \vDash G\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ per tot instant t' amb $t' > t$.

Direm que una fórmula φ és vàlida si, per a tot model $\mathcal{M}$ i per a tot instant t, $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$.

Exemple 2.4. Sigui $\mathcal{M} = (T, <, h)$ un model temporal i siguin p i q variables proposicionals tal que $h(t)(p) = 1, h(t)(q) = 1$ per a tot instant $t \in T$. Considerem la fórmula $\varphi = G(p \to q)$ i analitzem si és vertadera a un determinat instant t_0.

$$\begin{aligned} h(t)(p) = h(t)(q) = 1 \text{ per a tot } t \in T \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{M}, t \vDash p,\ \mathcal{M}, t \vDash q \text{ per a tot } t \in T \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{M}, t \vDash p \to q \text{ per a tot } t \in T \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{M}, t \vDash p \to q \text{ per a tot } t' \text{ tal que } t' > t_0 \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{M}, t_0 \vDash G(p \to q) \end{aligned}$$

2.3 La lògica K_t

Hem vist la part semàntica de la lògica temporal proposicional. Ara, com amb altres lògiques, és important poder caracteritzar la validesa mitjançant la sintaxi. A continuació estudiarem les propietats d'algunes axiomatitzacions de TL: la completesa i la decidibilitat.

Començarem per la lògica minimal, anàloga a la lògica modal K. Definim la lògica K_t, la més dèbil de les lògiques temporals, com la classe minimal de fórmules tancada pels axiomes i regles següents:

Axiomes

1. Totes les tautologies de la lògica proposicional clàssica
2. Distribució: $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$
   $H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$
3. Inversió: $p \to GPp$
   $p \to HFp$
4. Transitivitat: $Gp \to GGp$

Regles

1. Substitució Uniforme: si φ és un teorema, també ho és $\varphi[q/\psi]$
2. Modus Ponens: si φ i $\varphi \to \psi$ són teoremes, aleshores ψ també ho és
3. Generalització Temporal: si φ és un teorema, aleshores també són teoremes $G\varphi$ i $H\varphi$

on $\varphi[q/\psi]$ denota el resultat de substituir per ψ la variable q a cada aparició de q a φ.

Veurem que K_t és correcta i completa respecte de la classe de tots els marcs temporals.

Teorema 2.5. *La lògica K_t és correcta.*

Demostració. Per demostrar la correcció de K_t en tenim prou amb demostrar que els axiomes de K_t són vàlids i que les regles preserven la validesa:

- Les tautologies de la lògica proposicional clàssica són vàlides per la pròpia definició de validesa que hem donat en la lògica de Prior. Pel mateix motiu són correctes les regles de Modus Ponens i de Substitució Uniforme.

- $G(q \to r) \to (Gq \to Gr)$:
Sigui $\mathcal{M} = (T, <, h)$ un model i $t \in T$. Volem demostrar que $\mathcal{M}, t \vDash G(q \to r) \to (Gq \to Gr)$. Aleshores suposem que $\mathcal{M}, t \vDash G(q \to r)$ i veiem que $\mathcal{M}, t \vDash (Gq \to Gr)$. Com que $\mathcal{M}, t \vDash G(q \to r)$, tenim que $\mathcal{M}, t' \vDash q \to r$ per a tot t' tal que $t < t'$. Ara, per demostrar que $\mathcal{M}, t \vDash Gq \to Gr$, suposem que $\mathcal{M}, t \vDash Gq$ i comprovem que $\mathcal{M}, t \vDash Gr$. $\mathcal{M}, t \vDash Gq$ implica que $\mathcal{M}, t' \vDash q$ per a tot t' tal que $t < t'$. Però, com que hem vist que $\mathcal{M}, t' \vDash q \to r$ per a tot t' tal que $t < t'$, per Modus Ponens resulta que $\mathcal{M}, t' \vDash r$ per a tot t' tal que $t < t'$, és a dir, que $\mathcal{M}, t \vDash Gr$.
La demostració per a $H(q \to r) \to (Hq \to Hr)$ és anàloga.

- $q \to GPq$:
Sigui $\mathcal{M} = (T, <, h)$ un model i $t \in T$. Per demostrar que $\mathcal{M}, t \vDash q \to GPq$, suposem que $\mathcal{M}, t \vDash q$ i veurem que $\mathcal{M}, t \vDash GPq$. Volem comprovar, aleshores, que $\mathcal{M}, t' \vDash Pq$ per a tot t' tal que $t < t'$; equivalentment, que, per a tot t' tal que $t < t'$, tenim que $\mathcal{M}, t'' \vDash q$ per algun t'' tal que $t'' < t'$. Però hem suposat que $\mathcal{M}, t \vDash q$. Agafant $t'' = t$ hem acabat.

- $Gq \to GGq$:
Sigui $\mathcal{M} = (T, <, h)$ un model i $t \in T$. Suposem que $\mathcal{M}, t \vDash Gq$ per veure que, aleshores, $\mathcal{M}, t \vDash GGq$ i demostrar així que $\mathcal{M}, t \vDash Gq \to GGq$. $\mathcal{M}, t \vDash Gq$ implica que $\mathcal{M}, t' \vDash q$ per a tot t' tal que $t < t'$. Busquem demostrar que $\mathcal{M}, t \vDash GGq$, és a dir, que per a tot t' amb $t < t'$, $\mathcal{M}, t' \vDash Gq$, o equivalentment, que per a tot t' amb $t < t'$, $\mathcal{M}, t'' \vDash q$ per a tot t'' tal que $t' < t''$. Però, per la transitivitat de $<$, tenim que $t < t''$, i per la suposició inicial ($\mathcal{M}, t' \vDash q$ per a tot t' tal que $t < t'$) concloem que $\mathcal{M}, t'' \vDash q$ per a tot t'' amb $t' < t''$, com volíem veure.

- Generalització Temporal:
La demostrarem per a G. Volem veure que la regla "si φ és un teorema, aleshores $G\varphi$ també és un teorema" conserva la validesa. Comprovem-ho: si φ és un teorema, aleshores φ és vàlid per a tot $t \in T$; per tant, donat un instant t, $\mathcal{M}, t' \vDash \varphi$ per a tot t' tal que $t < t'$, és a dir, $G\varphi$ és vàlid per a tot $t \in T$.
La comprovació per a H és anàloga.

□

Teorema 2.6. *La lògica K_t és completa respecte la classe de tots els marcs temporals.*

Demostració. Aquesta demostració està basada en l'anomenat model canònic d'una lògica, i està extreta del llibre *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects* [1]. Ens caldrà una definició prèvia.

Definició 2.7. *Sigui Λ una lògica. Un conjunt de fórmules Δ és maximal Λ-consistent si Δ és Λ-consistent i qualsevol conjunt de fórmules que contingui Δ pròpiament és Λ-inconsistent. Direm que Δ és un Λ-MCS, o MCS.*

A més, sigui Λ una lògica i Δ un Λ-MCS, es donaran les següents propietats, que utilitzarem més endavant:

1. Δ és tancat sota Modus Ponens: és a dir, si φ, $\varphi \to \psi \in \Delta$, aleshores $\psi \in \Delta$;

2. sigui φ una fórmula qualsevol: $\varphi \in \Delta$ o bé $\neg\varphi \in \Delta$;

3. siguin φ, ψ fórmules qualssevol: $\varphi \vee \psi \in \Delta$ si, i només si, $\varphi \in \Delta$ o $\psi \in \Delta$.

També serà rellevant el següent lema.

Lema 2.8. *(Lema de Lindenbaum) Tot conjunt consistent té una extensió maximal consistent.*

Demostració. Aquesta demostració del lema de Lindenbaum es pot trobar a [5]. Sigui Δ_0 un conjunt consistent, és a dir, un conjunt Δ_0 tal que $\Delta_0 \nvdash \perp$. Construirem una extensió Δ de Δ_0 que sigui maximal consistent.

Primer, ordenem totes les fórmules del llenguatge en una llista infinita: $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...$ Després, creem una successió de conjunts $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ...$ de la següent manera. Sigui $\Delta_1 = \Delta_0$, considerem la primera fórmula φ_1. Si $\Delta_1 \cup \{\varphi_1\}$ és un conjunt consistent, aleshores definirem Δ_2 com $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\varphi_1\}$. Si no és un conjunt consistent, aleshores $\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\neg\varphi_1\}$. Definirem Δ_{i+1} a partir de Δ_i i φ_i de la mateixa manera:

$$\begin{array}{lll} \Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\varphi_i\} & \text{si} & \Delta_i \cup \{\varphi_i\} \nvdash \perp \\ \Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{si} & \Delta_i \cup \{\varphi_i\} \vdash \perp \end{array}$$

Aleshores Δ serà el resultat d'afegir a Δ_0 totes les fórmules (o les seves negacions) segons el mètode que acabem de veure. Per construcció, Δ és extensió maximal de Δ_0. Veiem ara que és consistent. Comprovarem primer que, si Δ_i és consistent, aleshores també ho és Δ_{i+1}. Suposem que Δ_i és consistent i considerem φ_i. Si en la construcció de Δ_{i+1} hem afegit φ_i, aleshores $\Delta_i \cup \{\varphi_i\} \nvdash \perp$, i Δ_{i+1} és consistent. Si, en canvi, en la construcció de Δ_{i+1} hem afegit $\neg\varphi_i$, aleshores $\Delta_i \cup \{\varphi_i\} \vdash \perp$ i $\Delta_i \vdash \neg\varphi_i$. Suposem que Δ_{i+1} no és consistent i arribarem a contradicció. Si Δ_{i+1} és inconsistent, aleshores $\Delta_i \cup \{\neg\varphi_i\} \vdash \perp$, i per tant $\Delta_i \vdash \varphi_i$. Però com que havíem vist abans que $\Delta_i \vdash \neg\varphi_i$, tenim que $\Delta_i \vdash \perp$: Δ_i no és consistent, en contradicció amb la suposició inicial. Per tant, Δ_{i+1} és consistent. Com el procés de construcció dels conjunts comença pel conjunt consistent Δ_0, resulta que tots els Δ_i són també consistents.

Considerem ara la següent afirmació:

$$\text{Si } \varphi_i \in \Delta, \text{ aleshores } \varphi_i \in \Delta_{i+1} \tag{2.1}$$

Comprovem que, efectivament, aquest és el cas. Suposem que $\varphi_i \in \Delta$. Aleshores φ_i ha d'estar en Δ_k per algun k, per definició de Δ. Ara fixem-nos en la creació del conjunt Δ_{i+1} segons el mètode que hem descrit. Si φ_i no s'ha afegit en aquest pas, aleshores s'ha afegit $\neg\varphi_i$, i tindríem $\neg\varphi_i \in \Delta_{i+1}$ i $\varphi_i \in \Delta_k$. Però, per construcció, $\Delta_j \subset \Delta_{j'}$ si $j < j'$; per tant, o Δ_k o Δ_{i+1} tindran com a elements tant φ_i com $\neg\varphi_i$, contradient que tots els conjunts Δ_i siguin consistents. Per tant, φ_i ha d'haver-se inclòs al conjunt Δ_{i+1}.

Ara ja podem demostrar que Δ és consistent. Suposem que Δ no és consistent i arribarem a contradicció. Partim, aleshores, de que $\Delta \vdash \perp$. Per la definició de $\vdash$, això implica que existeix un subconjunt finit Δ' de Δ tal que $\Delta' \vdash \perp$. Com que Δ' és finit, hi ha d'haver una φ_j amb índex màxim dins de Δ'. Podem comprovar que, aleshores, tots els elements de Δ' han de ser elements de Δ_{j+1}: considerem un element qualsevol $\varphi_i \in \Delta' \subset \Delta$; l'índex i ha de ser més petit que $j+1$, i, per l'afirmació 2.1, $\varphi_i \in \Delta_{i+1} \subset \Delta_{j+1}$. Per tant, tots els elements de Δ' són també elements de Δ_{j+1}. Això implica directament que si $\Delta' \vdash \perp$, també $\Delta_{j+1} \vdash \perp$. Però això contradiu el fet que tots els conjunts Δ_i han de ser consistents, i tenim com a conseqüència que, com volíem demostrar, Δ és consistent. □

Sigui ara S el conjunt de teories maximals consistents. Definirem la relació R en S com:

$$\Delta R\Gamma \text{ si, i només si, per a tota fórmula } \varphi,\ G\varphi \in \Delta \Rightarrow \varphi \in \Gamma$$

La noció intuïtiva d'aquesta construcció és que S és el conjunt d'instants de temps, i les fórmules en cada MCS són les fórmules vàlides en cada instant. Aleshores, quan dos instants t, t' estiguin relacionats per R, tRt', hem d'entendre que l'instant t passa abans que l'instant t' a la mateixa "branca" temporal.

Demostrem les següents propietats de la relació R.

Lema 2.9.

1. *R és transitiva.*

2. *$\Delta R\Gamma$ si, i només si, per a tota fórmula φ, $H\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta$.*

Demostració.

1. Siguin $\Gamma, \Delta, \Xi \in S$ i suposem que $\Gamma R\Delta$ i $\Delta R\Xi$. Volem demostrar que $\Gamma R\Xi$. Suposem aleshores que $G\varphi \in \Gamma$. Per l'axioma (4) de transitivitat, tenim que $GG\varphi \in \Gamma$, i aplicant directament la definició de R dues vegades resulta que $G\varphi \in \Delta$ i $\varphi \in \Xi$, com volíem veure.

2. Siguin $\Delta, \Gamma \in S$. Suposem que $\Delta R\Gamma$ i $H\varphi \in \Gamma$ per demostrar la implicació a la dreta. Com Γ és un MCS, $H\varphi \in \Gamma$ implica $\neg H\varphi \notin \Gamma$, i per la definició de R això vol dir que $G\neg H\varphi \notin \Delta$. Però Δ també és un MCS; per tant, $\neg G\neg H\varphi \equiv FH\varphi \in \Delta$. Veiem que, aleshores, $\varphi \in \Delta$. Si $\varphi \notin \Delta$, $\neg\varphi \in \Delta$, i per l'axioma (3), $HF\neg\varphi \equiv F\neg F\varphi \equiv \neg HF\varphi \in \Delta$, que no pot ser perquè $HF\varphi \in \Delta$. Demostrem ara la implicació a l'esquerra pel contrarecíproc: suposem que no es dona la relació $\Delta R\Gamma$. Aleshores per alguna fórmula φ, $G\varphi \in \Delta$ i $\neg\varphi \in \Gamma$. Però aplicant l'axioma (3) a la fórmula $\neg\varphi$, tenim $\neg\varphi \to HF\neg\varphi \in \Gamma$, que és equivalent a dir que $\neg\varphi \to H\neg G\varphi \in \Gamma$. Per Modus Ponens, resulta que $H\neg G\varphi \in \Gamma$. Aleshores hem trobat una fórmula $\psi = \neg G\varphi$ tal que $H\psi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Delta$.

□

Per continuar amb la demostració de completesa també necessitarem el següent lema.

Lema 2.10. *Sigui $\Delta \in S$ un MCS. Es compleix:*

1. *Si $F\varphi \in \Delta$, aleshores per algun Γ, $\varphi \in \Gamma$ i $\Delta R\Gamma$.*

2. *Si $P\varphi \in \Delta$, aleshores per algun Γ, $\varphi \in \Gamma$ i $\Gamma R\Delta$.*

Demostració. Intuïtivament, 1. ens diu que, si $F\varphi$ és vàlid en Δ, aleshores, efectivament, existeix un moment futur Γ on φ serà vàlid; passem a demostrar-ho. Suposem que $F\varphi \in \Delta$. Definim el conjunt $\Gamma_0 = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid G\psi \in \Delta\}$ (afegim les ψ per respectar la definició de R).

Γ_0 és consistent. Si no ho fos, tindríem $\psi_1, ..., \psi_k$ tals que $G\psi_0, ..., G\psi_k \in \Delta$ i $K_t \vdash (\bigwedge_{i\leq k} \psi_i) \to \neg\varphi$. Aleshores, per generalització, $K_t \vdash G((\bigwedge_{i\leq k} \psi_i) \to \neg\varphi)$, i per l'axioma (2), $K_t \vdash (\bigwedge_{i\leq k} G\psi_i) \to G\neg\varphi$. Ara, com que $G\psi_i \in \Delta$ per a cada i, obtenim per Modus

Ponens $G\neg\varphi \in \Delta$; és a dir, tenim $\neg F\varphi \in \Delta$, que contradiu la suposició inicial de $F\varphi \in \Delta$. Per tant Γ_0 és consistent i, pel lema de Lindenbaum, podem estendre'l a un conjunt consistent maximal $\Gamma \in S$. Per la construcció de Γ_0, $G\psi \in \Delta$ implica $\psi \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, i així tenim $\Delta R \Gamma$. A més, $\varphi \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, com volíem demostrar.

Demostrem 2. de forma anàloga, suposant $P\varphi \in \Delta$ i definint $\Gamma_0 = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid H\psi \in \Delta\}$. Γ_0 és consistent i podem estendre'l a un MCS $\Gamma \in S$. Pel lema anterior, tindrem que $\Gamma R \Delta$.

□

Ens interessa agafar (S, R, g) com a model, on $g(\Gamma, q) = 1$ si, i només si, $q \in \Gamma$, però ens trobem amb un problema: hem comprovat que R és transitiva, però no podem assegurar que sigui irreflexiva. Es podria donar el cas que $\Delta R \Delta$. Per evitar aquesta possibilitat, creem còpies de Δ; aquest mètode s'anomena *bulldozing*.

Definim $T = S \times \mathbb{Z}$, és a dir, definim T com el conjunt de tots els parells (Δ, m) on $\Delta \in S$ i m és un enter. Ara definim la relació $<$ com:

$$(\Delta, m) < (\Gamma, n) \text{ si, i només si, } \Delta R \Gamma \text{ i } m < n.$$

Aleshores $<$ és transitiva i irreflexiva. Definim h, per a $t = (\Delta, n)$ com:

$$h(t, q) = 1 \text{ si, i només si, } q \in \Delta.$$

Hem obtingut una estructura $\mathcal{M} = (T, <, h)$ que anomenarem *model canònic* per K_t.

Comprovem la següent propietat, que anomenarem *lema fonamental* o *lema de veritat*.

Lema 2.11. *Per a qualssevol φ, Δ, n, tenim que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Delta$.*

Demostració. Demostrem el lema per inducció.

- Si q és una variable proposicional, s'obté directe de la definició de h.
- $\neg\varphi$: suposem que φ és una fórmula tal que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Delta$. Aleshores
$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \neg\varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, (\Delta, n) \nvDash \varphi & \\ & \Leftrightarrow & \varphi \notin \Delta & \text{(Per hipòtesi)} \\ & \Leftrightarrow & \neg\varphi \in \Delta & \text{(}\Delta\text{ és MCS)} \end{array}$$
- $\varphi \vee \psi$: suposem que φ, ψ són fórmules tals que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Delta$ i $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \psi$ si, i només si, $\psi \in \Delta$. Aleshores:
$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi \text{ o } \mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \psi & \\ & \Leftrightarrow & \varphi \in \Delta \text{ o } \psi \in \Delta & \text{(Per hipòtesi)} \\ & \Leftrightarrow & \varphi \vee \psi \in \Delta & \text{(}\Delta\text{ és MCS)} \end{array}$$
- $F\varphi$: suposem que φ és una fórmula tal que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Delta$.
  - $\Leftarrow$ Suposem $F\varphi \in \Delta$. Aleshores, pel lema 2.10, existeix $\Gamma \in S$ tal que $\varphi \in \Gamma$ i $\Delta R \Gamma$. Per hipòtesi, tenim que $\mathcal{M}, (\Gamma, n+1) \vDash \varphi$, i com $(\Delta, n) < (\Gamma, n+1)$, concloem que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \vDash F\varphi$.

$\Rightarrow$ Suposem ara que $\mathcal{M}, (\Delta, n) \models F\varphi$. Aleshores ha d'existir un parell $(\Gamma, m) < (\Delta, n)$ tal que $\mathcal{M}, (\Gamma, m) \models \varphi$. Per la hipòtesi inductiva, $\varphi \in \Gamma$, i com $\Delta R \Gamma$, obtenim $F\varphi \in \Delta$, com volíem demostrar.

La demostració per a $P\varphi$ és anàloga.

□

Ara que hem construït el model canònic de K_t podem demostrar la seva completesa. Sigui φ una fórmula, volem demostrar que si φ és vàlida, aleshores φ és deduïble. Demostrem el contrarecíproc: suposem que φ no és deduïble i veurem que tampoc és vàlida. Si φ no és deduïble, aleshores $\Delta_0 = \{\neg\varphi\}$ és consistent, i el podem estendre a un MCS Δ. Prenem el model $\mathcal{M} = (T, <, h)$ i $t = (\Delta, 0)$. Pel lema que acabem de demostrar, $\mathcal{M}, (\Delta, 0) \not\models \varphi$; hem trobat un model contraexemple i per tant φ no és vàlida i K_t és completa.

□

2.4 Extensions de la lògica $\mathbf{K}_t$

Hem vist la completesa de la lògica més dèbil. Com amb la lògica modal, però, podem considerar extensions de K_t afegint-li diferents axiomes. La primera, i potser més important, és la lògica *Lin*.

Definició 2.12. *Definim Lin com l'extensió de K_t que resulta d'afegir el següent axioma de no-ramificació, que correspon a la restricció a un model temporal lineal:*

$$(PFq \to (Pq \vee q \vee Fq)) \wedge (FPq \to (Fq \vee q \vee Pq))$$

Teorema 2.13. *La lògica Lin és correcta i completa respecte la classe de marcs temporals lineals.*

Demostració. Com que ja hem demostrat la correcció de K_t, n'hi haurà prou amb comprovar la validesa del nou l'axioma en la classe dels marcs lineals. Sigui $\mathcal{M}$ un model i sigui t un instant. Volem veure que $\mathcal{M}, t \models (PFq \to (Pq \vee q \vee Fq)) \wedge (FPq \to (Fq \vee q \vee Pq))$, és a dir, que $\mathcal{M}, t \models (PFq \to (Pq \vee q \vee Fq))$ i $\mathcal{M}, t \models (FPq \to (Fq \vee q \vee Pq))$.

Demostrem primer $\mathcal{M}, t \models (PFq \to (Pq \vee q \vee Fq))$. Suposem que $\mathcal{M}, t \models PFq$. Aleshores, existeix t' tal que $t' < t$ i $\mathcal{M}, t' \models Fq$. Per tant, existeixen t'' i t' tals que $t' < t''$ i $t' < t$, i $\mathcal{M}, t'' \models q$. Ara bé, com que ens trobem en un marc lineal, de $t' < t''$ i $t' < t$ resulta que o bé $t < t''$, o bé $t = t''$, o bé $t'' < t$. En el primer cas, $\mathcal{M}, t \models Fq$; en el segon cas, $\mathcal{M}, t \models q$; i en el darrer cas $\mathcal{M}, t \models Pq$. Per tant, $\mathcal{M}, t \models (Fq \vee q \vee Pq)$, com volíem demostrar. La comprovació de $\mathcal{M}, t \models (FPq \to (Fq \vee q \vee Pq))$ és anàloga.

Per a demostrar la completesa de la lògica *Lin* aprofitarem la construcció (S, R, g) que ja hem fet per comprovar la completesa de K_t. Recordem que S és el conjunt de teories maximals consistents, que definim la relació R en S com

$$\Delta R \Gamma \Leftrightarrow \text{per a tota fórmula } \varphi, \text{ si } G\varphi \in \Delta \text{ aleshores } \varphi \in \Gamma,$$

i que definim g com

$$g(\Gamma, q) = 1 \text{ si, i només si, } q \in \Gamma.$$

Per utilitzar el model (S, R, g) per demostrar la completesa de Lin hauríem de comprovar que la relació d'accessibilitat R és transitiva, no es ramifica i que és un ordre lineal. Hem vist la transitivitat a la demostració de la completesa de K_t; comprovem la no-ramificació.

Siguin $\Delta, \Gamma, \Sigma \in S$ tals que $\Delta R \Gamma$ i $\Delta R \Sigma$ però ni $\Gamma R \Sigma$, ni $\Gamma = \Sigma$, ni $\Sigma R \Gamma$. Observem que, aleshores:

- com que $\Gamma \not{R} \Sigma$, existeix una fórmula ψ_1 tal que $G\psi_1 \in \Gamma$ i $\neg\psi_1 \in \Sigma$;
- com que $\Gamma \neq \Sigma$, existeix una fórmula ψ_2 tal que $\psi_2 \in \Gamma$ i $\neg\psi_2 \in \Sigma$;
- com que $\Sigma \not{R} \Gamma$, existeix una fórmula ψ_3 tal que $G\psi_3 \in \Sigma$ i $\neg\psi_3 \in \Gamma$.

Sigui φ la fórmula $G\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \neg\psi_3$, tenim que $\varphi \in \Gamma$ per les observacions anteriors. Afirmem que $(P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi) \notin \Sigma$. En efecte, suposem que $(P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi) \in \Sigma$ i arribem a contradicció:

- Si $P\varphi \in \Sigma$, aleshores $PG\psi_1 \in \Sigma$. Però, per les observacions anteriors, $\neg\psi_1 \in \Sigma$.
- Si $\varphi \in \Sigma$, aleshores $\psi_2 \in \Sigma$, que contradiu $\neg\psi_2 \in \Sigma$.
- Si $F\varphi \in \Sigma$, aleshores $F\neg\psi_3 \in \Sigma$. Però també tenim que $G\psi_3 \in \Sigma$.

Per tant, hem trobat una fórmula $\varphi \in \Gamma$ tal que $\neg(P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi) \in \Sigma$. D'altra banda, $\varphi \in \Gamma$ implica que $F\varphi \in \Delta$, i per tant que $PF\varphi \in \Sigma$. Però aleshores, per l'axioma de linealitat, $(P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi) \in \Sigma$, i hem arribat a una contradicció.

El problema és demostrar que R sigui un ordre lineal. No es pot fer perquè res assegura que R sigui irreflexiva o anti-simètrica. En la resta d'aquesta demostració veurem que podem transformar el marc canònic en un ordre estrictament lineal, mantenint sempre la veracitat de les fórmules.

Direm que dos conjunts Γ, Δ són comparables si $\Gamma = \Delta$, o $\Gamma R \Delta$, o $\Delta R \Gamma$. Donat un conjunt maximal consistent Σ, ens podem restringir a la part del marc canònic que és comparable amb Σ i demostrar el lema fonamental en aquest nou marc. Considerem, per tant, el marc (C, R), on $C = \{\Gamma \in S \mid \Gamma \text{ i } \Sigma \text{ són comparables}\}$ i R és la mateixa relació restringida a C. Aleshores:

- (C, R) és transitiu;
- com que la propietat de comparabilitat és transitiva, (C, R) és un ordre total: per tots $\Gamma, \Delta \in C$, $\Gamma R \Delta$, o $\Delta R \Gamma$, o $\Gamma = \Delta$;
- (C, R, g) hereta el lema fonamental del model (S, R, g): per a tot $\Gamma \in C$ i per a tota fórmula φ,

$$\varphi \in \Gamma \text{ si, i només si, } (C, R, g), \Gamma \vDash \varphi.$$

Sigui ara $C^i = \{\Gamma \in C \mid \Gamma \not{R} \Gamma\}$ el conjunt d'elements irreflexius, i sigui $C^r = C \setminus C^i = \{\Gamma \in C \mid \Gamma R \Gamma\}$ el conjunt d'elements reflexius, definim la relació $\sim$ sobre C^r com:

$$\Gamma \sim \Delta \text{ si, i només si, } \Gamma R \Delta \text{ i } \Delta R \Gamma.$$

Comprovem que és una relació d'equivalència:

- Reflexivitat: Sigui $\Gamma \in C^r$, $\Gamma R \Gamma$ i, per tant, $\Gamma \sim \Gamma$.
- Simetria: Siguin $\Gamma, \Delta \in C^r$ tals que $\Gamma \sim \Delta$. Aleshores $\Gamma R \Delta$ i $\Delta R \Gamma$, i per tant $\Delta \sim \Gamma$.
- Transitivitat: Siguin $\Gamma, \Delta, \Sigma \in C^r$ tals que $\Gamma \sim \Delta$ i $\Delta \sim \Sigma$. Aleshores $\Gamma R \Delta$, $\Delta R \Gamma, \Delta R \Sigma$ i $\Sigma R \Delta$. Per la transitivitat de R, $\Gamma R \Sigma$ i $\Sigma R \Gamma$, i per tant $\Gamma \sim \Sigma$.

Anomenarem les $\sim$-classes *clústers*.

Definim una funció $*_c$ de $\mathbb{R}$ a cada clúster c tal que, per a cada $\Delta \in c$ i per a cada $r \in \mathbb{R}$, hi ha s i t en $\mathbb{R}$ tals que

- $s < r < t$,
- $*_c(s) = \Delta = *_c(t)$.

Podem fer-ho perquè cada clúster conté, com a màxim, $2^{\aleph_0}$ conjunts maximals consistents. És així perquè hi ha $\aleph_0$ fórmules del llenguatge escollit i, per tant, $2^{\aleph_0}$ conjunts de fórmules.

Ampliarem aquesta definició a C^i, posant $*_{\{\Gamma\}}(0) = \Gamma$ per a tot $\Gamma \in C^i$. Definim aleshores el conjunt

$$C^\flat = \{(\{\Gamma\}, 0) \mid \Gamma \in C^i\} \cup \{(c, s) \mid c \text{ és un clúster i } s \in \mathbb{R}\}.$$

Ordenarem aquest nou conjunt amb la relació $\prec$: $(a, s) \prec (b, r)$ si, i només si

- $a \neq b$ i hi ha $\Gamma_a \in a$ i $\Gamma_b \in b$ tals que $\Gamma_a R \Gamma_b$, o
- $a = b$ i $s < r$, on $<$ és l'ordre usual en els reals.

Si podem comprovar que el marc $(C^\flat, \prec)$ és lineal, podrem prendre'l com a marc d'un model que ens permeti demostrar la completesa. Veiem que, efectivament, és lineal.

- Transitivitat: Siguin $(a, r), (b, s), (c, t) \in C^\flat$ tal que $(a, r) \prec (b, s)$ i $(b, s) \prec (c, t)$. Com $(a, r) \prec (b, s)$, o bé $a \neq b$ i existeixen $\Gamma_a \in a$ i $\Gamma_b \in b$ tals que $\Gamma_a R \Gamma_b$, o bé $a = b$ i $r < s$, i passa el mateix per a $(b, s) \prec (c, t)$. Veurem la transitivitat per casos.
  - Suposem que $a = b$ i $r < s$. Aleshores, si $b = c$ i $s < t$, $a = c$ i $r < t$ per la transitivitat de $<$ en els reals, i per tant $(a, r) \prec (c, t)$. Si, en canvi, $b \neq c$, per la definició de $\prec$ existeixen $\Gamma_b \in b$ i $\Gamma_c \in c$ tal que $\Gamma_b R \Gamma_c$. Ara bé, com $a = b$, $\Gamma_b \in a$. Aleshores tenim que $a \neq c$ i existeixen $\Gamma_b \in a$ i $\Gamma_c \in c$ tal que $\Gamma_a R \Gamma_c$, i per tant $(a, r) \prec (c, t)$.
  - Suposem que $a \neq b$ i que existeixen $\Gamma_a \in a$ i $\Gamma_b \in b$ tal que $\Gamma_a R \Gamma_b$. Si $b = c$ i $s < t$, $\Gamma_b \in c$ i $a \neq c$, i, per tant, $(a, r) \prec (c, t)$. Si $b \neq c$, existeixen $\Gamma'_b \in b$ i $\Gamma_c \in c$ tal que $\Gamma'_b R \Gamma_c$ i se'ns presenten diferents casos.
    Suposem que $(b, s) = (\{\Gamma\}, 0)$, on $\Gamma \in C^i$. Observem que, aleshores, qualsevol $\Gamma_b \in b$ ha de ser per força $\Gamma_b = \Gamma$. Si $a \neq c$, $\Gamma_a R \Gamma R \Gamma_c$, i per la transitivitat de R sobre C, $\Gamma_a R \Gamma_c$ i $(a, r) \prec (c, t)$. Comprovem que el cas $a = c$ és impossible. Si fos $a = c = \{\Gamma'\}$, amb $\Gamma' \in C^i$, aleshores $\Gamma_a = \Gamma_c = \Gamma'$, i tindríem $\Gamma' R \Gamma R \Gamma'$. Però $\Gamma' \in C^i$ i hem arribat a una contradicció. Si, en canvi, a és un clúster, tenim que per una banda $\Gamma_a R \Gamma R \Gamma_c$ i per altra $\Gamma_c R \Gamma_a$ per ser del mateix clúster.

Aleshores

$$\Gamma R \Gamma_c R \Gamma_a R \Gamma,$$

però $\Gamma \in C^i$, i tenim una contradicció.

Suposem ara que b és un clúster. Observem que aleshores $\Gamma_b R \Gamma'_b$, i per tant $\Gamma_a R \Gamma_b R \Gamma'_b R \Gamma_c$. Si $a \neq c$, $(a,r) \prec (c,t)$. Comprovem que és impossible que $a = c$. Si fos $a = c = \{\Gamma\}$ amb $\Gamma \in C^i$, tenim una contradicció directa per $\Gamma = \Gamma_a R \Gamma_b R \Gamma'_b R \Gamma_c = \Gamma$. Si són clústers, $\Gamma_a, \Gamma_c \in a = c$, i per tant $\Gamma_a R \Gamma_c$ i $\Gamma_c R \Gamma_a$. La contradicció ve de $\Gamma_a R \Gamma_b R \Gamma'_b R \Gamma_c R \Gamma_a$, perquè $\Gamma_a R \Gamma_b R \Gamma_a$ contradiu la suposició $a \neq b$.

- Ordre total: Conseqüència directa del fet que R definida sobre C és un ordre total i $<$ definida sobre els reals també ho és.

- Irreflexivitat: Directe de la irreflexivitat de $<$ en els reals.

- Anti-simetria: Siguin $(a,r),(b,s) \in C^\flat$. Suposem que $(a,r) \prec (b,s)$ i $(b,s) \prec (a,r)$ i arribem a contradicció. Com no podem tenir $r < s$ i $s < r$, sabem que $a \neq b$. Aleshores existeixen $\Gamma_a, \Delta_a \in a$ i $\Gamma_b, \Delta_b \in b$ tal que $\Gamma_a R \Gamma_b$ i $\Delta_b R \Delta_a$. A més, $\Gamma_b R \Delta_b$ i $\Delta_a R \Gamma_a$ per estar al mateix clúster. Amb tot això, per la transitivitat de R, tenim

$$\Gamma_b R \Delta_b R \Delta_a R \Gamma_a.$$

Per tant, $\Gamma_a R \Gamma_b$ i $\Gamma_b R \Gamma_a$, i $a = b$, que és una contradicció.

Definim en aquest marc lineal la interpretació h com:

$$h((a,s),q) = 1 \text{ si, i només si, } q \in *_a(s).$$

L'últim pas serà comprovar el lema de veritat en aquest model. Veiem que, per a tota fórmula φ,

$$(C^\flat, \prec, h),(a,s) \models \varphi \text{ si, i només si, } \varphi \in *_a(s).$$

Per inducció sobre φ:

- Sigui q és una variable proposicional. Aleshores $(C^\flat, \prec, h),(a,s) \models q$ si, i només si, $h((a,s),q) = 1$, i tenim el resultat directament de la definició de h.

- $\neg\varphi$: suposem que es compleix el lema per a φ, i veiem que també ho fa per a $\neg\varphi$.

$$\begin{array}{rcll} (C^\flat, \prec, h),(a,s) \models \neg\varphi & \Leftrightarrow & (C^\flat, \prec, h),(a,s) \not\models \varphi & \\ & \Leftrightarrow & \varphi \notin *_a(s) & \text{(H.I.)} \\ & \Leftrightarrow & \neg\varphi \in *_a(s) & (*_a(s) \text{ MCS}) \end{array}$$

- $\varphi \vee \psi$: suposem que es compleix el lema per a φ i ψ. Aleshores:

$$\begin{array}{rcll} (C^\flat, \prec, h),(a,s) \models \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & (C^\flat, \prec, h),(a,s) \models \varphi \text{ o } (C^\flat, \prec, h),(a,s) \models \psi & \\ & \Leftrightarrow & \varphi \in *_a(s) \text{ o } \psi \in *_a(s) & \text{(H.I.)} \\ & \Leftrightarrow & \varphi \vee \psi \in *_a(s) & (*_a(s) \text{ MCS}) \end{array}$$

- $F\varphi$: suposem que es compleix el lema per a φ.

  $\Rightarrow$ Suposem que $(C^\flat, \prec, h), (a, s) \vDash F\varphi$. Aleshores existeix (b, r) tal que $(a, s) \prec (b, r)$ i $(C^\flat, \prec, h), (b, r) \vDash \varphi$. Per hipòtesi d'inducció, $\varphi \in *_b(r)$. També, com que $(a, s) \prec (b, r)$, o bé $a = b$ i $s < r$, o bé $a \neq b$ i existeixen $\Gamma_a \in a$ i $\Gamma_b \in b$ tal que $\Gamma_a R \Gamma_b$. En el primer cas, $a = b$ implica $*_a(s) R *_b(r)$. Ara, com $\varphi \in *_b(r)$, pel lema fonamental per a (C, R, g), $(C, R, g), *_b(r) \vDash \varphi$, i com $*_a(s) R *_b(r)$, $(C, R, g), *_a(s) \vDash F\varphi$. Aplicant un altre cop el lema fonamental per a (C, R, g), $F\varphi \in *_a(s)$. Ara, si $a \neq b$, observem que $*_a(s) R \Gamma_a$ i $\Gamma_b R *_b(r)$ per ser del mateix clúster, i com que $\Gamma_a R \Gamma_b$, per la transitivitat de R tenim que $*_a(s) R *_b(r)$ un altre cop. Repetim el procés i arribem al mateix resultat.

  $\Leftarrow$ Suposem que $F\varphi \in *_a(s)$. Aleshores existeix $\Gamma \in C$ tal que $*_a(s) R \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$. Si Γ és un element de a, existeix $s > r$ tal que $*_a(s) = \Gamma$. Si Γ no és un element de a, aleshores $\Gamma = *_b(s)$ per algun altre clúster posterior b. Tant en un cas com en l'altre, $(a, r) \prec (b, s)$, i per hipòtesi d'inducció $(C^\flat, \prec, h), (b, s) \vDash \varphi$, de manera que $(C^\flat, \prec, h), (a, r) \vDash F\varphi$, com volíem veure.

Per tant hem trobat un model lineal que ens permet demostrar que, per a tota fórmula no deduïble, hi ha un model lineal que no la satisfà.

$\square$

Podem considerar més lògiques afegint propietats a la lògica *Lin*. Enumerem a continuació els axiomes que utilitzarem, fent servir en aquest cas notació de lògica modal per alleugerir la lectura ($\Diamond\varphi \equiv P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$, $\Box\varphi \equiv H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$):

(A1)	$H\bot \vee PH\bot$	(tenir un instant inicial)
(A2)	$P\top$	(no tenir instant inicial)
(A4)	$F\top$	(no tenir instant final)
(A6)	$Fq \to FFq$	(densitat)
(A7)	$(Fq \wedge \Diamond\neg q \wedge \Box(q \to Hq))$ $\to \Diamond((q \wedge G\neg q) \vee (\neg q \wedge Hq))$	(continuïtat)
(A8)	$G(Gq \to q) \to (FGq \to Gq) \wedge$ $H(Hq \to q) \to (PHq \to Hq)$	(intervals finits)

Amb aquests axiomes podem definir les següents extensions de *Lin*:

Lin.**N:** *Lin* + A1 + A4 + A8

Lin.**Z:** *Lin* + A2 + A4 + A8

Lin.**Q:** *Lin* + A2 + A4 + A6

Lin.**R:** *Lin* + A2 + A4 + A6 + A7

Teorema 2.14. *Les lògiques Lin.N, Lin.Z, Lin.Q i Lin.R són correctes i completes respecte la classe de marcs temporals* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{R}$, *respectivament.*

La demostració de completesa per aquestes lògiques es similar a les dues demostracions anteriors.

2.5 Decidibilitat

Hem vist que les axiomatitzacions funcionen respecte la completesa. També podrem assegurar-ho per a la decidibilitat.

Teorema 2.15. *Les lògiques temporals de Prior de les classes de tots els marcs temporals, i de tots els marcs temporals lineals, són decidibles.*

En el que queda de secció demostrarem el teorema per a K_t. Les demostracions per la resta de lògiques vistes són anàlogues. Aquesta demostració de decidibilitat es troba a *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects* [1].
Com que K_t és finitament axiomatitzable, n'hi haurà prou amb comprovar que té la propietat dels models finits.

Lema 2.16. *Per a tota fórmula φ, si $K_t \nvdash \varphi$, aleshores existeix un model $\mathcal{M} = (T, <, h)$, amb T finit i $<$ transitiva, tal que $\mathcal{M} \nvDash \varphi$.*

Demostració. Per veure-ho utilitzarem el mètode de *filtració*. Si suposem que $K_t \nvdash \varphi$, sabem per la completesa del càlcul que existeix $(S, <, h)$ irreflexiu i transitiu i $t \in S$ tal que $(S, <, h), t \nvDash \varphi$. Com que φ té un nombre finit de subfórmules i la validesa de φ solament dependrà de la validesa de cada subfórmula ψ, només ens cal una quantitat finita d'informació de S. El nostre objectiu serà obtenir un T finit tal que $(T, <, h), t \nvDash \varphi$ per algun $t \in T$.

Sigui Δ la clausura del conjunt de subfórmules de φ sota les operacions booleanes. Observem que $\varphi \in \Delta$.

Definició 2.17. *Siguin $x, y \in S$. Definim la relació $\sim$ com segueix: $x \sim y$ si, i només si, per a tot $\psi \in \Delta$, $(S, <, h), x \vDash \psi \Leftrightarrow (S, <, h), y \vDash \psi$. $\sim$ és una relació d'equivalència que divideix S en un conjunt finit de classes d'equivalència.*
Sigui T una d'aquestes $\sim$-classes. Tenim que $|T| \leq 2^{|\Delta|}$. Definim $<_T$ de la següent manera, on x^* denota la $\sim$-classe d'equivalència de x.

1. *$x^* <'_T y^*$ si, i només si, per alguna $x' \in x^*$ i alguna $y' \in y^*$ tenim $x' < y'$.*

2. *Definim $<_T$ com la clausura transitiva de $<'_T$.*

3. *Definim h^* com: $h^*(x^*, q) = 1$ si, i només si, $h(x, q) = 1$, on $q \in \Delta$.*

Lema 2.18. *Per a tot $G\psi \in \Delta$ o $H\psi \in \Delta$ tenim:*

1. *Si $(S, <, h), x \vDash G\psi$ i $x^* <_T y^*$, aleshores $(S, <, h), y \vDash \psi$.*

2. *Si $(S, <, h), y \vDash H\psi$ i $x^* <_T y^*$, aleshores $(S, <, h), x \vDash \psi$.*

Demostració. Veurem un resultat preliminar:

$$\text{Si } (S, <, h), x \vDash G\psi \text{ i } x^* <'_T z^*, \text{ aleshores } (S, <, h), z \vDash \psi \wedge G\psi. \tag{2.2}$$

Suposem que $(S, <, h), x \vDash G\psi$. Com que $x^* <'_T y^*$, existeixen $x' \in x^*$ i $z' \in z^*$ tal que $x' < z'$. Ara, com que $x' \in x^*$ i $G\psi \in \Delta$, resulta que $(S, <, h), x' \vDash G\psi$, i per l'axioma de transitivitat, $(S,<,h),x' \models GG\psi$. Per tant $(S,<,h),z' \models \psi \wedge G\psi$. Però $\psi, G\psi \in \Delta$; aleshores, $(S,<,h),z \models \psi \wedge G\psi$, i hem provat el resultat.

Per provar 1., suposem $(S,<,h),x \models G\psi$ i $x^* <_T y^*$, i observem que per la naturalesa de $<_T$, existeixen $x_1^*,...,x_n^*$ tals que $x^* = x_1^* <'_T x_2^* <'_T ... <'_T x_{n-1}^* <'_T x_n^* = y^*$. Demostrarem 1. per inducció sobre la "distància" entre x^* i y^*. Si la distància és zero, és a dir, si tenim $x^* = x_1^* <'_T x_2^* = y^*$, aplicant 2.2 obtenim directament $(S,<,h),y \models \psi$. Prenem com a hipòtesi d'inducció que es compleix 1. per a x^* i y^* a distància n. Ara, siguin x^* i y^* a distància $n+1$, tenim que existeixen $x_1^*,...,x_n^*$ tals que $x^* = x_1^* <'_T x_2^* <'_T ... <'_T x_n^* <'_T x_{n+1}^* = y^*$. Com que $x_1^* <'_T x_2^*$, aplicant 2.2 resulta que $(S,<,h),x_1 \models G\psi$. Ara bé, com que $<_T$ és la clausura transitiva de $<'_T$, $x_2^* <_T x_{n+1}^* = y^*$, i podem aplicar la hipòtesi d'inducció, obtenint $(S,<,h),y \models \psi$ com volíem veure. □

Lema 2.19. *Per a tota fórmula $\psi \in \Delta$ i tota $x^* \in T$, $(T,<_T,h^*),x^* \models \psi$ si, i només si, $(S,<,h),x \models \psi$.*

Demostració. Ho demostrem per inducció.

- Si q és una variable proposicional, s'obté directament de la definició de h^*.
- $\neg\psi$: sigui ψ una fórmula que compleix la propietat del lema. Volem demostrar que $\neg\psi$ també la compleix:

$$\begin{array}{rcll} (S,<,h),x \models \neg\psi & \Leftrightarrow & (S,<,h),x \not\models \psi & \\ & \Leftrightarrow & (T,<_T,h^*),x^* \not\models \psi & \text{(per hipòtesi d'inducció)} \\ & \Leftrightarrow & (T,<_T,h^*),x^* \models \neg\psi & \end{array}$$

- $\psi \vee \chi$: siguin ψ i χ fórmules que compleixen la propietat del lema. Demostrarem que $\psi \vee \chi$ també ho fa:

$$\begin{array}{rcll} (S,<,h),x \models \psi\vee\chi & \Leftrightarrow & (S,<,h),x \models \psi \text{ o } (S,<,h),x \models \chi & \\ & \Leftrightarrow & (T,<_T,h^*),x^* \models \psi \text{ o } (T,<_T,h^*),x^* \models \chi & \text{(H.I.)} \\ & \Leftrightarrow & (T,<_T,h^*),x^* \models \psi\vee\chi & \end{array}$$

- $F\psi$: suposem que ψ compleix el lema. Aleshores:

$$\begin{array}{rcll} (S,<,h),x \models F\psi & \Leftrightarrow & \text{hi ha } y > x \text{ tal que } (S,<,h),y \models \psi) & \\ & \Leftrightarrow & \text{hi ha } y^* > x^* \text{ tal que } (T,<_T,h),y^* \models \psi & \text{(H.I. i 2.18)} \\ & \Leftrightarrow & (T,<_T,h^*),x^* \models F\psi & \end{array}$$

La demostració per al connector P és anàloga i completa la inducció. □

Amb això podem acabar la demostració del Lema 2.16. Sigui φ una fórmula tal que $K_t \not\models \varphi$, per la completesa de la lògica, existeix $(S,<,h)$ i $t \in T$ tal que $(S,<,h),t \not\models \varphi$. Però hem vist que podem construir un model finit $\mathcal{M} = (T,<_T,h^*)$ on, pel lema anterior, tindrem que $\mathcal{M},t^* \not\models \varphi$, com volíem demostrar. □

Com que la lògica K_t és finitament axiomatitzable i hem demostrat que té la propietat dels models finits, podem concloure que és decidible.

3 La lògica temporal de primer ordre

Hem vist que la lògica temporal "es comporta bé" amb la lògica proposicional: efectivament, és completa i decidible. Què passarà si busquem una lògica temporal més potent?

La definició d'una lògica temporal de predicats no és única ni trivial. La transició de lògica temporal proposicional a lògica temporal de primer ordre es basa en la inclusió de variables, constants, predicats, funcions i els quantificadors $\forall$ i $\exists$. Però, a diferència de com fem amb la lògica de primer ordre clàssica, ara hem de treballar amb instants que tenen, possiblement, diferents dominis d'elements. Això provoca algunes preguntes sobre la definició de la lògica. Hauríem de restringir la lògica a dominis constants en cada instant? Quin rang haurien de tenir les variables? I els quantificadors? Ha de dependre una assignació de variables de l'instant en què s'avalua una fórmula?

En la següent secció donarem una possible definició d'una lògica temporal de primer ordre, la seva semàntica i una axiomatització. Comprovarem que, per aconseguir aquesta capacitat d'expressió, hem de sacrificar la completesa i decidibilitat de la lògica.

3.1 Llenguatge de la lògica temporal de primer ordre

El llenguatge que utilitzarem per la lògica temporal de primer ordre és una extensió del llenguatge bàsic d'una lògica de primer ordre amb igualtat, afegint-hi els nous connectors temporals. Així, el llenguatge estarà format per

- Símbols de predicat n-aris $R, Q, ...$
- Símbols de funcions n-àries $f, g, ...$
- Connectors clàssics
- Quantificadors $\forall$ i $\exists$
- Connectors temporals F, G, P i H
- Conjunt de constants $c_1, c_2, ...$
- Conjunt de variables $x, y, z, ...$

Definirem recursivament el conjunt de termes i el conjunt de fórmules com:

$$\tau := x \in VAR \mid c \in C \mid f(\tau_1, ..., \tau_n)$$
$$\varphi := R(\tau_1, ..., \tau_2) \mid \tau_1 = \tau_2 \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid \forall x\varphi \mid P\varphi \mid F\varphi$$

on f és una funció n-ària i R és un predicat n-ari. Expressarem els connectors $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, H i G de la manera usual, com hem fet amb la lògica proposicional temporal de Prior. Ara, a més, definirem $\exists$ com $\exists x\varphi := \neg\forall x\neg\varphi$.

Definició 3.1. *Una estructura temporal en lògica temporal de primer ordre és una quàdrupla* $\mathcal{M} = (T, \prec, D_t, \mathcal{I}_t)$*, on:*

- $\mathcal{T} = (T, \prec)$ *és un marc temporal;*
- D_t *és el domini local en l'instant* t*, és a dir, els elements amb què treballem a l'instant* t*;*

- *Sigui* $\mathcal{U} = \bigcup D_t$. $\mathcal{I}_t$ *és una funció interpretació en l'instant* t *que assigna un objecte* $\mathcal{I}_t(c) \in \mathcal{U}$ *a cada constant* c*, una relació* n*-ària* $\mathcal{I}_t(R) \subseteq \mathcal{U}^n$ *a cada predicat* n*-ari* R *i una funció* n*-ària* $I_t(f)$ *a cada símbol* n*-ari de funció* f*, tal que, per a* $a_1, ..., a_n \in D_t$*,* $I_t(f)(a_1, ..., a_n) \in D_t$*.*

Definició 3.2. *Anomenem la tripla* $\mathcal{F} = (T, \prec, D_t)$ *marc temporal augmentat del model* $\mathcal{M}$*.*

Depenent de com entenguem el temps com a concepte, hi ha quatre formes naturals de restringir la definició de la relació $\prec$ per distingir diferents tipus de marc temporal augmentat:

1. dominis variables: cap restricció;
2. dominis creixents: per a tot $t, t' \in T$, si $t \prec t'$, aleshores $D_t \subseteq D_{t'}$;
3. dominis decreixents: per a tot $t, t' \in T$, si $t \prec t'$, aleshores $D_{t'} \subseteq D_t$;
4. dominis localment constants: per a tot $t, t' \in T$, si $t \prec t'$, aleshores $D_t = D_{t'}$.

Dit d'una altra manera, el cas 1. correspon a un marc en què un objecte pot començar a existir en un determinat punt i deixar d'existir en un altre, i roman a la història temporal del món només quan està existint. El cas 2. formalitza la noció de temps en què un objecte existeix durant un període de temps, però continua a la història temporal fins i tot després de deixar d'existir, fent que els dominis es vagin expandint mentre apareixen nous objectes i es queden encara gravats els que han deixat d'existir. En canvi, el cas 3. es refereix a un concepte de temps on considerem que tots els objectes que existiran en algun moment estan representats inicialment a la història temporal del món, i deixen d'estar-ho quan deixen d'existir. Tenim aleshores que a mesura que passa el temps, els dominis decreixen quan van sortint els objectes que deixen d'existir. Finalment, en el cas 4. estem considerant la noció eternalista de temps en la que tots els objectes que han existit, existeixen i existiran estan sempre a la història temporal del món.

Observem que un marc temporal augmentat $\mathcal{F}$ té dominis localment constants si, i només si, té a la vegada dominis en expansió i en reducció; a més, com que el domini global ha de ser la unió de tots els dominis locals, si $\prec$ connecta tots els instants, tenir dominis localment constants implica tenir el mateix domini per a cada instant (el domini global).

D'ara en endavant, ens referirem als marcs amb dominis localment constants com *quantificació eternalista*, i als marcs amb dominis no constants com *quantificació presentista*.

3.2 Semàntica de la lògica temporal de primer ordre

La noció de veritat a la lògica temporal de primer ordre, a diferència de la que hem vist amb la lògica temporal de Prior, no només haurà de ser relativa al model i a l'instant específic, sinó també a l'assignació de les variables.

Definició 3.3. *Sigui $\mathcal{M} = (T, \prec, D_t, \mathcal{I}_t)$ una estructura temporal de primer ordre. Definim una assignació de variables en $\mathcal{M}$ com una funció $v : VAR \to \mathcal{U}$. Cada assignació v tindrà una única extensió anomenada valoració de termes, que definim com $v : T \times TERM \to \mathcal{U}$ tal que*

> $v_t(x) := v(x)$, *per a tota variable x;*
>
> $v_t(c) := \mathcal{I}_t(c)$, *per a tota constant c;*
>
> $v_t(f(\tau_1, ..., \tau_n)) = \mathcal{I}_t(f)(v_t(\tau_1), ..., v_t(\tau_n))$, *per a tota funció n-ària f i per a tots els termes $\tau_1, ..., \tau_n$.*

Observem que l'assignació de les variables és global, mentre que la valoració de les constants és local (depèn de l'instant en què ens trobem).

Ara que hem aclarit com funcionaran les variables, podem definir el concepte de veritat de forma similar a la definició que hem donat per a la lògica temporal proposicional. Sigui φ una fórmula arbitrària, definirem la seva veritat en un instant específic t en un model temporal de primer ordre $\mathcal{M}$ respecte d'una assignació de variables v (que expressarem com $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi$) de forma recursiva com segueix:

> $\mathcal{M}, t \vDash_v R(\tau_1, ..., \tau_n)$ si, i només si, $(v_t(\tau_1), ..., v_t(\tau_n)) \in \mathcal{I}_t(R)$, per a qualsevol predicat n-ari R i per a qualssevol termes $\tau_1, ..., \tau_n \in TERM$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v \tau_1 = \tau_2$ si, i només si, $v_t(\tau_1) = v_t(\tau_2)$ per qualssevol termes $\tau_1, \tau_2 \in TERM$;
>
> $\mathcal{M}, t \nvDash_v \bot$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v \neg\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \nvDash_v \varphi$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi \vee \psi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi$ o $\mathcal{M}, t \vDash_v \psi$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v P\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t' \vDash_v \varphi$ per algun $t' \in T$ tal que $t' \prec t$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v F\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, t' \vDash_v \varphi$ per algun $t' \in T$ tal que $t \prec t'$;
>
> $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x\varphi$ si, i només si...
>
> - quantificació presentista: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ per a tot $a \in D_t$,
> - quantificació eternalista: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ per a tot $a \in \mathcal{U}$,
>
> on $v[a/x]$ és una assignació de variables que només difereix de v en $v(x)$ tal que $v[a/x](x) = a$.

A partir de la definició de $\exists$ i de $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x\varphi$, podem deduir que

> $\mathcal{M}, t \vDash_v \exists x\varphi$ si, i només si...
>
> - quantificació presentista: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ per algun $a \in D_t$,
> - quantificació eternalista: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ per algun $a \in \mathcal{U}$.

Tant en la semàntica presentista com en l'eternalista, direm que una fórmula φ és vàlida en un model $\mathcal{M}$ si, i només si, és certa en aquest model a cada instant i respecte a totes les possibles assignacions de variables. Direm que és vàlida en un marc temporal augmentat si, i només si, és vàlida en tots els models basats en aquest marc, i és vàlida si, i només si, és vàlida en tots els models.

Exemple 3.4. Considerem el llenguatge $L = \{R\}$ on R és un símbol de predicat monàdic i l'estructura $\mathcal{M}_1 = (T_1, \prec_1, D_t, \mathcal{I}_t)$ on

- $T = \{t_1, t_2\}$;
- $\prec_1 = \{(t_1, t_2)\}$;
- $D_{t_1} = \{0, 1, 2\}$, $D_{t_2} = \{0, 1, 2\}$;
- $\mathcal{I}_{t_1}(R) = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{I}_{t_2}(R) = \{0, 1, 2\}$.

Sigui φ la fórmula $\forall x GRx \to G\forall x Rx$ i sigui v una assignació qualsevol, observem que $\mathcal{M}_1, t_1 \vDash_v \varphi$ perquè tot element del domini D_{t_2} és un element de la interpretació del símbol R en l'estructura $\mathcal{M}_1$; per tant el conseqüent de la implicació és cert i φ també ho és. També és fàcil veure que, com que no existeix cap instant futur a t_2, $\mathcal{M}_1, t_2 \vDash_v \varphi$, també per ser cert el conseqüent. Per tant, φ és vàlida en el model $\mathcal{M}_1$.

Considerem ara l'estructura $\mathcal{M}_2 = (T_2, \prec_2, D_t, \mathcal{I}_t)$ on

- $T = \{t_1, t_2\}$;
- $\prec_2 = \{(t_1, t_2)\}$;
- $D_{t_1} = \{0, 1\}$, $D_{t_2} = \{0, 1, 2\}$;
- $\mathcal{I}_{t_1}(R) = \{0, 1\}$, $\mathcal{I}_{t_2}(R) = \{0, 1\}$.

En aquest cas tenim que, per a una assignació qualsevol v, $\mathcal{M}_2, t_1 \vDash_v \forall x GRx$ perquè tot element de D_{t_1} és un element de $\mathcal{I}_{t_2}(R)$. Però $\mathcal{M}_2, t_1 \nvDash_v G\forall x Rx$, perquè 2 és un element de D_{t_2} que no és element de $\mathcal{I}_{t_2}(R)$. Per tant, φ no és certa en el model $\mathcal{M}_2$.

Hem vist un exemple de fórmula que és certa en una quantificació eternalista (estructura $\mathcal{M}_1$) però no ho és en una quantificació presentista (estructura $\mathcal{M}_2$). Veiem-ho amb més detall.

3.3 Quantificació eternalista

La naturalesa constant dels dominis en la quantificació eternalista farà que algunes fórmules siguin vàlides que no ho seran considerant una quantificació presentista. Denotarem la validesa en dominis constants com $\vDash_{CD}$. Veiem alguns exemples importants de fórmules vàlides i fórmules no vàlides en la semàntica de dominis constants:

- Totes les fórmules vàlides en la lògica temporal de primer ordre són, en particular, vàlides en dominis constants.
- La *fórmula de Barcan*, que considerem tant en passat (BF_H) com en futur (BF_G), és CD-vàlida:
  - $\vDash_{CD} \forall x G\varphi(x) \to G\forall x\varphi(x)$ o, equivalentment,
    $\vDash_{CD} F\exists x\varphi(x) \to \exists F\varphi(x)$;

  - $\models_{CD} \forall x H\varphi(x) \to H\forall x\varphi(x)$ o, equivalentment, $\models_{CD} P\exists x\varphi(x) \to \exists P\varphi(x)$;

- També és CD-vàlida la fórmula de Barcan inversa, en passat (CBF_H) i en futur (CBF_G):

  - $\models_{CD} G\forall x\varphi(x) \to \forall x G\varphi(x)$ o, equivalentment, $\models_{CD} F\exists F\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$;
  - $\models_{CD} H\forall x\varphi(x) \to \forall x H\varphi(x)$ o, equivalentment, $\models_{CD} P\exists P\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$;

- Algunes fórmules no vàlides: $\not\models_{CD} \forall x F\varphi(x) \to F\forall x\varphi(x)$ i $\not\models G\exists x\varphi(x) \to \exists G\varphi(x)$.

3.4 Quantificació presentista

Quan treballem amb semàntica de dominis no constants, les variables no lliures abasteixen el domini global, mentre que els quantificadors quantifiquen sobre el domini local. Això provoca que algunes de les fórmules que són vàlides per dominis constants no ho siguin en la quantificació presentista. Per exemple, $\not\models_{VD} \forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ (on denotem amb $\models_{VD}$ la validesa en semàntica de dominis no constants); és a dir, no tenim Instanciació Universal. Tampoc podem assegurar la validesa de la fórmula de Barcan, tant en passat com en futur.

En realitat, la validesa de les fórmules de Barcan correspon a diferents condicions sobre el tipus de variació dels dominis. Per a qualsevol marc temporal augmentat $\mathcal{F}$, tenim:

- $\mathcal{F}$ té dominis creixents si, i només si, $\mathcal{F} \models_{VD} BF_H$ si, i només si, $\mathcal{F} \models_{VD} CBF_G$;

- $\mathcal{F}$ té dominis decreixents si, i només si, $\mathcal{F} \models_{VD} BF_H$ si, i només si, $\mathcal{F} \models_{VD} CBF_H$.

Deduïm aleshores que $\mathcal{F}$ té dominis localment constants si, i només si, alguna de les següents fórmules és VD-vàlida en $\mathcal{F}$: $BF_G \wedge BF_H, CBF_G \wedge CBF_H, BF_G \wedge CBF_G$, o $BF_H \wedge CBF_H$.

3.5 La lògica qFP

Hem vist que la lògica temporal de Prior és completa en la classe de tots els marcs temporals, en la classe dels marcs lineals, i en moltes altres. Amb la lògica temporal de primer ordre, però, caldrà afegir restriccions per poder obtenir resultats similars.

Considerarem una lògica temporal de primer ordre amb quantificació eternalista (dominis constants) i termes i assignacions de variables rígids; és a dir, la interpretació dels termes, així com l'assignació de cada variable, seran constants en els dominis.

En aquesta lògica, definirem una estructura temporal com una quàdrupla $(T, <, \mathcal{D}, h)$ on

- $(T, <)$ és un marc temporal;

- $\mathcal{D}$ és una estructura de primer ordre amb només els símbols de funció del llenguatge: té un domini (domini d'objectes) i interpretacions pels símbols de funció com a funcions de l'aritat apropiada;

- h és una funció tal que, per a cada símbol de predicat n-ari R, i per a cada $t \in T$, $h(R,t) \subseteq \mathcal{D}^n$.

Utilitzarem les assignacions v de termes de la manera usual, però tenint en compte que ens hem restringit a termes rígids, i que per tant no cal fer distinció entre instants.

Els axiomes d'aquesta lògica, que anomenarem qFP, són els següents:

1. Qualsevol tautologia de la lògica proposicional clàssica amb fórmules de la nostra lògica en el lloc de les variables proposicionals
2. $\forall x\varphi \to \varphi[x/\tau]$
3. $\tau = \tau$
4. $x = \tau \to (\varphi \to \varphi[x/\tau])$
5. $G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi)$ i el seu dual
6. $\varphi \to GP\varphi$ i el seu dual
7. $\tau_1 = \tau_2 \to G(\tau_1 = \tau_2)$
8. $\forall xG\varphi \to G\forall x\varphi$ i el seu dual
9. $G\varphi \to GG\varphi$ i el seu dual

amb les regles d'inferència:

1. Modus Ponens: si $\vdash \varphi \to \psi$ i $\vdash \varphi$, aleshores $\vdash \psi$
2. G-necessitat: si $\vdash \varphi$, aleshores $\vdash G\varphi$
3. H-necessitat: si $\vdash \varphi$, aleshores $\vdash H\varphi$
4. Generalització Universal: si $\vdash \varphi(x)$, aleshores $\vdash \forall x\varphi$

Teorema 3.5. *La lògica qFP és correcta en la classe de tots els marcs temporals.*

Demostració. Cal comprovar que tots els axiomes són vàlids:

- $\forall x\varphi \to \varphi[x/\tau]$: sigui $\mathcal{M}$ un model, t un instant i v una assignació, volem veure que $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x\varphi \to \varphi[x/\tau]$. Observem que $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x\varphi$ si, i només si, per a tot $a \in \mathcal{D}$, $\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$. En concret, per a $a = v(\tau)$ tenim que $\mathcal{M}, t \vDash_{v[v(\tau)/x]} \varphi$, i per tant $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi[x/\tau]$.

- $\tau = \tau$: sigui $\mathcal{M}$ un model, t un instant i v una assignació, $\mathcal{M}, t \vDash_v \tau = \tau$ si, i només si, $v(\tau) = v(\tau)$, i tenim la validesa de l'axioma de forma trivial.

- $x = \tau \to (\varphi \to \varphi[x/\tau])$: sigui $\mathcal{M}$ un model, t un instant i v una assignació, volem veure que $\mathcal{M}, t \vDash_v x = \tau \to (\varphi \to \varphi[x/\tau])$. Suposem que $\mathcal{M}, t \vDash_v x = \tau$. Sabem que $\mathcal{M}, t \vDash_v x = \tau$ si, i només si, $v(x) = v(\tau)$. Suposem que també $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi$ i veiem que aleshores $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi[x/\tau]$. $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi[x/\tau]$ si, i només si, $\mathcal{M}, t \vDash_{v[v(\tau)/x]} \varphi$. Ara bé, com que $v(\tau) = v(x)$, resulta que $v[v(\tau)/x] = v$, i com que hem suposat $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi$, també $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi[x/\tau]$, com volíem veure.

- $G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi)$, $\varphi \to GP\varphi$ i $G\varphi \to GG\varphi$ no tenen quantificadors ni igualtat, i hem demostrat la seva validesa en lògica proposicional temporal.

- $\tau_1 = \tau_2 \to G(\tau_1 = \tau_2)$: sigui $\mathcal{M}$ un model, t un instant i v una assignació. Suposem que $\mathcal{M}, t \vDash_v \tau_1 = \tau_2$ i veiem que, aleshores, $\mathcal{M}, t \vDash_v G(\tau_1 = \tau_2)$. Aquesta implicació és conseqüència directa de la restricció a termes rígids. Com que hem suposat que $\mathcal{M}, t \vDash_v (\tau_1 = \tau_2)$, tenim que $v(\tau_1) = v(\tau_2)$ per a tots els instants. Com que $\mathcal{M}, t \vDash_v G(\tau_1 = \tau_2)$ si, i només si, per a tot instant $t' > t$, $v(\tau_1) = v(\tau_2)$, hem demostrat la validesa de l'axioma.

- $\forall x G\varphi \to G\forall x\varphi$: sigui $\mathcal{M}$ un model, t un instant i v una assignació. La implicació és vàlida perquè ens hem restringit a una quantificació eternalista. Suposem que $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x G\varphi$. Aleshores, per a tot element $a \in \mathcal{D}$, $\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} G\varphi$; és a dir, per a tot $a \in \mathcal{D}$, per a tot instant $t' > t$, $\mathcal{M}, t' \vDash_{v[a/x]} \varphi$. Per tant, també tenim que $\mathcal{M}, t \vDash_v G\forall x\varphi$.

□

Teorema 3.6. *La lògica qFP és completa en la classe de tots els marcs temporals.*

Demostració. Aquesta demostració es troba a [1]. Caldran algunes definicions prèvies. Suposem donat un llenguatge formal amb una signatura fixada.

Definició 3.7. *Un conjunt Γ de sentències és ω-complet si, i només si, si φ és una fórmula amb com a molt una variable lliure x i $\Gamma \vdash \varphi[x/\tau]$ per a tots els termes tancats τ, aleshores $\Gamma \vdash \forall x\varphi$. Γ és saturat si, i només si, és maximal consistent i ω-complet.*

De manera semblant a la demostració de completesa de K_t de la lògica de Prior, començarem demostrant que tot conjunt consistent Σ_0 es pot estendre a un conjunt saturat Γ_0. Per fer-ho, expandirem el llenguatge amb el conjunt numerable $\{c_0, c_1, ...\}$ de constants no incloses en Σ_0, i considerarem les noves sentències $\varphi_0, \varphi_1, ...$ del nou llenguatge expandit. Definirem de forma recursiva conjunts consistents Σ_i a partir del conjunt inicial Σ_0 de la següent manera:

- si $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ és inconsistent, $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i$;

- si $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ és consistent i φ_i no és de la forma $\neg\forall x\psi$, $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$;

- si $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ és consistent i $\varphi_i = \neg\forall x\psi$, escollim una nova constant c_j que no aparegui ni a φ_i ni a Σ_i, i posem $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{\neg\forall x\psi, \neg\psi[x/c_j]\}$, que és consistent.

Aleshores definirem Γ_0 com $\Gamma_0 = \bigcup_i \Sigma_i$. Observem que, per construcció, Γ_0 és maximal consistent. A més, podem veure que és ω-complet. Sigui φ una fórmula amb, com a molt, una variable lliure, i suposem que $\Gamma_0 \vdash \varphi[x/\tau]$ per a tots els termes tancats τ. Com que Γ_0 és consistent, no es pot donar el cas que $\Gamma_0 \vdash \neg\varphi[x/c_j]$ per alguna constant $c_j \in \{c_0, c_1, ...\}$. Per tant, en cap moment haurem afegit $\neg\forall x\varphi$ a la construcció dels Σ_i, i com que Γ_0 és maximal consistent això vol dir que $\forall x\varphi \in \Gamma_0$, i per tant $\Gamma_0 \vdash \forall x\varphi$. Hem vist que Γ_0 és un conjunt saturat.

Sigui T el conjunt de tots els conjunts saturats Γ tals que, per a tots els termes tancats τ_1, τ_2, $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma$ si, i només si, $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma_0$.

Per demostrar la completesa d'aquest càlcul, haurem de construir un model contraexemple $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{D}, h)$. Definim en T la relació $<$ de la mateixa manera que hem definit R a la demostració de completesa de K_t: $\Gamma < \Delta$ si, i només si, per a tota fórmula φ, $G\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta$ (equivalentment, com ja hem demostrat, $\Gamma < \Delta$ si, i només si, per a tota fórmula φ, $H\varphi \in \Delta \Rightarrow \varphi \in \Gamma$).

Agafarem $(T, <)$ com a marc temporal pel nostre model. Queden per definir $\mathcal{D}$ i h. Per a cada terme tancat τ, considerem $[\tau] = \{\tau' \mid (\tau = \tau') \in \Gamma_0\}$. Aleshores el domini de $\mathcal{D}$ serà $\{[\tau] \mid \tau$ és un terme tancat$\}$, i per a cada funció n-ària f tindrem $f^{\mathcal{D}}([\tau_1], ..., [\tau_n]) = [f(\tau_1, ..., \tau_n)]$. Per últim, per a cada $\Gamma \in T$ i per a cada predicat n-ari R, definim $h(R, \Gamma) = \{([\tau_1], ..., [\tau_n]) \mid R(\tau_1, ..., \tau_n) \in \Gamma\}$. Observem que aleshores $([\tau_1], ..., [\tau_n]) \in h(R, \Gamma)$ si, i només si, $R(\tau_1, ..., \tau_n) \in \Gamma$.

Ara que tenim el model, només queda demostrar el seu lema de veritat.

Lema 3.8. *Per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$ i per a tota sentència φ,*

$$\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \text{ si, i només si, } \varphi \in \Gamma.$$

Demostració. Ho demostrarem per inducció.

- $\tau_1 = \tau_2$:
$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_2 \in \Gamma &\Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2 \in \Gamma_0 \\ &\Leftrightarrow [\tau_1] = [\tau_2] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T}, \Gamma \models \tau_1 = \tau_2 \end{aligned}$$

- $R(\tau_1, ..., \tau_n)$:

  $\Rightarrow$ Suposem que $\mathcal{T}, \Gamma \models R(\tau_1, ..., \tau_n)$. Aleshores, $([\tau_1], ..., [\tau_n]) \in h(R, \Gamma)$, i per definició de h, $R(\tau_1, ..., \tau_n) \in \Gamma$.

  $\Leftarrow$ Suposem que $R(\tau_1, ..., \tau_n) \in \Gamma$. Aleshores, per la definició de h, $([\tau_1], ..., [\tau_n]) \in h(R, \Gamma)$ i, per tant, $\mathcal{T}, \Gamma \models R(\tau_1, ..., \tau_n)$.

- $\neg\varphi$:

  Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi$ si, i només si, $\varphi \in \Gamma$, i suposem que $\mathcal{T}, \Gamma \models \neg\varphi$. Aleshores
$$\begin{aligned} \mathcal{T}, \Gamma \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \mathcal{T}, \Gamma \not\models \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma \qquad \text{(H.I.)} \\ &\Leftrightarrow \neg\varphi \in \Gamma \end{aligned}$$

- $\varphi \vee \psi$:

  Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$ i $\mathcal{T}, \Gamma \models \psi \Leftrightarrow \psi \in \Gamma$, i suposem que $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \vee \psi$. Aleshores:
$$\begin{aligned} \mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow \mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \text{ o } \mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi \in \Gamma \text{ o } \psi \in \Gamma \qquad \text{(H.I.)} \\ &\Leftrightarrow \varphi \vee \psi \in \Gamma \end{aligned}$$

- $\forall x\varphi$:

  $\Rightarrow$ Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$ i que $\mathcal{T}, \Gamma \models \forall x\varphi$. Aleshores per a tot terme tancat τ, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi[x/\tau]$, i $\varphi[x/\tau] \in \Gamma$. Ara bé, com Γ és ω-complet, $\forall x\varphi \in \Gamma$.

$\Leftarrow$ Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \Gamma$ i que $\forall x\varphi \in \Gamma$. Aleshores per a tot element $[\tau]$ de $\mathcal{D}$ tenim que, per l'axioma (2), $\varphi[x/\tau] \in \Gamma$, i per hipòtesi d'inducció $\varphi[x/\tau] \in \Gamma$. Sigui v una assignació de variables tal que $v(x) = [\tau]$. Aleshores $\mathcal{T}, \Gamma \models_v \varphi$, i com que això és veritat per a qualsevol element $[\tau]$ de $\mathcal{D}$, tenim que $\mathcal{T}, \Gamma \models \forall x\varphi$.

- $F\varphi$:

$\Rightarrow$ Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \Gamma$ i suposem que $\mathcal{T}, \Gamma \models F\varphi$. Aleshores existeix un conjunt Δ tal que $\Gamma < \Delta$ i $\mathcal{T}, \Delta \models \varphi$. Per la hipòtesi d'inducció, $\varphi \in \Delta$. Observem que, per la definició de $<$, no podem tenir $G\neg\varphi \in \Gamma$, perquè si fos així tindríem $\neg\varphi \in \Delta$ i Δ no seria consistent. Per tant, com Γ és maximal consistent, ha de ser $\neg G\neg\varphi \in \Gamma$, és a dir, $F\varphi \in \Gamma$.

$\Leftarrow$ Suposem que, per a tot $\Gamma \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}, \Gamma \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \Gamma$, i suposem que $F\varphi \in \Gamma$. Volem demostrar que $\mathcal{T}, \Gamma \models F\varphi$. Per fer-ho, construirem un conjunt saturat Δ tal que $\Delta \in \mathcal{T}$, $\Gamma < \Delta$ i $\mathcal{T}, \Delta \models \varphi$.
Per construir Δ, comencem afirmant que $\Delta_0 = \{\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi\}$ és consistent. Per comprovar-ho necessitarem el següent lema.

Lema 3.9. *Sigui Σ un conjunt de sentències. Si $\Sigma \vdash \varphi$, aleshores $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\varphi$.*

Demostració. Sigui Σ un conjunt de sentències i φ una fórmula tal que $\Sigma \vdash \varphi$. És a dir, suposem que existeix una successió de fórmules $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tal que $\varphi_n = \varphi$ i cada φ_i és o bé un axioma, o bé una premissa de Σ o bé l'hem obtingut aplicant una regla d'inferència a fórmules anteriors. Farem la demostració per inducció completa sobre n. Suposem que es compleix el lema per deduccions de menys de n fórmules. Aleshores:

* Si φ és un axioma, també tenim que $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash \varphi$. Aplicant la regla de G-necessitat, obtenim directament que $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\varphi$.
* Si φ és un element de Σ, aleshores $G\varphi \in \{G\psi \mid \psi \in \Sigma\}$ i per tant $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\varphi$.
* Si hem obtingut φ aplicant Modus Ponens, aleshores hi ha una fórmula χ tal que $\chi \to \varphi$ i χ són part de la deducció de φ amb premisses en Σ. Per tant podem aplicar la hipòtesi d'inducció a $\chi \to \varphi$ i χ, obtenint $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G(\chi \to \varphi)$ i $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\chi$. Ara bé, per l'axioma 5., tenim que aleshores $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\chi \to G\varphi$. Per tant, per Modus Ponens, $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\varphi$.
* Si hem obtingut φ aplicant la regla de la G-necessitat, aleshores φ és de la forma $G\chi$, on χ és part de la deducció de φ. Podem aplicar la hipòtesi d'inducció a la deducció de χ, i tenim que $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\chi$. Aleshores, aplicant la regla d G-necessitat, $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash GG\chi$, és a dir, $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\varphi$. Si hem obtingut φ amb la regla de H-necessitat fem un procés anàleg.
* Si hem obtingut φ aplicant la Generalització Universal, aleshores φ és de la forma $\forall x\chi$ i $\chi(x)$ és part de la deducció de φ. Podem aplicar la hipòtesi d'inducció a $\chi(x)$, resultant en $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\chi(x)$. Aplicant Generalització Universal, $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash \forall xG\chi$, i per l'axioma 8. tenim que $\{G\psi \mid \psi \in \Sigma\} \vdash G\forall x\chi$, com volíem veure.

$\square$

Volem demostrar que $\Delta_0 = \{\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi\}$ és consistent. Si no ho fos, aleshores $\{\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \vdash \neg\varphi$, i pel lema anterior, $\{G\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \vdash G\neg\varphi$. Però això implica que $\Gamma \vDash F\varphi$ (per hipòtesi) i $\Gamma \vDash \neg F\varphi$, que és impossible perquè Γ és consistent.

Veiem ara que $\{\psi \mid G\psi \in \Gamma\}$ és ω-complet. Sigui χ una fórmula amb, com a molt, una variable lliure x, suposem $\{\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \vdash \chi[x/\tau]$ per a tot terme tancat t. Aleshores, pel lema anterior, $\{G\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \vdash G\chi[x/\tau]$, i per tant $\Gamma \vdash G\chi[x/\tau]$ per a tot terme tancat τ. Ara, com Γ és ω-complet, $\Gamma \vdash \forall x G\chi$, i per l'axioma (8), $\Gamma \vdash G\forall x\chi$. Finalment, com Γ és maximal consistent, $G\forall x\chi \in \Gamma$, i per la construcció de Δ_0 tenim que $\forall x\chi \in \Delta_0$, com volíem veure. Vist això, només necessitem el següent lema per demostrar que Δ_0 és ω-complet.

Lema 3.10. *Si Δ és ω-complet, aleshores $\Delta \cup \varphi$ també ho és per a tota sentència φ.*

Demostració. Sigui ψ una fórmula amb una sola variable lliure x i suposem que $\Delta \cup \varphi \vdash \psi[x/\tau]$ per a tot terme tancat t. Aleshores $\Delta \vdash (\varphi \to \psi)[x/\tau]$ per a tot t i, com Δ és ω-complet, $\Delta \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$. Com x no és lliure en φ, tenim que $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \to \forall x\psi)$, i per tant $\Delta \cup \{\psi\} \vdash \forall x\psi$, com volíem veure. □

Veiem ara com estendre el conjunt consistent ω-complet Δ_0 a un conjunt saturat Δ.

Sigui $\varphi_0, \varphi_1, ...$ una llista numerable de les sentències del llenguatge. Construirem recursivament conjunts consistents ω-complets Δ_i a partir de Δ_0. Sigui Δ_i un conjunt consistent ω-complet:

* Si $\Delta_i \cup \{\varphi_i\}$ és inconsistent, posem $\Delta_{i+1} = \Delta_i$.
* Si $\Delta_i \cup \{\varphi_i\}$ és consistent i φ_i no és de la forma $\neg\forall x\psi$, posem $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\varphi_i\}$. Pel lema anterior, Δ_{i+1} és ω-complet.
* Si $\Delta_i \cup \{\varphi_i\}$ és consistent i $\varphi_i = \neg\forall x\psi$, observem que ha d'existir un terme tancat τ tal que $\Delta_i \cup \{\neg\psi[x/\tau]\}$ és consistent. Si no existís, tindríem que $\Delta_i \vdash \psi[x/\tau]$ per a tot terme tancat τ, i per la ω-completesa de Δ_i, $\Delta_i \vdash \forall x\psi$. Aleshores posem $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\neg\psi[x/\tau], \neg\forall x\psi\}$, que és ω-complet pel lema anterior.

Definint $\Delta = \bigcup_i \Delta_i$, Δ és ω-complet i consistent per construcció.

Hem construït un conjunt Δ consistent i ω-complet. Per comprovar que, efectivament, $\Delta \in T$, només cal veure que per a qualssevol dos termes tancats τ_1 i τ_2, $\tau_1 = \tau_2 \in \Delta$ si, i només si, $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma_0$. Com Γ és a $\mathcal{T}$, això és equivalent a demostrar que $\tau_1 = \tau_2 \in \Delta$ si, i només si, $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma$.

Siguin τ_1 i τ_2 termes tancats. Si $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma$, per l'axioma (7), $G(\tau_1 = \tau_2) \in \Gamma$. Recordem que $\Delta_0 = \{\psi \mid G\psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi\}$. Per tant, $\tau_1 = \tau_2 \in \Delta_0 \subset \Delta$. D'altra banda, si $\neg\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma$, per l'axioma (6), $GP\neg\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma$ i per tant $P\neg\tau_1 = \tau_2 \in \Delta$. Ara, si tinguéssim $\tau_1 = \tau_2 \in \Delta$, pel dual de l'axioma (7), $H(\tau_1 = \tau_2) \in \Delta$. Com $H(\tau_1 = \tau_2) \equiv \neg P\neg(\tau_1 = \tau_2)$ i Δ és consistent, tenim una contradicció i $\tau_1 = \tau_2 \notin \Delta$.

Per tant, $\Delta \in T$, $\Gamma < \Delta$ per construcció i, com que $\varphi \in \Delta$, tenim que $\mathcal{T}, \Delta \vDash \varphi$ per hipòtesi d'inducció. Aleshores $\mathcal{T}, \Gamma \vDash F\varphi$, com volíem veure.

□

Finalment, notem que per a tota $\varphi \in \Sigma_0$,

$$\mathcal{T}, \Gamma_0 \models \varphi$$

i tenim el model que necessitem.

$\square$

3.6 Extensions de la lògica qFP

Hem vist que podem axiomatitzar F i P sobre la classe de tots els marcs temporals i que el càlcul resultant és complet. Veiem ara que afegint-hi un axioma més tenim una axiomatització completa sobre la classe de marcs temporals lineals. Anomenarem a aquest càlcul qFP/L.

Afegirem l'axioma de linealitat usual:

10. $(PFq \rightarrow (Pq \vee q \vee Fq)) \wedge (FPq \rightarrow (Fq \vee q \vee Pq))$

Teorema 3.11. *El càlcul qFP/L és correcte i complet sobre la classe de marcs temporals lineals.*

Demostració. Ja hem vist abans que el nou axioma és vàlid en la lògica proposicional temporal, i per tant ho és en aquesta. Tenim així la correcció, i queda demostrar la completesa.

Trobem aquesta demostració a [1], i segueix la mateixa línia que la demostració de completesa de la lògica Lin de la secció de lògica proposicional. Sigui Σ_0 un conjunt qFP/L-consistent de sentències. Aleshores Σ_0 també és qFP-consistent, així que el model canònic serà el mateix que a la demostració del teorema anterior, és a dir, $(\mathcal{T}, \Gamma_0)$, on $\mathcal{T} = (T, <, \mathcal{D}, h)$. Estem buscant, però, un model lineal: transitiu, sense ramificacions, anti-simètric, irreflexiu i totalment ordenat. Comencem per demostrar que $(T, <)$ és transitiu i no es ramifica.

La demostració de transitivitat és anàloga a la que hem fet per la relació R en la demostració de completesa de K_t, i hem vist la no-ramificació en la demostració de completesa de la lògica Lin.

Sigui $C = \{\Delta \in T \mid \Gamma_0 \text{ i } \Delta \text{ són comparables.}\}$, i sigui $(C, <)$ un marc amb la relació $<$ de $(T, <)$. Com hem vist, aquest marc és transitiu, és un ordre total i compleix el lema de veritat; és a dir, per a tot $\Gamma \in C$ i per a tota sentència φ,

$$\varphi \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; (C, <, \mathcal{D}, h), \Gamma \models \varphi.$$

El problema ara és, un altre cop, que $(C, <)$ podria ser anti-simètric o irreflexiu. Construirem a partir de $(C, <)$ un marc que conservi les propietats que ja tenim i, a més, sigui anti-simètric i irreflexiu.

Sigui $C^i = \{\Gamma \in C \mid \Gamma \not< \Gamma\}$ el conjunt de punts irreflexius de C. Definim la relació $\sim$ en $C^r = C \setminus C^i = \{\Gamma \in C \mid \Gamma < \Gamma\}$ com:

$$\Gamma \sim \Delta \text{ si, i només si, } \Gamma < \Delta \text{ i } \Delta < \Gamma.$$

Hem comprovat a la demostració del teorema 2.13 que $\sim$ és una relació d'equivalència en C^r, on les classes d'equivalència s'anomenen clústers.

Definim, com abans, una funció $*_c$ de $\mathbb{R}$ a cada clúster c de manera que, per a cada $\Delta \in c$ i per a cada $r \in \mathbb{R}$, existeixen $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $s < r < t$ i $*_c(s) = \Delta = *_c(t)$, i $*_{\{\Gamma\}}(0) = \Gamma$ per a tot $\Gamma \in C^i$.

Considerem el conjunt $C^\flat$, que recordem que hem definit com

$$C^\flat = \{(\{\Gamma\}, 0) \mid \Gamma \in C^i\} \cup \{(c, s) \mid c \text{ és un clúster i } s \in \mathbb{R}\},$$

ordenat per $\prec$, que hem definit com: $(a, s) \prec (b, r)$ si, i només si

- $a \neq b$ i existeixen $\Gamma_a \in a$ i $\Gamma_b \in b$ tals que $\Gamma_a < \Gamma_b$; o bé
- $a = b$ i $s < r$.

Aleshores, el marc $(C^\flat, \prec)$ és lineal, com hem comprovat a la demostració del teorema 2.13.

Definim ara un model a partir d'aquest marc que compleixi el lema fonamental. Agafarem com a domini $\mathcal{D}$ i definirem la interpretació de predicats g com segueix: siguin R un predicat n-ari, $(a, r) \in C^\flat$ i $d \in \mathcal{D}^n$,

$$d \in g(R, (a, r)) \;\Leftrightarrow\; R(d) \in *_a(r).$$

Per tant, $g(R, (a, r)) = h(R, *_a(r))$.

Ara cal demostrar per a $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g)$ el seu lema fonamental. És a dir, hem de veure que per a tota fórmula φ,

$$(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \text{ si, i només si, } \varphi \in *_a(r).$$

Demostració. Per inducció:

- $\tau_1 = \tau_2$:
$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_2 \in *_a(r) \quad &\Leftrightarrow \quad \tau_1 = \tau_2 \in \Gamma_0 \quad (\text{perquè } *_a(r) \in T) \\ &\Leftrightarrow \quad [\tau_1] = [\tau_2] \\ &\Leftrightarrow \quad (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \tau_1 = \tau_2 \end{aligned}$$
- $R(\tau_1, ..., \tau_n)$: directe del fet que $g(R, (a, r)) = h(R, *_a(r))$.
- $\neg\varphi$: suposem que $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in *_a(r)$. Aleshores
$$\begin{aligned} (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \neg\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \nvDash \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \notin *_a(r) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\varphi \in *_a(r) \end{aligned}$$
- $\varphi \vee \psi$: suposem que $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in *_a(r)$ i $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \psi \Leftrightarrow \psi \in *_a(r)$. Aleshores
$$\begin{aligned} (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \vee \psi \quad &\Leftrightarrow \quad (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \\ & \quad \text{o } (C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \psi \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \in *_a(r) \text{ o } \psi \in *_a(r) \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \vee \psi \in *_a(r) \end{aligned}$$
- $\forall x\varphi$: anàloga a la demostració del lema 3.8.

- $F\varphi$:

  $\Rightarrow$ Suposem que $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in *_a(r)$ i que $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash F\varphi$. Aleshores existeix (b, s) tal que $(a, r) \prec (b, s)$ i $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (b, s) \vDash \varphi$. Per la hipòtesi d'inducció, $\varphi \in *_b(s)$. Per tant, $*_a(r) < *_b(s)$, i pel lema fonamental per $(C, <, \mathcal{D}, h)$ resulta que $F\varphi \in *_a(r)$.

  $\Leftarrow$ Suposem que $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in *_a(r)$ i que $F\varphi \in *_a(r)$. Pel lema fonamental per $(C, <, \mathcal{D}, h)$, existeix un $\Gamma \in C$ tal que $*_a(r) < \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$. Aleshores, o bé Γ és un element del clúster a on, per definició de $*_a$, existeix un s tal que $s > r$ i $*_a(s) = \Gamma$, o bé Γ és $*_b(s)$ per un clúster posterior b.

  En qualsevol cas, $(a, r) < (b, s)$ i per hipòtesi d'inducció $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (b, s) \vDash \varphi$. Per tant, $(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash F\varphi$.

□

Per acabar la demostració només cal suposar que a és o bé el clúster que conté Γ_0 o bé $\{\Gamma_0\}$ si Γ_0 és irreflexiu en C. En el segon cas posem $r = 0$ per a que $*_a(r) = \Gamma_0$; en el primer cas sabem que existeix una r tal que $*_a(r) = \Gamma_0$ per construcció de $*_a$.

Aleshores, pel lema anterior, tenim que

$$(C^\flat, \prec, \mathcal{D}, g), (a, r) \vDash \varphi$$

per a tot $\varphi \in \Sigma_0$, com necessitàvem veure per tenir el nostre model.

□

De manera similar es pot demostrar que, afegint els axiomes

11. $F\top, P\top$ (no principi i no final),
12. $GG\varphi \to G\varphi$ i el seu dual (densitat),

el nou càlcul $QFP/\mathbb{Q}$ és correcte i complet sobre els racionals ([1]).

En canvi, quan intentem fer el mateix sobre els enters, els naturals o els reals (marcs que resulten especialment útils per a la ciència computacional), trobem que la lògica temporal de primer ordre no funciona com voldríem. Es pot demostrar que, en aquests casos, és impossible trobar una axiomatització recursiva. Podem trobar demostracions a [1].

A més, de la no-decidibilitat de la lògica de primer ordre resulta que no només són indecidibles els fragments de lògica temporal de primer ordre que no són recursivament axiomatitzables, sinó que la classe de tots els marcs temporals també té teoria de primer ordre no decidible.

4 La lògica temporal en la computabilitat

4.1 Motivació

A mesura que els sistemes computacionals evolucionen fent-se cada cop més complexos, creix la necessitat de modelitzar de manera exacta i eficient el seu comportament. En un principi, només es contemplava la formalització de sistemes transformacionals. Aquests són sistemes on cada component es limita a rebre un input, portar a terme una operació, i retornar un output. Els mètodes utilitzats per aquests sistemes, però, no són suficients per modelitzar-ne de més complexos.

La lògica temporal es va desenvolupar a la ciència computacional per fer front a la necessitat de modelitzar sistemes reactius. Es tracta de sistemes on les components fan operacions constants, reben input de forma contínua (no només al començament de la computació), retornen output de forma contínua (no només al final de la computació) o interactuen regularment amb altres components.

En aquesta secció definirem una lògica temporal utilitzada en aquests problemes computacionals, veurem la seva relació amb el concepte d'autòmat, i veurem breument una aplicació pràctica en el *model checking*.

4.2 Llenguatge de la lògica PLTL

Tenint present l'objectiu de descriure, mitjançant la lògica temporal, el comportament de programes i sistemes, treballarem amb lògica proposicional en un marc temporal discret i lineal, assumint que tenim un instant inicial però no un instant final, i afegint als connectors clàssics connectors temporals que es referiran només al futur. Definirem aquesta classe de marcs afegint als axiomes que defineixen un marc lineal els següents axiomes:

$H\bot$	(té instant inicial)
$F\top$	(no té instant final)
$F\varphi \wedge G(\varphi \to F\varphi) \to GF\varphi$	(inducció endavant)
$H(H\varphi \to \varphi) \to H\varphi$	(ben ordenat)

Anomenarem a la lògica que definirem sobre aquesta classe de marcs PLTL.

Els nous connectors seran els següents, amb el seu significat intuïtiu:

$\bigcirc\varphi$	φ és veritat en el següent instant
$\Box\varphi$	φ és veritat en tots els instants futurs
$\Diamond\varphi$	φ és veritat en algun instant futur (o present)
$\varphi U\psi$	φ continua sent veritat fins un cert instant futur on ψ és veritat
$\varphi W\psi$	φ continua sent veritat a no ser que ψ esdevingui veritat
start	marca l'instant inicial (només serà veritat a l'instant inicial)

Observacions 4.1.

1. La definició de $\bigcirc$ té sentit perquè treballem en un marc discret sense instant final. Per tant, cada instant té un successor immediat.

2. Observem que W és molt similar a U, amb la diferència que, si tenim $\varphi W\psi$, no es garanteix que existeixi un instant futur en què ψ sigui veritat. Amb $\varphi U\psi$, en canvi, necessàriament ha d'existir un instant futur on ψ sigui veritat. Per tant, tenim la següent relació entre els dos connectors:

$$\varphi W\psi \equiv (\varphi U\psi) \vee \Box\varphi$$

Per definir el conjunt de fórmules de la lògica PLTL afegirem aquests nous connectors als connectors clàssics.

Definició 4.2. *Definim recursivament el conjunt de fórmules de PLTL com*

$$\varphi := p \in PROP \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid \bigcirc \varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \varphi U\varphi \mid \varphi W\varphi.$$

S'acostumen a prendre els connectors $\neg$, $\vee$, $\bigcirc$ i U com a sistema complet.

4.3 Semàntica de la lògica PLTL

Recordem que, per a la lògica proposicional temporal, un model és una estructura $\mathcal{M} = (T, <, h)$, on T és el conjunt d'instants, $<$ és la relació d'accessibilitat entre els instants de T i h és la funció que assigna una valoració a cada instant de temps.

Ara bé, per la definició del marc temporal que utilitzem en la lògica PLTL, podem considerar un marc com una estructura $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, <, \pi)$ on $<$ és l'ordre usual en $\mathbb{N}$. Efectivament, estem considerant que T és un conjunt discret, infinit i lineal amb un instant inicial però cap instant final. Per tant T és isomorf a $\mathbb{N}$, considerant $<$ com a relació d'accessibilitat. Definirem π com $\pi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(PROP)$, que assigna a cada nombre natural (és a dir, a cada instant) el subconjunt de $PROP$ de proposicions que són veritat en aquest instant.

A vegades ho simplificarem encara més i considerarem

$$\mathcal{M} = \{s_0, s_1, s_2, s_3, ...\}$$

on cada s_i és el conjunt de proposicions vàlides en l'instant i.

Definirem la veracitat de les fórmules com segueix: siguin $\mathcal{M}$ un model i i un instant,

$\mathcal{M}, i \vDash start$ si, i només si, $i = 0$;

$\mathcal{M}, i \vDash p$ si, i només si, $p \in \pi(i)$;

$\mathcal{M}, i \vDash \neg\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, i \nvDash \varphi$;

$\mathcal{M}, i \vDash \varphi \vee \psi$ si, i només si, $\mathcal{M}, i \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}, i \vDash \psi$.

$\mathcal{M}, i \vDash \bigcirc\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, i+1 \vDash \varphi$

$\mathcal{M}, i \vDash \Diamond\varphi$ si, i només si, existeix j tal que $i \leq j$ i $\mathcal{M}, j \vDash \varphi$

$\mathcal{M}, i \vDash \Box\varphi$ si, i només si, $\mathcal{M}, j \vDash \varphi$ per a tot j amb $i \leq j$

$\mathcal{M}, i \vDash \varphi U\psi$ si, i només si, existeix j tal que $i \leq j$ i $\mathcal{M}, j \vDash \psi$, i per a tot k amb $i \leq k \leq j$, $\mathcal{M}, k \vDash \varphi$

$\mathcal{M}, i \vDash \varphi W\psi$ si, i només si, o bé $\mathcal{M}, i \vDash \varphi U\psi$ o bé $\mathcal{M}, i \vDash \Box\varphi$

4.4 La lògica PLTL en sistemes reactius

Com hem dit, una de les motivacions principals pel desenvolupament de la lògica temporal PLTL és l'especificació de propietats dinàmiques de sistemes reactius. Veiem algunes classes de propietats que podrem caracteritzar mitjançant la lògica temporal, i que solen ser les fórmules que volem que satisfaci un sistema determinat.

4.4.1 Propietats de seguretat

Aquestes propietats corresponen als requisits d'un sistema reactiu que algun fet *no passi*. Per tant, sigui φ allò que no hauria d'ocórrer, normalment la propietat de seguretat serà

$$\Box\neg\varphi.$$

És a dir, ens permet assegurar que φ no es donarà en cap instant futur.

Sovint utilitzarem el connector W per expressar propietats de seguretat amb condicions afegides; si volem expressar que φ mai serà veritat a no ser que ψ sigui veritat, escriurem

$$\neg\varphi W\psi.$$

4.4.2 Propietats de vivacitat

Ara, enlloc de descriure situacions que no poden passar, caracteritzarem el concepte de situació que ha de passar en algun moment. Així, té sentit que, si φ és allò que volem que passi en algun moment, escrivim la propietat de vivacitat com

$$\Diamond\varphi.$$

Una fórmula de la forma

$$\varphi U\psi,$$

que expressa que en algun instant futur ψ serà veritat i, fins aquest instant, φ serà veritat, se sol considerar també una propietat de vivacitat.

4.4.3 Propietats de regularitat

Abans de considerar les propietats de regularitat caldrà entendre el concepte d'*infinitament sovint*.

Per fer-ho, analitzem la semàntica de la fórmula $\Box\Diamond p$. Veiem que, en un model $\mathcal{M}$ i per a un instant i,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, i \models \Box\Diamond p \quad &\Leftrightarrow \quad \text{per a tot } j, \text{ si } i \leq j, \text{ aleshores } \mathcal{M}, j \models \Diamond p \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per a tot } j, \text{ si } i \leq j, \text{ aleshores existeix } k \text{ tal que} \\ &\qquad\ \ j \leq k \text{ i } \mathcal{M}, k \models p \end{aligned}$$

Aleshores tenim que, en qualsevol instant, necessàriament existeix un instant futur en què es dona p. Per tant, p passa infinitament sovint. Així, expressarem que una fórmula φ passa infinitament sovint com $\Box\Diamond\varphi$.

Amb el concepte d'infinitament sovint podem considerar les propietats de regularitat. Són claus per descriure processos que passen de forma contínua: volem saber si una cosa mai passarà, passarà un cop, sempre passarà, o passarà infinitament sovint.

Utilitzarem les propietats de regularitat principalment per descriure la planificació d'algun procés, la resposta d'un programa a una petició, l'èxit en vista d'un intent, etc. Alguns exemples de propietats de regularitat són:

$\Box\Diamond intent \rightarrow \Box\Diamond \grave{e}xit$
"si intentem una cosa infinitament sovint, tindrem èxit infinitament sovint"

$\Box\Diamond intent \rightarrow \Diamond \grave{e}xit$
"si intentem una cosa infinitament sovint, tindrem èxit, com a mínim, un cop"

$\Box intent \rightarrow \Box\Diamond \grave{e}xit$
"si intentem una cosa contínuament, tindrem èxit infinitament sovint"

$\Box intent \rightarrow \Diamond \grave{e}xit$
"si intentem una cosa contínuament, tindrem èxit, com a mínim, un cop"

4.5 Autòmats de Büchi i lògica PLTL

Com hem vist anteriorment, podem considerar que un model en PLTL és, essencialment, una seqüència infinita, discreta i lineal amb un estat inicial determinat. Cada fórmula temporal correspon a un conjunt de models on aquesta fórmula se satisfà, i cada conjunt de proposicions certes en un instant determinat d'aquests models és finit. Com que en una fórmula hi ha un nombre finit de proposicions i un nombre finit de possibles valors de veritat per a les proposicions (0 o 1), podem definir un conjunt finit de tots els possibles instants i utilitzar un símbol distintiu per a cada un d'ells. Per tant, els models seran ara cadenes de símbols, on cada símbol representa un estat.

Amb aquest punt de vista, veurem que podem definir *autòmats finits* que acceptin només les cadenes que representin models que satisfan una determinada fórmula temporal. En concret, farem servir ω-autòmats, específicament *autòmats de Büchi.* Primer, però, serà útil deixar clar el concepte d'autòmats que reconeguin cadenes finites.

Definició 4.3. *Un autòmat finit que accepta cadenes finites és una estructura*

$$AF = (A, S, \delta, q_0, F)$$

on

- A *és l'alfabet finit de símbols,*
- S *és el conjunt finit d'estats,*
- $\delta \subseteq S \times A \times S$ *és una relació de transició,*
- $q_0 \in S$ *és l'estat inicial,*
- $F \subseteq S$ *és el conjunt d'estats finals.*

Inicialment, ens trobem a l'estat inicial q_0 amb una cadena de símbols de A com a entrada, escrita a l'inici de la cinta. Els còmputs de l'autòmat es realitzen mitjançant la relació de transició δ: si $(q, a, p) \in \delta$, aleshores si ens trobem a l'estat q i llegim a ens mourem a l'estat p. La cadena serà acceptada si, en llegir-la sencera, acabem en un estat $q \in F$.

Per modelitzar les seqüències d'execució que veiem en la lògica PLTL, però, ens caldran autòmats que llegeixin cadenes infinites. Farem servir els autòmats de Büchi.

Un autòmat de Büchi és una estructura

$$AB = (A, S, \delta, q_0, F)$$

on A, S, δ, q_0 i F són com en la definició d'autòmat finit que accepta cadenes finites. Canviarem, però, la condició necessària perquè una cadena sigui acceptada. Ara, una cadena de símbols de A serà acceptada per l'autòmat si, com a mínim, un element de F apareix infinitament sovint en la successió d'estats visitats.

Sigui AB un autòmat de Büchi i σ una seqüència d'execució, és a dir, una successió de transicions (q_i, a_i, q'_i) tal que $q'_i = q_{i+1}$ per a cada i, escriurem $AB, \sigma, i \vDash \varphi$ si, i només si, φ és veritat en l'instant i de l'execució σ. Aleshores considerarem que un autòmat AB satisfà una fórmula φ, i escriurem $AB \vDash \varphi$, si i només si $AB, \sigma, 0 \vDash \varphi$ per a tota seqüència d'execució σ de AB.

Quan parlem de modelitzar o representar una fórmula φ mitjançant un autòmat, estem buscant un autòmat A tal que $A \vDash \varphi$. Veiem algunes representacions intuïtives de fórmules temporals senzilles amb autòmats de Büchi.

Exemples 4.4. 1. Considerem la fórmula

$$\bigcirc a$$

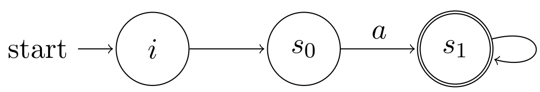
Construïm un autòmat de Büchi que accepti només cadenes que representin models on se satisfà la fórmula. L'alfabet A del nostre autòmat ha de caracteritzar totes les possibles combinacions de proposicions que es puguin donar; per tant, cada element de A serà un element de $\mathcal{P}(PROP)$. Així, si podem anar d'un estat a un altre llegint $\{a, b\}$, significarà que les proposicions a, b són certes en aquest instant.

L'autòmat que representi $\bigcirc a$ serà l'estructura (A, S, δ, q_0, F), on

- $A = \mathcal{P}(\{a\})$
- $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta = \{(q_0, true, q_1), (q_1, a, q_2), (q_2, true, q_2)\}$
- $q_0 = i$
- $F = \{q_2\}$

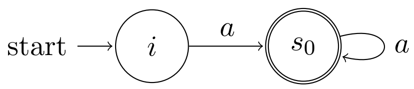
Notació 1. *Hem utilitzat "true" per indicar "qualsevol element de A". També escriurem 'a' per dir "qualsevol element de A que inclogui a 'a' i '¬a' per referir-nos a "qualsevol element de A que no inclogui a 'a'". 'ab' significarà "qualsevol element de A que inclogui tant 'a' com 'b'".*

Representem en forma de graf l'autòmat que hem definit per comprovar intuïtivament que representa $\bigcirc a$:

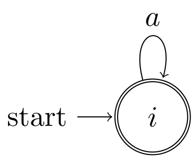


Podem observar que aquest autòmat només accepta models on $\bigcirc a$ és vàlid en l'instant i. Partim de i i ens movem al següent estat, s_0, amb qualsevol combinació de símbols de l'alfabet; és a dir, no ens afecta quines proposicions són veritat o no en l'estat inicial. Ara, però, només podrem avançar al següent estat si 'a' és veritat en s_0, com volíem que passés. Si es compleix, arribem a s_1, on qualsevol combinació de proposicions certes ens fa entrar en bucle dins s_1 i, per tant, tenir s_1 infinitament sovint i acceptant la cadena. L'única restricció que hi ha, doncs, és que l'estat immediatament següent a l'inicial satisfaci 'a', com volíem comprovar.

2. Fixem-nos ara en $\Box a$. És fàcil veure que es pot representar amb un autòmat

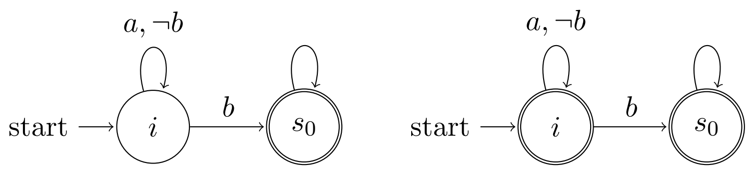


o, equivalentment,



Tots dos accepten només models on tots els estats a partir de i fan vertadera la proposició a.

3. Per últim, veiem mitjançant autòmats la diferència entre aUb i aWb:



Al primer autòmat, ens quedem a l'estat inicial mentre tinguem combinacions que fan a vertadera i b falsa, i només arribarem a l'estat s_0 un cop tinguem que b és vàlida. Aleshores ens quedarem a s_0 de forma contínua, i per tant la cadena serà acceptada. En canvi, al segon autòmat, com l'estat inicial és també un estat final, una cadena on sempre es doni a veritat i b fals també serà acceptada, sense la necessitat d'un estat on b sigui veritat. Així, el primer autòmat correspon a aUb i el segon a aWb.

En general, si volem expressar una fórmula temporal φ mitjançant un autòmat de Büchi B_φ, podem utilitzar la propietat dels models finits de PLTL. Com PLTL té la propietat dels models finits, podem descriure de forma finita totes les combinacions de valors de veritat de proposicions en models de φ i, per tant, tots els possibles estats de B_φ. Un cop generats tots els estats, utilitzem φ per definir δ, q_0 i F.

Teorema 4.5. *Donada una fórmula de PLTL φ, existeix un autòmat de Büchi B_φ que accepta només les cadenes corresponents als models que satisfan φ.*

Es pot trobar la demostració d'aquest teorema a [9], que utilitza autòmats *alternating*.

La dificultat radica en minimitzar el nombre d'estats de l'autòmat per agilitzar el càlcul necessari per fer el model checking. Aquest problema s'anomena *State Explosion Problem.* Resulta que, a la pràctica, quan construïm l'autòmat A corresponent a un determinat sistema mitjançant la sincronització dels autòmats $A_1, ..., A_n$ dels seus subsistemes, la quantitat d'estats és de l'ordre de $|A_1| \times ... \times |A_n|$, on $|A_i|$ és el nombre d'estats de l'autòmat A_i. També es pot disparar el nombre d'estats de l'autòmat B_φ amb fórmules menys senzilles que les que hem vist. S'han considerat moltes solucions a aquest problema, que no exposarem en aquest treball; per exemple, a [10] es proposa minimitzar el nombre d'estats de B_φ reescrivint la fórmula φ i utilitzant optimització Booleana, mentre que a [11] es proposa minimitzar directament l'autòmat $B_S \times B_\varphi$.

Fixem-nos que en els exemples anteriors cada autòmat accepta, com a mínim, una cadena infinita, que passa per algun estat de F infinitament sovint. Sabent això podem veure mitjançant autòmats la validesa d'una fórmula φ:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ és vàlida} \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\varphi \text{ és insatisfactible} \\ &\Leftrightarrow \quad B_{\neg\varphi} \text{ és buit} \end{aligned}$$

Aleshores el següent pas és saber comprovar eficientment quan un autòmat és buit. Es tractarà d'un procés cíclic dels següents passos:

- Eliminar arestes inconsistents, és a dir, arestes per les que mai podrem passar (per exemple, una aresta on tenim alhora a i $\neg a$).
- Eliminar estats dels quals no en surt cap aresta; no permetrien una cadena infinita.
- Eliminar conjunts d'estats terminals sense estats finals, és a dir, subgrafs on, un cop hem entrat, no es podrà sortir i no podrem accedir a cap estat final. Si utilitzem l'algorisme de Tarjan, això s'assoleix amb una complexitat lineal.

Si, aplicant en cicle aquests passos, arribem a un conjunt buit d'estats, l'autòmat serà buit. Si no ho és, arribarem a un conjunt no buit d'estats on no podem aplicar cap dels passos.

4.6 La lògica PLTL en model checking

En aquesta secció veurem com aplicar la lògica PLTL i els resultats que hem vist utilitzant els autòmats de Büchi al model checking.

L'objectiu és dissenyar un algorisme automàtic que comprovi si un sistema compleix una determinada propietat, i que, si arriba a la conclusió que el sistema no la compleix, doni un contraexemple que exposi el problema. D'aquesta manera es facilitarà la tasca d'arreglar el sistema. Aleshores ha de ser un algorisme que sempre arribi a un "sí"o a un "no", i que ho faci de manera raonablement eficient.

Sigui φ una fórmula temporal que especifica la propietat que volem comprovar al sistema. Haurem de representar el sistema com un conjunt finit de seqüències d'execució Σ; escriure'l en PLTL i construir l'autòmat corresponent. Aleshores, voldrem comprovar si es verifica que

$$\Sigma \vDash \varphi,$$

que equival a veure que $\sigma, 0 \vDash \varphi$ per a tota seqüència d'execució $\sigma \in \Sigma$. Però, com que φ caracteritza un conjunt Γ de seqüències d'execució on φ és veritat, això equival a comprovar si

$$\Sigma \subseteq \Gamma.$$

Aleshores, sigui B_φ l'autòmat corresponent a φ i B_S l'autòmat que correspon al sistema, busquem veure si

$$seqüències(B_S) \subseteq seqüències(B_\varphi),$$

és a dir, si

$$seqüències(B_S) \cap no\_seqüències(B_\varphi) = \emptyset,$$

o, simplement, si

$$seqüències(B_S) \cap seqüències(B_{\neg\varphi}) = \emptyset.$$

Ens cal veure, per tant, com representar el sistema mitjançant un autòmat i com buscar de forma eficient aquesta intersecció.

No existeix un mètode universal per modelitzar un sistema, i és una tasca complicada. Normalment, un sistema o programa es divideix en subsistemes o mòduls que, per separat, són més fàcilment modelitzables. S'han desenvolupat diferents processos per aconseguir modelitzar sistemes sincronitzant els autòmats dels diferents subsistemes, com autòmats de Büchi temporalitzats, sincronització per *Message Passing* o sincronització per variables compartides, però s'escapa de la complexitat d'aquest treball i no hi entrarem.

Un cop sabem com construir tant l'autòmat B_φ de la propietat com l'autòmat B_S del sistema, queda veure com calcular

$$seqüències(B_S) \cap seqüències(B_{\neg\varphi}).$$

Ho farem definint un autòmat que accepti només les seqüències d'aquesta intersecció. Serà l'autòmat $B_S \times B_\varphi$.

Definició 4.6. *Siguin* $B_1 = (A_1, S_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ *i* $B_2 = (A_2, S_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ *dos autòmats de Büchi. Definim* $B_1 \times B_2$ *com l'estructura*

$$(A_1 \cap A_2, S_1 \times S_2, \delta, (q_0^1, q_0^2), F_1 \times F_2),$$

on $((q_1, q_2), a, (p_1, p_2)) \in \delta$ *si, i només si,* $(q_1, a, p_1) \in \delta_1$ *i* $(q_2, a, p_2) \in \delta_2$.

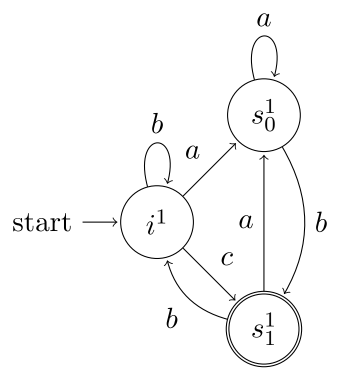
Exemple 4.7. Considerem els següents dos autòmats:

$B_1 = (A_1, S_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ on:

- $A_1 = \{a, b, c\}$
- $S_1 = \{i^1, s_0^1, s_1^1\}$
- $\delta = \{(i^1, a, s_0^1), (i^1, b, i^1), (i^1, c, s_1^1), (s_0^1, a, s_0^1), (s_0^1, b, s_1^1), (s_1^1, a, s_0^1), (s_1^1, b, i^1)\}$

- $q_0^1 = i^1$
- $F_1 = \{s_1^1\}$

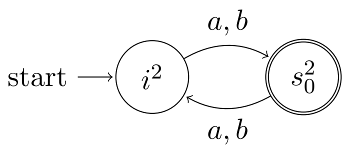
Gràficament:



i $B_2 = (A_2, S_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$, on:

- $A_2 = \{a, b\}$
- $S_2 = \{i^2, s_0^2\}$
- $\delta = \{(i^2, a, s_0^2), (i^2, b, s_0^2), (s_0^2, a, i^2), (s_0^2, b, i^2)\}$
- $q_0^2 = i^2$
- $F_1 = \{s_0^2\}$

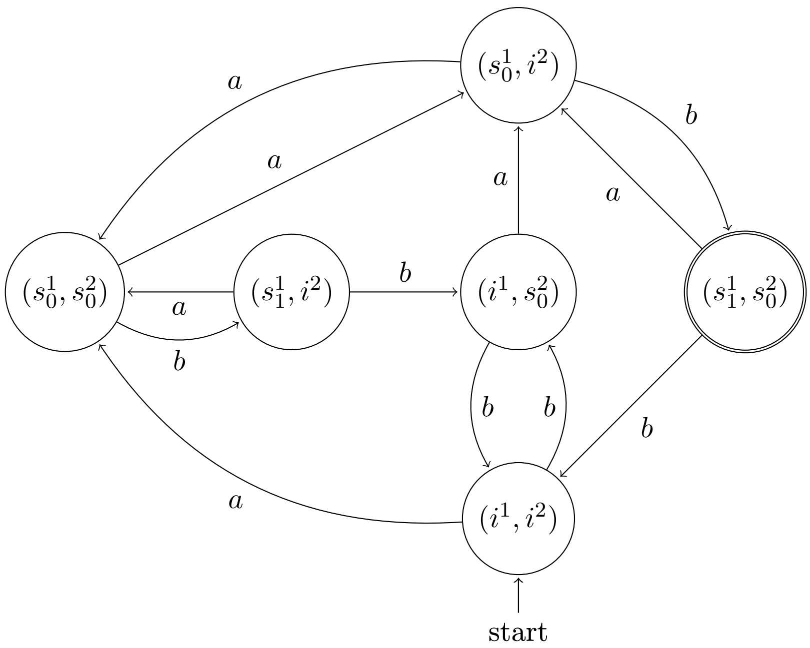
Gràficament:



Aleshores, $B_1 \times B_2 = (A, S, \delta, q_0, F)$, on:

- $A = A_1 \cap A_2 = \{a, b\}$
- $S = S_1 \times S_2$
- $\delta = \{((i^1, i^2), a, (s_0^1, s_0^2)), ((i^1, i^2), b, (i^1, s_0^2)), ((i^1, s_0^2), a, (s_0^1, i^2)),$ $((i^1, s_0^2), b, (i^1, i^2)), ((s_0^1, i^2), a, (s_0^1, s_0^2)), ((s_0^1, i^2), b, (s_1^1, s_0^2)),$ $((s_0^1, s_0^2), a, (s_0^1, i^2)), ((s_0^1, s_0^2), b, (s_1^1, i^2)), ((s_1^1, i^2), a, (s_0^1, s_0^2)),$ $((s_1^1, i^2), b, (i^1, s_0^2)), ((s_1^1, s_0^2), a, (s_0^1, i^2)), ((s_1^1, s_0^2), b, (i^1, i^2))\}$
- $q_0 = (i^1, i^2)$
- $F = \{(s_1^1, s_0^2)\}$

Gràficament:



Un cop podem construir els autòmats del sistema i de la condició a verificar, i sabem com construir un autòmat que llegeixi les seqüències corresponents a la intersecció de les seqüències llegides per dos autòmats, veiem un exemple molt senzill de model checking extret de *An Introduction to Practical Methods Using Temporal Logic*, [7].

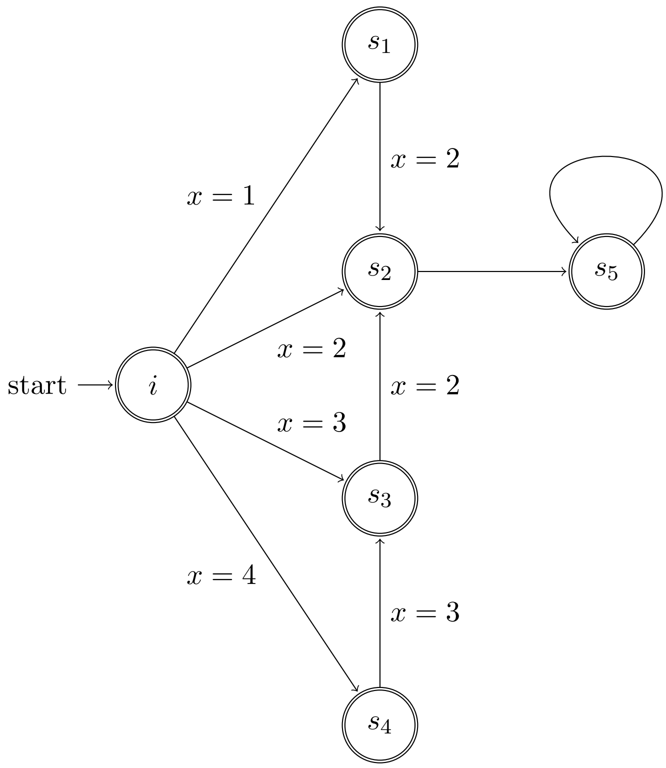
Exemple 4.8. Considerem el següent programa:

```
  int x = rand()%4+1;
while(x!=2){
  if(x<2)
    x = x+1;
  else
    x = x-1;
}
```

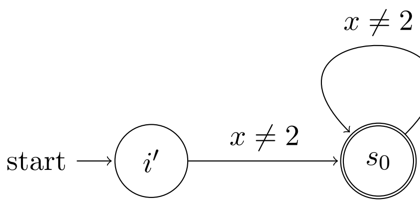
i suposem que volem comprovar que es compleix

$$\varphi = \Diamond(x = 2).$$

L'autòmat B_S corresponent al programa és el següent:



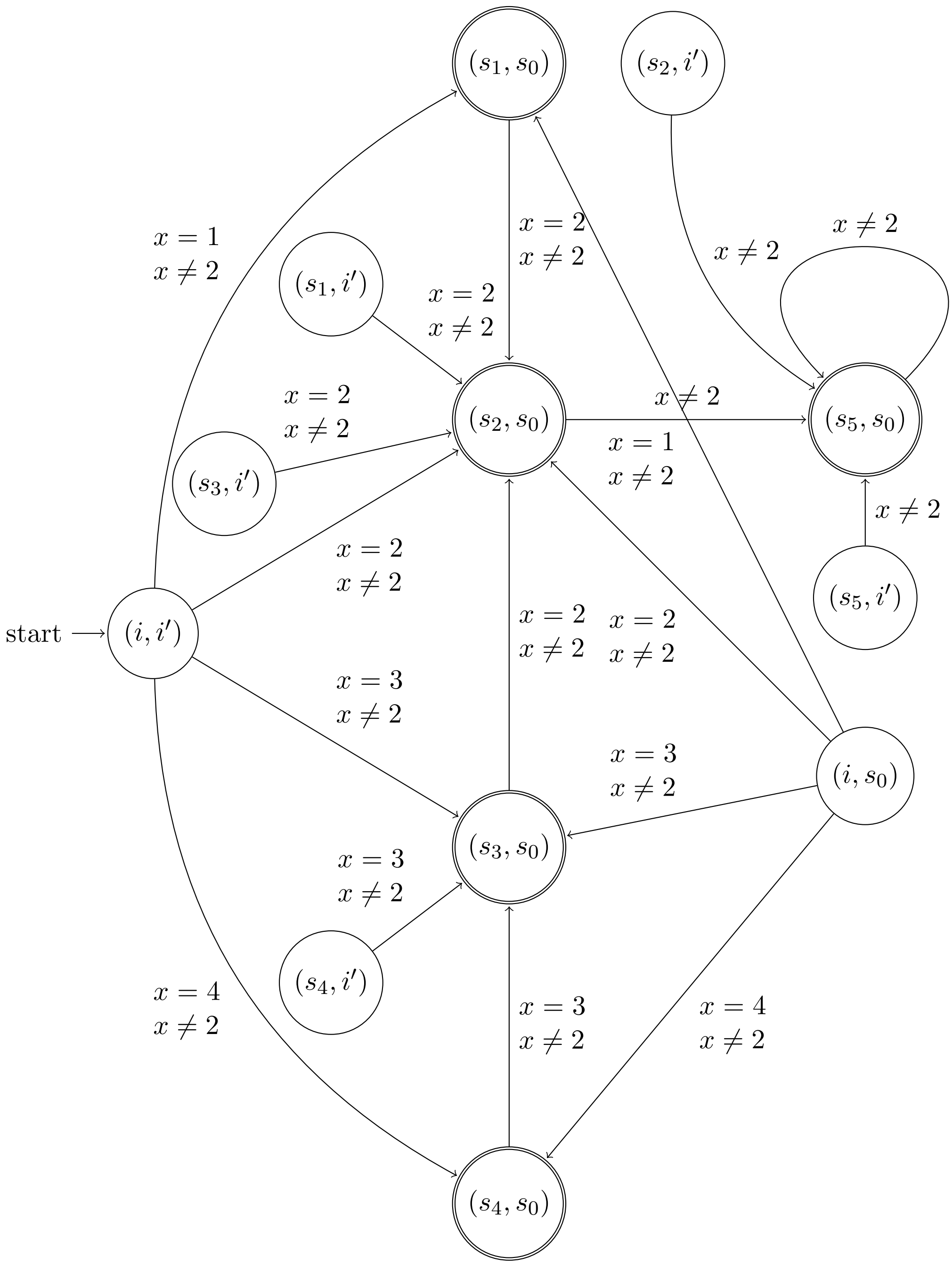
Ara hem de construir l'autòmat $B_{\neg\varphi}$ de la negació de la fórmula φ, és a dir, de $\neg\Diamond(x = 2)$; o, equivalentment, de $\Box(x \neq 2)$. És el següent:



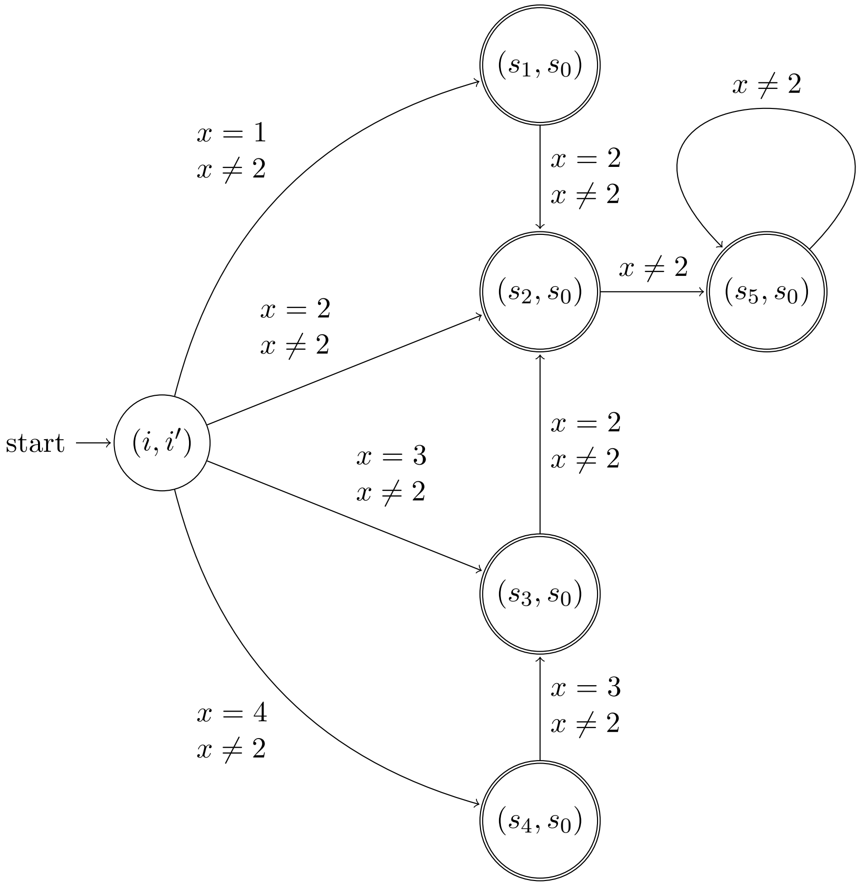
Recordem que volem veure que

$$\mathit{seqüències}(B_S) \cap \mathit{seqüències}(B_{\neg\varphi}) = \emptyset.$$

Per fer-ho, construïm $B_S \times B_{\neg\varphi}$ i determinem si és buit o no ho és. L'autòmat $B_S \times B_{\neg\varphi}$ és el següent:



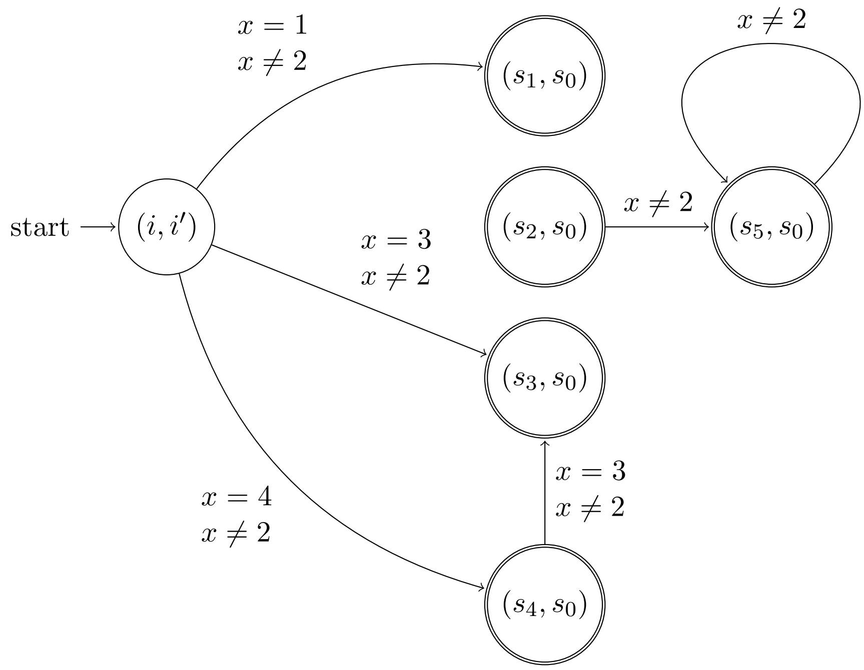
Per començar podem eliminar els estats inaccessibles, i ens queda:



Recordem ara que per comprovar si un autòmat és buit apliquem els següents passos de forma cíclica:

- Eliminar arestes inconsistents
- Eliminar estats dels quals no en surt cap aresta
- Eliminar conjunts d'estats terminals sense estats finals

Eliminem arestes inconsistents:



Eliminant el subgraf inaccessible format pels estats (s_2, s_0) i (s_5, s_0) i els estats dels quals no en surt cap aresta, arribem a un conjunt buit d'estats. Per tant, el sistema compleix la condició $\Diamond(x = 2)$.

Per acabar aquesta secció, fixem-nos en el model checking des del punt de vista de la complexitat. Els aspectes essencials de la construcció són els següents:

- En el pitjor dels casos, $B_{\neg\varphi}$ té mida $O(2^{|\varphi|})$, on $|\varphi|$ és el nombre de variables proposicionals de φ.
- El producte $B_S \times B_{\neg\varphi}$ té mida $O(|B_S| \times |B_{\neg\varphi}|)$.
- Determinar si un autòmat és buit es resol en temps lineal. Per tant, determinar si $B_S \times B_{\neg\varphi}$ és buit es resol en temps $O(|B_S| \times |B_{\neg\varphi}|)$.

Com a conseqüència directa d'aquest anàlisi, tenim el següent teorema.

Teorema 4.9. *Sigui B_S l'autòmat associat a un sistema S i φ una fórmula en PLTL. Comprovar per model checking si $B_S \vDash \varphi$ es pot resoldre en temps $O(|B_S| \times 2^{|\varphi|})$.*

5 Conclusions

En aquesta memòria hem comprovat que la lògica de Prior, una lògica temporal proposicional, ens permet afegir una dimensió temporal a la lògica proposicional clàssica mantenint la completesa i la decidibilitat. En canvi, quan l'hem expandit a una lògica temporal de primer ordre, hem guanyat poder expressiu a costa de sacrificar la completesa i la decidibilitat. No obstant això, hem analitzat alguns fragments d'aquesta lògica que sí són complets.

També hem fet un repàs breu d'una aplicació pràctica de la lògica temporal a la ciència computacional, el *model checking*, exemplificant la importància de la investigació en lògica temporal en l'actualitat.

En aquest treball ens hem restringit a un concepte de temps intuïtiu: basat en instants, transitiu i irreflexiu, i sovint lineal. No cal limitar-se a aquesta noció de temps, però, i altres estudis exploren formalitzacions temporals basades en intervals, o les propietats característiques de models ramificats. Pel que fa a la lògica PLTL, una possible ampliació de la memòria podria consistir en aprofundir en l'*state explosion problem*, una qüestió de gran rellevància per potenciar l'eficàcia dels mètodes que hem estudiat.

Per a les dues primeres seccions de la memòria han estat imprescindibles els coneixements adquirits tant a l'assignatura de *modelització matemàtica de formes de raonament*, per la introducció a la lògica modal, com a l'assignatura de *lògica matemàtica*, per la lògica de primer ordre. Pel que fa a la darrera secció, hem utilitzat autòmats, part del temari de *computabilitat i complexitat*. Per a la resta de conceptes s'han consultat diverses fonts, la majoria relativament recents.

Referències

[1] Gabbay, D. M.; Hodkinson, I.; Reynolds, M. A.: *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects. Volume 1*, Oxford Logic Guides, No. 28, Oxford University Press Inc., New York, 1994.

[2] Goranko, V., Rumberg, A.; Temporal Logic, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. N. (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/logic-temporal/`, 2022.

[3] Venema, Y.: Temporal Logic, *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Goble, L. (ed.), Wiley-Blackwell, Malden, Massachusetts, 2001.

[4] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y., *Modal Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, No. 53, 4a edició, Cambridge University Press, New York, 2010.

[5] Garson, J. W., *Modal Logic for Philosophers*, 2a edició, Cambridge University Press, New York, 2013.

[6] Cerami, M., *An Introduction to Modal Logic III: Soundness of Normal Modal Logics*, Olomouc, 24 d'octubre, 2013.

[7] Fisher, M.: *An Introduction to Practical Formal Methods using Temporal Logic*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, West Sussex, 2011.

[8] Bérard, B., Bidoit, M., Finkel, A., Laroussinie, A. P., Petrucci, L., Schnoebelen, Ph., McKenzie, P.: *Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools*, Springer, Berlin, 2001.

[9] Vardi, M. Y.: An Automata-Theoretic Approach to Linear Temporal Logic, *Logics for Concurrency*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1046, Moller, F., Birtwistle, G. (eds.), Springer, 1996.

[10] Somenzi, F., Bloem, R., Efficient Büchi Automata from LTL Formulae, *Computer Aided Verification*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1855, Emerson, E. A., Sistla A. P. (eds.), Springer, Chicago, Illinois, 2000.

[11] Sebastiani, R., Tonetta, S., "More Deterministic" vs. "Smaller" Büchi Automata for Efficient LTL Model Checking, *Correct Hardware Design and Verification Methods*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2860, Geist, D., Tronci, E. (eds.), Springer, L'Aquila, Itàlia, 2003.