Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Series de Fourier no armónicas

Autor: David Arribas Viera

Director: Dr. Joaquim Ortega Cerdà
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de junio de 2023

Abstract

We study systems of exponentials as subsets of square-integrable functions on an interval, proving that if a set of frequencies is a small enough perturbation of the integers, then the associated system of exponentials is a Riesz basis. We also prove that this result can be extended to complex frequencies that lie in a horizontal strip in the complex plane.

Resumen

Estudiamos sistemas de exponenciales como subconjuntos de las funciones de cuadrado integrable en un intervalo, demostrando que si un conjunto de frecuencias es una perturbación suficientemente pequeña de los números enteros, entonces el sistema de exponenciales asociado es una base de Riesz. También demostramos que este resultado se puede extender a frecuencias complejas que se encuentren en una banda horizontal en el plano complejo.

2020 Mathematics Subject Classification. 30D99, 42A16, 46C99, 46E30

Índice

Introducción y estructura de la memoria

En las asignaturas del grado, particularmente en la asignatura de Análisis harmónico y Teoría de la señal, hemos estudiado en detalle el espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ y la base ortonormal clásica dada por las funciones exponenciales $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Hemos visto que toda función de $L^2[-\pi, \pi]$ puede ser escrita como

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

donde la igualdad significa la convergencia en la norma de $L^2[-\pi, \pi]$. La pregunta que nos hacemos a continuación es la siguiente: dada una sucesión de escalares reales o complejos $\{\lambda_n\}$, ¿podemos decir que el sistema de exponenciales asociado $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$? Está claro que dada una sucesión $\{\lambda_n\}$ cualquiera no obtendremos una base ortonormal, pero podría ser que las funciones exponenciales asociadas tuviesen buenas propiedades como sistema generador de $L^2[-\pi, \pi]$.

Esto es lo que exploraremos en profundidad en el primer capítulo, introduciendo las nociones de base de Schauder y de base de Riesz, y viendo un teorema que da diversas caracterizaciones de las bases de Riesz en espacios de Hilbert que mostrará porque su estudio es de gran interés. Además, en el primer capítulo demostraremos uno de los resultados principales del trabajo, el teorema de $\frac{1}{4}$ de Kadec: si una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales cumple $\sup_n |\lambda_n - n| < \frac{1}{4}$, entonces el sistema de funciones exponenciales asociado será una base de Riesz.

En el segundo capítulo, nuestro interés será demostrar dos resultados acerca de la constante que aparece en el teorema de Kadec. En primer lugar, veremos que la condición $|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{4}$ no será suficiente para garantizar el resultado del teorema, ya que daremos un contraejemplo explícito. También veremos que tampoco es suficiente que $|\lambda_n - n| < \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ para garantizar que tengamos una base de Riesz. Cabe destacar que para llegar a estos resultados antes tendremos que hacer un estudio en profundidad de las funciones enteras de orden finito hasta llegar al teorema de factorización de Hadamard.

Finalmente, en el último capítulo demostraremos la siguiente generalización del teorema de Kadec a escalares complejos: si $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ cumple que $\sup_n |\mathrm{Re}(\lambda_n) - n| < \dfrac{1}{4}$ y $\sup_n |\mathrm{Im}(\lambda_n)| < \infty$, entonces el sistema exponencial asociado será una base de Riesz de $L^2[-\pi, \pi]$. Para ello, necesitaremos introducir dos conceptos clave. El primero es el espacio de funciones de Paley-Wiener, que está formado por las funciones enteras, de tipo exponencial menor o igual que π y de $L^2(\mathbb{R})$. Y el segundo es el concepto de *frame* en espacios de Hilbert, que nos servirá para poder caracterizar las bases de Riesz como *frames* exactos y así poder afrontar nuestro problema desde un ángulo distinto.

Es interesante observar que aunque este problema trata sobre funciones de variable real (definidas en un intervalo), necesitamos herramientas profundas del análisis de variable compleja, como lo son el teorema de Hadamard o el espacio de Paley-Wiener, para poder llegar a los resultados que queremos, como se mostrará en este trabajo.

1. Bases en espacios de Hilbert

1.1. Bases de Schauder

En un espacio de Hilbert H llamamos base ortonormal a cualquier sistema ortonormal completo. Es decir, una base ortonormal es un conjunto de vectores ortonormales $\{f_n\}$ tal que el conjunto generado por sus combinaciones lineales es denso en H. Sabemos también que la noción de completitud es equivalente a que $\{f_n\}^{\perp} = 0$ y a que el conjunto $\{f_n\}$ sea maximal, es decir, que no esté estrictamente contenido en otro sistema ortonormal.

En la siguiente definición generalizamos esta idea a espacios de Banach X, que serán siempre sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y que asumiremos, a no ser que se diga lo contrario, que son de dimensión infinita.

Definición 1.1. Se dice que una sucesión de vectores $\{f_n\}$ de un espacio de Banach X es una base de Schauder si a todo $x \in X$ le corresponde una única sucesión de escalares $\{c_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n,$$

donde se entiende que la convergencia es la de las sumas parciales,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \right\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Se tiene entonces que las bases ortonormales en espacios de Hilbert son bases de Schauder, que llamaremos simplemente bases a partir de ahora.

En ocasiones el concepto de base es más restrictivo de lo que querríamos y por ello se usa el concepto de completitud, que recordamos a continuación.

Definición 1.2. Un subconjunto $\{f_n\} \subset X$ es completo si sus combinaciones lineales finitas, que denotamos por $Span(\{f_n\})$, son densas en X; esto es, si dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existen escalares $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$\|x - (c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n)\| < \varepsilon.$$

Se observa que toda base es un conjunto completo, pero no al revés, puesto que en un conjunto completo los coeficientes $c_1, \dots, c_n$ no tienen porque ser únicos.

Como ya hemos dicho, en espacios de Hilbert, no es difícil ver que un sistema ortonormal $\{x_n\}$ es completo si y solo si se cumple que $\{x_n\}^{\perp} = \{0\}$. En espacios de Banach se tiene un resultado análogo, que es consecuencia del siguiente teorema avanzado de análisis funcional (el teorema tiene versiones más generales, lo que usamos nosotros es un corolario del mismo).

Teorema 1.3 (Hahn-Banach)**.** *Sea Y un espacio de Banach y $X \subset Y$ con $\overline{X} \neq Y$. Dado $y \in Y \setminus \overline{X}$, existe un operador lineal y acotado $T : Y \to \mathbb{C}$ tal que $T(X) = 0$ (y también $T(\overline{X}) = 0$ por ser T continuo) y $T(y) \neq 0$.*

El teorema de Hahn-Banach nos da un criterio para saber si un conjunto $\{f_n\}$ es completo: si comprobamos que dado un operador lineal y continuo T, la condición $T(f_n) = 0$ para todo $n \geq 1$ implica que $T = 0$, entonces no existirá ningún $y \in X \setminus \overline{Span(\{f_n\})}$ con $T(y) \neq 0$, y por el teorema de Hahn-Banach esto significará que $X \setminus \overline{Span(\{f_n\})} = \emptyset$ y finalmente $X = \overline{Span(\{f_n\})}$, por lo que $Span(\{f_n\})$ es denso y $\{f_n\}$ es completo.

Observación 1.4. Sabemos que el dual del espacio $L^p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ es $L^q[a,b]$, con $1/p + 1/q = 1$. Es decir, que a toda forma lineal T le corresponde una única $g \in L^q[a,b]$ tal que

$$T(f) = T_g(f) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\, dx.$$

Por lo tanto, un sistema $\{f_n\}$ será completo si dadas las relaciones

$$\int_a^b f_n(x)\overline{g}(x)\, dx = 0$$

para $n \geq 1$ se tiene que necesariamente $g = 0$.

Usando esta última observación se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *El sistema trigonométrico* $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *es completo en* $L^p[-\pi,\pi]$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Necesitamos ver que dada una función $f \in L^q[-\pi,\pi]$, las relaciones

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt = 0$$

para $n \in \mathbb{Z}$ implican que $f = 0$. Sea $F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(y)\, dy$. Dado $c \in \mathbb{C}$ y $n = \pm 1, \pm 2 \ldots$ tenemos, integrando por partes con $u = F(t) - c$ y $dv = e^{-int}dt$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (F(t)-c)e^{-int}\, dt =& -(F(t)-c)\frac{e^{-int}}{in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt \\ =& \frac{c}{in}e^{-int}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,\end{aligned} \tag{1.1}$$

ya que $F(\pi)$ y la segunda integral son 0 por hipótesis y claramente $F(-\pi) = 0$. Escogemos entonces c para que esto también se cumpla para $n = 0$ y definimos $g(t) = F(t) - c$. Tenemos que tanto F como g son continuas, y g cumple que $g(\pi) = g(-\pi)$. En efecto, como $|f(t)\chi_{[t_0,t]}| \leq |f(t)|$ y $f \in L^q[-\pi,\pi] \subset L^1[-\pi,\pi]$, por el teorema de convergencia dominada podemos entrar el límite dentro de la integral en el cálculo que sigue:

$$\lim_{t\to t_0} F(t) - F(t_0) = \lim_{t\to t_0} \int_{t_0}^{t} f(y)\, dy = \lim_{t\to t_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\chi_{[t_0,t]}\, dy = 0.$$

Al ser g 2π-periódica (en nuestro caso, que tenga el mismo valor en $-\pi$ y π) y continua, el teorema de Weierstrass de aproximación de funciones continuas por polinomios trigonométricos (consecuencia del teorema de Stone-Weierstrass visto en Análisis Matemático) nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

tal que $|g(t) - p(t)| < \varepsilon$ si $|t| \leq \pi$. Pero por (1.1) y la linealidad de la integral tenemos que

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{p}(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)p(t)\, dt,$$

porque esta integral es el producto escalar en $L^2[-\pi,\pi]$ y es hermítico ($\langle g,p\rangle = \overline{\langle p,g\rangle}$). Tenemos además que

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)g(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)p(t)\,dt \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g}(t)(g(t)-p(t))\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt \leq \varepsilon\|g\|_2,\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Como ε es arbitrario llegamos finalmente a que $g=0$, $F=c$ y $f=0$ como queríamos ver. □

1.2. Funcionales asociados a una base

Si $\{x_n\}$ es una base y consideramos un elemento $x \in X$, la unicidad de los coeficientes $\{c_n\}$ en la expansión $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.6. Dada una base $\{x_n\}$ de un espacio de Banach X, llamamos funcionales de los coeficientes a las funciones $f_n : X \to \mathbb{C}$ que asignan a cada elemento $x \in X$ su coeficiente c_n en la base, es decir, tales que si $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, entonces $f_n(x) = c_n$ para $n \geq 1$.

Cuando se estudia un espacio de Banach X, una herramienta útil para hacerlo es intentar entender la estructura de su dual topológico X^*. Los funcionales asociados a una base son claramente lineales, pero a primera vista no está claro que sean operadores acotados. Afortunadamente el teorema 1.9 nos dirá que estos funcionales son efectivamente del dual, lo que nos ayudará más adelante en el estudio de bases en espacios de Hilbert. Para demostrarlo, necesitamos previamente enunciar otro importante teorema de análisis funcional, muy útil cuando se quiere demostrar que un operador entre dos espacios de Banach es un isomorfismo.

Teorema 1.7 (Aplicación abierta)**.** *Si X e Y son dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal, acotado y exhaustivo, entonces T es abierto (es decir, que envía abiertos de X en abiertos de Y).*

Corolario 1.8 (Inversa acotada)**.** *Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal, acotado y biyectivo, entonces T es un isomorfismo entre X e Y.*

Demostración. Como T es biyectivo, en particular es exhaustivo, por lo que por el teorema de la aplicación abierta T es abierto y T^{-1} es continuo, que demuestra que T es un isomorfismo topológico. □

A partir de ahora en ocasiones llamaremos operador invertible a un operador biyectivo; tendremos entonces por el teorema de la aplicación abierta que un operador acotado invertible será un isomorfismo.

Teorema 1.9. *Sea $\{x_n\}$ una base de un espacio de Banach X y $\{f_n\}$ su sucesión de funcionales asociada. Entonces $f_n \in X^*$ para todo $n \geq 1$ y además existe una constante M tal que $1 \leq \|x_n\|_X \|f_n\|_{X^*} \leq M$.*

Demostración. El primer paso de la demostración es considerar el espacio de Banach Y de sucesiones de escalares $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ para las que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ converge en X, junto con la norma

$$\|\{c_n\}\|_Y = \sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X < \infty.$$

Se puede comprobar fácilmente que la aplicación así definida cumple las propiedades de una norma, y que Y es completo es consecuencia del hecho de que los escalares pertenecen a $\mathbb{C}$, que es un cuerpo completo (la comprobación con rigor de la completitud de Y no la hacemos aquí; es larga y se sale de los objetivos de este escrito).

Este espacio Y es isomorfo a X, y el isomorfismo viene dado por el operador que envía una sucesión de escalares a su correspondiente elemento en X,

$$T(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

T es lineal y como $\{x_n\}$ es una base, también es biyectivo (a todo elemento $x \in X$ le corresponde una única sucesión de escalares de Y). Para ver que T es continuo, si $\{c_n\} \subset Y$, observamos que

$$\|T(\{c_n\})\|_X = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|_X \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X = \|\{c_n\}\|_Y,$$

por lo que $\|T\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 1$ y T es acotado. Finalmente, por el teorema de la aplicación abierta obtenemos que T es un isomorfismo.

El segundo paso de la demostración es usar este isomorfismo T para dar una cota superior de la norma de los funcionales de los coeficientes f_n como operadores del dual, lo que nos dirá que son continuos. En efecto, dado un elemento $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| \|x_n\|_X = |c_n| \|x_n\|_X = \|c_n x_n\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right\|_X \\ &\leq 2 \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X = 2\ \|T^{-1} x\|_Y \leq 2\ \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el hecho de que T es biyectivo y en la última desigualdad que T^{-1} es continuo. Observamos finalmente, escogiendo como constante $M = 2\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, que

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{\|x_n\|_X} \|x\|_X,$$

por lo que los funcionales f_n son continuos con $\|f_n\|_{X^*} \leq \dfrac{M}{\|x_n\|_X}$ y se cumple entonces que

$$1 = f_n(x_n) \leq \|f_n\|_{X^*} \|x_n\|_X \leq M. \qquad \square$$

Cuando pensamos en la sucesión de funcionales $\{f_n\}$ asociada a una base $\{x_n\}$, una pregunta que surge de manera natural es qué propiedades tiene $Span(\{f_n\})$ como subespacio del dual X^*. En los siguientes dos teoremas veremos una situación en la que podemos asegurar que los funcionales asociados a una base son efectivamente una base del dual. Para hacerlo, introducimos primero dos conceptos que necesitaremos.

Definición 1.10. Con la notación del teorema 1.9, definimos la n-ésima suma parcial asociada a la base $\{x_n\}$ como el operador $S_n : X \to X$ definido por

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k.$$

Observación 1.11. Como los f_n son lineales se observa que S_n también lo es, y además fijado $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$ y $n \geq 1$, observamos que

$$\|S_n(x)\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X,$$

donde la última desigualdad la hemos visto en la demostración del teorema 1.9. Obtenemos entonces que $\|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ y la sucesión $\{S_n\}$ tiene norma uniformemente acotada, es decir que $\sup_n \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ (y en particular son operadores continuos).

Definición 1.12. Dado un operador $T : X \to X$ en un espacio de Banach, se define el operador adjunto de T como el operador $T^* : X^* \to X^*$ tal que para todo $g \in X^*$ y todo $x \in X$, se verifica que

$$(T^* g)(x) = g(Tx).$$

Similarmente, si H es un espacio de Hilbert y $T : H \to H$, entonces el adjunto de T es el operador $T^* : H \to H$ tal que $\forall x, y \in H$, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. Notamos que la similitud reside en el hecho de que H^* es isomorfo a H y por lo tanto toda forma del dual se puede pensar como hacer el producto escalar con un elemento de H.

Finalmente, decimos que T es autoadjunto si $T = T^*$.

Observación 1.13. Si T es continuo entonces T^* también y $\|T^*\| = \|T\|$. Presentamos la demostración para espacios de Hilbert ya que es donde en última instancia aplicaremos estos resultados. Tenemos que si T es continuo,

$$\|T^* x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle T^* x, y \rangle| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, Ty \rangle| \leq \|x\| \|T\|$$

por lo que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Además, dados $x, y \in H$, se tiene que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \langle T^{**} x, y \rangle,$$

por lo que $T^{**} = T$. Tenemos finalmente que

$$\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$$

por lo que acabamos de ver, y finalmente $\|T\| = \|T^*\|$.

Teorema 1.14. *Sea $\{x_n\}$ una base de un espacio de Banach X y $\{f_n\}$ su sucesión de funcionales asociada. Entonces $\{f_n\}$ es una base de $\overline{Span(\{f_n\})} \subseteq X^*$ y dado $g \in \overline{Span(\{f_n\})}$ tenemos la expansión*

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) f_n.$$

Demostración. Dado $g \in X^*$, observamos que

$$(S_n^* g)(x) = g(S_n x) = g\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k) f_k \right)(x)$$

para todo $x \in X$, por lo que $S_n^* g = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f_k$. El primer paso de la demostración es ver que si $g \in \overline{Span(\{f_n\})}$, entonces habrá convergencia $S_n^* g \to g$ cuando $n \to \infty$, por lo que habremos visto que toda g admite al menos una representación como la deseada.

Supongamos primero que g es una combinación finita de los f_n, $g = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$. Entonces para $n \geq m$ se tiene que

$$S_n^* g = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f_k = \sum_{k=1}^{m} g(x_k) f_k = g.$$

Y si $g \in \overline{Span(\{f_n\})}$ es un elemento cualquiera, es decir $g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, entonces por la convergencia de las sumas parciales dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $h = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$ con $\|g - h\| < \varepsilon/(M+1)$, donde $M = \sup_{n\geq 1} \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)}$ (que existe por la observación 1.11). Entonces, si $n \geq m$, usando el caso finito que ya hemos demostrado,

$$\begin{aligned}
\|S_n^* g - g\|_{X^*} \leq & \|S_n^* g - S_n^* h\|_{X^*} + \|S_n^* h - h\|_{X^*} + \|h - g\|_{X^*} \\
= & \|S_n^* g - S_n^* h\|_{X^*} + \|g - h\|_{X^*} \\
= & \|S_n^*(g - h)\|_{X^*} + \|g - h\|_{X^*} \\
\leq & (\|S_n\|_{\mathcal{L}(X^*)} + 1)\|g - h\|_{X^*} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\|S_n^*\| = \|S_n\|$.

Para ver la unicidad observamos que, por lo que acabamos de demostrar, los coeficientes en la expansión $g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ son $c_n = g(x_n)$ y están unívocamente determinados por la función g. $\square$

Para demostrar el segundo teorema, necesitamos introducir en primer lugar la idea de espacio de Banach reflexivo.

Definición 1.15. Un espacio de Banach es reflexivo si $X^{**} \cong X$. Concretamente, X es reflexivo si la aplicación P que envía un elemento $x \in X$ al operador "evaluar en x", $P : X \to X^{**}$, $x \mapsto P_x$ es un isomorfismo. Observamos que $P_x : X^* \to \mathbb{C}$ cumple que $P_x(f) = f(x)$ para $f \in X^*$.

Teorema 1.16. *Si $\{x_n\}$ es una base de un espacio de Banach reflexivo X, entonces la sucesión de funcionales $\{f_n\}$ asociada a la base es una base de X^*.*

Demostración. Por el teorema anterior, solo es necesario ver que $\overline{Span(\{f_n\})} = X^*$, o lo que es lo mismo, que $\{f_n\}$ es completo en X^*. Para ello utilizaremos el teorema de Hahn-Banach. Hay que ver que dado un operador $T \in X^{**}$, si $T(f_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces necesariamente $T = 0$. Como X es reflexivo, por la definición anterior existe un $x \in X$ para el que $T = P_x$. Es decir, que la hipótesis $T(f_n) = 0$ se convierte en $f_n(x) = 0$ para $n \geq 1$. Finalmente, como $\{x_n\}$ es base, sabemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n = 0$ por lo que $P_x = T = 0$ como queríamos ver. $\square$

Para acabar la sección, consideraremos el caso particular en que $X = H$ es un espacio de Hilbert. Necesitamos antes la siguiente definición.

Definición 1.17. Dada una sucesión $\{x_n\} \subset H$, decimos que la sucesión $\{y_n\}$ es biortogonal a $\{x_n\}$ si para todo $n, m \geq 1$

$$\langle x_n, y_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{si} \quad n = m. \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que dada una sucesión $\{x_n\}$ existirá una sucesión biortogonal $\{y_n\}$ si y solo si $\{x_n\}$ es minimal; esto es, que todo elemento de la sucesión no pertenece a la adherencia del subespacio generado por las combinaciones lineales de los otros elementos de la sucesión: para todo $k \geq 1$, $x_k \notin \overline{Span(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{x_k\})}$, donde en este caso $\{x_k\}$ ha denotado el conjunto unitario formado por x_k. En efecto, por el teorema de Hahn-Banach, fijado $k \geq 1$, como la sucesión $\{x_n\}$ es minimal, vemos que existe un operador lineal y acotado T_k tal que $T_k(x_n) = 0$ si $n \neq k$ y $T_k(x_k) \neq 0$, que podemos normalizar multiplicando por una constante para que $T_k(x_k) = 1$. Ahora, por el isomorfismo entre H y H^*, sabemos que al operador T_k le corresponde un único $y_k \in H$ tal que

$$T_k(x) = \langle x, y_k \rangle,$$

y la sucesión $\{y_k\}$ es precisamente la sucesión biortogonal a $\{x_n\}$ que buscábamos.

También tenemos que la sucesión biortogonal será única si y solo si $\{x_n\}$ es completo en H. Para ver esto, supongamos que $\{x_n\}$ es completo y que existen $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones biortogonales a $\{x_n\}$, es decir, que

$$\langle x_n, y_m \rangle = \langle x_n, z_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Como $\{x_n\}$ es completo, todo $x \in H$ admite al menos una representación del estilo $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Fijado $m \geq 1$, tenemos que

$$\langle x, y_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x_n, y_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x_n, z_m \rangle = \langle x, z_m \rangle,$$

por lo que $y_m = z_m$ y como m era arbitrario, obtenemos que las dos sucesiones son en realidad la misma.

Tenemos también el siguiente resultado.

Proposición 1.18. *Si $\{x_n\}$ es una base de un espacio de Hilbert H, la sucesión biortogonal (única) a la base es también una base.*

Demostración. Sea f_n el n-ésimo funcional asociado a la base $\{x_n\}$. De nuevo por el teorema de dualidad de Riesz, existe un único $y_n \in H$ tal que $f_n(x) = \langle x, y_n \rangle$. Por definición de los f_n observamos que

$$f_n(x_m) = \langle x_m, y_n \rangle = \delta_{nm},$$

por lo que la sucesión $\{y_n\}$ es biortogonal a $\{x_n\}$ y es única.

Y como todo espacio de Hilbert es reflexivo, los teoremas 1.14 y 1.16 implican que $\{f_n\}$ es base del dual y que $\{y_n\}$ es base de H. Tenemos además, dado $x \in H$ cualquiera, las expansiones

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n. \qquad \square$$

1.3. Bases de Riesz

Cuando se conocen bases de espacios de Banach, un objeto de estudio natural es el de construir bases nuevas a partir de las ya conocidas. Para ello definimos primero el concepto de bases equivalentes.

Definición 1.19. Dos bases $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en un espacio de Banach son equivalentes cuando $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ converge.

Nuestro objetivo será construir nuevas bases que sean equivalentes a una base dada. Solo con la definición no está claro cómo hacerlo, pero el siguiente teorema nos da una propiedad que caracteriza las bases equivalentes. Necesitamos para su demostración enunciar un resultado auxiliar, que usaremos sin demostrar, que es un corolario de un teorema de análisis funcional más avanzado conocido como teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 1.20 (Banach-Steinhaus)**.** *Sea X un espacio de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores cumpliendo que $T_n \in X^*$ para todo $n \geq 1$ y que para todo $x \in X$, $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Entonces $T \in X^*$.*

Teorema 1.21. *Dos bases $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de un espacio de Banach X son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo topológico $T : X \to X$ tal que para todo $n \geq 1$, $Tx_n = y_n$.*

Demostración. Supongamos que existe el isomorfismo T. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$, tenemos que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$$

y el resultado es consecuencia de que T es biyectivo. Para la otra implicación, supongamos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son equivalentes y consideremos la aplicación que dado un elemento $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$ lo envía a $y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \in X$. Está bien definida por ser las bases equivalentes y además $Tx_n = y_n$, y falta ver que es un isomorfismo.

La función es lineal como consecuencia de que la suma lo es. Es inyectiva porque dados $a, b \in X$ sabemos que tendrán representaciones distintas respecto a la base $\{x_n\}$ y darán lugar a elementos distintos cuando les apliquemos T por ser $\{y_n\}$ base. También es exhaustiva ya que si $y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ existe y $Tx = y$.

Para ver que es acotado, usaremos el teorema de Banach-Steinhaus. Para ello definimos para cada $n \geq 1$ el operador T_n como $T_n x = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, que es acotado por la observación 1.11. Claramente fijado x tenemos la convergencia puntual

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k y_k = \lim_{n\to\infty} T_n x,$$

y por el teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que T es acotado. Finalmente, T es un operador lineal, biyectivo y acotado y por el teorema de la aplicación abierta es un isomorfismo. □

Si nos restringimos a espacios de Hilbert, las bases ortonormales son de gran interés por sus buenas propiedades, pero no es en general fácil obtenerlas. Esta limitación motiva la siguiente definición.

Definición 1.22. Una base de un espacio de Hilbert que es equivalente a una base ortonormal se llama base de Riesz.

Comenzamos observando que si $\{e_n\}$ es base ortonormal y T es un isomorfismo tal que $Te_n = f_n$, entonces $\|f_n\|_H = \|Te_n\|_H \leq \|T\|_{H^*}$ y también

$$1 = \|T^{-1} f_n\|_H \leq \|T^{-1}\|_{H^*} \|f_n\|_H \;\Rightarrow\; \frac{1}{\|T^{-1}\|_{H^*}} \leq \|f_n\|_H,$$

por lo que obtenemos las desigualdades $\frac{1}{\|T^{-1}\|_{H^*}} \leq \|f_n\|_H \leq \|T\|_{H^*}$ para todo $n \geq 1$, de manera que las normas de las f_n están uniformemente acotadas.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar un teorema que nos dará varias caracterizaciones de las bases de Riesz y en particular ilustrará parte del interés que tienen estas sucesiones. Para ello demostramos primero una serie de lemas.

Lema 1.23. *En un espacio de Hilbert H, bases equivalentes tienen bases biortogonales equivalentes.*

Demostración. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos bases de un espacio de Hilbert. Se sigue por lo que hemos visto al final de la sección 1.2 que ambas tienen una única sucesión biortogonal asociada, llamémoslas $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$, y por la proposición 1.18 sabemos que también son bases de H.

Sea T el isomorfismo que cumple $Tx_n = y_n$ para $n \geq 1$. Observamos que para $n, m \geq 1$ fijos tenemos las igualdades

$$\langle T^* g_n, x_m \rangle = \langle g_n, Tx_m \rangle = \langle g_n, y_m \rangle = \delta_{nm} = \langle f_n, x_m \rangle.$$

Entonces dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$ tenemos que

$$\langle T^* g_n, x \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c_n} \langle T^* g_n, x_m \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c_n} \langle f_n, x_m \rangle = \langle f_n, x \rangle,$$

por lo que $T^* g_n = f_n$ y como T^* es también un isomorfismo, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son equivalentes como queríamos ver. □

Corolario 1.24. *La sucesión biortogonal a una base de Riesz es también una base de Riesz.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una base de Riesz obtenida de la base ortonormal $\{e_n\}$ mediante T. De la propiedad $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$ vemos que la sucesión biortogonal (única) a $\{e_n\}$ es ella misma, por lo que por el lema 1.23 la sucesión biortogonal a $\{f_n\}$ también es equivalente a $\{e_n\}$ y es base de Riesz. □

Consideremos ahora un operador $T : H \to H$ en un espacio de Hilbert. Se tiene la siguiente caracterización: T es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$. En efecto, T es autoadjunto si y solo si para todo $x \in H$,

$$0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^* x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \overline{\langle Tx, x \rangle} = 2i\mathrm{Im}(\langle Tx, x \rangle) \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.25. Un operador $T : H \to H$ en un espacio de Hilbert es positivo si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

Por el cálculo anterior, todo operador positivo es autoadjunto. Los operadores positivos tienen una propiedad que necesitaremos para demostrar el teorema:

Teorema 1.26. *Si T es un operador positivo, entonces T tiene una única raíz cuadrada positiva. Es decir, existe un único operador invertible P tal que $T = P^2$ y $\langle Px, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.*

Demostración. Es consecuencia de que los operadores positivos forman parte de un conjunto más grande de operadores, llamados operadores normales, para los que hay un resultado análogo al teorema espectral para operadores compactos que se ha visto en la asignatura de Análisis Real y Funcional. Esto permite encontrar la raíz cuadrada P de T, pero no lo veremos aquí ya que es un resultado avanzado de análisis funcional y no es de mayor interés para nosotros. $\square$

Demostramos también el conocido teorema de la gráfica cerrada (en espacios de Banach), que es una consecuencia directa del teorema de la aplicación abierta.

Teorema 1.27 (Gráfica cerrada)**.** *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre espacios de Banach, y sea $G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$. Entonces T es continuo si y solo si $G(T)$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.*

Demostración. La implicación directa está clara, ya que si $x_n \to x$ y T es continuo, entonces $Tx_n \to Tx$ y por lo tanto $(x_n, Tx_n) \to (x, Tx) \in G(T)$, por lo que $G(T)$ es cerrado.

Supongamos ahora que $G(T)$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Si dotamos $X \times Y$ de la norma $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$, $X \times Y$ es también un espacio de Banach por serlo X e Y. Como T es lineal, $G(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach, y es también un espacio de Banach.

Definimos ahora las proyecciones $p_1 : G(T) \to X$, $p_1(x, Tx) = x$ y $p_2 : X \times Y \to Y$, $p_2(x, y) = y$. Las proyecciones son aplicaciones lineales entre espacios de Banach cumpliendo $\|p_1\| = \|p_2\| = 1$, por lo que son continuas. Además, p_1 es claramente inyectiva y exhaustiva y por el teorema de la aplicación abierta su inversa p_1^{-1} es continua. Finalmente, observamos que $T = p_2 \circ p_1^{-1}$ es composición de funciones continuas, y es continua. $\square$

Teorema 1.28. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Son equivalentes:*

(1) *$\{f_n\}$ es una base de Riesz.*

(2) *Existe un producto escalar equivalente (es decir, que genera una norma equivalente a la que genera el producto escalar original) en el que la base $\{f_n\}$ es ortonormal.*

(3) *La sucesión $\{f_n\}$ es completa en H y existen constantes $A, B > 0$ para las que dado $n \geq 1$ y una colección finita de escalares $c_1, \dots, c_n$ se verifica que*

$$A \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

(4) *La sucesión $\{f_n\}$ es completa en H y su matriz de Gram asociada*

$$\{\langle f_i, f_j \rangle\}_{i,j=1}^{\infty}$$

genera un isomorfismo de l^2 en l^2.

(5) *La sucesión $\{f_n\}$ es completa en H y tiene una sucesión biortogonal $\{g_n\}$ completa en H tal que para todo $x \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n \rangle|^2 < \infty.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Como $\{f_n\}$ es una base de Riesz, existe un isomorfismo T y una base ortonormal $\{e_n\}$ tales que $Te_n = f_n$ para $n \geq 1$. Si definimos nuestro nuevo producto escalar como

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle Tx, Ty\rangle,$$

como T es acotado, $\|x\|_1 = \|Tx\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|$ y también como T es biyectivo, $\|x\| = \|T^{-1}x\|_1 \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|_1$. Combinando las desigualdades obtenemos que

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}} \leq \|x\|_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|,$$

y las dos normas son equivalentes, por lo que los productos escalares también. Finalmente,

$$\langle f_n, f_m\rangle_1 = \langle Tf_n, Tf_m\rangle = \langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm},$$

y en efecto $\{f_n\}$ es una sucesión ortonormal con este nuevo producto escalar. Como los productos escalares son equivalentes, $\{f_n\}$ también es completa y vemos que es base ortonormal respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Por la equivalencia de normas y de igual forma que en el párrafo anterior, vemos que $\{f_n\}$ es completa respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Además, para $x \in H$ tenemos las relaciones

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1, \quad m, M > 0.$$

Como $\{f_n\}$ es ortonormal respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ (y cumple la identidad de Parseval), si $x = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$, obtenemos elevando al cuadrado las desigualdades anteriores que

$$m^2 \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right\|^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Por hipótesis, la sucesión $\{f_n\}$ es completa y existe una base ortonormal $\{e_n\}$ para la que $\sum_n c_n f_n$ converge si y solo si $\sum_n c_n e_n$ converge. Para ver que es una base, notamos que si existiese una combinación lineal con algún $c_k \neq 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k = 0$ llegaríamos a que

$$0 < A\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq 0,$$

que es una contradicción, y deducimos que los f_n son base.

(1) $\Rightarrow$ (4): Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal y T el isomorfismo que envía $\{e_n\}$ a $\{f_n\}$. Por ser T invertible, T^* y T^*T también lo son. Sea $A = (a_{ij}) = (\langle T^*Te_j, e_i\rangle)$ la matriz (infinita e invertible) del operador T^*T en la base $\{e_n\}$. Observamos entonces que

$$a_{ij} = \langle T^*Te_j, e_i\rangle = \langle Te_j, Te_i\rangle = \langle f_j, f_i\rangle,$$

por lo que la matriz de Gram de $\{f_n\}$ es la matriz A conjugada, y es invertible.

(4) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que la matriz de Gram de $\{f_n\}$ genera un operador acotado e invertible en l^2; es decir, la aplicación $S : l^2 \to l^2$

$$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\langle f_i, f_j\rangle c_j\right\}_{i=1}^{\infty}$$

es un isomorfismo. En consecuencia, si $\{e_n\}$ es una base ortonormal de H, entonces el operador $T : H \to H$ definido como

$$T\left(\sum_{i\geq 1} c_i e_i\right) = \sum_{i\geq 1} e_i \left(\sum_{j\geq 1} \overline{\langle f_i, f_j\rangle} c_j\right)$$

es un isomorfismo, ya que $T = G^{-1}SG$, donde G es el isomorfismo canónico (fijada la base ortonormal $\{e_n\}$) entre H y l^2. Si llamamos $a_i = \sum_{j\geq 1} \overline{\langle f_i, f_j\rangle} c_j$, podemos ver que

$$\begin{aligned}\left\langle T\left(\sum_{i\geq 1} c_i e_i\right), \sum_{i\geq 1} c_i e_i\right\rangle &= \left\langle \sum_{i\geq 1} a_i e_i, \sum_{i\geq 1} c_i e_i\right\rangle = \sum_{i\geq 1} a_i \overline{c_i} = \sum_{i\geq 1}\left(\sum_{j\geq 1} \langle c_j f_j, c_i f_i\rangle\right) \\ &= \left\langle \sum_{j\geq 1} c_j f_j, \sum_{i\geq 1} c_i f_i\right\rangle = \left\|\sum_{i\geq 1} c_i f_i\right\|^2.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, por lo que T es positivo y por el lema 1.26 existe un operador P tal que $P^2 = T$. Como P es también autoadjunto por ser positivo, $\langle Tx, x\rangle = \langle Px, Px\rangle$ y llegamos a que

$$\left\|\sum_{i\geq 1} c_i f_i\right\|^2 = \left\|P\left(\sum_{i\geq 1} c_i e_i\right)\right\|^2.$$

Finalmente, como P es invertible tenemos que

$$\frac{1}{\|P^{-1}\|^2}\sum_{i\geq 1}|c_i|^2 \leq \left\|\sum_{i\geq 1} c_i f_i\right\|^2 \leq \|P\|^2 \sum_{i\geq 1}|c_i|^2.$$

(1) $\Rightarrow$ (5): Por el lema 1.24, como $\{f_n\}$ es base de Riesz, su sucesión biortogonal $\{g_n\}$ también lo es. En la proposición 1.18 hemos visto que en este caso tenemos para cada $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, g_n\rangle f_n \quad \text{y} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, g_n\rangle g_n.$$

Finalmente, como $\{f_n\}$ es equivalente a una base ortonormal $\{e_n\}$, dado $x \in H$ la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, g_n\rangle f_n$ implica la de $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, g_n\rangle e_n$, por lo que la identidad de Parseval nos da que $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, g_n\rangle|^2 < \infty$. El mismo argumento aplicado a la base $\{g_n\}$ demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, f_n\rangle|^2 < \infty$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Consideremos el operador $P : H \to l^2$ definido por $P(x) = \{\langle x, f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, que por hipótesis está bien definido. Veamos que su gráfica es cerrada. En efecto para $n \geq 1$ fijo,

$$|\langle x_k, f_n\rangle - \langle x, f_n\rangle| = |\langle x_k - x, f_n\rangle| \leq \|x_k - x\|\|f_n\| \to 0 \quad \text{si} \quad x_k \to x.$$

Vemos entonces que $(x_k, \{\langle x_k, f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}) \xrightarrow{k\to\infty} (x, \{\langle x, f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}) \in H \times l^2$. Por el teorema 1.27, el operador P es continuo y tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Px\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, f_n\rangle|^2 \leq C^2\|x\|^2.$$

Similarmente, haciendo el mismo argumento para la sucesión $\{g_n\}$, llegamos a que existe una constante $D > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n \rangle|^2 \leq D^2 \|x\|^2. \tag{1.2}$$

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H, y definamos operadores S y T en $Span(\{f_n\})$ y $Span(\{g_n\})$ (es decir, sobre sus combinaciones lineales finitas) respectivamente de la siguiente forma:

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \qquad \text{y} \qquad T\left(\sum_{k=1}^{n} c_k g_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Si llamamos $x = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, g_k \rangle f_k$ (por biortogonalidad), la identidad de Parseval y (1.2) muestran que

$$\|Sx\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\langle x, g_k \rangle|^2} \leq D \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\|.$$

Como las combinaciones lineales finitas de las $\{f_n\}$ y las $\{g_n\}$ son densas, podemos extender S a un operador acotado en todo el espacio H (y T también por el mismo argumento). De nuevo, la biortogonalidad implica que dados $f = \sum_n a_n f_n$ y $g = \sum_m b_m g_m$, se verifica que

$$\langle Sf, Tg \rangle = \langle f, g \rangle,$$

y en consecuencia $\langle f, S^*Tg \rangle = \langle f, g \rangle$. Es decir, que $S^*T = I$ por lo que S^* tiene inversa por la derecha, y necesariamente es exhaustivo. Se puede demostrar, usando el teorema de Banach-Steinhaus, que la exhaustividad del operador adjunto S^* es equivalente a que S admita una inversa continua [TL80, Capítulo 4.9]. Como S es también exhaustivo, obtenemos que S es invertible, y $\{f_n\}$ una base de Riesz. □

Presentamos finalmente un teorema que nos dará un criterio para saber cuando una sucesión $\{y_n\}$ es una base equivalente a una base dada $\{x_n\}$.

Teorema 1.29 (Paley-Wiener). *Sea $\{x_n\}$ una base de un espacio de Banach X y sea $\{y_n\} \subset X$ una sucesión. Si existe un λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que para cualquier colección finita de escalares $c_1, \ldots, c_n$,*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - y_k) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|,$$

entonces $\{y_n\}$ es una base equivalente a $\{x_n\}$.

Demostración. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \in X$ un elemento cualquiera pero fijo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n)$ es también convergente (por ser de Cauchy), por lo que podemos definir el operador $T : X \to X$ como

$$Tx = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n).$$

T es lineal y además por hipótesis está acotado en un conjunto denso de X (las combinaciones lineales finitas de elementos de la base $\{x_n\}$). Esto implica que es un operador acotado en X, y además $\|Tx\| \leq \lambda \|x\|$, por lo que $\|T\| \leq \lambda < 1$. Por la serie de Neumann, $I - T$ es invertible y como $(I - T)x_n = y_n$, obtenemos que $\{y_n\}$ es una base equivalente a $\{x_n\}$. □

1.4. El teorema de $\frac{1}{4}$ de Kadec

En esta sección, nuestro objetivo será demostrar el teorema de $\frac{1}{4}$ de Kadec. Este resultado será consecuencia del teorema de Paley-Wiener, que reformulamos a continuación para el caso concreto de espacios de Hilbert.

Teorema 1.30. *Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert H y sea $\{f_n\} \subset H$ una sucesión para la que existe una constante λ, $0 \leq \lambda < 1$ de manera que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(e_k - f_k) \right\| \leq \lambda \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$$

para cualquier colección finita de escalares $c_1, \ldots, c_n$. Entonces $\{f_n\}$ es una base de Riesz de H.

Observamos que podemos reducirnos a estudiar solo el caso en que $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq 1$. En efecto, si en caso contrario $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2} > 1$, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(e_k - f_k) \right\| \leq \lambda C \iff \frac{1}{C} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(e_k - f_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{C}(e_k - f_k) \right\| \leq \lambda$$

y la nueva colección de escalares $\dfrac{c_1}{C}, \ldots, \dfrac{c_n}{C}$ cumple $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\dfrac{c_k}{C}\right|^2} = 1$.

Observamos entonces que en el contexto del espacio $L^2[-\pi, \pi]$ y el sistema trigonométrico, el criterio de Paley-Wiener se puede escribir finalmente como

$$\left\| \sum_{|n| \leq N} c_n(e^{int} - e^{i\lambda_n t}) \right\| \leq \lambda < 1$$

para cualquier colección de escalares finita cumpliendo $\sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \leq 1$. Notamos también que en lo que queda de sección, escribiremos $\| \cdot \|$ para denotar la norma asociada al producto escalar de $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)\, dt.$$

Para demostrar el teorema de $\dfrac{1}{4}$ de Kadec, necesitamos 2 lemas previos.

Lema 1.31. *El sistema $\{1, \sqrt{2}\cos nt, \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{1}{2}\right) t\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$.*

Demostración. La verificación de que es un sistema ortonormal es sencilla y larga y no la haremos aquí. Solo requiere aplicar técnicas de integración sencillas como la integración por partes o que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es 0.

Veamos que es un sistema completo. Para ello, veremos que cumple las hipótesis para poder aplicar el teorema de Stone-Weierstrass. Si definimos A como el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de nuestro sistema ortonormal, vemos que claramente es un subespacio vectorial de $C[-\pi, \pi]$. Para ver que es estable respecto al producto, usamos las identidades que transforman productos de senos y cosenos en sumas, ya que si $n, m \geq 1$, entonces

(1) $\cos nt \cos mt = \dfrac{\cos(n-m)t + \cos(n+m)t}{2} \in A,$

(2) $\cos nt \sin(m-\frac{1}{2})t = \dfrac{\sin(n+m-\frac{1}{2})t - \sin(n-m+\frac{1}{2})t}{2} \in A,$

(3) $\sin(n-\frac{1}{2})t \sin(m-\frac{1}{2})t = \dfrac{\cos(n-m)t - \cos(n+m-1)t}{2} \in A.$

Por lo que A es una subálgebra de $C[-\pi,\pi]$. A continuación veremos que separa todos los puntos que no sean $-\pi$ (que identificamos de forma periódica con π). Para ello, supongamos que $x, y \in (-\pi,\pi)$, $x \neq y$, y consideramos la función $\cos t$. Si $\cos x \neq \cos y$, ya hemos acabado. Si $\cos x = \cos y$, entonces necesariamente $y = -x$ por lo que llegamos a que $\sin \frac{x}{2} \neq \sin \frac{y}{2} = -\sin \frac{x}{2}$ y A separa puntos. Finalmente, como A contiene las constantes, para todo $x \in (-\pi,\pi)$ la función constante $f \equiv 1$ no se anula en x.

Por el teorema de Stone-Weierstrass, se tiene que A es un subconjunto denso en las funciones continuas 2π-periódicas, que a su vez es un subconjunto denso en $L^2[-\pi,\pi]$, por lo que A es denso en $L^2[-\pi,\pi]$ y nuestro sistema original es completo. □

Lema 1.32. *Para $z \in \mathbb{C}$, se tiene*

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{\pi(z^2-n^2)} \quad \text{y} \quad \tan \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{\pi((n-\frac{1}{2})^2 - z^2)}.$$

Demostración. Tomando la derivada logarítmica en la identidad (vista en la optativa de Funciones de Variable Compleja)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

llegamos a

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2 - z^2}.$$

De manera similar, tomando la derivada logarítmica en

$$\cos \pi z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right),$$

tenemos que

$$-\pi \tan \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8z}{(2n-1)^2 - 4z^2} \Rightarrow \tan \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{\pi(n-\frac{1}{2})^2 - z^2}. \qquad \square$$

Observación 1.33. Usaremos también que se cumplen las siguientes afirmaciones, que no demostramos aquí ya que son un ejercicio elemental:

(1) La función $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ es decreciente en $[0, \frac{1}{4}]$.

(2) La función $g(x) = x \cos \pi x$ es creciente en $[0, \frac{1}{4}]$.

(3) $h(x) = 1 + \sin \pi x - \cos \pi x < 1$ si $0 \leq x < \frac{1}{4}$.

Ya estamos listos para demostrar el teorema.

Teorema 1.34 ($\frac{1}{4}$ de Kadec)**.** *Si* $\{\lambda_n\}$ *es una sucesión de números reales para la que*

$$|\lambda_n - n| \leq L < \frac{1}{4} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *es una base de Riesz de* $L^2[-\pi, \pi]$.

Demostración. Por el teorema de Paley-Wiener, hay que ver que

$$\left\| \sum_{|n|\leq N} c_n (e^{int} - e^{i\lambda_n t}) \right\| \leq \lambda < 1$$

si $\sum_{|n|\leq N} |c_n|^2 \leq 1$. Si escribimos $\delta_n = \lambda_n - n$, entonces tenemos que $e^{int} - e^{i\lambda_n t} = e^{int}(1 - e^{i\delta_n t})$. El primer paso de la demostración será expandir la función $1 - e^{i\delta t}$ respecto a la base ortonormal $\{1, \sqrt{2}\cos nt, \sqrt{2}\sin(n - \frac{1}{2})t\}_{n=1}^{\infty}$. Calculamos el coeficiente de 1:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - e^{i\delta t}\, dt = 1 - \frac{e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta}}{2i\pi\delta} = 1 - \frac{\sin \pi\delta}{\pi\delta}.$$

Usando que $\langle 1, \sqrt{2}\cos nt\rangle = 0$, vemos que

$$\langle 1 - e^{i\delta t}, \sqrt{2}\cos nt\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - e^{i\delta t})\sqrt{2}\cos nt\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}\cos nt\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}J.$$

Para calcular $J = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}\cos nt\, dt$, integrando por partes dos veces llegamos a

$$J = \frac{i\delta}{n^2}(-1)^n(e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta}) + \frac{\delta^2}{n^2}J \;\Rightarrow\; J = \frac{i\delta(-1)^n(e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta})}{n^2 - \delta^2},$$

por lo que

$$\langle 1 - e^{i\delta t}, \sqrt{2}\cos nt\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}J = \frac{(-1)^n\sqrt{2}\delta\sin\pi\delta}{\pi(n^2 - \delta^2)}.$$

Llamando $a_n = n - \frac{1}{2}$ y usando de nuevo que $\langle 1, \sqrt{2}\sin a_n t\rangle = 0$, vemos que

$$\langle 1 - e^{i\delta t}, \sqrt{2}\sin a_n t\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - e^{i\delta t})\sqrt{2}\sin a_n t\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}\sin a_n t\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}I,$$

donde de manera similar a antes, $I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}\sin a_n t\, dt$. Con otra doble integración por partes vemos que

$$I = -\frac{i\delta}{a_n^2}(-1)^n(e^{i\pi\delta} + e^{-i\pi\delta}) + \frac{\delta^2}{a_n^2}I \;\Rightarrow\; I = -\frac{i\delta(-1)^n(e^{i\pi\delta} + e^{-i\pi\delta})}{a_n^2 - \delta^2},$$

por lo que

$$\langle 1 - e^{i\delta t}, \sqrt{2}\sin a_n t\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}I = \frac{i\delta\sqrt{2}(-1)^n\cos\pi\delta}{\pi((n - \frac{1}{2})^2 - \delta^2)}.$$

Finalmente, llegamos a la expansión

$$1 - e^{i\delta t} = \left(1 - \frac{\sin\pi\delta}{\pi\delta}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2\delta\sin\pi\delta}{\pi(k^2 - \delta^2)}\cos kt + i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2\delta\cos\pi\delta}{\pi((k - \frac{1}{2})^2 - \delta^2)}\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t,$$

donde recordamos que la convergencia es en la media (norma de $L^2[-\pi,\pi]$).

Sea ahora $\{c_n\}_{n=-N}^{N}$ una colección finita arbitraria tal que $\sum_{|n|\leq N}|c_n|^2\leq 1$. Por ser una suma finita, podemos intercambiar el orden de los sumatorios y vemos que

$$\left\|\sum_{|n|\leq N}c_n(e^{int}-e^{i\lambda_n t})\right\|=\left\|\sum_{|n|\leq N}(1-e^{i\delta_n t})c_n e^{int}\right\|\leq A+B+C,$$

donde

$$A=\left\|\sum_{|n|\leq N}\left(1-\frac{\sin\pi\delta_n}{\pi\delta_n}\right)c_n e^{int}\right\|,$$

$$B=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\cos kt\sum_{|n|\leq N}\frac{(-1)^k 2\delta_n\sin\pi\delta_n}{\pi(k^2-\delta_n^2)}c_n e^{int}\right\|,$$

y

$$C=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\sum_{|n|\leq N}\frac{(-1)^k 2\delta_n\cos\pi\delta_n}{\pi((k-\frac{1}{2})^2-\delta_n^2)}c_n e^{int}\right\|.$$

Como $|\delta_n|\leq L<\frac{1}{4}$, por la observación 1.33, usando la identidad de Parseval y también que $\sum_{|n|\leq N}|c_n|^2\leq 1$, tenemos que

$$A^2=\sum_{|n|\leq N}\left|\left(1-\frac{\sin\pi\delta_n}{\pi\delta_n}\right)c_n\right|^2\leq\left(1-\frac{\sin\pi L}{\pi L}\right)^2\ \Rightarrow\ A\leq 1-\frac{\sin\pi L}{\pi L}.$$

Observamos ahora que $|\delta_n|\leq L\ \Rightarrow\ k^2-L^2\leq k^2-\delta_n^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{k^2-\delta_n^2}\leq\frac{1}{k^2-L^2}$. También, si $f\in L^2$ y $|g(t)|\leq|h(t)|$ para $t\in[-\pi,\pi]$ con $h\in L^2$, entonces $\|fg\|\leq\|fh\|$ (en nuestro caso, usamos que $|\cos kt|\leq 1$). Entonces, de manera similar al caso anterior vemos que

$$B\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|n|\leq N}\left|\frac{(-1)^k 2\delta_n\sin\pi\delta_n}{\pi(k^2-\delta_n^2)}c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2L\sin\pi L}{\pi(k^2-L^2)}.$$

Finalmente, usando de nuevo la observación 1.33 y que $|\sin(k-\frac{1}{2})t|\leq 1$, llegamos a

$$C\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|n|\leq N}\left|\frac{(-1)^k 2\delta_n\cos\pi\delta_n}{\pi((k-\frac{1}{2})^2-\delta_n^2)}c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2L\cos\pi L}{\pi((k-\frac{1}{2})^2-L^2)}.$$

Pero por las identidades que hemos visto en el lema 1.32, se tiene que

$$\left\|\sum_{|n|\leq N}c_n(e^{int}-e^{i\lambda_n t})\right\|\leq\lambda=1-\cos\pi L+\sin\pi L$$

Y ya hemos acabado, porque por la observación 1.33, $L<\frac{1}{4}$ implica $\lambda<1$. $\square$

Llegados a este punto, hay varias observaciones interesantes a hacer. La primera de ellas es que, efectivamente, podemos responder a nuestra pregunta principal de forma afirmativa: se pueden escribir funciones de $L^2[-\pi,\pi]$ como series de Fourier no armónicas, con convergencia en la norma, si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es una perturbación pequeña de los enteros:

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t}$$

con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2<\infty$.

La segunda observación es acerca de la constante $\frac{1}{4}$. Una pregunta natural es si la constante $\frac{1}{4}$ puede ser reemplazada por otra mayor, de manera que el resultado siga siendo cierto. La respuesta no es sencilla y la daremos en el capítulo 2. Concretamente, veremos que la constante L que aparece en el teorema no puede ser igual a $\frac{1}{4}$, ya que entonces el sistema exponencial asociado no tiene porqué ser una base de Riesz, y también que la condición

$$|\lambda_n-n|<\frac{1}{4}$$

para $n\in\mathbb{Z}$ tampoco es suficiente para garantizar que el sistema exponencial asociado sea una base.

Finalmente, comentamos que el estudio de bases de Riesz de exponenciales es un tema de investigación que aún está en desarrollo en la actualidad. Por ejemplo, aunque nosotros hemos dado una condición para asegurar que un sistema de exponenciales sea una base de Riesz de L^2 de un intervalo, un trabajo reciente [KNO23] mostró que existe un subconjunto acotado $S\subset\mathbb{R}$ en el que no se puede construir bases de Riesz de exponenciales para $L^2(S)$.

2. La constante $\frac{1}{4}$ del teorema de Kadec

Consideremos una sucesión de exponenciales $\{e^{i\lambda_n t}\}$ en $L^p[-\pi,\pi]$. Por el teorema de Hahn-Banach, sabemos que si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es incompleto en $L^p[-\pi,\pi]$ entonces existirá $g \in L^q[-\pi,\pi]$ no idénticamente cero para la cual

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t} g(t)\, dt = 0.$$

Si definimos ahora la función

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t)\, dt,$$

se tiene que $f(\lambda_n) = 0$ para todo n y que f no es nula porque no lo es g. Vemos entonces que la completitud de un sistema exponencial está estrechamente relacionada con los ceros de una determinada función. Podemos además deducir dos propiedades importantes sobre una función f así definida: es entera y su módulo tiene un determinado crecimiento.

En efecto, para ver que es holomorfa, aplicaremos el teorema de Morera. Sea entonces T un triángulo de $\mathbb{C}$ y ∂T el camino formado por sus lados. Tenemos aplicando el teorema de Fubini y el teorema de Cauchy que

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = \int_{\partial T} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t)\, dt\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \int_{\partial T} e^{izt}\, dz\, dt = 0.$$

Para la segunda afirmación sobre el crecimiento del módulo de f, observamos que

$$|f(z)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{izt}\right| |g(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\,\mathrm{Im}(z)} |g(t)|\, dt \leq C \|g\|_q\, e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}, \tag{2.1}$$

por lo que f no puede crecer más rápido que una exponencial. Las observaciones que hemos hecho aquí muestran que una manera de estudiar la completitud de conjuntos de exponenciales es intentar entender como son los ceros de funciones enteras de un determinado crecimiento, que es lo que haremos en la primera sección de este capítulo.

2.1. El teorema de factorización de Hadamard

A la hora de estudiar los ceros de funciones enteras, un resultado fundamental que hemos visto en la asignatura de Funciones de Variable Compleja es el teorema de factorización de Weierstrass, que recordamos a continuación. Supongamos dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ con $z_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ (donde permitimos que un elemento aparezca repetido un número finito de veces, que será su orden como cero de f). Entonces podemos construir una función entera con ceros en esos puntos de la siguiente manera:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z)};$$

donde m es el orden de 0 como cero de f, g es una función entera y

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k.$$

Observamos que la utilidad de esta factorización está limitada por el grado de los polinomios $p_n(z)$, que puede crecer sin control. Pero si añadimos una hipótesis sobre el crecimiento de la sucesión $\{z_n\}$, la expresión anterior se puede simplificar enormemente. Introducimos antes la muy usada notación para los factores elementales:

$$E(u,0) = 1-u \quad \text{y} \quad E(u,p) = (1-u)\, \exp\left(u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots \frac{1}{p}u^p\right), \quad p = 1,2,3\ldots$$

Teorema 2.1. *Si existe un número natural p para el que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^{p+1} < \infty$, entonces $f(z)$ admite la representación más simplificada*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z),$$

donde $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$.

Demostración. La idea es usar el criterio M de Weierstrass para demostrar la convergencia absoluta y uniforme del producto P en cualquier región acotada. Para ello trabajaremos con su logaritmo, y veremos que este converge. Primero observamos que si $|w| \leq \varepsilon < 1$, tomando el valor principal del logaritmo,

$$\log E(w,p) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k} + \sum_{k=1}^{p} \frac{w^k}{k} = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{w^k}{k},$$

por la expansión en serie de potencias de $\log(1-w)$. Y también

$$|\log E(w,p)| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |w|^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} |w|^k \leq \frac{|w|^{p+1}}{1-\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Usando la hipótesis, vemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leq \sum_{n:|z_n|\leq|z|} \left|\log E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \frac{|z|^{p+1}}{1-\varepsilon} \sum_{n:|z_n|>|z|} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty,$$

por lo que el producto converge absoluta y uniformemente por el criterio M de Weierstrass en cualquier región acotada del plano que no contenga ninguno de los puntos z_n. Esta convergencia del logaritmo de P demuestra la convergencia de P en cualquier región acotada (en los puntos z_n, $P(z_n) = 0$), por lo que P define una función entera que por construcción se anula solamente en los z_n. Como $\{z_n\}$ son los ceros de f, se obtiene el resultado. □

Definición 2.2. El menor número natural p para el que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^{p+1} < \infty$ se llama el género de la sucesión (y, por extensión, el género de la función f que se anula en los z_n) y

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

es el producto canónico asociado a la sucesión.

Para poder continuar con el estudio de los ceros de funciones enteras, necesitamos antes introducir diversos conceptos fundamentales. Dada una función entera f, usaremos la notación

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Observamos que $M(r)$ es estrictamente creciente como consecuencia del principio del módulo máximo y $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$ por el teorema de Liouville.

Definición 2.3. Una función entera se dice que es de tipo exponencial si existen constantes positivas A y B para las que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|}.$$

Decimos además que es de tipo exponencial k si k es el ínfimo de todos los números $c \geq 0$ para los que $|f(z)| \leq e^{c|z|}$.

Definición 2.4. Una función entera se dice que es de orden finito si existe una constante $c \geq 0$ para la que

$$M(r) \leq e^{r^c}$$

si $r > r_c$ es suficientemente grande. De manera similar, el ínfimo de todos los números $c \geq 0$ para los que esto ocurre es el orden de f, que denotaremos por ρ.

El objetivo de esta sección, el teorema de factorización de Hadamard, nos dirá que una función de orden finito admite una factorización mucho más sencilla que la expresión general que propone el teorema de Weierstrass sin hipótesis adicionales.

Observamos para empezar que de la definición de tipo exponencial se deduce que dado $\varepsilon > 0$, si f es de tipo exponencial k entonces

$$M(r) \leq Ae^{(k+\varepsilon)r}.$$

De manera similar, de la definición de orden finito tenemos que dado $\varepsilon > 0$, si f es de orden ρ entonces

$$M(r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

si r es suficientemente grande. Se tiene entonces como consecuencia de estas observaciones que toda función de tipo exponencial tiene orden $\rho \leq 1$, y que también si $\rho < 1$ entonces es de tipo exponencial 0. Observamos también la importancia de que trabajamos con el ínfimo; la desigualdad puede ser falsa para ρ o k pero basta con que sea cierta sumando $\varepsilon > 0$.

Vemos en este primer teorema una relación fundamental entre el crecimiento de una función y los ceros que puede tener. Introducimos antes la notación $n(r)$ para designar el número de ceros de una función entera en un disco de radio r.

Teorema 2.5. *Si f es una función entera de orden ρ, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$n(r) \in O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

Demostración. Para poder aplicar la fórmula de Jensen con facilidad, supongamos que $f(0) = 1$. Esto está claro si $f(0) \neq 0$, y si 0 tiene orden m lo "eliminamos" considerando la función $f(z)/z^m$; el resultado seguirá siendo válido en el límite. Si llamamos

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt,$$

entonces aplicando la fórmula de Jensen que hemos visto en Funciones de Variable Compleja,

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, si r es lo suficientemente grande tenemos la desigualdad $|f(re^{i\theta})| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, por lo que se cumple también

$$N(r) \leq r^{\rho+\varepsilon}.$$

Finalmente, usando que $n(r)$ es una función creciente de r (no de forma estricta) vemos que

$$n(r)\log 2 = n(r)\int_r^{2r} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t}\,dt \leq N(2r),$$

de donde deducimos que $n(r) \leq \dfrac{2^{\rho+\varepsilon}}{\log 2} r^{\rho+\varepsilon}$ si r es grande, como queríamos. □

Tenemos dos resultados como consecuencia del comportamiento asintótico de $n(r)$ que nos acercan al teorema de Hadamard.

Teorema 2.6. *Si f es una función entera de orden ρ y $\{z_n\}$ son sus ceros distintos de* 0*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty$$

si $\alpha > \rho$.

Demostración. Supongamos que los $\{z_n\}$ están ordenados de manera creciente respecto al módulo, de manera que si llamamos $r_n = |z_n|$, $n(r_n) = n$. Sea ahora β tal que $\rho < \beta < \alpha$. Por el teorema 2.5 se tiene que existe una constante $A \geq 0$ para la que

$$n(r) \leq Ar^\beta \;\Rightarrow\; n(r_n) = n \leq A|z_n|^\beta \;\Rightarrow\; \frac{1}{|z_n|^\alpha} \leq \frac{A}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Y el resultado es consecuencia de que $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha/\beta}} < \infty$. □

Corolario 2.7. *Si f es una función entera de orden ρ y $\{z_n\}$ son sus ceros distintos de* 0*, entonces*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right),$$

donde p es el género del producto y $p \leq \rho$.

Demostración. Sea $k+1$ un número natural tal que $\rho < k+1$. Por el teorema 2.6 se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^{k+1} < \infty$ y por el teorema 2.1,

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, k\right).$$

Escogiendo el menor natural con esta propiedad obtenemos el género del producto, p, que a su vez cumplirá $p \leq \rho$. □

Este resultado nos acerca al resultado principal, ya que nos dice que una función de orden finito admite una factorización "sencilla" mediante el producto canónico. El teorema de Hadamard nos dará información sobre como es la función g que aparece en la factorización. Para continuar, damos la siguiente definición.

Definición 2.8. Dada una sucesión de números $\{z_n\}$, llamaremos exponente de convergencia, que denotaremos por λ, al ínfimo de todos los números positivos c para los que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^c} < \infty.$$

Observamos que de manera similar a cuando hemos definido el orden, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^\alpha$ converge si $\lambda < \alpha$ y diverge si $\lambda > \alpha$, pero si $\alpha = \lambda$ no podemos deducir nada y hay que estudiar la sucesión concreta. Se tiene también como consecuencia del teorema 2.6 que si f es de orden ρ y sus ceros tienen exponente de convergencia λ, entonces

$$\lambda \leq \rho,$$

y observamos también que si p es el género del producto canónico asociado,

$$p \leq \lambda \leq p + 1, \tag{2.3}$$

donde ambas desigualdades salen de la definición de p y de λ. Notamos además que si λ es un número natural, entonces $\lambda = p$ si $\sum 1/|z_n|^\lambda$ diverge y $\lambda = p+1$ si la serie converge.

Para llegar al teorema de Hadamard, necesitamos varios resultados previos, dos de ellos relacionados con el crecimiento del módulo del producto canónico asociado a la función que queremos factorizar.

Teorema 2.9. *El orden de un producto canónico es igual al exponente de convergencia de sus ceros; es decir, $\rho = \lambda$.*

Demostración. Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$ el producto canónico de género p asociado a la sucesión $\{z_n\}$, y sea ρ su orden. Por el teorema 2.6 sabemos que $\lambda \leq \rho$, por lo que necesitamos ver la desigualdad $\rho \leq \lambda$. Sea entonces $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq z_n$ para todo n, $r = |z|$ y $r_n = |z_n|$. Tenemos la descomposición $\log|P(z)| = S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \sum_{r_n \leq 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \qquad \text{y} \qquad S_2 = \sum_{r_n > 2r} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right|.$$

Por (2.2) del teorema 2.1, tenemos que si $u \leq \frac{1}{2}$ entonces $|\log E(u,p)| \leq 2|u|^{p+1}$, y en consecuencia

$$S_2 \leq 2 \sum_{r_n > 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} = 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} \frac{1}{r_n^{p+1}},$$

ya que $\frac{r}{r_n} < \frac{1}{2}$. Distinguimos los dos casos posibles que nos da la desigualdad (2.3). Si $\lambda = p + 1$, la serie converge por lo que

$$S_2 \in O(r^{p+1}) = O(r^\lambda).$$

Si $\lambda < p + 1$ y ε es suficientemente pequeño, $\lambda + \varepsilon < p + 1$ y entonces

$$S_2 \leq 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} \frac{1}{r_n^{p+1}} = 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} \frac{r_n^{\lambda+\varepsilon-p-1}}{r_n^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Como la función x^a es decreciente si $a < 0$ y $x > 0$, y en nuestro caso $\lambda + \varepsilon - p - 1 < 0$ y $2r < r_n$, llegamos a

$$S_2 < 2r^{p+1}(2r)^{\lambda+\varepsilon-p-1} \sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \in O(r^{\lambda+\varepsilon}),$$

ya que la serie es convergente por la definición de λ.

Para la suma finita S_1, distinguimos de nuevo dos casos. Si $p > 0$, entonces

$$\log|E(u,p)| = \log\left(|1-u| \left|\exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{u^k}{k}\right\}\right|\right) \leq \log|1-u| + \sum_{k=1}^{p} \frac{|u|^k}{k}.$$

Notemos ahora que si $|u| \geq \frac{1}{2}$, entonces para $1 \leq k \leq p$ tenemos

$$1 \leq 2|u| \;\Leftrightarrow\; 1 \leq 2^{p-k}|u|^{p-k} \;\Leftrightarrow\; |u|^k \leq 2^{p-k}|u|^p,$$

que a su vez implica

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{|u|^k}{k} \leq 2^p|u|^p \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k2^k} < 2^p|u|^p.$$

También se tiene la desigualdad $\log|1-u| \leq 2^p|u|^p$; si $|1-u| < 1$ el logaritmo es negativo y la desigualdad es trivial, y si el logaritmo es positivo también es cierta la desigualdad porque el logaritmo crece más lentamente que un polinomio si $|u| \geq \frac{1}{2}$. Combinando estas dos desigualdades llegamos a

$$\log|E(u,p)| \leq 2^{p+1}|u|^p.$$

Ahora, usando que $\lambda + \varepsilon - p > 0$,

$$S_1 \leq 2^{p+1} \sum_{r_n \leq 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^p = 2^{p+1}r^p \sum_{r_n \leq 2r} \frac{r_n^{\lambda+\varepsilon-p}}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \leq 2^{p+1}r^p(2r)^{\lambda+\varepsilon-p} \sum_{r_n \leq 2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \in O(r^{\lambda+\varepsilon}) \tag{2.4}$$

de manera trivial porque la suma es finita.

Finalmente, observamos que si $p = 0$ entonces $\log|E(u,0)| \in O(|u|^\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ porque como hemos dicho el logaritmo crece más lentamente que cualquier polinomio, por lo que el mismo cálculo reemplazando p por ε en (2.4) muestra que $S_1 \in O(r^{\lambda+\varepsilon})$.

Y ya hemos acabado, porque si combinamos los dos resultados llegamos a

$$\log|P(z)| = S_1 + S_2 \in O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

para todo $\varepsilon > 0$, que implica $\rho \leq \lambda$. □

Lema 2.10. *Si P es un producto canónico de orden ρ, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$|P(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

en círculos $|z| = r$ de radio arbitrariamente grande.

Demostración. Este es un lema de carácter técnico que no demostraremos aquí porque tampoco es de mayor interés para nosotros; una demostración se puede encontrar en [You80, Capítulo 2, Parte 1, Sección 4]. □

Los dos últimos resultados que necesitamos son más generales y conocidos en el análisis complejo. Presentamos aquí las demostraciones que se encuentran en [Tit39, Capítulo 5].

Teorema 2.11 (Lema de Schwarz)**.** *Sea f una función holomorfa en $\overline{D(0,R)}$, $R>0$, con $f(0)=0$ y $|f(z)|\le C$ en $|z|=R$. Entonces para todo $t\in[0,2\pi]$ se tiene*

$$|f(re^{it})|\le\frac{Cr}{R}.$$

Demostración. Si consideramos la función $g(z)=\dfrac{f(z)}{z}$, entonces g es holomorfa porque $f(0)=0$ y además $|g(z)|\le C/R$ en $|z|=R$. Por el principio del módulo máximo la desigualdad también es cierta en el interior del disco, por lo que si $z=re^{it}$,

$$|g(re^{it})|=\frac{|f(re^{it})|}{r}\le\frac{C}{R}.$$ □

Teorema 2.12 (Desigualdad de Borel-Carathéodory)**.** *Sea f una función holomorfa en $\overline{D(0,R)}$ y sean $M(r)$ y $A(r)$ el máximo de $|f|$ y $\operatorname{Re}(f)$ en $|z|=r$ respectivamente. Entonces se tiene la desigualdad*

$$M(r)\le\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|,\quad 0<r<R.$$

Demostración. Observamos que si f es constante entonces un simple cálculo llamando $M(r)=|f(0)|=|c|$ y $A(R)=\operatorname{Re}(c)$ muestra que la desigualdad siempre es cierta. Supongamos ahora que f no es constante y que $f(0)=0$. Vemos que como f es holomorfa, cumple la propiedad de la media, lo que implica que $A(R)>A(0)=0$. Si consideramos la función

$$g(z)=\frac{f(z)}{2A(R)-f(z)},$$

entonces g es holomorfa en $\overline{D(0,R)}$ porque la parte real del denominador no se anula y además $g(0)=0$. Si además llamamos $f(z)=x+iy$, tenemos que

$$|g(z)|^2=\frac{|f(z)|^2}{|2A(R)-x-iy|^2}=\frac{x^2+y^2}{(2A(R)-x)^2+y^2}\le 1,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de $|x|\le 2A(R)-x$. Se tiene entonces por el lema de Schwarz que $|g(re^{i\theta})|\le r/R$, por lo que reescribiendo f en función de g y usando que $|1+g(re^{i\theta})|\ge 1-\frac{r}{R}$, llegamos a

$$|f(re^{i\theta})|=\frac{2A(R)|g(re^{i\theta})|}{|1+g(re^{i\theta})|}\le\frac{2r}{R-r}A(R).\tag{2.5}$$

Finalmente, si $f(0)\neq 0$, aplicando (2.5) a la función $f(z)-f(0)$ obtenemos

$$|f(z)|-|f(0)|\le|f(z)-f(0)|\le\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\operatorname{Re}\big(f(z)-f(0)\big)\le\frac{2r}{R-r}(A(R)+|f(0)|),$$

lo que nos da la desigualdad deseada. □

En esencia, esta desigualdad nos da información sobre el módulo de una función en un disco de radio r a partir de cotas de su parte real en un disco de radio mayor R. Ahora ya estamos listos para demostrar el teorema de Hadamard, que es consecuencia del estudio que hemos hecho en esta sección sobre ceros de funciones holomorfas.

Teorema 2.13 (Hadamard)**.** *Si f es una función entera de orden ρ, entonces f admite la factorización*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z),$$

donde P es el producto canónico asociado a f y g es un polinomio de grado no mayor que ρ.

Demostración. Sea λ el exponente de convergencia de los ceros de P. Por el teorema 2.9, el orden de P es λ. Dado $\varepsilon > 0$, como f es de orden ρ, si llamamos $|z| = r$ entonces

$$\log |f(z)| < r^{\rho+\varepsilon}$$

si r es suficientemente grande. Pero por el lema 2.10,

$$\log |P(z)| > -r^{\lambda+\varepsilon} > -r^{\rho+\varepsilon} \Rightarrow -\log |P(z)| < r^{\rho+\varepsilon}$$

ya que $\lambda \leq \rho$, en discos de radio arbitrariamente grande. Observamos además que por la definición de logaritmo complejo,

$$\mathrm{Re}(g(z)) = \log \left| \frac{f(z)}{z^m P(z)} \right| = \log |f(z)| - m \log |z| - \log |P(z)| < 2r^{\rho+\varepsilon}$$

para $|z|$ arbitrariamente grande, ya que en este caso $-\log |z| < 0$. Como $g(z)$ es entera, podemos aplicar la desigualdad de Borel-Carathéodory para obtener que

$$|g(z)| \in O(r^{\rho+\varepsilon})$$

para r arbitrariamente grande, lo que implica que g es un polinomio de grado menor que $\rho + \varepsilon$, pero como ε era arbitrario, obtenemos que g es de grado no mayor que ρ. □

2.2. Un contraejemplo

Equipados con el teorema de Hadamard, nuestro objetivo en esta sección es demostrar que el resultado de Kadec es óptimo y la constante $\frac{1}{4}$ no se puede reemplazar por ninguna otra mayor. De hecho, el teorema de Levinson nos dará una visión más amplia sobre la aparición de esta constante. Para demostrar estos dos teoremas, necesitamos dos lemas previos.

Lema 2.14 (Binomio generalizado)**.** *Si $a \in \mathbb{R}$, entonces se tiene la igualdad*

$$f(z) = (1+z)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} z^k, \qquad |z| < 1,$$

donde

$$\binom{a}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{k-1} (a - j).$$

Demostración. En primer lugar observamos que si $|z| < 1$, entonces $\mathrm{Re}(1+z) > 0$ por lo que $1 + z$ evita la semirrecta de los reales negativos, y elevar a la potencia a está bien definido tomando la determinación principal del logaritmo. Para ver la igualdad, solo necesitamos expandir la función en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \qquad \square$$

Antes de demostrar el segundo lema, dada una sucesión $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, denotamos

$$n(r) = \#\{\lambda_n : |\lambda_n| \leq r\} \quad \text{y} \quad N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Lema 2.15. *Si*

$$\limsup_{r\to\infty} \left(N(r) - 2r + \frac{1}{p}\log r \right) > -\infty,$$

entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

Demostración. Lo demostraremos por contrarrecíproco. Para ello, supongamos que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es incompleto en $L^p[-\pi,\pi]$. Por las observaciones que hemos hecho al principio de este capítulo, la incompletitud del sistema implica que existe una función entera no idénticamente cero

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{izt}\, dt,$$

con $g \in L^q[-\pi,\pi]$ y $f(\lambda_n) = 0$ para todo n. Como estas propiedades de f no se ven alteradas por la multiplicación por constantes, dividiendo entre la norma de g podemos suponer que $\|g\|_q = 1$. Si fijamos $\varepsilon > 0$, como $[-\pi,\pi] = [-\pi,-\pi+\varepsilon] \cup (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon) \cup [\pi-\varepsilon,\pi]$, escribiendo $z = x+iy$ tenemos

$$|f(z)| \leq \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} |g(t)| e^{-yt}\, dt + \int_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi} |g(t)| e^{-yt}\, dt = I_{|t|\leq\pi-\varepsilon} + I_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, llegamos a

$$I_{|t|\leq\pi-\varepsilon} \leq \left(\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} e^{-ypt}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{-e^{-yp(\pi-\varepsilon)} + e^{-yp(-\pi+\varepsilon)}}{yp} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \frac{e^{|y|(\pi-\varepsilon)}}{|y|^{\frac{1}{p}}}.$$

De manera similar obtenemos que si $\gamma = \left(\int_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi} |g(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}}$, entonces

$$\begin{aligned} I_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi} &= \gamma \left(\int_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi} e^{-ytp}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= -\frac{\gamma}{(yp)^{\frac{1}{p}}} \left(e^{-yp\pi} - e^{-yp(\pi-\varepsilon)} + e^{-yp(-\pi+\varepsilon)} - e^{yp\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \frac{\gamma e^{\pi|y|}}{|y|^{\frac{1}{p}}}, \end{aligned}$$

donde además $\gamma \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Como los λ_n son un subconjunto de los ceros de f, aplicando la fórmula de Jensen a f y usando que $|f(z)| \leq Ce^{\pi|y|}|y|^{-1/p}(e^{-\varepsilon|y|} + \gamma)$, tenemos

$$N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leq \frac{r}{2}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta - \frac{1}{p}\log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left| e^{-\varepsilon r|\sin\theta|} + \gamma \right|\, d\theta + C',$$

por lo que

$$N(r) - 2r + \frac{1}{p}\log r \leq \int_0^{2\pi} \log\left| e^{-\varepsilon r|\sin\theta|} + \gamma \right|\, d\theta + C'.$$

Finalmente, observamos que si ε es suficientemente pequeño y r suficientemente grande, $e^{-\varepsilon r|\sin\theta|}+\gamma$ será cercano a 0 y la integral de la derecha puede ser menor que cualquier número negativo, por lo que

$$\limsup_{r\to\infty}\left(N(r)-2r+\frac{1}{p}\log r\right)=-\infty. \qquad \square$$

Tenemos como consecuencia de este lema el siguiente teorema, fundamental para entender la completitud de las exponenciales no armónicas en los espacios $L^p[-\pi,\pi]$.

Teorema 2.16 (Levinson)**.** *Sea $1<p<\infty$ y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales para los que*

$$|\lambda_n-n|\le\frac{1}{2p},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Entonces el conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$. Además la constante es óptima, en el sentido que cualquier otra constante mayor no permite garantizar la completitud.

Demostración. Observamos que la hipótesis implica que $n(t)$ crece en 2 unidades en el intervalo $(n-\frac{1}{2p},n+\frac{1}{2p})$, por lo que considerando el peor caso posible, se tiene la desigualdad

$$n(t)\ge 1+2\left[t-\frac{1}{2p}\right]\qquad\text{si}\qquad t>1,$$

donde $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x. En consecuencia, si $r>1$, tenemos

$$\begin{aligned}N(r)&=\int_1^r\frac{n(t)}{t}\,dt\ge\int_1^r\frac{1+2[t-\frac{1}{2p}]}{t}\,dt\\&=2\int_1^r\frac{1-\frac{1}{2p}}{t}\,dt\;-\;2\int_1^r\frac{t-\frac{1}{2p}-[t-\frac{1}{2p}]-\frac{1}{2}}{t}\,dt.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Observamos en primer lugar que la función $x-[x]-\frac{1}{2}$ es periódica con periodo 1 y además, si $k\in\mathbb{N}$, entonces

$$\int_k^{k+1}x-[x]-\frac{1}{2}\,dx=\frac{2k+1}{2}-k-\frac{1}{2}=0.\tag{2.7}$$

Como consecuencia de esta observación, veremos que la segunda integral en el último termino de (2.6) se mantiene acotada cuando $r\to\infty$. En efecto, integrando por partes con $u=\frac{1}{x}$ y $dv=x-[x]-\frac{1}{2}\,dx\;\Rightarrow\;v(x)=F(x)$ (donde F es una primitiva cualquiera), vemos que

$$\int_1^r\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x}\,dx=\frac{F(x)}{x}\bigg|_1^r+\int_1^r\frac{F(x)}{x^2}\,dx.$$

Pero (2.7) y la periodicidad de $x-[x]-\frac{1}{2}$ implican que F se mantiene acotada en $(1,\infty)$, por lo que $\dfrac{F(x)}{x}\to 0$ si $r\to\infty$ y también

$$\left|\int_1^r\frac{F(x)}{x^2}\,dx\right|\le\|F\|_\infty\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx<\infty,$$

que implica que nuestra integral objetivo está acotada si $r\to\infty$.

Finalmente llegamos a que

$$N(r) \geq 2r - \frac{1}{p}\log r - c,$$

para todos los valores de r, que por el lema anterior implica que nuestro sistema original es completo.

Para ver que la constante $\frac{1}{2p}$ es óptima definimos, dado $\varepsilon > 0$, la sucesión

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2p} + \varepsilon, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \dfrac{1}{2p} - \varepsilon, & n < 0. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es ver que el sistema exponencial asociado no es completo en $L^q[-\pi, \pi]$. Para ello, llamando $c = \frac{1}{2p} + \varepsilon$, aplicaremos el teorema de Hahn-Banach viendo que la función $g(t) = (\cos \frac{t}{2})^{2c-1} \sin \frac{t}{2}$ cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{i\lambda_n t}\, dt = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, siendo g una función de $L^q[-\pi, \pi]$ no idénticamente nula.

Para ver que g es en efecto de $L^q[-\pi, \pi]$, observamos que $2c - 1 = -\frac{1}{q} + 2\varepsilon$, y en consecuencia $q(2c-1) = -1 + 2q\varepsilon > -1$, y como además

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\pi - x}{2}} = 1$$

con $\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^{2c-1} \in L^q[-\pi, \pi]$, por el criterio de comparación por paso al límite $g \in L^q[-\pi, \pi]$.

Supongamos ahora que n es estrictamente positivo. Escribiendo el seno y el coseno en forma exponencial, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{i\lambda_n t}\, dt &= i 2^{-2c} \int_{-\pi}^{\pi} \left((1 + e^{it}) e^{-\frac{it}{2}}\right)^{2c-1} e^{-\frac{it}{2}} (1 - e^{it}) e^{i(n + \frac{1}{2p} + \varepsilon)}\, dt \\ &= i 2^{-2c} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{it})^{2c-1} (1 - e^{it}) e^{int}\, dt, \end{aligned}$$

ya que $c = \frac{1}{2p} + \varepsilon$. Claramente $(1 - e^{it})e^{int} = e^{int} - e^{i(n+1)t}$, por lo que el cálculo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{it})^{2c-1} e^{int}\, dt &= \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + re^{it})^{2c-1} e^{int}\, dt \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2c-1}{k} r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k)t}\, dt \end{aligned}$$

muestra que la integral original es 0. Como la función que estamos integrando es de variable real, podemos tomar conjugados en el cálculo anterior y meter el conjugado dentro de la integral, lo que muestra que si n es estrictamente negativa el resultado es el mismo. Finalmente, si $n = 0$ la integral es 0 porque g es impar. $\square$

Teorema 2.17. *El sistema de exponenciales* $\{e^{\pm i(n-\frac{1}{4})t}\}_{n=1}^{\infty}$ *es completo en* $L^2[-\pi,\pi]$.

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Llamemos en primer lugar $\lambda_n = n-\frac{1}{4}$ y $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ si $n \geq 1$ y supongamos entonces que el sistema es incompleto. De igual manera que en el teorema anterior, existe una función entera no idénticamente nula

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{izt}\, dt \tag{2.8}$$

con $g \in L^2[-\pi,\pi]$ para la que $f(\lambda_n) = 0$ para todo $n = \pm 1, \pm 2 \ldots$ Observamos además que podemos asumir que $f(0) = 1$. Si $f(0) \neq 0$ esto está claro multiplicando por una constante. Y si m es la multiplicidad de 0 como cero de f, entonces la función $F(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ se anularía de igual manera en los λ_n y cumpliría $F(0) \neq 0$.

Se tiene también que por el teorema 2.16 el conjunto $\{1\} \cup \{e^{i\lambda_n t}\}$ es completo, por lo que identificando g con su elemento correspondiente del dual Λ_g, las relaciones

$$\langle g, e^{i\lambda_n t}\rangle = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad \text{y} \qquad \langle g, 1\rangle = 2\pi$$

determinan Λ_g de manera única y por lo tanto también g. Esto será importante porque la contradicción la causará el hecho de encontrar otra función que cumpla (2.8) y no sea de $L^2[-\pi,\pi]$. Procedemos en 3 pasos:

(1) La función f definida en (2.8) es par.

Es suficiente demostrar que g es par ya que en este caso usando el cambio de variable $u = -t$ vemos que f también lo es. Para ver que g es par, definimos la función

$$G(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t)+g(-t)}{2} e^{izt}\, dt.$$

Como $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, usando el cambio $u = -t$ para la segunda integral vemos que

$$G(\lambda_n) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{i\lambda_n t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(-t)e^{i\lambda_n t}\, dt = 0.$$

Como hemos visto que g es única, se tiene que g es par ya que $g(t) = \dfrac{g(t)+g(-t)}{2}$.

(2) Tenemos la expansión $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$.

Para ver esta igualdad, llamamos al producto infinito P y definimos $F(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$. Se observa que F es entera porque todos los ceros del denominador son de orden 1, mientras que los del numerador pueden ser de orden mayor. Lo que demostraremos a continuación es que esto no ocurre: F no se anula.

Sea $n(r)$ el número de ceros de f en el disco $|z| \leq r$. Usando que al principio del capítulo hemos visto que una función f así definida cumple $|f(re^{i\theta})| \in O(e^{\pi r|\sin\theta|})$, tenemos por la fórmula de Jensen que

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq C + 2r. \tag{2.9}$$

Sean además $n_1(r)$ y $n_2(r)$ el número de ceros de F y P en el disco $|z| \leq r$ respectivamente, de manera que

$$\int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\, dt = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt - \int_0^r \frac{n_2(t)}{t}\, dt$$

ya que $n(r) = n_1(r) + n_2(r)$. De la definición de P y los λ_n, vemos que $n_2(t)$ crece en 2 unidades en los puntos $3/4$, $7/4\dots$ por lo que $n_2(t) = 2[t + 1/4]$. Procediendo igual que en el teorema anterior, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{n_2(t)}{t}\,dt &= \int_0^r \frac{2[t+\frac{1}{4}]}{t}\,dt \\
&= 2\int_0^r \frac{t-\frac{1}{4}}{t}\,dt - 2\int_0^r \frac{t+\frac{1}{4}-[t+\frac{1}{4}]-\frac{1}{2}}{t}\,dt \qquad (2.10)\\
&\geq 2r - \frac{1}{2}\log r - c,
\end{aligned}$$

ya que la última integral se mantiene acotada, y c es el supremo de los valores que toma cuando varía r.

Combinando (2.9) y (2.10) llegamos a

$$\int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt \leq \frac{1}{2}\log r + C',$$

lo que es una contradicción si $n_1(t)$ no es idénticamente cero, que a su vez implica que F no puede tener ceros, como queríamos ver. Observamos además que como f es de orden finito no mayor que 1, por el teorema de Hadamard

$$f(z) = e^{Az}P(z).$$

Finalmente, tanto f como P son funciones pares, y llegamos a $A = 0$ y $f = P$.

(3) $h(\lambda_n) = 0$ para cada λ_n, donde

$$h(z) = a\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\frac{t}{2})^{-\frac{1}{2}} e^{izt}\,dt,$$

y a se escoge para que $h(0) = 1$.

Si $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\frac{t}{2})^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda_n t}\,dt &= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left((1+e^{it})e^{-i\frac{t}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{i(n-\frac{1}{4})t}\,dt \\
&= \sqrt{2}\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} (1+re^{it})^{-\frac{1}{2}} e^{int}\,dt \\
&= \sqrt{2}\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k} r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k)t}\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Igual que en el teorema anterior, tomando conjugados y pasando el conjugado dentro de la integral se obtiene el resultado para n negativo ($\lambda_{-n} = -\lambda_n$).

Finalmente, como $(\cos\frac{t}{2})^{-\frac{1}{2}} \in L^1[-\pi,\pi]$, el cálculo (2.1) hecho al principio del capítulo muestra que h es de tipo exponencial y por tanto de orden finito no mayor que 1, por lo que concluimos al igual que con f que $h(z) = g(z)$ y por lo tanto que $f(z) = h(z)$. Pero esto solo es posible si

$$g(t) = a(\cos\frac{t}{2})^{-\frac{1}{2}},$$

que no pertenece a $L^2[-\pi,\pi]$ ya que por el criterio de comparación por paso al límite, tiene la misma integral que $\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, que no pertenece a $L^2[-\pi,\pi]$. Como habíamos anticipado hemos llegado a una contradicción, y obtenemos el resultado. $\square$

Observamos en primer lugar que si el sistema de exponenciales del teorema es completo, entonces al añadir la función idénticamente 1 y obtener $\mathcal{F} = \{1\} \cup \{e^{i\lambda_n t}\}$, tendríamos dos maneras distintas de representar la función 1. Pero esto implicaría que no tendríamos unicidad y que por lo tanto $\mathcal{F}$ no puede ser una base de $L^2[-\pi, \pi]$. Como queríamos ver, hemos encontrado un contraejemplo que muestra que el resultado de Kadec es óptimo.

Comentamos también que la función $(\cos \frac{t}{2})^{-\frac{1}{2}}$ es más importante de lo que parece y, de hecho, este tipo de funciones han sido estudiadas de forma exhaustiva (para el lector interesado, se puede encontrar información sobre ellas en [Tit48, Capítulo 7.6]). Si llamamos

$$h_\alpha = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{t}{2})^{2\alpha - 2} \, dt,$$

con a escogida para que $h_\alpha(0) = 1$, se atribuye a Ramanujan la identidad

$$h_\alpha = \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(\alpha - z)\Gamma(\alpha + z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \alpha - 1)^2}\right).$$

Si $\alpha = \frac{3}{4}$ recuperamos la función que hemos usado nosotros y además vemos que

$$h_{\frac{3}{4}} \left(n - \frac{1}{4}\right) = h_{\frac{3}{4}} \left(-n + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Como hemos adelantado, demostraremos a continuación que la hipótesis $|\lambda_n - n| < \frac{1}{4}$ para $n \in \mathbb{Z}$ tampoco es suficiente para garantizar que el sistema exponencial asociado sea una base.

Lema 2.18. *Sea $\alpha \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$ y*

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{izt} \, dt.$$

Si $f(\mu) = 0$ y $g(z) = \dfrac{z - \lambda}{z - \mu} f(z)$, entonces se tiene que

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) e^{izt} \, dt \tag{2.11}$$

con

$$\beta(t) = \alpha(t) + i(\lambda - \mu) e^{-i\mu t} \int_{-\pi}^{t} \alpha(s) e^{i\mu s} \, ds. \tag{2.12}$$

Demostración. Para demostrar este teorema, supondremos que g se puede representar como en (2.11) y llegaremos a que necesariamente β debe ser la de (2.12). Como todos los pasos son reversibles, podremos concluir que una función β así definida da lugar a la función g que queremos. Supongamos para ese fin que g se puede escribir como en (2.11). Entonces

$$\frac{1}{z - \mu} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{izt} \, dt = \frac{1}{z - \lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) e^{izt} \, dt. \tag{2.13}$$

Para aislar la función β, escribimos $e^{izt} = e^{i(z-\mu)t} e^{i\mu t}$ e integramos por partes a ambos lados de la ecuación. Al hacerlo llegamos a que simultáneamente

$$\frac{1}{z - \mu} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{izt} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_1(t) e^{izt} \, dt \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{z - \lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) e^{izt} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \beta_1(t) e^{izt} \, dt,$$

con
$$\alpha_1(t) = -ie^{-i\mu t}\int_{-\pi}^{t}\alpha(s)e^{i\mu s}\,ds \quad \text{y} \quad \beta_1(t) = -ie^{-i\lambda t}\int_{-\pi}^{t}\beta(s)e^{i\lambda s}\,ds.$$

Por (2.13) se tiene que $\alpha_1(t) = \beta_1(t)$ y que
$$e^{i(\lambda-\mu)t}\int_{-\pi}^{t}\alpha(s)e^{i\mu s}\,ds = \int_{-\pi}^{t}\beta(s)e^{i\lambda s}\,ds,$$
por lo que derivando ambos lados respecto a t obtenemos la expresión de (2.12). Observamos que $\beta \in L^p[-\pi,\pi]$ por serlo α y que efectivamente todos los pasos, como integrar o derivar, son reversibles por lo que esta β que hemos encontrado al final da lugar a la g que queremos. □

Observamos que este lema nos permite cambiar un cero de una función por otro con solo saber la relación entre las funciones α y β. Este hecho es fundamental para el siguiente teorema:

Teorema 2.19. *Sea $1 \le p < \infty$ y sean $\{\lambda_n\}$ y $\{\mu_n\}$ dos sucesiones de números reales que cumplen*
$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n - \mu_n| < \infty.$$

Entonces si $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es un sistema completo en $L^p[-\pi,\pi]$, $\{e^{i\mu_n t}\}$ también lo es.

Demostración. Como es habitual, lo demostraremos por contrarrecíproco. Supongamos entonces que $\{e^{i\mu_n}\}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, de manera que existe una función entera no idénticamente nula
$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{izt}\,dt,$$
tal que $f(\mu_n) = 0$ para todo $n \ge 1$ y $g \in L^q[-\pi,\pi]$. La idea ahora es construir una sucesión de funciones de manera que la función f_n se anula en los puntos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_{n+1},\mu_{n+2}\ldots$ Es decir, que en cada paso la función resultante ya no se anula en uno de los μ_k pero si en un nuevo λ_k. La sucesión de funciones es $\{g_n\}$ para $n \ge 0$ tal que $g_0 = g$ y
$$g_n(t) = g_{n-1}(t) + i(\lambda_n - \mu_n)e^{-i\mu_n t}\int_{-\pi}^{t} g_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds. \tag{2.14}$$

Tenemos la sucesión asociada
$$f_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)e^{izt}\,dt,$$
y por el lema anterior
$$f_n(z) = \frac{z-\lambda_n}{z-\mu_n}f_{n-1}(z),$$
que demuestra lo que hemos dicho del cambio de ceros de las f_n en cada paso de la sucesión.

Veamos ahora que la sucesión $\{g_n\}$ es de Cauchy en $L^q[-\pi,\pi]$. De (2.14), se tiene que
$$\begin{aligned}\|g_n - g_{n-1}\|_q &\le |\lambda_n - \mu_n|\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{t} g_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le |\lambda_n - \mu_n|\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{t}|g_{n-1}(s)|^q\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le (2\pi)^{\frac{1}{q}}|\lambda_n - \mu_n|\cdot\|g_{n-1}\|_q,\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado la desigualdad de Jensen ya que la función $h(x) = |x|^q$ es convexa si $q > 1$. Equivalentemente podemos escribir $\|g_n - g_{n-1}\|_q \leq \varepsilon_n \|g_{n-1}\|_q$, que a su vez implica

$$(1-\varepsilon_n)\|g_{n-1}\|_q \leq \|g_n\|_q \leq (1+\varepsilon_n)\|g_{n-1}\|_q, \tag{2.15}$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ por hipótesis. De la segunda desigualdad en (2.15) se tiene que las normas de las funciones g_n están uniformemente acotadas, ya que

$$\|g_n\|_q \leq \ \|g\|_q \prod_{k=1}^{n} (1+\varepsilon_n) \leq C\|g\|_q,$$

donde $C = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) < \infty$ porque la serie asociada es convergente. Finalmente,

$$\|g_{n+l} - g_n\|_q \leq \sum_{k=1}^{l} \|g_{n+k} - g_{n+k-1}\|_q \leq \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_{n+k} \cdot \|g_{n+k-1}\|_q \leq C\|g\|_q \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_{n+k},$$

que tiende a 0 si $n, l \to \infty$ ya que $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$, por lo queda demostrado que la sucesión $\{g_n\}$ es de Cauchy en $L^q[-\pi, \pi]$.

Tenemos entonces que existe una función G tal que $g_n \to G$ en la norma de $L^q[-\pi, \pi]$. Observamos que como las funciones f_n no son nulas, ninguna de las g_n asociadas lo es, y también que la primera desigualdad de (2.15) muestra que la función límite G tampoco es nula. Finalmente, si llamamos

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} G(t)e^{izt}\, dt,$$

tenemos convergencia puntual de las f_n a F ya que

$$|f_n(z) - F(z)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t) - G(t)|\, dt \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

y en consecuencia $F(\lambda_n) = 0$ para todo λ_n, por lo que $\{e^{i\lambda_n t}\}$ no es completo y hemos llegado a una contradicción. □

Tenemos los siguientes corolarios del teorema anterior, con los que se podrá ver que la hipótesis del teorema de Kadec es óptima.

Corolario 2.20. *El sistema* $\{e^{\pm i(n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2})t}\}_{n=1}^{\infty}$ *es completo en* $L^2[-\pi, \pi]$.

Demostración. Es una consecuencia directa del teorema 2.17 y del teorema anterior, ya que la diferencia entre cada uno de los términos de las dos sucesiones es $\frac{1}{4n^2}$ que es sumable. □

Corolario 2.21. *La condición* $|\lambda_n - n| < \frac{1}{4}$ *para* $n \in \mathbb{Z}$ *no es suficiente para garantizar que el sistema de exponenciales asociado a la sucesión* $\{\lambda_n\}$ *sea una base de Riesz de* $L^2[-\pi, \pi]$.

Demostración. El sistema $\{e^{\pm i(n-\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2})t}\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la hipótesis y es completo, por lo que al añadir la función constante igual a 1, no obtendríamos una base. □

3. El teorema de Kadec generalizado

Nuestro objetivo en este último capítulo es dar una generalización del teorema de $\frac{1}{4}$ de Kadec a escalares complejos $\{\lambda_n\}$ que tengan la parte imaginaria uniformemente acotada.

3.1. El espacio de Paley-Wiener

La primera herramienta que necesitaremos para ver este resultado es el bien conocido espacio de Paley-Wiener. Al principio del capítulo anterior, hemos visto que una función definida como

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{izt}\, dt \tag{3.1}$$

con $g \in L^2[-\pi, \pi]$, es entera, de tipo exponencial como mucho π y por la identidad de Plancherel, es de $L^2(\mathbb{R})$. El teorema de Paley-Wiener nos dirá que de hecho todas las funciones f con estas propiedades tienen que ser obtenidas como en (3.1). Necesitamos para ello enunciar dos lemas y un teorema, que usaremos sin probar. Sus demostraciones se pueden encontrar en [You80, Capítulo 2, Parte 2] y se basan en resultados avanzados de análisis complejo como, por ejemplo, el teorema de Phragmén-Lindelöf.

Lema 3.1. *Si f es una función entera para la que $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $|f(x+iy)| \leq Me^{B|y|}$.*

Lema 3.2. *Si $f(z)$ es una función entera de tipo exponencial para la que*

$$f(x) \to 0 \qquad \text{si} \qquad |x| \to \infty,\ x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$f(x+iy) \to 0 \qquad \text{si} \qquad |x| \to \infty$$

de manera uniforme en toda banda horizontal de $\mathbb{C}$.

Teorema 3.3 (Plancherel-Pólya)**.** *Si f es una función entera, de tipo exponencial π y de $L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx \leq e^{2\pi|y|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.2}$$

El teorema anterior resulta ser central para lograr nuestro objetivo. Tenemos como consecuencia directa la siguiente proposición y su respectivo corolario, que necesitaremos para demostrar el teorema de Paley-Wiener.

Proposición 3.4. *Sea f una función entera, de tipo exponencial π y de $L^2(\mathbb{R})$, y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión creciente de números reales para la que existe $\varepsilon > 0$ de manera que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \varepsilon$. Entonces*

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

donde $C \geq 0$ es una constante que solo depende de ε.

Demostración. Comenzamos observando que si $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| \leq M\}$ es una banda horizontal, entonces integrando respecto a y entre $-M$ y M en (3.2) obtenemos que

$$\int_S |f(z)|^2\, dx\, dy \leq 2Me^{2\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Por otro lado, por ser f entera (y por ende, f^2 también), sabemos por la propiedad de la media que para todo $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$f^2(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Multiplicando ambos términos por r e integrando entre 0 y δ, obtenemos que

$$|f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{D(z_0,\delta)} |f(z)|^2\, dx\, dy.$$

Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces los discos $D(\lambda_n, \delta)$ son disjuntos dos a dos y si la altura M de la banda horizontal S cumple $M > \varepsilon$, obtenemos que

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq \sum_n \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{D(\lambda_n,\delta)} |f(z)|^2\, dx\, dy \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \int_S |f(z)|^2\, dx\, dy \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

donde $C = C(\varepsilon)$ ya que M y δ solo dependen de ε. □

Corolario 3.5. *Si f es una función entera, de tipo exponencial π y de $L^2(\mathbb{R})$, entonces $f(x) \to 0$ si $|x| \to \infty$ $(x \in \mathbb{R})$.*

Demostración. Si no fuese el caso, podríamos encontrar una sucesión $\{\lambda_n\}$ creciente y separada $(\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \varepsilon > 0)$ para la que la serie $\sum_n |f(\lambda_n)|^2$ sería divergente. □

Teorema 3.6. *Sea f una función entera de tipo exponencial π y de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces existe una función $g \in L^2[-\pi, \pi]$ tal que*

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{izt}\, dt.$$

Demostración. Sea g la transformada de Fourier de $f(x)$ (x real), de manera que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt}\, dt. \tag{3.3}$$

Como $f \in L^2(\mathbb{R})$, g también y por la transformada de Fourier inversa tenemos la igualdad

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{ixt}\, dt.$$

Por lo tanto es suficiente ver que g es cero fuera de $[-\pi, \pi]$. Esto es así porque ambos lados de la última igualdad serán funciones enteras que coincidirán en la recta real, por lo que serán necesariamente iguales por el principio de prolongación analítica.

Sea entonces $T > 0$ y γ el camino que recorre los tres lados superiores del rectángulo $[-T, T] \times [0, T]$, y consideremos para t fijo la integral

$$I = \int_\gamma f(z) e^{-izt}\, dz.$$

Nuestro objetivo es ver que $I \to 0$ si $T \to \infty$ y $|t| > \pi$. Supongamos primero que $t < -\pi$. Parametrizando la curva obtenemos

$$|I| \leq \int_0^T e^{ty} |f(T + iy)|\, dy + e^{tT} \int_{-T}^{T} |f(x + iT)|\, dx + \int_0^T e^{ty} |f(-T + iy)|\, dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Por el corolario (3.5), se tiene que $f(x) \to 0$ si $|x| \to \infty$ y como f es entera y en particular continua en $\mathbb{R}$, esto implica que $|f(x)|$ está acotado por una constante M para $x \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que por el lema 3.1,

$$|f(x+iT)| \leq Me^{\pi T},$$

con lo que llegamos a

$$I_2 \leq 2TMe^{(t+\pi)T} \to 0 \qquad \text{si} \qquad T \to \infty,$$

ya que $t < -\pi$.

Para estudiar I_1, fijado R, $0 < R < T$, dividimos la integral de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_0^R e^{ty}|f(T+iy)|\,dy + \int_R^T e^{ty}|f(T+iy)|\,dy. \tag{3.4}$$

Aplicando ahora el lema 3.2, obtenemos que $f(T+iy) \to 0$ si $T \to \infty$ de manera uniforme en y, para $0 \leq y \leq R$, y en consecuencia

$$\int_0^R e^{ty}|f(T+iy)|\,dy \to 0 \qquad \text{si} \qquad T \to \infty.$$

Finalmente para acotar la segunda integral en (3.4), usando de nuevo el lema 3.1 vemos que

$$\int_R^T e^{ty}|f(T+iy)|\,dy \leq M\int_R^T e^{(t+\pi)y}\,dy = \frac{M}{t+\pi}(e^{(t+\pi)T} - e^{(t+\pi)R}),$$

que tiende a 0 si R y T tienden a infinito ya que $t < -\pi$, con lo queda demostrado que $I_1 \to 0$ si $T \to \infty$. Observamos que I_3 se estudia de la misma forma ya que ambos lemas también se aplican a $|f(-T+iy)|$.

Con esto queda demostrado el caso $t < -\pi$, y el caso $t > \pi$ es muy similar y no lo haremos aquí; la idea es la misma pero integrando sobre los 3 lados inferiores del rectángulo $[-T,T] \times [-T,0]$.

Para acabar de demostrar el teorema, solo queda observar que por el teorema de Cauchy

$$I = -\int_{-T}^{T} f(x)e^{-ixt}\,dx,$$

y por (3.3)

$$\int_{-T}^{T} f(x)e^{-ixt}\,dx \to g(t) \qquad \text{si} \qquad T \to \infty,$$

por lo que $g(t) = 0$ si $|t| > \pi$. □

Denotaremos entonces por PW^2 al espacio vectorial de las funciones enteras, de tipo exponencial menor o igual que π y de $L^2(\mathbb{R})$. Acabamos esta sección con la siguiente propiedad básica de PW^2.

Lema 3.7. *Si $f \in PW^2$, entonces $f' \in PW^2$ y $\|f'\|_{PW^2} \leq \pi\|f\|_{PW^2}$.*

Demostración. Si f viene dada por (3.1), entonces por el teorema de derivación bajo el signo integral tenemos que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} itg(t)e^{izt}\,dt$$

con $tg(t) \in L^2[-\pi,\pi]$. Finalmente $f' \in L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$\|f'\|_{PW^2} = \|tg(t)\|_{L^2[-\pi,\pi]} \leq \pi\|g\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \pi\|f\|_{PW^2}.$$

□

3.2. Bases de Riesz como *frames* exactos

Nuestro siguiente objetivo será caracterizar las bases de Riesz como *frames* exactos, para poder ver la estabilidad de bases a partir de la estabilidad de los *frames*.

Definición 3.8. Decimos que una sucesión de vectores $\{f_n\}$ en un espacio de Hilbert H es un *frame* si existen constantes $0 < A \leq B < \infty$ tales que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

para toda $f \in H$.

Observamos que un *frame* es un conjunto completo ya que las relaciones $\langle f, f_n\rangle = 0$ para todo n implican que $f = 0$. Presentamos los siguientes resultados que necesitaremos más adelante.

Lema 3.9. *Dada una sucesión $\{f_n\} \subset H$, si $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 < \infty$ para toda $f \in H$ entonces existe una constante M para la que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq M\|f\|^2.$$

Demostración. Lo vimos en la demostración de (5) $\Rightarrow$ (1) del teorema 1.28. □

Teorema 3.10. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de vectores de H. Entonces son equivalentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq M\|f\|^2$ *para toda* $f \in H$.

(b) *Para toda colección de escalares finita* $\{c_1, \ldots, c_n\}$, $\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\|^2 \leq M \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$.

Demostración. Para la implicación directa, si $\{c_1, \ldots, c_n\}$ es una colección finita de escalares y $f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|^4 = |\langle f, f\rangle|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k \langle f, f_k\rangle\right|^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle f, f_k\rangle|^2\right) \\ &\leq M\|f\|^2 \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right),\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz de l^2.

Para la otra implicación, observamos que la hipótesis implica que si $\{c_n\}$ es de l^2, se tiene la desigualdad

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n\right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

tomando límites en n en la hipótesis b) (observamos que la serie de la izquierda es convergente por ser de Cauchy). Entonces dada $f \in H$ y $\{c_n\}$ de l^2, se tiene que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle f, f_n\rangle\right|^2 = \left|\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n f_n\rangle\right|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n f_n\right\|^2 \leq M\|f\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Finalmente, tenemos por dualidad que si escribimos $c = \{c_n\} \in l^2$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \sup_{\|c\|=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle f, f_n\rangle \right|^2 = \sup_{\|c\|=1} \left| \langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n f_n\rangle \right|^2 \leq M\|f\|^2,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis. □

A lo largo de esta sección, dado un *frame* $\{f_n\}$, denotaremos por T al siguiente operador lineal asociado a la sucesión:

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n.$$

Por la condición de *frame* tenemos que para toda $f \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 < \infty$. Además, combinando el lema 3.9 y el teorema 3.10 vemos que

$$\|Tf\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq M^2 \|f\|^2,$$

por lo que T es continuo. De hecho, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.11. *El operador T así definido es invertible.*

Demostración. Observamos que $\langle Tf, f\rangle = \sum_n |\langle f, f_n\rangle|^2$, por lo que la condición de *frame* muestra que

$$A\|f\|^2 \leq \langle Tf, f\rangle \leq \|Tf\| \, \|f\| \;\Rightarrow\; A\|f\| \leq \|Tf\|.$$

Es decir, T está acotado inferiormente, por lo que Ker $T = \{0\}$ y es inyectivo con inversa continua. Finalmente, en la demostración (5) $\Rightarrow$ (1) del teorema 1.28 comentamos que un operador con inversa continua debe cumplir que su adjunto sea exhaustivo, y como T es positivo (y por lo tanto, autoadjunto), se obtiene el resultado. □

Una vez introducido el operador T, necesitamos dos lemas para demostrar la caracterización de bases de Riesz como *frames* exactos.

Lema 3.12. *Sea $\{f_n\}$ un frame en un espacio de Hilbert separable H y $f \in H$. Entonces existe una única sucesión para la que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$$

donde $a_n = \langle g, f_n\rangle$ y $Tg = f$. Si además $\{b_n\}$ es otra sucesión para la que $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2. \tag{3.5}$$

Demostración. La primera parte del enunciado está clara ya que T es invertible (y por lo tanto, g es única) y $f = T(T^{-1}f)$. Para la segunda parte, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

entonces tomando el producto escalar con g a ambos lados, llegamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n b_n.$$

Pero como $|a_n - b_n|^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 - \overline{a}_n b_n - a_n \overline{b}_n$ y $|a_n|^2 = \overline{a}_n b_n = a_n \overline{b}_n$ (la segunda igualdad se obtiene tomando conjugados ya que $|a_n|^2 \in \mathbb{R}$), obtenemos (3.5). □

Lema 3.13. *Si a un frame se le quita uno de sus elementos, queda o bien un frame o bien un sistema incompleto.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ un *frame*, y supongamos que quitamos el elemento f_m para un m particular. Por el lema anterior sabemos que podemos escribir

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n,$$

con $a_n = \langle g_m, f_n \rangle$ y $T g_m = f_m$. Distinguimos dos casos. Si $a_m = 1$, entonces

$$\sum_{n \neq m} a_n f_n = 0,$$

y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n f_n = 0,$$

donde $a'_n = a_n$ si $n \neq m$ y $a'_m = 0$. Lo escribimos así para aplicar de nuevo la segunda parte del lema anterior con la sucesión donde todos los b_n son 0, para llegar a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 = 0,$$

por lo que $a_n = 0$ para $n \neq m$. Y finalmente, por la definición de los a_n, se tiene que g_m es ortogonal a todos los f_n si $n \neq m$. Pero como $\langle g_m, f_m \rangle = a_m = 1$, se tiene que $g_m \neq 0$ y que el sistema $\{f_n\}_{n \neq m}$ no es completo.

Supongamos ahora que $a_m \neq 1$. Tenemos la igualdad

$$f_m = \frac{1}{1 - a_m} \sum_{n \neq m} a_n f_n.$$

Tomando el producto escalar con un elemento f arbitrario de H llegamos a

$$|\langle f, f_m \rangle|^2 \leq \frac{1}{|1 - a_m|^2} \left(\sum_{n \neq m} |a_n|^2 \right) \left(\sum_{n \neq m} |\langle f, f_n \rangle|^2 \right)$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y si llamamos $C = 1 + |1 - a_m|^{-2} \sum_{n \neq m} |a_n|^2$, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq C \sum_{n \neq m} |\langle f, f_n \rangle|^2.$$

Finalmente, usando que $\{f_n\}$ es un *frame* con constantes A y B, vemos que

$$\frac{A}{C}\|f\|^2 \leq \sum_{n\neq m} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

por lo que $\{f_n\}_{n\neq m}$ también es un *frame*. □

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 3.14. Llamamos *frame* exacto a un *frame* que deja de serlo si se le quita cualquiera de sus elementos.

Corolario 3.15. *Si $\{f_n\}$ es un frame exacto y $g_n = T^{-1}f_n$, entonces $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones biortogonales.*

Demostración. En la demostración hemos visto que para el caso en que $\{f_n\}$ es un *frame* exacto, $\langle g_m, f_n\rangle = \delta_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. □

Ya estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.16. *Si H es un espacio de Hilbert separable, $\{f_n\}$ es una base de Riesz si y solo si es un frame exacto.*

Demostración. Supongamos primero que $\{f_n\}$ es una base de Riesz y consideremos el operador $S : H \to l^2$ definido como $Sf = \{\langle f, f_n\rangle\}$.

Vemos que S es claramente lineal. Por el corolario 1.24 sabemos que existe una única base de Riesz $\{g_n\}$ biortogonal a $\{f_n\}$, y por la proposición 1.18 se tiene que dado un elemento f arbitrario de H,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, f_n\rangle g_n$$

por lo que $\{\langle f, f_n\rangle\} \in l^2$ (por la definición 1.19) y S está bien definido.

También es inyectivo porque si $\langle f, f_n\rangle = \langle g, f_n\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la completitud de $\{f_n\}$ implica que $f = g$. Para ver que S es exhaustivo, dada una sucesión $\{c_n\} \in l^2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$ converge a un elemento $f \in H$ y de nuevo por la proposición 1.18 se tiene que $c_n = \langle f, f_n\rangle$.

Ahora combinando el teorema 1.28 y el lema 3.9, S es acotado y por el teorema de la aplicación abierta, su inversa también, por lo que $\{f_n\}$ cumple las condiciones de *frame*. Finalmente, como eliminar un vector de una base nos deja un sistema incompleto, $\{f_n\}$ es un *frame* exacto.

Supongamos ahora que $\{f_n\}$ es un *frame* exacto. Por el lema 3.12 podemos escribir para toda $f \in H$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n,$$

con $a_n = \langle g, f_n\rangle$ donde $g = T^{-1}f$. Para ver que la representación dada es única, supongamos que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n. \tag{3.6}$$

Si definimos $g_n = T^{-1} f_n$, entonces por el corolario 3.15 $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son biortogonales y como hemos visto que T es autoadjunto,

$$a_n = \langle g, f_n \rangle = \langle g, T g_n \rangle = \langle T g, g_n \rangle = \langle f, g_n \rangle = b_n,$$

donde la última igualdad sale de tomar el producto escalar con g_n a ambos lados de (3.6) y usar que las sucesiones son biortogonales.

Solo queda ver que $\{f_n\}$ es equivalente a una base ortonormal. Por definición, es suficiente ver que $\sum c_n f_n$ converge si y solo si $\{c_n\} \in l^2$. Supongamos en primer lugar que $f = \sum c_n f_n$ con $f \in H$. Entonces $c_n = \langle g, f_n \rangle$ con $g = T^{-1} f$, por lo que

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |\langle g, f_n \rangle|^2 \leq B \|g\|^2 < \infty.$$

Finalmente, si $\{c_n\} \in l^2$, como $\{f_n\}$ es un *frame*, podemos aplicar el teorema 3.10 para obtener

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=n}^{m} |c_k|^2.$$

Y ya hemos acabado; el término de la derecha tiende a cero cuando $n, m \to \infty$ por ser una suma convergente, por lo que las sumas parciales de $\sum c_n f_n$ son una sucesión de Cauchy y la serie converge. □

Acabamos esta introducción a los *frames* en espacios de Hilbert haciendo la siguiente observación, que resultará ser una reescritura de la condición de *frame* muy útil en el caso de exponenciales no armónicas.

Observación 3.17. Sea el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$ un *frame*. Por el teorema de Paley-Wiener, la condición de *frame*

$$A \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt \leq \sum_n \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i\lambda_n t} \, dt \right|^2 \leq B \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt$$

para toda $g \in L^2[-\pi, \pi]$ es equivalente a que

$$A \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \leq \sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

para toda $f \in PW^2$.

3.3. Estabilidad de bases de Riesz

En las dos secciones anteriores hemos introducido las herramientas necesarias para demostrar el resultado principal del capítulo. Continuamos con el siguiente teorema, que será fundamental para lograr nuestro objetivo.

Teorema 3.18. *Sean $\{\lambda_n\}$ y $\{\mu_n\}$ dos sucesiones en una banda horizontal de $\mathbb{C}$, y supongamos además que*

$$\mathrm{Re}(\lambda_n) = \mathrm{Re}(\mu_n).$$

Entonces se tiene que si $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es completo en $L^2[-\pi, \pi]$, entonces también lo es $\{e^{i\mu_n t}\}$.

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que ni el conjunto $\{\lambda_n\}$ ni $\{\mu_n\}$ contienen el punto $z = 0$. Esto es así porque por el teorema 2.19 podemos cambiar un número finito de funciones sin afectar a la completitud del sistema. Como hemos hecho en varias ocasiones en el capítulo anterior, lo demostraremos por contrarrecíproco. Supongamos entonces que $\{e^{i\mu_n t}\}$ no es completo, de manera que existe una función entera f que se anula en todos los μ_n, no idénticamente nula y que se puede expresar como

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{izt}\, dt,$$

con $g \in L^2[-\pi, \pi]$. Podemos además suponer que $f(0) = 1$. En efecto, si $f(0) = 0$, podemos dividir f por z^m, donde m es el orden de 0 como cero de f, y la función resultante seguirá siendo de PW^2 y se anulará únicamente en los puntos μ_n.

Definimos entonces la sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $n \geq 0$ de la siguiente manera:

$$f_0(z) = f(z) \quad \text{y} \quad f_n(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \frac{z}{\lambda_k}}{1 - \frac{z}{\mu_k}}.$$

Si $n \geq 0$, cada f_n pertenece a PW^2 y además cumple $f_n(0) = 1$ y $f_n(\lambda_k) = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Pasemos a ver que las f_n tienen normas uniformemente acotadas (la norma de PW^2).

Para ello, usamos que el teorema de Paley-Wiener nos permite escribir

$$f_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)e^{izt}\, dt$$

con $g \in L^2[-\pi, \pi]$. Como tenemos la relación

$$f_n(z) = \frac{\mu_n}{\lambda_n} \frac{z - \lambda_n}{z - \mu_n} f_{n-1}(z),$$

el lema 2.18 nos permite escribir

$$g_n(t) = \frac{\mu_n}{\lambda_n} \left(g_{n-1}(t) + i(\lambda_n - \mu_n)e^{-i\mu_n t} \int_{-\pi}^{t} g_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\, ds \right).$$

A continuación, usando que $\mathrm{Re}(\lambda_n) = \mathrm{Re}(\mu_n)$ y que $|\mathrm{Im}(\lambda_n)| \leq M$ y $|\mathrm{Im}(\mu_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\|g_n\| \leq \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \left(\|g_{n-1}\| + 2M \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{t} |g_{n-1}(s)|^2\, ds\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq A \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \|g_{n-1}\|$$

para alguna constante A. Observamos que hemos usado la desigualdad de Jensen para entrar el módulo al cuadrado dentro de la integral. Esto a su vez implica la relación

$$\|g_n\| \leq A \|g\| \cdot \left| \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \right|.$$

Se tiene entonces que

$$\left| \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right|^2 = \frac{(\mathrm{Re}(\mu_k))^2 + (\mathrm{Im}(\mu_k))^2}{(\mathrm{Re}(\lambda_k))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda_k))^2} = 1 + \frac{(\mathrm{Im}(\mu_k))^2 - (\mathrm{Im}(\lambda_k))^2}{|\lambda_k|^2} \leq 1 + \frac{M^2}{|\lambda_k|^2},$$

ya que $\mathrm{Re}(\mu_k) = \mathrm{Re}(\lambda_k)$, y en consecuencia

$$\left|\frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}\right|^2 \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{M^2}{|\lambda|^2}\right). \tag{3.7}$$

Como f es una función entera de tipo exponencial, por las observaciones que siguen a la definición 2.4 obtenemos que es de orden finito $\rho \leq 1$, y por el teorema 2.6 que el exponente de convergencia de sus ceros es también menor o igual que 1. En particular, esto implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|^2} < \infty.$$

Como la serie converge y la parte imaginaria de los μ_k (y la de los λ_k) está uniformemente acotada, obtenemos que $\lim_{k\to\infty} |\mathrm{Re}(\mu_k)| = \lim_{k\to\infty} |\mathrm{Re}(\lambda_k)| = +\infty$ y en consecuencia que $\lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k|}{|\mu_k|} = 1$. Por el criterio de comparación por paso al límite, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^2}$ también converge. Esto implica que el producto infinito de (3.7) es convergente, y por lo tanto que las normas $\|g_n\|$ tienen una cota superior uniforme. Por la isometría entre $L^2[-\pi, \pi]$ y PW^2, llegamos finalmente a que

$$B = \sup_n \|f_n\| < \infty.$$

Para acabar la demostración, aplicaremos el teorema de Montel a las funciones f_n. Sea entonces $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y $z_0 \in K$. Por ser K acotado, podemos encontrar una constante $L > 0$ tal que K está incluido en una banda horizontal S de anchura L. Por lo que hemos visto en la demostración de la proposición 3.4, podemos concluir que

$$|f_n(z_0)|^2 \leq C \int_S |f_n(z)|^2 \, dxdy \leq 2LCe^{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 \, dx \leq 2LCe^{2\pi L} B, \tag{3.8}$$

por lo que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K \quad \text{y} \quad n \geq 1\} < \infty$. Por el teorema de Montel, la familia $\{f_n\}$ es normal y por lo tanto tiene una parcial $\{f_{n_k}\}$ convergente. La función límite h es entera por serlo las f_n, es de tipo exponencial porque adaptando el argumento que hemos dado en (3.8), tenemos que

$$|h(z)| \leq \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(z)| \leq C' e^{\pi|z|},$$

con C' independiente de k ya que la cota B es uniforme. Finalmente, h es de $L^2(\mathbb{R})$ porque por el lema de Fatou,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_k |f_{n_k}(x)|^2 \, dx \leq \liminf_k \int_{-\infty}^{\infty} |f_{n_k}(x)|^2 \, dx \leq B.$$

La demostración está acabada, ya que h es una función de PW^2 tal que $h(0) = 1$ y $h(\lambda_n) = 0$ por ser límite puntual de una parcial de las f_n, lo que muestra que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}$ no es completo como queríamos ver. $\square$

Necesitamos ahora dos resultados auxiliares que tratan sobre la estabilidad de *frames* de exponenciales bajo perturbaciones suficientemente pequeñas de los escalares λ_n.

Lema 3.19. *Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos para la que*

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq B\|f\|^2$$

para toda $f \in PW^2$. Si para una segunda sucesión $\{\mu_n\}$ se verifica que $|\lambda_n - \mu_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_n |f(\lambda_n) - f(\mu_n)|^2 \leq B(e^{\pi L} - 1)^2\|f\|^2$$

para toda $f \in PW^2$.

Demostración. Si f es de PW^2, podemos escribir f como una serie de potencias alrededor del punto λ_n y por ende

$$f(\mu_n) - f(\lambda_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_n)}{k!}(\mu_n - \lambda_n)^k.$$

Si $\rho > 0$, multiplicando y dividiendo cada término de la serie por ρ^k obtenemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|f(\mu_n)-f(\lambda_n)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda_n)}{\rho^k k!}\rho^k(\mu_n - \lambda_n)^k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(\lambda_n)|^2}{\rho^{2k} k!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k}|\mu_n - \lambda_n|^{2k}}{k!}\right).$$

Aplicando ahora el lema 3.7, vemos que

$$\sum_n |f^{(k)}(\lambda_n)|^2 \leq B\|f^{(k)}\|^2 \leq B\pi^{2k}\|f\|^2$$

para todo $k \geq 1$, y en consecuencia

$$\sum_n |f(\lambda_n) - f(\mu_n)|^2 \leq B\|f\|^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{2k}}{\rho^{2k} k!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho L)^{2k}}{k!}\right) = B\|f\|^2(e^{\pi^2/\rho^2} - 1)(e^{\rho^2 L^2} - 1),$$

ya que $|\lambda_n - \mu_n| \leq L$ por hipótesis. Como ρ era arbitrario, obtenemos la estimación deseada si $\rho = \sqrt{\dfrac{\pi}{L}}$. □

Lema 3.20. *Si $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es un frame, existe una constante $L > 0$ para la que si $|\lambda_n - \mu_n| \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{e^{i\mu_n t}\}$ también es una frame.*

Demostración. Si $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es un *frame* en $L^2[-\pi, \pi]$, por la observación 3.17 se tiene que para toda $f \in PW^2$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq B\|f\|^2.$$

La idea es ver que si $|\lambda_n - \mu_n| \leq L$ con L pequeño, entonces también tendremos desigualdades parecidas para los puntos μ_n. Por el lema anterior, para toda $f \in PW^2$ se tiene que

$$\sum_n |f(\lambda_n) - f(\mu_n)|^2 \leq B(e^{\pi L} - 1)^2\|f\|^2 \leq C\sum_n |f(\lambda_n)|^2,$$

donde $C = \dfrac{B}{A}(e^{\pi L} - 1)^2$. Aplicando que en un espacio normado se cumple $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$, obtenemos que

$$\left| \sqrt{\sum_n |f(\lambda_n)|^2} - \sqrt{\sum_n |f(\mu_n)|^2} \right| \leq \sqrt{\sum_n |f(\lambda_n) - f(\mu_n)|^2} \leq \sqrt{C \sum_n |f(\lambda_n)|^2}, \quad (3.9)$$

y que por lo tanto,

$$\sqrt{A}(1 - \sqrt{C})\|f\| \leq \sqrt{\sum_n |f(\mu_n)|^2} \leq \sqrt{B}(1 + \sqrt{C})\|f\|.$$

Como C es menor que 1 si L es suficientemente pequeño, tendremos que $\sqrt{A}(1-C) > 0$ y por lo tanto que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}$ también es un *frame*. □

Finalmente podemos demostrar el teorema principal de estabilidad de *frames* de exponenciales por perturbaciones de la parte imaginaria de los λ_n.

Teorema 3.21. *Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de puntos en una banda horizontal de $\mathbb{C}$. Si $\{e^{i\mathrm{Re}(\lambda_n)t}\}$ es un frame en $L^2[-\pi, \pi]$, entonces también lo es $\{e^{i\lambda_n t}\}$.*

Demostración. Para simplificar la notación, llamemos $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$. Por hipótesis, se tiene que existe un $M > 0$ tal que $|\beta_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También por hipótesis el sistema $\{e^{i\alpha_n t}\}$ es un *frame*, de manera que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |f(\alpha_n)|^2 \leq B\|f\|^2$$

para toda $f \in PW^2$. En primer lugar, como $|\lambda_n - \alpha_n| \leq M$, por el lema 3.19 se tiene que

$$\sum_n |f(\lambda_n) - f(\alpha_n)|^2 \leq B(e^{\pi M} - 1)^2\|f\|^2.$$

De manera similar a como hemos procedido en (3.9), llegamos a que

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq \sum_n |f(\lambda_n) - f(\alpha_n)|^2 + \sum_n |f(\alpha_n)|^2 \leq B\|f\|^2 \left((e^{\pi M} - 1)^2 + 1\right),$$

por lo que $\{e^{i\lambda_n t}\}$ cumple la segunda desigualdad de la condición de *frame*.

Queda entonces ver la primera desigualdad. Comenzamos observando lo siguiente: si $f \in PW^2$ no es idénticamente cero, como toda función de tipo exponencial es de orden no mayor que 1, el teorema de Hadamard nos permite escribir

$$f(z) = z^k e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}, \quad (3.10)$$

donde k es el orden de 0 como cero de f, a y b son números complejos y $\{z_n\}$ son los ceros de f (a excepción de $z = 0$).

Pasamos a ver la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{Im}(\overline{z}_n)}{|z_n|^2}$ para $\{z_n\} \subset \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (también conocida como condición de Blaschke en el semiplano superior). Dada $f \in PW^2$, podemos definir la función $g(z) = f(z)e^{i\pi z}$ en $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. Como $|f(z)| \leq Ce^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}$, vemos que $|g(z)| \leq C$. Hemos construido entonces una función g holomorfa y acotada en el semiplano superior y que tiene los mismos ceros que f. Si ahora consideramos la transformación conforme de $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ en el disco unidad $\mathbb{D}$, $\Phi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, tenemos que la función $h = g \circ \Phi^{-1}$ es holomorfa y acotada en el disco por ser g acotada. Además, sus ceros son de la forma $\Phi(z_n)$, con z_n cero de g y tienen que cumplir la condición de Blaschke. Es decir, que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\Phi(z_n)|^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{z_n - i}{z_n + i}\right|^2\right) < \infty.$$

Pero tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{z_n - i}{z_n + i}\right|^2\right) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}(z_n)}{|z_n + i|^2},$$

que converge si y solo si lo hace la serie que queremos estudiar. El argumento se puede adaptar al semiplano inferior cambiando ligeramente la función g, por lo que tenemos la convergencia absoluta de la serie para todos los ceros de f. Si a su vez llamamos $\dfrac{1}{z_n} = a_n + ib_n$, podemos reescribir (3.10) como

$$f(z) = z^k e^{(c+id)z+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{a_n z}, \tag{3.11}$$

donde $c = \mathrm{Re}(a)$ y $d = \mathrm{Im}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Observamos que en particular, la convergencia uniforme de (3.10) sobre compactos de $\mathbb{C}$ implica la de (3.11), ya que es una reescritura de f.

La idea de la demostración es llevar a cabo un proceso que nos permita reducir la magnitud de la constante M de manera que podamos aplicar el lema 3.20. Procedemos en dos pasos.

(1) Existe una sucesión de escalares $\{\lambda_n^{(1)}\}_n$ y una función $f_1 \in PW^2$ cumpliendo que para todo $n \geq 1$,

$$\mathrm{Re}(\lambda_n^{(1)}) = \mathrm{Re}(\lambda_n), \qquad |\mathrm{Im}(\lambda_n^{(1)})| \leq \frac{M}{2}, \tag{3.12}$$

y también

$$\frac{\sum_n |f_1(\lambda_n^{(1)})|^2}{\|f_1\|^2} \leq e^{\pi M}\frac{\sum_n |f(\lambda_n)|^2}{\|f\|^2}. \tag{3.13}$$

Asumimos en primer lugar que $d \geq 0$ y definimos la sucesión $\{w_n\}$ de manera que

$$w_n = \begin{cases} z_n & \text{si} \quad \mathrm{Im}(z_n) \geq 0, \\ \overline{z}_n & \text{si} \quad \mathrm{Im}(z_n) < 0, \end{cases}$$

y una función g específica que se anula en estos puntos,

$$g(z) = z^k e^{(c+id)z+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{w_n}\right)e^{a_n z}. \tag{3.14}$$

Pasamos a ver que la función g así definida pertenece a PW^2. Para ello, definimos la sucesión de funciones $\{g_m\}$ tal que

$$g_m(z) = f(z) \prod_{k=1}^{m} \frac{1 - \frac{z}{w_n}}{1 - \frac{z}{z_n}}.$$

De la definición de g en (3.14), la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|w_n|^2}$ implica que g es entera. Además, el cociente $g_m(z)/g(z)$ tiende a 1 de forma puntual cuando $m \to \infty$ por ser las colas de productos convergentes (de hecho, uniformemente sobre compactos), por lo que g es el límite de las g_m. También observamos que $|g_m(x)| = |f(x)|$ si x es real, ya que si $w_n = \overline{z}_n$, llamando $z = \frac{w_n}{x}$ se tiene que

$$\frac{|1 - 1/z|}{|1 - 1/\overline{z}|} = \frac{|z - 1|}{|z - z/\overline{z}|} = \frac{|re^{i\theta} - 1|}{|re^{i\theta} - e^{2i\theta}|} = \frac{|re^{i\theta} - 1|}{|re^{-i\theta} - e^{-2i\theta}|} = 1.$$

Como esto se cumple para todo m, también es cierto en el límite y llegamos a que $|g(x)| = |f(x)|$ si x es real y en consecuencia, que $g \in L^2(\mathbb{R})$. Finalmente, como todas las g_m son de PW^2 con norma $\|g_m\| = \|f\|$, tenemos la desigualdad $|g_m(z)| \leq \|f\| e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, por lo que pasando al límite en m obtenemos que $|g(z)| \leq \|f\| e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}$, por lo que g es de tipo exponencial π y está en PW^2.

Además, se cumple que si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, entonces $|g(z)| \leq |f(z)|$ y $|g(z)| \leq |f(\overline{z})|$. Esto se puede ver comparando las definiciones de g y f y viendo que para cada factor del producto se cumple que efectivamente $|1 - z/w_n| \leq |1 - z/z_n|$ y $|1 - z/w_n| \leq |1 - \overline{z}/z_n|$ (multiplicando a ambos lados por $|z_n|$, que coincide con $|w_n|$). Para ver $|g(z)| \leq |f(\overline{z})|$, usamos además que $d \geq 0$ para comparar las exponenciales.

Con lo que hemos visto, si llamamos

$$\mu_n = \begin{cases} \lambda_n & \text{si} \quad \mathrm{Im}(\lambda_n) \geq 0, \\ \overline{\lambda}_n & \text{si} \quad \mathrm{Im}(\lambda_n) < 0, \end{cases}$$

obtenemos una sucesión de escalares en la que todos sus elementos tienen parte imaginaria positiva, y además $|g(\mu_n)| \leq |f(\lambda_n)|$. Definimos finalmente la sucesión que buscamos como

$$\lambda_n^{(1)} = \mu_n - \frac{iM}{2} \quad \text{y} \quad f_1(z) = g\left(z + \frac{iM}{2}\right).$$

Se sigue de lo que hemos hecho en la demostración que esta sucesión cumple (3.12) y también que $|f_1(\lambda_n^{(1)})| \leq |f(\lambda_n)|$. Observamos también que para obtener la desigualdad (3.13), es suficiente ver que $\|f_1\|^2 \geq e^{-\pi M}\|f\|^2$. Para ello, en primer lugar escribimos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{izt}\, dt$$

con $\phi \in L^2[-\pi, \pi]$. Tenemos entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)|^2\, dt,$$

y si llamamos $\phi_1(t) = \phi(t) e^{-Mt/2}$, vemos que

$$f_1(z) = g\left(z + \frac{iM}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(t) e^{izt}\, dt,$$

y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)|^2 e^{-Mt}\, dt \geq e^{-\pi M}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

(2) Dada $f \in PW^2$, podemos aplicar el apartado anterior sucesivamente para encontrar, dado un número natural k, una sucesión de escalares $\{\lambda_n^{(k)}\}$ y una función $f_k \in PW^2$ tal que

$$\mathrm{Re}(\lambda_n^{(k)}) = \mathrm{Re}(\lambda_n), \qquad |\mathrm{Im}(\lambda_n^{(k)})| \leq \frac{M}{2^k}$$

y de manera que se cumpla

$$\frac{\sum_n |f_k(\lambda_n^{(k)})|^2}{\|f_k\|^2} \leq e^{2\pi M}\frac{\sum_n |f(\lambda_n)|^2}{\|f\|^2},$$

donde escribimos $2\pi M$ en vez de $\pi M + \frac{\pi}{2}M + \cdots + \frac{\pi}{2^{k-1}}M$. Con tal de aplicar el lema 3.20, escogemos k de manera que $M/2^k \leq L$, donde L es la constante del lema asociada al *frame* $\{e^{i\alpha_n t}\}$. Entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n^{(k)} t}\}$ también es un *frame*, de manera que existe una constante positiva A_1 cumpliendo

$$A_1 \leq \frac{\sum_n |f_k(\lambda_n^{(k)})|^2}{\|f_k\|^2},$$

lo que a su vez implica que

$$A_1 e^{-2\pi M}\|f\|^2 \leq \sum_n |f(\lambda_n)|^2$$

para toda $f \in PW^2$, por lo que hemos obtenido la cota inferior buscada y $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es un *frame*.

En el caso en que $d < 0$, solo hace falta considerar la función $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para reducirnos al caso anterior. □

Acabamos este capítulo con dos corolarios de este teorema, que nos permiten dar la generalización a escalares complejos del teorema de $\frac{1}{4}$ de Kadec que buscábamos.

Corolario 3.22. *Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos en una banda horizontal de $\mathbb{C}$. Si el sistema $\{e^{i\mathrm{Re}(\lambda_n)t}\}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi,\pi]$, entonces también lo es $\{e^{i\lambda_n t}\}$.*

Demostración. Por el teorema 3.16, es suficiente ver que $\{e^{i\lambda_n t}\}$ es un *frame* exacto. Que es un *frame* es consecuencia directa del teorema anterior. Para ver que es exacto, supongamos que quitamos el elemento $e^{i\lambda_k t}$ del sistema. Como $\{e^{i\mathrm{Re}(\lambda_n)t}\}$ es un *frame* exacto, $\{e^{i\mathrm{Re}(\lambda_n)t}\}_{n\neq k}$ es incompleto y por el teorema 3.18, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\neq k}$ también es incompleto, por lo que no puede ser un *frame*, como queríamos ver. □

Corolario 3.23. *Si $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de escalares cumpliendo*

$$\sup_n |\mathrm{Re}(\lambda_n) - n| < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sup_n |\mathrm{Im}(\lambda_n)| < \infty,$$

entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi,\pi]$.

Referencias

[Tit39] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Second Edition. Oxford University Press, 1939. ISBN: 0195618831.

[Tit48] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Second Edition. Oxford University Press, 1948. ISBN: 0198533209.

[TL80] Angus E. Taylor y David C. Lay. *Introduction to Functional Analysis*. Second Edition. John Wiley & Sons, 1980. ISBN: 0471846465.

[You80] Robert M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Pure And Applied Mathematics. Academic Press, 1980. ISBN: 0127728503.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, 1987. ISBN: 0070542341.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. Second Edition. McGraw-Hill, 1991. ISBN: 0070542368.

[KNO23] Gady Kozma, Shahaf Nitzan y Alexander Olevskii. «A set with no Riesz basis of exponentials». En: *EMS Press* (2023). DOI: `10.4171/RMI/1411`.