UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

INTRODUCCIÓ A LES EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS ESTOCÀSTIQUES

Autor: Òscar Burés Mogollón

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

This work is an introduction to Stochastic partial differential equations (SPDEs). We study the stochastic calculus needed to define the equations, discuss the existence and uniqueness of solutions and, in the last place, we make use of the Malliavin calculus in order to study some properties of the law of the solutions of some SPDEs.

The first chapter is devoted to the definition of the space-time white noise. Following John B. Walsh's theory [5], we define the stochastic integral of deterministic and random functions with respect to the white noise.

The second chapter is devoted to the understanding of what partial differential equations (PDEs) are, which phenomena do they model and what variations lead to the random model. We state and prove a result about the existence and uniqueness of solutions and we apply it to the particular cases of the stochastic heat equation and stochastic wave equation.

Finally, in the third chapter we study the Malliavin calculus. This is a theory (initiated by Paul Malliavin and developed by David Nualart and Marta Sanz [12] [13]) that extends the classical rules of differential and integral calculus to random variables. We study the relationship between the Malliavin calculus and the law of random variables, stating and proving a result about the absolute continuity of the solutions of some SPDEs.

Resum

Aquesta memòria és una introducció a les Equacions en derivades parcials estocàstiques (EDPEs). S'estudia el càlcul estocàstic necessari per poder definir-les, discutir l'existència i unicitat de solucions i per últim, es fa ús del càlcul de Malliavin per estudiar algunes propietats sobre la llei de les solucions d'algunes EDPEs.

El primer capítol està dedicat a definir el soroll blanc espai-temps. Seguint la teoria de John B. Walsh [5], definim la integral estocàstica tant de funcions deterministes com aleatòries respecte el soroll blanc.

El segon capítol està dedicat a comprendre què són les equacions en derivades parcials (EDPs), quins fenòmens modelen, i quines variants donen peu al model aleatori. S'enuncia i es demostra un resultat d'existència i unicitat de solucions i s'aplica als casos particulars de l'equació de la calor estocàstica i l'equació d'ones estocàstica.

Per últim, al tercer capítol estudiem el càlcul de Malliavin. Aquesta és una teoria (iniciada per Paul Malliavin i desenvolupada per David Nualart i Marta Sanz [12],[13]) que extén el càlcul diferencial i integral clàssic a variables aleatòries. Es veu quina relació té el càlcul de Malliavin la llei de variables aleatòries, tot enunciant i demostrant un resultat sobre la llei de les solucions d'algunes EDPEs.

2020 Mathematics Subject Classification. 60H40 , 35R60, 60H07, 60H15

Agraïments

Primerament vull agrair al meu director, el Josep Vives, per la llibertat i l'ajuda que m'ha donat en tot el treball, així com el tracte en totes les reunions que hem tingut.

Agraïr també als meus pares i als meus tiets per tota l'ajuda fora de l'àmbit matemàtic, que ha sigut clau pel bon desenvolupament d'aquest treball.

Per últim, agraïr a la Cristina, a l'Arnau García, a la Carla, a la Mar, a l'Arnau Pérez, a la Sílvia, a la Udane i al Néstor per tot el suport dins i fora de la facultat.

Índex

Durant tot el treball hi haurà implícit un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complet.

1 Càlcul estocàstic i integració estocàstica

1.1 Processos estocàstics

Definició 1.1. *Sigui I un conjunt arbitrari. Un procés estocàstic X indexat per I és una família de variables aleatòries $X = \{X_t; t \in I\}$. També ho podem veure com una aplicació*

$$X : (t, \omega) \in I \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

tal que per a tot t, X_t és una variable aleatòria.

Definició 1.2. *Siguin $X = \{X_t; t \in I\}$ i $Y = \{Y_t; t \in I\}$ dos processos estocàstics. Y és una versió de X si per a tot $t \in I$,*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Definició 1.3. *Sigui $\{X_t; t \in I\}$ un procés estocàstic. Per a cada $\omega \in \Omega$, l'aplicació $t \in I \to X_t(\omega)$ s'anomena trajectòria del procés.*

En el cas en que I sigui un subconjunt d'un espai euclidià, és interessant preguntar-se sobre la possible continuitat de les trajectòries d'un procés. El resultat següent ajuda a resoldre aquesta qüestió:

Teorema 1.4. *(Continuitat de Kolmogorov) Sigui $\{X_t; t \in I\}$ un procés estocàstic on I és un interval finit de $\mathbb{R}$. Si existeixen constants $\alpha > 1$, $p > 0$ tals que*

$$\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq C|t - s|^\alpha$$

per a tot $s, t \in I$, on $C > 0$, aleshores existeix una versió de $\{X_t; t \in I\}$ amb trajectòries contínues.

Demostració. Veure, per exemple, [8]. □

Igual que podíem determinar la llei d'una variable aleatòria i/o d'un vector aleatori, és natural preguntar-se si podem determinar la llei d'un procés estocàstic. Primer de tot, necessitem saber que entenem per llei d'un procés estocàstic.

Definició 1.5. *Donat un procés estocàstic $X = \{X_t; t \in I\}$, definim les seves distribucions conjuntes en dimensió finita com la família de lleis multidimensionals dels vectors aleatoris $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ per a tot $t_1, \ldots, t_n \in I$ i per a tot $n \geq 1$.*

Amb la suficient informació sobre el procés, podem determinar la seva familia de distribucions en dimensió finita. La pregunta natural que hom es fa és: si disposem d'una família de lleis $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_k}$, existeix un procés X de tal manera que les seves distribucions conjuntes en dimensió finita siguin $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_k}$? El teorema següent ens dona una resposta a aquesta pregunta:

Teorema 1.6. *(Extensió de Kolmogorov) Considerem la familia*

$$\{\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k}; t_1,\dots,t_k \in I\} \tag{1.2}$$

on:

- $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k}$ *és una probabilitat a* $\mathbb{R}^k$.
- *Si* $\{t_{i_1},\dots,t_{i_m}\} \subset \{t_1,\dots,t_k\}$ *aleshores* $\mathbb{P}_{t_{i_1},\dots,t_{i_m}}$ *és la llei marginal de* $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k}$.

Aleshores existeix un procés estocàstic $\{X_t; t \in I\}$ *de tal manera que la llei dels vectors aleatoris* $(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ *és (1.2).*

Demostració. Es pot trobar a [9]. □

En aques treball ens centrarem sobretot en un tipus de processos anomenats processos gaussians. Direm que un procés $X = \{X_t; t \in I\}$ és gaussià si les distribucions conjuntes en dimensió finita de X són distribucions gaussianes. Per justificar l'existència d'aquests processos, farem ús del teorema d'extensió de Kolmogorov procedint de la següent manera:

Sigui $K : I \times I \to \mathbb{R}$ simètrica i definida no-negativa. Fixem $t_1,\dots,t_k \in I$, denotem per Γ la matriu $\Gamma = (K(t_i,t_j))_{1\le i,j\le k}$ i $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_k} \sim N(0,\Gamma)$. Per a cada $\{t_{i_1},\dots,t_{i_m}\}$ tenim

$$A(X_{t_1},\dots,X_{t_k})^T = (X_{t_{i_1}},\dots,X_{t_{i_m}})^T$$

on

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{t_1,t_{i_1}} & \cdots & \delta_{t_k,t_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{t_1,t_{i_m}} & \cdots & \delta_{t_k,t_{i_m}} \end{pmatrix}.$$

El vector $(X_{t_{i_1}},\dots,X_{t_{i_m}})$ segueix una llei gaussiana de mitjana 0 i de matriu de covariàncies $A\Gamma A^T$. Ara bé,

$$A\Gamma A^T = (K(t_{i_r},t_{i_s}))_{1\le r,s\le m}.$$

Per tant les hipòtesis del teorema d'extensió de Kolmogorov se satisfan.

De la mateixa manera que les lleis gaussianes venen completament determinades per un vector d'esperances i una matriu de covariàncies, un procés gaussià ve determinat per una funció mitjana $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ i una funció covariància $\Gamma(s,t) = \mathbb{C}(X_s,X_t)$.

En la secció següent, estudiarem en profunditat un procés gaussià clau pel desenvolupament de les equacions en derivades parcials estocàstiques.

1.2 Soroll blanc en $\mathbb{R}^2$

Definició 1.7. *Considerem l'espai de mesura* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m)$ *on* m *denota la mesura* $m(dx,dt) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)dxdt$, *i sigui* $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$ *el conjunt de Borelians* A *de* $\mathbb{R}^2$ *tals que* $m(A) < \infty$, *. Un soroll blanc basat en* m *és una aplicació*

$$\dot{W} : A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2) \mapsto \dot{W}(A) \tag{1.3}$$

complint les següents propietats:

- *$\dot{W}(A)$ és una variable aleatoria amb llei $N(0, m(A))$.*
- *Si $A \cap B = \emptyset$ aleshores $\dot{W}(A)$ i $\dot{W}(B)$ són independents i, a més, $\dot{W}(A \cup B) = \dot{W}(A) + \dot{W}(B)$ q.s.*

Per justificar l'existència d'aquest procés, observem que el soroll blanc en $\mathbb{R}^2$ és un procés gaussià indexat per $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$. Com $\mathbb{E}(\dot{W}(A)) = 0$, definim $\mu(A) = 0$ i $\Gamma(A, B) = m(A \cap B)$. El teorema d'extensió de Kolmogorov ens dona, doncs, l'existència de $\dot{W}$.

1.3 Integració de funcions deterministes respecte $\dot{W}$

1.3.1 El procés isonormal

En aquesta secció construirem un procés $\{\dot{W}(h); h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)\}$ i per a cada $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$, direm que $\dot{W}(h)$ és la integral de h respecte $\dot{W}$.

Considerem novament l'espai de mesura $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2), m)$ i sigui $\dot{W}$ un soroll blanc basat en m. Construïm $\dot{W}(h)$ de la forma següent: donat $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$, definim $\dot{W}(\mathbb{1}_A) := \dot{W}(A)$. En general, per a $\sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j}$ on $c_j \in \mathbb{R}$ i $A_j \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$ disjunts dos a dos definim

$$\dot{W}\left(\sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j}\right) := \sum_{j=1}^k c_j \dot{W}(A_j).$$

A les funcions del tipus $\sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j}$ les anomenem funcions simples. Denotem per $\mathfrak{S}$ el conjunt de funcions simples. Observem que $\dot{W}$ és comporta de forma lineal amb les funcions de $\mathfrak{S}$.

L'asignació anterior està ben definida:

Proposició 1.8. *Sigui $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ tal que h admet les representacions*

$$h = \sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j},$$
$$h = \sum_{s=1}^l d_s \mathbb{1}_{B_s}.$$

Aleshores

$$\dot{W}\left(\sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{A_j}\right) = \dot{W}\left(\sum_{s=1}^l d_s \mathbb{1}_{B_s}\right) \quad \text{q.s.}$$

Demostració. Observem que si anomenem $C_{j,s} = A_j \cap B_s$, sobre $C_{j,s}$ es té $c_j = d_s$. Aleshores h admet també la representació

$$h = \sum_{j,s=1}^{k,l} \alpha_{j,s} \mathbb{1}_{C_{s,j}}$$

on els coeficients satisfan $\alpha_{j,s}^2 = c_j d_s$. Amb aquestes consideracions, fem el càlcul:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right) - \dot{W}\left(\sum_{s=1}^{l} d_s \mathbb{1}_{B_s}\right)\right)^2\right] \\
=&\mathbb{E}\left[\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\dot{W}\left(\sum_{s=1}^{l} d_s \mathbb{1}_{B_s}\right)^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right)\dot{W}\left(\sum_{s=1}^{l} d_s \mathbb{1}_{B_s}\right)\right] \\
=&\sum_{j=1}^{k} c_j^2 m(A_j) + \sum_{s=1}^{l} d_s^2 m(B_s) - 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} c_j d_s m(A_j \cap B_s) \\
=&\sum_{j=1}^{k} c_j^2 m(A_j) + \sum_{s=1}^{l} d_s^2 m(B_s) - 2\sum_{j,s=1}^{k,l} \alpha_{j,s}^2 m(C_{j,s}) = 2||h||_{L^2(\mathbb{R}^2,m)} - 2||h||_{L^2(\mathbb{R}^2,m)} = 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

i obtenim el resultat desitjat. □

Ara ens interessa definir $\dot{W}(h)$ per a una $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ qualsevol. Ens recolzarem en els següents resultats:

Proposició 1.9. *El conjunt de funcions simples $\mathfrak{S}$ és dens en $L^2(\mathbb{R}^2, m)$.*

Demostració. Es pot trobar a [14]. □

Gràcies a aquesta proposició, sabem que tota funció $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ es pot aproximar per funcions simples. És a dir, per a tota $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$, existeix una successió $\{h_n; n \geq 1\} \subset \mathfrak{S}$ tal que $||h - h_n||_{L^2(\mathbb{R}^2,m)} \to 0$ quan $n \to \infty$.

Teorema 1.10. *Sigui $h \in \mathfrak{S}$, aleshores*

$$
\left|\left|\dot{W}(h)\right|\right|_{L^2(\Omega)} = ||h||_{L^2(\mathbb{R}^2,m)}
$$

Demostració. Com $h \in \mathfrak{S}$, podem suposar que $h = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}$ on els coeficients c_j són reals i els conjunts $A_j \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)$ són disjunts dos a dos. Tenim doncs:

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right)\right|\right|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{k} c_j^2 m(A_j) \\
&= \left|\left|\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2,m)}.
\end{aligned}
$$

□

Sigui $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ i sigui $\{h_n; n \geq 1\} \subset \mathfrak{S}$ tal que $||h - h_n||_{L^2(\mathbb{R}^2,m)} \to 0$. Gràcies a la linealitat de $\dot{W}$ i al teorema 1.10, la successió $\{\dot{W}(h_n); n \geq 1\}$ és de Cauchy en $L^2(\Omega)$ i, com $L^2(\Omega)$ és complet, $\{\dot{W}(h_n); n \geq 1\}$ és convergent. Per tant, podem definir, per a una $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ qualsevol, $\dot{W}(h) = \lim_{n\to\infty} \dot{W}(h_n)$ (on aquest límit és en $L^2(\Omega)$). Aquesta definició és correcta gràcies a la següent proposició:

Proposició 1.11. *Sigui $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$. Aleshores $\dot{W}(h)$ no depèn de la successió que aproxima h en $L^2(\mathbb{R}^2, m)$.*

Demostració. Com $\dot{W}$ es comporta de manera lineal amb les funcions simples, per un argument d'aproximació deduïm que $\dot{W}(\cdot)$ és una aplicació lineal en $L^2(\mathbb{R}^2, m)$. Ara, donada $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$, considerem $\{h_n^1; n \geq 0\}$ i $\{h_n^2; n \geq 0\}$ dues successions que convergeixen a h en $L^2(\mathbb{R}^2, m)$. Per la propietat de linealitat i d'isometria trobem que

$$||\dot{W}(h_n^1) - \dot{W}(h_n^2)||_{L^2(\Omega)} = ||\dot{W}(h_n^1 - h_n^2)||_{L^2(\Omega)} = ||h_n^1 - h_n^2||_{L^2(\mathbb{R}^2, m)} \to 0,$$

i per tant $\dot{W}(h)$ no depèn de la successió que aproxima h. □

Notacionalment, escriurem

$$\dot{W}(h) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,t) W(dx, dt)$$

i direm que $\dot{W}(h)$ és la integral de h respecte $\dot{W}$.

1.4 Integració d'objectes aleatoris respecte $\dot{W}$

En la secció anterior hem construit la integral d'una funció determinista $h \in L^2(\mathbb{R}^2, m)$ i ara volem extendre la definició al cas en que l'integrand sigui un objecte aleatori. Per això, seguirem la teoria desenvolupada per Walsh ([4], [5], [7]). Per poder desenvolupar una teoria d'integració estocàstica necessitem la teoria de martingales.

1.4.1 Teoria de Martingales

En aquesta secció, suposarem que I és de la forma $I = [0, T]$ o, si es vol, $I = [0, \infty)$ (la teoria de martingales que desenvoluparem seguidament no depèn de si I és fitat o no).

Definició 1.12. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat. Una filtració $\mathbb{F}$ de $\mathcal{F}$ és una col·lecció de sub σ-àlgebres de $\mathcal{F}$ creixent respecte la inclusió.*

Definició 1.13. *Un espai de probabilitat filtrat és una estructura $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és un espai de probabilitat i $\mathbb{F}$ és una filtració de $\mathcal{F}$.*

Definició 1.14. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat filtrat, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}; t \in I\}$ i sigui $X = \{X_t; t \in I\}$ un procés estocàstic definit en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Direm que X és $\mathbb{F}$-adaptat (o simplement adaptat si no hi ha confusió respecte a la filtració) si X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Direm que una filtració $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ és contínua per la dreta si per a tot $t \in I$

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

Donat un procés estocàstic $\{X_t; t \in I\}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sempre podem definir una filtració $\mathbb{F}_X = \{\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}; s \geq 0\}$ de tal manera que X sigui $\mathbb{F}_X$-adaptat. En efecte, podem definir $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$ i se satisfà que $\mathbb{F}_X$ és una filtració i X_t és $\mathcal{F}_t^X$-mesurable.

Definició 1.15. *Sigui $X = \{X_t; t \in I\}$ un procés estocàstic. La filtració $\mathbb{F}_X$ definida anteriorment rep el nom de filtració natural associada a X.*

D'ara en endavant, suposarem que totes les filtracions de les que parlem són contínues per la dreta.

Definició 1.16. *Sigui $X = \{X_t; t \in I\}$ un procés estocàstic definit sobre un espai de probabilitat filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ on $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}; t \geq 0\}$. X és una martingala (resp. submartingala o supermartingala) respecte $\mathbb{F}$ si es satisfan les condicions següents:*

- *X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- *$\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ per a tot $t \geq 0$.*
- *$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ (resp. $\geq X_s$ ó $\leq X_s$) per a tot $0 \leq s \leq t$.*

Definició 1.17. *Donada una filtració $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$, un instant d'aturada és una variable aleatòria*

$$\tau : \omega \in \Omega \longrightarrow \tau(\omega) \in I \cup \{\infty\}$$

de tal manera que $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Definició 1.18. *Sigui X un procés adaptat i τ un instant d'aturada. Es defineix el procés aturat X^τ com*

$$X_t^\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega).$$

Teorema 1.19. *Sigui $M = \{M_t; t \geq 0\}$ una martingala respecte a la filtració $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$. Si S, T són instants d'aturada tals que $S \leq T \leq c$ q.s. on $c \in \mathbb{N}$ és una constant, aleshores es té $E(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S$ q.s. (respectivament $\geq$ o $\leq$ si M és submartingala o supermartingala).*

Demostració. Es pot trobar a [8]. □

Teorema 1.20. *(Desigualtats de Doob) Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat, sigui $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ una filtració i sigui $\{M_t; t \geq 0\}$ una martingala $\mathbb{F}$-adaptada amb trajectòries contínues, aleshores:*

1. *Per a $p \geq 1$ i per a $t > 0$, si $\mathbb{E}(|M_t|^p) < \infty$ aleshores:*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq u\leq t} |M_u| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|M_t|^p)}{\lambda^p}.$$

2. *Per a $p > 1$ i per a $t > 0$, si $\mathbb{E}(|M_t|^p) < \infty$ aleshores*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t} |M_u|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_t|^p).$$

Demostració. Es pot trobar a [8]. □

Teorema 1.21. *Siguin $X = \{X_t; t \in I\}$, $Y = \{Y_t; t \in I\}$ dues martingales amb trajectòries contínues. Existeix un únic procés estocàstic creixent $\langle X, Y\rangle_t$ (i l'anomenarem variació quadràtica de X i Y) de tal manera que $X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t$ és una martingala. A més, es pot expressar de la forma següent:*

Fixem $t > 0$ i considerem una successió de particions $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = t$ de $[0, t]$ creixent i amb increments tendint a 0. Aleshores

$$\sum_{i=1}^{m_n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) \longrightarrow^{\mathbb{P}}_{n\to\infty} \langle X, Y\rangle_t.$$

Demostració. Es pot trobar a [8]. □

Per alleugerir la notació, escribim $\langle X\rangle_t := \langle X, X\rangle_t$

Exemple 1.22. Si considerem, fixat $A \in B_b(\mathbb{R})$, el procés $\{W_t(A); t \geq 0\}$ definit com $W_t(A) := \dot{W}([0, t] \times A)$ aleshores $\langle W_\cdot(A)\rangle_t = t|A|$ on $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}$.

En la secció següent introduirem el concepte de mesura de martingala i veurem que el soroll blanc gaudeix de les propietats necessàries per ser un integrador.

Les mesures de martingala són l'objecte que ens permetrà desenvolupar tota una teoria d'integració estocàstica, tot seguint l'esquema de [5],[7] i [13].

A partir d'ara, considerem un espai de probabilitat filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ de manera que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}; t \geq 0\}$ on

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s(A), 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}.$$

El primer pas és introduir el concepte de mesura aleatòria. Considerem l'espai mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Sigui $U(A, \omega)$ una funció definida en $\mathcal{A} \times \Omega$, on $\mathcal{A}$ és una àlgebra de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathbb{E}(U(A)^2) < \infty$ per a tot $A \in \mathcal{A}$. U és una mesura aleatòria si per a cada $A \in \mathcal{A}$, $U(A)$ és una variable aleatòria i per a cada ω, $U(\cdot, \omega)$ és una mesura en $\mathcal{A}$. Suposem que U és additiva, en el sentit que si $A \cap B = \emptyset$ tenim $U(A \cup B) = U(A) + U(B)$ q.s.

Si volem dotar a U de propietats de mesura més riques com σ-finitud o σ-additivitat, haurem pensar en aquesta U com una funció que envia conjunts de $\mathcal{A}$ a variables aleatòries de $L^2(\Omega)$ (és a dir, restringim el conjunt imatge a $L^2(\Omega)$). De manera anàloga a les mesures clàssiques, definirem les propietats de σ-finitud o σ-additivitat de la forma següent: Direm que U és σ-finita si existeix una successió $\{E_n; n \geq 1\}$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ creixent respecte la inclusió complint que per a tot n:

- $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{A}$, on $\mathcal{E}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)_{|E_n} := \{B \cap E_n, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$.
- $\sup\{\left[\mathbb{E}(U(A)^2)\right]^{1/2}; A \in \mathcal{E}_n\} < \infty$.

Definim $\nu(A) = \mathbb{E}(U(A)^2)$. Direm que una funció de conjunts U és σ-additiva en $\mathcal{E}_n$ si i només si per a tota successió $\{A_j; j \geq 0\} \subset \mathcal{E}_n$ monòtona decreixent respecte la inclusió tal que $A_j \downarrow \emptyset$, aleshores $\lim_j \nu(A_j) = 0$. La condició de que U sigui σ-finita és completament anàloga a la definició de mesura σ-finita, mentre que la definició de σ-additivitat per mesures aleatòries es basa en el fet següent:

Lema 1.23. *Sigui μ una mesura additiva definida en un espai $(\Omega, \mathcal{A})$, on $\mathcal{A}$ és una àlgebra. Es compleix que μ és σ-additiva si, i només si, per a tota successió $\{A_n; n \geq 0\} \subset \mathcal{A}$ monòtona decreixent (respecte la inclusió) cap a $\emptyset$ i $\mu(A_0) < \infty$ se satisfà $\lim_n \mu(A_n) = 0$.*

Demostració. Es pot trobar a [1]. □

Si U és σ-additiva en $\mathcal{E}_n$ per a tot n, podem definir una extensió a tot $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Sigui $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, posem $U(A) = \lim_n U(A \cap E_n)$ si el límit existeix en $L^2(\Omega)$ i indefinit en cas contrari. Això ens permet definir la funció U per conjunts que no es troben en cap $\mathcal{E}_n$, sense alterar el valor de U en $\mathcal{E}_n$. A partir d'aquí, cada cop que parlem de mesures de martingala suposarem que les estem considerant ja esteses d'aquesta manera.

Proposició 1.24. *El procés $W = \{W_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}$ definit per $W_t(A) := \dot{W}([0,t] \times A)$ és una "mesura de martingala" (respecte $\mathbb{F}$), en tant que compleix les propietats següents:*

- *Per a tot $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $W_0(A) = 0$ q.s.*
- *Si $t > 0$, W_t és una mesura σ-finita i σ-additiva a valors en $L^2(\Omega)$.*
- *Per a tot $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, $\{W_t(A); t \geq 0\}$ és una martingala centrada amb trajectories contínues respecte la filtració $\mathbb{F}$.*

Demostració.

- Observem que $W_t(A) = \dot{W}([0,t] \times A)$, per tant $\mathbb{E}(W_t(A)^2) = t|A|$ on $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}$. Deduïm doncs que $W_0(A) = 0$ q.s.
- La propietat de σ-finitud és clara. Per comprovar la σ-additivitat fixem $t > 0$ i veiem que si $\{A_j; j \geq 0\}$ és una successió decreixent tal que $A_j \downarrow \emptyset$ aleshores $\mathbb{E}(W_t(A_j)^2) \to 0$, però això és directe de $\mathbb{E}(W_t(A)^2) = t|A|$ i de que $|A_j| \to 0$.
- Fixem $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Observem que per a tot $0 \leq u \leq s \leq t$:

  $$\mathbb{E}\left[(W_t(A) - W_s(A))\, W_u(A)\right] = (t \wedge u - s \wedge u)\, |A| = 0.$$

  Per tant, per a tot $0 \leq u \leq s \leq t$, les variables $\dot{W}_t(A) - \dot{W}_s(A)$ i $\dot{W}_u(A)$ són incorrelacionades i, per gaussianitat, són independents. Per tant, tenim:

  $$\begin{aligned} &E\left(W_t(A)|\mathcal{F}_s\right) = E\left(W_t(A) - W_s(A)|\mathcal{F}_s\right) + W_s(A) \\ =&\mathbb{E}\left(W_t(A) - W_s(A)\right) + W_s(A) = W_s(A). \end{aligned}$$

  Conjuntament amb que, per la tria de la filtració, $W_t(A)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable i que $\mathbb{E}(W_t(A)^2) = t|A| < \infty$ tenim que efectivament, $\{W_t(A); t \geq 0\}$ és una martingala. Demostrar la continuitat de les trajectòries és directe aplicant el teorema de continuitat de Kolmogorov, observant que

  $$\mathbb{E}\left[((W_t(A) - W_s(A))^4\right] = 3|A|^2|t-s|^2 = C|t-s|^2.$$

  doncs $W_t(A) - W_s(A) \sim N(0, |A| \cdot |t-s|)$.

$\square$

El procés W reb el nom de soroll blanc en espai i temps o soroll blanc espai-temps.

1.4.2 Integral de funcions previsibles

D'ara en endavant, suposarem $t \in [0,T]$, de tal manera que treballem amb $W = \{W_t(A); t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}$. Sigui $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtració definida per

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s(A); 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^2)\}.$$

Definició 1.25. *Una funció $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ és elemental si f és de la forma*

$$f(x,t,\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_{(a,b]}(t)\mathbb{1}_A(x) \tag{1.5}$$

on X és una variable aleatòria fitada i $\mathcal{F}_a$-mesurable, i $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Les combinacions lineals de funcions elementals amb suport disjunt les anomenarem funcions simples, i denotem per $\mathbb{S}$ el conjunt de funcions simples.

Definirem la integral estocàstica per una classe de funcions, que les anomeranem "previsibles". Una funció f és previsible si, i només si, és $\sigma\{\mathbb{S}\}$-mesurable, on $\sigma\{\mathbb{S}\}$ denota la σ-àlgebra generada per les funcions simples $\mathbb{S}$. Considerem la mesura de martingala que haviem estudiat prèviament

$$W = \{W_t(A); t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}.$$

Definim el funcional de covariància de W com

$$\overline{Q}_t(A,B) = \langle W_\cdot(A), W_\cdot(B)\rangle_t = t|A \cap B| \quad \forall t \in [0,T], A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}).$$

Definim ara una funció de conjunts Q de la forma següent: Per a tot $0 \leq s \leq t$ i $A, B \in B_b(\mathbb{R})$ definim

$$Q(A,B;(s,t]) = \overline{Q}_t(A,B) - \overline{Q}_s(A,B).$$

Els conjunts anteriors els anomenem rectangles. Ara, si $A_i \times B_i \times (s_i,t_i]$, $1 \leq i \leq n$ són rectangles disjunts dos a dos, definim

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i \times (s_i,t_i])\right) := \sum_{i=1}^{n} Q(A_i, B_i; (s_i,t_i]).$$

De la teoria de mesures de martingala desenvolupada per Walsh, deduïm que donada una mesura de martingala M qualsevol, generalment la funció Q associada a M no es pot extendre a una mesura. Tanmateix, si M compleix certes condicions, aleshores si que la podrem extendre. A aquest tipus de mesures de martingala les anomenarem "worthy". La definició rigurosa és la següent:

Definició 1.26. *Sigui M una mesura de martingala. Direm que M és "worthy" si existeix una mesura aleatòria σ-finita $K(A \times B \times C, \omega)$ on $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $\omega \in \Omega$ complint les següents propietats:*

1. *L'assignació $A \times B \mapsto K(A \times B \times C, \omega)$ és simètrica i definida no-negativa, en tant que per a tot f, $g \in \mathcal{P}$:*

$$\iiint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,T]} f(x,t)g(y,t)K(dx,dy,dt) \geq 0 \quad \textit{q.s.},$$

   sempre i quan aquesta última integral estigui ben definida.

2. *El procés $\{K(A \times B \times (0,t]); t \in [0,T]\}$ és un procés $\mathcal{P}$-mesurable per a tot $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$.*

3. *Per a tot $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ i $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\left[K(A \times B \times (0,t])\right] < \infty$.*

4. *Per a tot $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ i $t \in [0,T]$, $|Q(A,B;(0,t]))| \leq K(A \times B \times (0,t])$ q.s.*

En el nostre cas, la mesura de martingala $W = \{W_t(A); t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}$ és una mesura "worthy". En efecte, definim la mesura σ-finita i σ-additiva $K(A \times B \times C) = |C| \cdot |A \cap B|$. K compleix les 4 propietats anteriors. A més, $K \equiv Q$ sobre els rectangles. Com les combinacions lineals de rectangles són denses en $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, per un argument clàssic d'aproximació podem extendre Q a una mesura que coincideix amb K. En general aquesta mesura Q reb el nom de mesura de covariància i K reb el nom de mesura dominant. Normlament la mesura de convariància i la mesura dominant no coincideixen, però en el cas del soroll blanc espai-temps sí que ho fan.

A l'espai de funcions previsibles li associarem una aplicació $||\cdot||_W$, definida com:

$$||f||_W^2 = \mathbb{E}\left[\iiint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,T]} |f(x,t)f(y,t)|Q(dx,dy,dt)\right].$$

Observem, a més, que $Q(A,A,C) = |C||A|$. Això vol dir que la mesura de covariància $Q(A,B,C)$ en el cas $A = B$ coincideix amb la mesura $m(dx,dt) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)dxdt$. És per això que $||f||_W$ es pot escriure com

$$||f||_W^2 = \mathbb{E}\left[\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} f(x,t)^2 dxdt\right].$$

Denotem per $\mathcal{P}_W$ el conjunt de $f \in \mathcal{P}$ tal que $||f||_W < \infty$. Per $f, g \in \mathcal{P}$ definim

$$\langle f,g\rangle_Q = \iiint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,T]} f(x,t)g(y,t)Q(dx,dy,dt) = \iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} f(x,t)g(x,t)dxdt.$$

Podem deduir les següents propietats de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$:

Proposició 1.27. *Sigui $W = \{W_t(A); t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})\}$ i sigui $Q(dx,dy,dt)$ la seva mesura de covariància (que coincideix amb la seva mesura dominant $K(dx,dy,dt)$). Se satisfan les següents propietats:*

1. *$\langle f,f\rangle_Q \geq 0$ q.s.*

2. *$\langle f,g\rangle_Q \leq \langle f,f\rangle_Q^{1/2}\langle g,g\rangle_Q^{1/2}$.*

3. $\langle f+g, f+g\rangle_Q^{1/2} \leq \langle f,f\rangle_Q^{1/2} + \langle g,g\rangle_Q^{1/2}$.

Demostració.

1. És cert per hipòtesi. De fet, estem suposant que K és definida no-negativa però en el cas del soroll blanc es té $K \equiv Q$.

2. Primer de tot observem que $\langle f,f\rangle_Q = 0$ q.s. si, i només si $f = 0$ q.s. Amb això en ment, si $f = 0$ q.s. o $g = 0$ q.s. el resultat és cert. Suposem que són diferents de 0 q.s., aleshores definim:

$$h = \frac{f}{\langle f,f\rangle_Q} - \frac{g}{\langle g,g\rangle_Q}.$$

   Es compleix:

$$0 \leq \langle h,h\rangle_Q = 2 - 2\frac{\langle f,g\rangle_Q}{\langle f,f\rangle_Q^{1/2}\langle g,g\rangle_Q^{1/2}}$$

   i per tant,

$$\langle f,g\rangle_Q \leq \langle f,f\rangle_Q^{1/2}\langle g,g\rangle_Q^{1/2}$$

3. Observem que $\langle f+g, f+g\rangle_Q = \langle f,f\rangle_Q + \langle g,g\rangle_Q + 2\langle f,g\rangle_Q$. Apliquem el punt 2 a l'últim sumand i obtenim el resultat.

$\square$

Teorema 1.28. *L'aplicació $||f||_W$ és norma i $\mathcal{P}_W$ és un espai de Banach.*

Abans de demostrar el teorema, farem una observació.

Observació 1.29. Podem aplicar els teoremes de convergència monòtona i convergència dominada. En efecte, fixat ω, Q és σ-additiva. A més, si $0 \leq f \leq g$ q.s. aleshores

$$\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} f(x,s)^2 dyds \leq \iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} g(x,s)^2 dxds \quad \text{q.s.}$$

Això es pot comprovar fàcilment per funcions elementals i simples. L'extensió a $\mathcal{P}_W$ és certa per aproximació, donant un argument d'aproximació diagonal.

1. Si $\{f_n, n \geq 0\}$ és una successió de $\mathcal{P}_W$ tal que $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$ i $f_n(x,t,\omega) \to f(x,t,\omega) \in \mathcal{P}_W$ g.p.t. (x,t,ω), aleshores:

$$\langle f_1, f_1\rangle_Q \leq \cdots \leq \langle f_n, f_n\rangle_Q \leq \cdots$$

   Aplicant el teorema de la convergència monòtona per variables aleatòries integrables tenim

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\langle f_n, f_n\rangle_Q\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\langle f_n, f_n\rangle_Q\right].$$

   Com Q és σ-additiva, aplicant el teorema de la convergència dominada per funcions Q-integrables tenim

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\langle f_n, f_n\rangle_Q\right] = \mathbb{E}\left[\langle f,f\rangle_Q\right].$$

2. Per veure que podem aplicar el teorema de la convergència dominada, el procediment és anàleg.

Passem a demostrar el teorema:

Demostració. Primer demostrarem que $||f||_W$ és norma. Observem que $||f||_W^2 = \mathbb{E}\left[\langle |f|, |f|\rangle_Q\right]$.

1. $||f||_W = 0$ si, i només si, $\langle |f|, |f|\rangle_Q = 0$ q.s. i això es compleix si, i només si $f = 0$ q.s.

2. Com $\langle |cf|, |cf|\rangle_Q = c^2\langle |f|, |f|\rangle_Q$, és clar que $||cf||_W = |c| \cdot ||f||_W$.

3. Per provar la desigualtat triangular, tenim:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\langle |f+g|, |f+g|\rangle_Q\right] &\leq \mathbb{E}\left[\langle |f|, |f|\rangle_Q + \langle |g|, |g|\rangle_Q + 2\langle |f|, |f|\rangle_Q^{1/2}\langle |g|, |g1\rangle_Q^{1/2}\right] \\ &\leq ||f||_W^2 + ||g||_W^2 + 2||f||_W||g||_W.\end{aligned}$$

Ara provarem que l'espai és de Banach. Primer de tot observem que si $0 \leq f \leq g$ aleshores $||f||_W \leq ||g||_W$, per la monotonia de l'esperança i perquè $\langle f, f\rangle_Q \leq \langle g, g\rangle_Q$. Sigui $\{f_n, n \geq 0\}$ una successió de Cauchy en $\mathcal{P}_W$. Sigui $\{f_{n_k}, k \geq 0\}$ una parcial de tal manera que $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_W < 2^{-k}$. Definim formalment (doncs de moment no sabem si estan ben definides) les funcions:

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

$$g = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

i denotem per $S_N(f)$ i $S_N(g)$ les sumes parcials. Per una banda, tenim, per la desigualtat triangular, que $||S_N(g)||_W \leq ||f_{n_1}||_W + 1$. Per tant, fent el límit quan $N \to \infty$ tenim, pel teorema de la convergència dominada, que $g \in \mathcal{P}_W$. D'aqui deduïm doncs que $f \in \mathcal{P}_W$. Això vol dir que la sèrie que defineix f convergeix quasi segurament. A més, com $S_N(f) = f_{n_N}$, tenim $f_{n_k}(x,t,\omega) \to f(x,t,\omega)$ excepte potser en algun conjunt de mesura 0. Aplicant doncs el teorema de la convergència dominada, $||f_{n_k} - f||_W \to 0$. Per veure que la convergència és de tota la successió, fixem $\epsilon > 0$ petit i escollim n_0 suficientment gran com per que $||f_n - f_m||_W < \epsilon/2$ i $||f_{n_k} - f||_W < \epsilon/2$ per a tot $n, m, n_k > n_0$. D'aquesta manera:

$$||f_n - f||_W \leq ||f_n - f_{n_k}||_W + ||f_{n_k} - f||_W < \epsilon,$$

que prova la convergència en norma de f_n a f. □

Proposició 1.30. *El conjunt de funcions simples* $\mathbb{S}$ *és dens en* $\mathcal{P}_W$*.*

Demostració. Si $f \in \mathcal{P}_W$ aleshores definim $f_N(x,s) = f(x,s)\mathbb{1}_{\{|f(x,s)|<N\}}$. D'aquesta manera, pel teorema de la convergència monòtona, $||f - f_N||_W^2 \to 0$. Això demostra que les funcions de $\mathcal{P}_W$ fitades són denses en $\mathcal{P}_W$ i, per tant, només fa falta veure que les funcions simples són denses en les funcions fitades.

Per una banda, si f és una funció esglaonada (és a dir, que existeixen $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ de tal manera que $f(x,t,\omega) = f(x,t_j,\omega)$ per a tot $t \in [t_j, t_j+1))$ aleshores es pot aproximar per funcions simples. Per tant hem de veure que les funcions esglaonades són denses en les funcions fitades. Per fer-ho, definim per a cada n:

$$f_n(x,s) = 2^{-n} \int_{((k-1)2^{-n},k2^{-n}]} f(x,u)du \quad \text{si } s \in ((k-1)2^{-n}, k2^{-n}].$$

Aquestes funcions són esglaonades i satisfan $f_n(x,s) \to f(x,s)$ g.p.t. s. Aplicant el teorema de la convergència dominada, es té que $||f - f_n||_W \to 0$. □

Ara que coneixem l'espai de funcions que integrarem podem definir la integral respecte la mesura de martingala $W = \{W_t(A); t \in [0,T], A \in B_b(\mathbb{R})\}$.

Definició 1.31. *Donada una funció elemental f de la forma (1.5), definim el procés estocàstic integral de f respecte $\dot{W}$ com*

$$(f \cdot W)_t(B)(\omega) := X(\omega)\left[W_{t\wedge b}(A \cap B) - W_{t\wedge a}(A\cap B)\right](\omega).$$

Si $f \in \mathbb{S}$, podem escriure f com $f = c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k$ on f_j són elementals amb suport disjunt. En tal cas definim

$$(f \cdot W)_t(B) := \sum_{j=1}^{k} c_j (f_j \cdot W)_t(B).$$

Enunciarem tot seguit un resultat per funcions simples que ens ajudarà a extendre la definició d'integral respecte mesures de martingala a funcions previsibles generals.

Proposició 1.32. *Sigui $f \in \mathbb{S}$ i $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Es satisfà:*

$$\mathbb{E}\left[(f\cdot W)_t(B)^2\right] = \mathbb{E}\left[\iint_{B\times(0,t]} f(x,s)^2 dxds\right]. \tag{1.6}$$

Demostració. Primer ho demostrarem per funcions elementals. Suposem doncs

$$f(x,t,\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_{(a,b]}(t)\mathbb{1}_A(x)$$

on X és fitada i $\mathcal{F}_a$-mesurable, i $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. En aquest cas tenim, per definició:

$$\mathbb{E}\left[(f\cdot W)_t(B)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 W_{t\wedge b}(A\cap B)\right] + \mathbb{E}\left[X^2 W_{t\wedge a}(A\cap B)\right] - 2\mathbb{E}\left[X^2 W_{t\wedge b}(A\cap B) W_{t\wedge a}(A\cap B)\right]$$

Ara bé,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(f\cdot W)_t(B)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge b}(A\cap B)^2 - \langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})\right] + \mathbb{E}\left[X^2\langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}\right] \\
&-2\mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge b}(A\cap B)W_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right] \\
&+\mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge a}(A\cap B) - \langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right] - \mathbb{E}\left[X^2\langle W.(A\cap B)^2\rangle_{t\wedge a}\right].
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ara fem servir que

$$\mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge b}(A\cap B)^2 - \langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge b})\right] = \mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge a}(A\cap B)^2 - \langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]$$

i que

$$\mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge b}(A\cap B)W_{t\wedge a}(A\cap B)-\langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right]=\mathbb{E}\left[X^2(W_{t\wedge a}(A\cap B)^2-\langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})\right],$$

trobant així que

$$\mathbb{E}\left[(f\cdot W)_t(B)^2\right]=\mathbb{E}\left[X^2\langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge b}-\langle W.(A\cap B)\rangle_{t\wedge a}\right]=\mathbb{E}(X^2)(t\wedge b-t\wedge a)|A\cap B|,$$

tal i com volíem.

Per provar-ho per $f\in\mathbb{S}$, suposem $f=c_1f_1+\cdots c_kf_k$ on les f_j són elementals amb suport disjunt. Notem que degut al suport disjunt i a que $\mathbb{E}[(f_j\cdot W)_t(B)]=0$ aleshores

$$\mathbb{E}\left[(f\cdot W)_t(B)^2\right]=\sum_{j=1}^{n}c_j^2\mathbb{E}\left[(f_j\cdot W)_t(B)^2\right],$$

obtenint així el resultat desitjat. □

Veurem ara que la integral $(f\cdot W)_t(B)$ és també una mesura de martingala "worthy".

Proposició 1.33. *Sigui $f\in\mathbb{S}$, aleshores $(f\cdot W)_t(B)$ és una mesura de martingala "worthy". A més, la seva mesura de covariància ve donada per*

$$Q_{f\cdot W}(dx,dy,ds)=f(x,s)f(y,s)Q(dx,dy,ds).$$

Demostració. Primer suposem f elemental, és a dir, $f(x,s,\omega)=X(\omega)\mathbb{1}_{(a,b]}(s)\mathbb{1}_A(x)$. Tenim que $(f\cdot W)_t(B)$ és adaptat, doncs X és $\mathcal{F}_a$-mesurable. És integrable (de fet, també és de quadrat integrable) i per definició de $(f\cdot W)_t(B)$, tenim que és martingala i que l'assignació $B\mapsto(f\cdot W)_t(B)$ és σ-additiva en $L^2(\Omega)$, perquè tant $B\mapsto W_{t\wedge b}(A\cap B)$ com $B\mapsto W_{t\wedge a}(A\cap B)$ ho són (de fet, si $\mu_1,\dots,\mu_n$ són mesures $\sigma-$ additives, $\mu:=\mu_1+\cdots\mu_n$ és σ-additiva).

A més,

$$\begin{aligned}&(f\cdot W)_t(B)(f\cdot W)_t(C)-\iiint_{B\times C\times(0,t]}f(x,s)f(y,s)Q(dx,dy,ds)\\=&X^2[(W_{t\wedge b}(A\cap B)-W_{t\wedge a}(A\cap B))(W_{t\wedge b}(A\cap C)-W_{t\wedge a}(A\cap C))\\&-\langle W.(A\cap B),W.(A\cap C)\rangle_{t\wedge b}+\langle W.(A\cap B),W.(A\cap C)\rangle_{t\wedge a}].\end{aligned}$$

L'anterior expressió és una martingala, així que, per unicitat de la variació quadràtica, obtenim el resultat.

Per funcions simples es demostra fàcilment per linealitat, doncs si $f=c_1f_1+\cdots+c_kf_k$ on les f_j són elementals i amb suport disjunt clarament es preserva la propietat de mesura de martingala. A més, observem:

$$\iiint_{B\times C\times(0,t]}f(x,s)f(y,s)Q(dx,dy,ds)=\sum_{j=1}^{k}c_j^2\iiint_{B\times C\times(0,t]}f_j(x,s)f_j(y,s)Q(dx,dy,ds)$$

i també, per suport disjunt i independència,

$$(f\cdot W)_t(B)(f\cdot W)_t(C)=\sum_{j=1}^{k}c_j^2(f_j\cdot W)_t(B)(f_j\cdot W)_t(C)+\text{martingala}.$$

Amb això concloem que el resultat també és vàlid per $\mathbb{S}$, tal com volíem provar. □

Sigui $f \in \mathcal{P}_W$. Pel teorema 1.28 existeix una successió $\{f_n; n \geq 0\}$ de tal manera que $||f - f_n||_W \to 0$. Per tant, podem considerar la successió de mesures de martingala $(f_n \cdot W)_t(B)$. Com que

$$\mathbb{E}\left[|(f_n \cdot W)_t(B) - (f_m \cdot W)_t(B)|^2\right] \leq ||f_n - f_m||_W^2 \to 0,$$

trobem que la successió de mesures de martingala $\{f_n \cdot W; n \geq 0\}$ és de Cauchy en $L^2(\Omega)$ i per tant és convergent. Anomenem $f \cdot W$ el seu límit (aquest és independent de la successió triada).

La pregunta natural és ara si per $f \in \mathcal{P}_W$, l'objecte $f \cdot W$ és una mesura de martingala i si és "worthy". El resultat següent dona resposta a aquesta pregunta.

Teorema 1.34. *Sigui $f \in \mathcal{P}_W$, aleshores $f \cdot W$ és una mesura de martingala "worthy". A més, la seva mesura de covariància ve donada per:*

$$Q_{f \cdot W}(dx, dy, ds) = f(x, s)f(y, s)Q(dx, dy, ds).$$

A més, si $f, g \in \mathcal{P}_W$ aleshores

$$\langle (f \cdot W).(A), (g \cdot W).(B) \rangle_t = \iiint_{A \times B \times (0,t]} f(x, s)g(y, s)Q(dx, dy, ds).$$

Demostració. Tenim que $(f \cdot W)_t(B)$ és el límit en $L^2(\Omega)$ d'una successió de martingales $(f_n \cdot W)_t(B)$ on $f_n \in \mathbb{S}$, per tant $(f \cdot W)_t(B)$ és una martingala de quadrat integrable. A més, per a cada n, ja hem demostrat que

$$(f_n \cdot W)_t(B)(f_n \cdot W)_t(C) - \iiint_{B \times C \times (0,t]} f_n(x, s)f_n(y, s)Q(dx, dy, ds) \tag{1.8}$$

és una martingala. Com $(f_n \cdot W)_t(B)$ i $(f_n \cdot W)_t(C)$ convergeixen en $L^2(\Omega)$, aleshores $(f_n \cdot W)_t(B)(f_n \cdot W)_t(C)$ convergeix en $L^1(\Omega)$ cap a $(f \cdot W)_t(B)(f \cdot W)_t(C)$. Pel que fa al costat dret de (1.8):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\iiint_{B \times C \times (0,t]} f_n(x, s)f_n(y, s) - f(x, s)f(y, s)Q(dx, dy, ds)\right|\right] \\
\leq &\mathbb{E}\left[\iiint_{B \times C \times (0,t]} |f_n(x, s)||f_n(y, s) - f(y, s)|Q(dx, dy, ds)\right] \\
+ &\mathbb{E}\left[\iiint_{B \times C \times (0,t]} |f(y, s)||f_n(x, s) - f(x, s)|Q(dx, dy, ds)\right] \\
\leq &\mathbb{E}[\langle |f_n|, |f_n - f| \rangle_Q + \langle |f_n - f|, |f| \rangle_Q] \leq (||f_n||_W + ||f||_W)\, ||f_n - f||_W \to 0.
\end{aligned}$$

Per tant, (1.8) convergeix en $L^1(\Omega)$ a

$$(f \cdot W)_t(B)(f \cdot W)_t(C) - \iiint_{B \times C \times (0,t]} f(x, s)f(y, s)Q(dx, dy, ds).$$

Com aquesta última expressió és martingala, obtenim el resultat pel cas $f = g$. El cas general es dedueix del fet que:

$$\langle (f \cdot W).(B), (g \cdot W).(C) \rangle_t = \frac{1}{2}\left[\langle (f \cdot W).(B) + (g \cdot W).(C) \rangle_t - \langle (f \cdot W).(B) \rangle_t - \langle (g \cdot W).(C) \rangle_t\right].$$

Per últim, falta comprovar que $f \cdot W$ és una mesura de martingala. Per fer-ho, és suficient comprovar que és σ-additiva. Sigui doncs $\{A_n; n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tals que $A_n \downarrow \emptyset$ (respecte la inclusió). Per la propietat d'isometria:

$$\mathbb{E}\left[(f \cdot W)_t(A_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[\iint_{A_n \times (0,t]} f(x,s)^2 dx ds\right]$$

i aquesta última expressió tendeix a 0 pel teorema de la convergència monòtona. □

Normalment farem servir les notacions

$$\int_A \int_0^t f(x,s) W(dx,ds) \quad \text{ó} \quad \int_{A \times (0,t]} f(x,s) dW_{xs}$$

per referir-nos a $(f \cdot W)_t(A)$. El resultat següent ens serà útil per justificar la previsibilitat de cert tipus de funcions que involucrin integrals deterministes i estocàstiques de funcions previsibles.

Proposició 1.35. *Siguin* $u(x,t,\omega) \in \mathcal{P}$ *on* $(x,t,\omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $f(x,t) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ *i* $\sigma(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. *Aleshores es satisfà:*

1. $\sigma(u(x,t,\omega)) \in \mathcal{P}$ *i* $f(x,t)\sigma(u(x,t,\omega)) \in \mathcal{P}$.
2. $(fu \cdot W)_t(\mathbb{R}) \in \mathcal{P}$.

Demostració.

1. És certa doncs una funció contínua d'una funció mesurable és una funció mesurable i el producte de funcions mesurables és mesurable.
2. Com $fu \in \mathcal{P}$ aleshores existeix una successió $\{v_n; n \geq 1\}$ de funcions simples tals que $(v_n \cdot W)_t(\mathbb{R}) \to (fu \cdot W)_t(\mathbb{R})$ en $L^2(\Omega)$. És suficient veure, per tant, que $(v_n \cdot W)_t(\mathbb{R}) \in \mathcal{P}$. De fet, és suficient demostrar-ho pel cas elemental. Sigui $g(x,t,\omega) = X\mathbb{1}_{(a,b]}(t)\mathbb{1}_A(x)$ una funció elemental, aleshores

$$(g \cdot W)_t(\mathbb{R}) = X[W_{t\wedge b}(A) - W_{t \wedge a}(A)].$$

Com $\mathbb{E}[(g \cdot W)_t(\mathbb{R})^2] < \infty$, aleshores $(g \cdot W)_t(\mathbb{R}) \in \mathcal{P}$. Això implica que $(v_n \cdot W)_t(\mathbb{R}) \in \mathcal{P}$ i, per tant, $(fu \cdot W)_t(\mathbb{R}) \in \mathcal{P}$.

□

Proposició 1.36. *Fixem* $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ *i sigui* $f \in \mathcal{P}_W$. *Aleshores existeix una versió del procés* $\{(f \cdot W)_t(B); t \in [0,T]\}$ *amb trajectòries contínues.*

Demostració. Sigui ϕ_n una successió de funcions simples que aproxima f en $\mathcal{P}_W$. Posem $I_n^B(t) = (\phi_n \cdot W)_t(B)$ i $I_t^B = (f \cdot W)_t(B)$. Com $(\phi_n \cdot W)_t(B)$ és martingala amb trajectòries continues, aleshores $I_n^B(t) - I_m^B(t)$ és una martingala amb trajectòries contínues. Aplicant les desigualtats de Doob, obtenim

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_n^B(t) - I_m^B(t)| > \epsilon\right]$$
$$\leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(|I_n^B(T) - I_m^B(T)|^2\right) = \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\iint_{B\times(0,T]} |\phi_n(x,s) - \phi_m(x,s)|^2 dxds\right)^2\right]$$

i la darrera expressió tendeix a zero quan $n, m \to \infty$. D'aquesta manera, podem triar una successió d'índexs $n_k \uparrow \infty$ de tal manera que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_{n_{k+1}}^B(t) - I_{n_k}^B(t)| > 2^{-k}\right] < 2^{-k}.$$

Apliquem el lema de Borel-Cantelli per trobar que, per a tot ω q.s., existeix $k_1(\omega)$ amb la propietat

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_{n_{k+1}}^B(t) - I_{n_k}^B(t)| \leq 2^{-k}, \quad k \geq k_1(\omega).$$

D'aquesta manera, $I_{n_k}^B$ convergeix uniformement en t i quasi segurament a un element J_t. Com $I_n^B(t) \to I_t^B$ en $\mathcal{P}_W$, deduïm que, quasi segurament,

$$J_t = I_t^B \quad \forall t \in [0,T].$$

$\square$

Per tant, d'aquí en endavant, suposarem que $(f\cdot W)_t(B)$ es refereix a la seva versió contínua.

Teorema 1.37. *(Desigualtat de Burkholder) Per a tot* $p \geq 2$*, existeix* $c_p \in (0,\infty)$ *tal que per a tota* $f \in \mathcal{P}_W$*:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t} |(f\cdot W)_u(B)|^p\right] \leq c_p \mathbb{E}\left[\left(\iint_{\mathbb{R}\times(0,t]} f(x,s)^2 dxds\right)^{p/2}\right]. \tag{1.9}$$

Demostració. Per simplificar notació, escriurem $M_t = (f\cdot W)_t(B)$. Per un raonament de localització podem suposar que M és una martingala fitada, doncs podem escollir els instants d'aturada $\tau_k = \inf\{s \geq 0; |M_s| \geq k\}$ i si demostrem que la desigualtat és certa pels processos aturats M^{τ_k} i fem $k \to \infty$ trobem que el resultat és cert per $M = \lim_k M^{\tau_k}$.

Sigui $F(x) = |x|^p$. Observem que M_t és una martingala contínua i centrada. Fixem $t > 0$ i considerem una successió de particions $0 = t_0^n < \cdots < t_{m_n}^n = t$ de $[0,t]$ amb increments tendint a 0. Aleshores

$$F(M_t) = F(M_0) + \sum_{i=0}^{m_n-1}\left(F(M_{t_{i+1}^n}) - F(M_{t_i^n})\right).$$

Ara observem que

$$F(M_{t_{i+1}^n}) - F(M_{t_i^n}) = F'(M_{t_i^n})(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}) + \frac{1}{2}F''(\xi_i)(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2,$$

on ξ_i és un punt intermig entre $M_{t_i^n}$ i $M_{t_{i+1}^n}$. De la part dreta de la igualtat, ignorarem el primer sumand doncs aquest té esperança 0 per a tot i i per a tot n. Ara,

$$\frac{1}{2}F''(\xi_i)(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2 \leq \frac{p(p-1)}{2}\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^{p-2}(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})^2.$$

Per tant, fent tendir $n\to\infty$,

$$F(M_t)\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{m_n-1}F'(M_{t_i^n})(M_{t_{i+1}^n}-M_{t_i^n})+\frac{p(p-1)}{2}\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^{p-2}\langle M\rangle_t.$$

Prenent esperances,

$$\mathbb{E}(|M_t|^p)\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^{p-2}\langle M\rangle_t\right].$$

Per la desigualtat de Doob, sabem que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}(|M_t|^p).$$

Per tant si posem $\varphi_p(t)=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^p\right]$ tenim

$$\varphi_p(t)\leq\frac{p(p-1)}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t}|M_u|^{p-2}\langle M\rangle_t\right].$$

Aplicant la desigualtat de Hölder a la part dreta de la desigualtat,

$$\varphi_p(t)\leq\frac{p(p-1)}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p(\varphi_p(t))^{(p-2)/p}\left(\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{p/2}\right]\right)^{2/p}.$$

Aïllant $\varphi_p(t)$ de l'anterior expressió, obtenim la desigualtat desitjada. □

2 Equacions en derivades parcials estocàstiques

2.1 Equacions en derivades parcials deterministes

Faré servir la notació següent:

$$u_{x_{i_1}\dots x_{i_k}}=\partial^k_{x_{i_1}\dots x_{i_k}}u=\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}u$$

Definició 2.1. *Una equació en derivades parcials (EDP) és una relació de la forma següent:*

$$F(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},\dots,u_{x_nx_n},u_{x_1x_1x_1},\dots)=0$$

on la incògnita és una funció $u(x_1,\dots x_n)$ de n variables. Anomenem grau de l'EDP a l'ordre de derivació més alt.

La primera classificació que hom pot fer de les EDPs és segons els coeficients. Direm que una EDP F és lineal si depèn linealment d' u i de totes les seves derivades parcials. Altrament, direm que és no lineal. Tanmateix, dintre de les EDPs no lineals, en trobem algunes subdivisions:

- **EDPs semi-lineals:** En aquest cas, F és no lineal només respecte u, però sí que depèn linealment de les derivades parcials de u. A més, els coeficients de l'EDP només de $x_1, \dots, x_n$.
- **EDPs quasi-lineals:** F és lineal respecte les derivades d'ordre més gran de u i els coeficients només depenen de $x_1, \dots, x_n, u$ i derivades d'ordre inferior.
- **EDPs completament no-lineals:** F no és lineal respecte les derivades parcials d'ordre més gran de u.

Normalment, considerarem EDPs tals que la funció incògnita sigui del tipus $u(x,t)$ on $t \in I$ i $x \in \overline{U}$ (aquí $\overline{U}$ indica la clausura topològica d'un conjunt U) on $I = [0,T]$ o $I = \mathbb{R}_+$ i U és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^d$ per a $d \geq 1$.

Vegem alguns exemples de EDPs:

Exemples 2.2.

- *Equació de difusió o de la calor:*

$$u_t - D\Delta_d u = f(x,t).$$

on $\Delta_d = \partial^2_{x_1x_1} + \cdots + \partial^2_{x_dx_d}$ i $D \geq 0$. Aquesta equació modelitza la conducció de la calor en un medi isotròpic i homogeni. $u(x,t)$ indica la temperatura a temps t en un punt x. Aquí, D és una constant que codifica les propietats tèrmiques del medi i $f(x,t)$ modelitza la possible font de calor.

- *Equació d'ones:*

$$u_{tt} - c^2\Delta_d u = f(x,t).$$

Aquesta equació modelitza la propagació d'ones en un medi elàstic o en una corda. Així, $u(x,t)$ descriu l'amplitud d'ona a temps t en el punt x i $f(x,t)$ indica les forces externes que hi intervenen.

- *Equació de Black-Scholes:*

$$u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$

on σ,$r \geq 0$. Aquesta equació és clau en finances. Modelitza l'evolució del preu $u(x,t)$ d'un derivat financer.

2.1.1 Problemes ben definits (Well-posed problems)

En general, una EDP no és suficient per estudiar l'existencia i unicitat de solucions, un dels problemes més bàsics i rellevants de la teoria d'equacions diferencials. Per poder enfrontar-nos a aquesta pregunta necessitem acompanyar l'EDP de condicions inicials (valor de $u(x,t)$ a $t = 0$) i condicions de frontera o vora (valor de $u(x,t)$ a $x \in \partial U$). Anomenem **problema de Cauchy** al problema que consta de resoldre una EDP i que la solució satisfaci unes condicions de vora i/o inicials específiques. Amb aquestes dades, ens podem fer tres preguntes:

1. Existeix alguna solució?

2. La solució és única?

3. Hi ha dependència (com a mínim) contínua respecte condicions inicials?

Sempre que estiguem treballant amb models reals, és convenient treballar amb EDPs que compleixin les propietats $1, 2, 3$. Aquest tipus de problemes o models són els anomenats *problemes ben definits*.

2.1.2 Solucions fonamentals

Les EDPs deterministes tant de la calor com d'ones gaudeixen de solucions privilegiades, en tant que permeten construir totes les solucions de l'equació. Un estudi amb un mínim de rigor d'aquestes solucions s'escapa de la teoria de funcions en sentit clàssic. És per això que, per donar un sentit a les solucions fonamentals d'algunes EDPs, hem de recórrer a la teoria de distribucions.

Distribucions

Sigui U un obert de $\mathbb{R}^d$, sigui $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ l'espai de funcions $\mathcal{C}^\infty$ en U amb suport compacte.

Definició 2.3. *Sigui* $\{\phi_k; k \geq 1\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(U)$ *i* $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$. *Direm que* $\phi_k \to \phi$ *en* $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ *si* $k \to \infty$ *si es compleixen:*

1. *Existeix un compacte* $K \subset U$ *que conté els suports de totes les* ϕ_k.

2. $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d)$, $|\alpha| \geq 0$, $D^\alpha \phi_k \to D^\alpha \phi$ *uniformement en* U.

Normalment denotarem l'espai $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ per $\mathcal{D}(U)$. És immediat comprovar que $\mathcal{D}(U)$ és un espai vectorial i, per tant, podem considerar el seu espai dual $\mathcal{D}'(U)$. Aquest espai $\mathcal{D}'(U)$ reb el nom d'espai de distribucions de U.

Exemples 2.4.

- Tota funció $f \in L^2(U)$ dona lloc a una distribució. En efecte, l'aplicació que assigna per a tota $\phi \in \mathcal{D}(U)$ el nombre real

  $$\langle f, \phi \rangle := \int_U f(x)\phi(x)dx$$

  és una aplicació lineal. Abusant de la notació, aquesta distribució també reb el nom de f. Prenent com a inspiració aquest exemple, l'acció d'una distribució $L \in \mathcal{D}'(U)$ sobre $\phi \in \mathcal{D}(U)$ l'escriurem com $\langle L, \phi \rangle$ en comptes de $L(\phi)$. Aquest exemple ens diu que, en cert sentit, $L^2(U)$ es pot identificar amb un subconjunt de l'espai de distribucions. És per això que en la literatura es pot trobar aquest concepte tant amb el nom de *distribucions* com amb el nom de *funcions generalitzades*.

- Considerem la distribució $L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que actua de la forma següent:

$$\langle L, \phi \rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

  Aquesta distribució reb el nom de delta de Dirac, i normalment es denota per $L = \delta$. Observem que δ no té sentit si la interpretem com una funció clàssica, doncs aquesta hauria de complir $\delta(x) = 0$ per a tot $x \neq 0$ i $\delta(0) = \infty$.

- Considerem U un obert de $\mathbb{R}$. És clar que si $f \in L^2(U)$, aleshores f no és necessàriament derivable en els entit clàssic de la definició. Tanmateix, per a cada $f \in L^2(U)$ existeix una distribució T_f que actua sobre $\mathcal{D}(U)$ de la mateixa manera que ho faria f' si aquesta existís. Per definir T_f, suposarem que f és derivable. En tal cas, per a tota $\phi \in \mathcal{D}(U)$ tenim, integrant per parts i tenint en compte que $\phi \equiv 0$ en ∂U:

$$\int_U f'(x)\phi(x)dx = -\int_U f(x)\phi'(x)dx.$$

  Definim per tant T_f com la distribució que satisfà $\langle T_f, \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle$. T_f reb el nom de derivada dèbil de f. De la construcció de la derivada dèbil es dedueix que si f és derivable en sentit clàssic, aleshores $T_f = f'$

Solució fonamental de l'equació de la calor

Considerem l'equació de la calor

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0.$$

Si u és solució, aleshores gaudeix de certes propietats:

- *Reversió del temps (time reversal)*: La funció $v(x,t) = u(x,-t)$ satisfà la EDP:

$$v_t + v_{xx} = 0.$$

- *Invariància per translacions*: Fixat $(y,s) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, la funció $v(x,t) = u(x-y, t-s)$ és solució si i només si $u(x,t)$ és solució.

- *Dilatacions parabòliques*: Si $u(x,t)$ és solució aleshores per a tot $\lambda, b > 0$ la funció $u^*(x,t) = bu(\lambda x, \lambda^2 t)$ és solució. Això ens diu, en particular, que la transformació $(x,t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$ ens dona noves solucions. A més, sota aquestes transformacions, les expressions

$$\frac{|x|^2}{t} \quad \text{i} \quad \frac{x}{\sqrt{t}}$$

  són invariants.

- *Conservació de massa:* Pel que hem vist en els punts anteriors, sembla raonable buscar solucions de la forma $v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Tanmateix, si volem que es satisfaci un principi de conservació de massa, observem que

$$\int_{\mathbb{R}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} v(y)dy.$$

Per tant, si volem massa constant i en particular, massa 1, el més raonable és buscar solucions de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Si anomenem $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, l'equació de la calor es tradueix en una EDO de segon ordre:

$$v''(\xi) + \frac{1}{2}\xi v'(\xi) + \frac{1}{2}v(\xi) = 0$$

o, equivalentment,

$$v''(\xi) + \frac{1}{2}(\xi v(\xi))' = 0.$$

Per tant,

$$v'(\xi) + \frac{1}{2}\xi v(\xi) = C.$$

Observem que l'EDO anterior és invariant pel canvi $\xi \mapsto -\xi$, per tant $v'(0) = 0$. A més, com demanem conservació de massa, això es tradueix en que $v(\xi) \to 0$ si $|\xi| \to \infty$. Deduïm per tant que $C = 0$, de manera que les solucions d'aquesta última EDO són de la forma

$$v(\xi) = A \exp\{-\frac{\xi^2}{4}\}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Imposant massa unitària, la discussió anterior ens porta a la definició següent.

Definició 2.5. *La solució fonamental associada a l'operador de la calor $L = \partial_t - \partial_{xx}^2$ és la funció*

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{\frac{-x^2}{4t}\}.$$

Proposició 2.6. *Sigui $\Gamma(x,t)$ la solució fonamental associada a l'operador de la calor. Es compleix:*

$$||\Gamma(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{2.1}$$

Demostració. Fent un càlcul directe,

$$||\Gamma(\cdot,t)||^p_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{(4\pi t)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{px^2}{4t}} dx = (4\pi t)^{-1/2(p-1)}.$$

□

Observem que fixat $x \neq 0$, aleshores $\lim_{t\to 0^+} \Gamma(x,t) = 0$. Tanmateix, notem que $\lim_{t\to 0^+} \Gamma(0,t) = +\infty$. Per tant, el límit puntual de Γ no és una funció en el sentit clàssic. Tanmateix, satisfà $\Gamma(x,0) = \delta(x)$, on δ és la distribució delta de Dirac.

Tenim doncs que $\Gamma(x,t)$ resol l'equació de la calor amb condició inicial $\Gamma(x,0) = \delta(x)$, i per tant físicament podem interpretar $\Gamma(x,t)$ com una funció que modela la difusió d'una massa unitat que inicialment està concentrada a l'origen.

Aquesta funció és clau en la construcció de solucions de problemes de Cauchy globals. Per il·lustrar-ho, considerem el problema de Cauchy següent:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Per abordar aquest problema, podem descomposar-lo en dos problemes de Cauchy més senzills. Considerem els problemes següents:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3}$$

i

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si v és solució de (2.3) i w és solució de (2.4), aleshores $u := v + w$ és solució de (2.2).

Estudiem primer (2.3). Volem trobar l'evolució $u(x,t)$ d'una massa que es difón, i que inicialment estaba distribuida segons g. Per la interpretació que hem fet de Γ, $\Gamma(x-y,t)g(y)dy$ ens dona la concentració de massa a temps t i posició x deguda a la difusió d'una massa $g(y)dy$. Com la EDP que estem considerant és lineal, podem concloure pel **principi de superposició de solucions d'equacions lineals homogènies amb coeficients constants** que la solució ve donada per

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t)g(y)dy.$$

El **principi de superposició de solucions d'equacions lineals homogènies amb coeficients constants** consisteix en que si L és un operador diferencial lineal amb coeficients constants i x, y són elements tals que $L(x)$ i $L(y)$ = 0, aleshores $L(x+y) = 0$. La generalització al cas d'un nombre numerable d'elements $\{x_n, n \geq 0\}$ és directe per pas al límit, i mitjançant el **teorema de derivació sota signe integral** (A.1) podem obtenir que si $\{x(a); a \in I\}$ és una família d'elements tals que $L(x(a)) = 0$ aleshores $L(\int_I x(a)da) = 0$.

Per tractar (2.4) farem ús del **principi de Duhamel**. Aquest mètode consisteix en trobar la solució de (2.4) en dues etapes:

1. Considerem la família de problemes de Cauchy depenent d'un paràmetre $s > 0$

$$\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > s, \\ w(x,s;s) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5}$$

   Ja estem familiaritzats amb aquest esquema. La solució fonamental associada a (2.5) és $\Gamma(x, t-s)$, doncs satisfà l'EDP anterior i per $t = s$, $\Gamma(x,0) = \delta(x)$. En conseqüència, la solució de (2.5) ve donada per

$$w(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s)f(y,s)dy.$$

2. Un cop hem resolt (2.5), integrem w en la regió temporal $0 < s < t$ respecte s. El candidat a solució de (2.4) és per tant

$$w(x,t) = \int_0^t w(x,t;s)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

Observem que, efectivament, w és solució de (2.4) doncs

$$w_t - w_{xx} = w(x,t;t) + \int_0^t [w_t(x,t;s) - w_{xx}(x,t;s)]ds = f(x,t),$$
$$w(x,0) = 0.$$

Per tant, una solució de (2.2) ve donada per

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

Amb aquest problema de Cauchy hem fet present la importància de la solució fonamental en la resolució de problemes de Cauchy de l'equació de la calor per $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Solució fonamental de l'equació d'ones

Considerem el problema de cauchy global:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6}$$

on $c > 0$. Introduim les noves variables $\mu := x + ct$ i $\eta := x - ct$. D'aquesta manera, transformem l'EDP anterior en

$$u_{\mu\eta} = 0.$$

Aquesta EDP té, com a solució general, $u(\mu,\eta) = F(\mu) + G(\eta)$. De les condicions inicials, obtenim que F i G han de satisfer:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = g(x), \\ cF'(x) - cG'(x) = h(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

De l'última equació obtenim

$$cF(x) - cG(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt + A, \quad A \in \mathbb{R}$$

i, tornant a la primera,

$$\begin{cases} F(x) = -\frac{1}{2c}\left(-cg(x) - \int_{-\infty}^x h(t)dt - A\right), \\ G(x) = -\frac{1}{2c}\left(-cg(x) + \int_{-\infty}^x h(t)dt - A\right). \end{cases} \tag{2.8}$$

D'aquesta manera, com $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, obtenim la celebrada *Fòrmula de d'Alembert*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right).$$

Per deduïr la solució fonamental de l'equació d'ones, plantejem un problema similar al de l'equació de la calor. Busquem resoldre

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per la fòrmula de d'Alembert, la solució és

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \delta(y)dy.$$

Tanmateix, aquesta solució es pot escriure d'una forma més agradable. Considerem la *funció de Heavyside* $\mathcal{H}(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$. Definim $I_\epsilon(x)$ com el quocient incremental

$$I_\epsilon(x) = \frac{\mathcal{H}(x+\epsilon) - \mathcal{H}(x-\epsilon)}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{1}_{\{|x|<\epsilon\}}(x).$$

Observem les propietats següents:

- Per a cada $\epsilon > 0$,
$$\int_{\mathbb{R}} I_\epsilon(x)dx = \frac{1}{2\epsilon}2\epsilon = 1.$$

- Es té
$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} I_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases}$$

- Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, aleshores
$$\int_{\mathbb{R}} I_\epsilon(x)\phi(x) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(x)dx \to \phi(0) \quad \text{quan} \quad \epsilon \downarrow 0.$$

Per tant, $\lim_{\epsilon\downarrow 0} I_\epsilon(x) = \delta(x)$. Per convergència dominada,

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y)dy = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{x} I_\epsilon(y)dy$$

i a mes

$$\int_{-\infty}^{x} I_\epsilon(y)dy = \begin{cases} 0 & x \leq -\epsilon, \\ (x+\epsilon)/2\epsilon & -\epsilon < x < \epsilon, \\ 1 & x \geq \epsilon. \end{cases}$$

Fent $\epsilon \downarrow 0$ obtenim per tant

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y)dy = \mathcal{H}(x).$$

Tornant a la fòrmula de d'Alembert tenim:

$$\int_{x-ct}^{x+ct} \delta(y)dy = \frac{1}{2c}\left[\mathcal{H}(x+ct) - \mathcal{H}(x-ct)\right] = \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{\{|x|<ct\}}.$$

Definició 2.7. *La solució fonamental associada a l'operador d'ones $L = \partial^2_{tt} - c^2\partial^2_{xx}$ és*

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{\{|x|<ct\}}.$$

Immediatament de la definició obtenim el resultat següent:

Proposició 2.8. *Per a tot $p \geq 1$ es té*

$$||\Gamma(\cdot,t)||^p_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{(2c)^{p-1}}||\Gamma(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

El paper que juga la solució fonamental de l'equació d'ones en la resolució de problemes de Cauchy és exactament el mateix que en l'equació de la calor. En efecte, si considerem el següent problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.9}$$

i fem la mateixa descomposició que en l'equació de la calor i apliquem el mètode de Duhamel, obtenim que una solució de l'equació d'ones ve donada per

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

Tant la solució fonamental de l'equació de la calor com la de l'equació d'ones apareixerà en la definició de solució de l'EDP estocàstica de la calor i d'ones (respectivament).

2.2 Equacions en derivades parcials estocàstiques

2.2.1 El model aleatori i discussió de l'existència i unicitat de solucions.

Les EDPs deterministes, com el seu nom indica, són objectes per modelitzar fenòmens els quals coneixem tots els elements que hi intervenen. És a dir, les condicions inicials, condicions de vora i l'equació són elements deterministes. La teoria d'equacions en derivades parcials estocàstiques és una àrea de recerca molt activa que tracta d'estudiar el model anàleg en el cas que les condicions inicials i/o condicions de vora són objectes aleatoris, o bé en la equació intervenen objectes aleatoris. En aquesta memòria, ens preguntarem que passa quan en l'equació apareix un soroll blanc espai-temps. Un exemple que il·lustra i motiva l'estudi d'aquestes EDPEs és el següent:

Exemple motivador d'ús de les EDPEs amb soroll blanc espai-temps [5]:

Suposem que tenim una corda tensada a l'exterior i aquesta no pateix cap pertorbació més que la de l'aire quan impacta en la corda. En aquest cas, l'equació que governa aquest fenomen és

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

Suposem que hi ha una tempesta de sorra, i que els grans de sorra impacten amb intensitat $\dot{W}(x,t)$. Identificarem la intensitat amb un soroll blanc $\dot{W}$ espai-temps, i per tant l'equació que volem estudiar és

$$u_{tt} - u_{xx} = \dot{W}.$$

Com que $\dot{W}$ és un procés estocàstic, aquesta equació no té solució en el sentit clàssic. Tanmateix, gràcies a tota la feina feta en el capítol anterior, podem reformular l'equació anterior en una versió integral i podrem demostrar que en aquest cas concret, existeix un procés $\{u(x,t), x \in U, t \in I\}$ que satisfà, en cert sentit, l'equació anterior.

2.2.2 Formulació del problema

Un cop hem motivat el problema a resoldre, podem passar a definir-lo formalment.

Definició 2.9. *Una equació en derivades parcials estocàstica (EDPE) és una expressió del tipus*

$$Lu(x,t) = \sigma(x,t,u(x,t))\dot{W} + b(x,t,u(x,t)) \quad (x,t) \in U \times I, \tag{2.10}$$

on $u(x,t)$ és el procés incògnita, L és un operador diferencial en derivades parcials i σ, b són funcions a valors en $\mathbb{R}$.

En aquesta memòria, tractarem només EDPEs de la forma

$$Lu(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)) \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

on L és un operador diferencial en derivades parcials on l'ordre més gran de derivació és 2. De moment no farem cap suposició de regularitat de σ i b, tot i que després haurem de suposar condicions bastant fortes per garantir existència i unicitat.

Igual que en el model de les EDPs deterministes, per estudiar l'existència i unicitat de solucions de (2.11) necessitem dotar la EDPE anterior de condicions inicials i de vora.

Recordem que en el cas determinista, si L gaudeix d'una solució fonamental $\Gamma(x,t)$, aleshores podíem escriure una solució de

$$Lu(x,t) = f(x,t)$$

com

$$u(x,t) = I_0(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s) f(y,s) dy ds,$$

on $I_0(x,t)$ depen de l'operador L, però és tal que es satisfan les condicions inicials i les condicions de vora. El cas determinista i la definició de la integral respecte $\dot{W}$ desenvolupada en el capítol anterior ens porten de forma natural a la definició següent.

Definició 2.10. *Sigui*

$$Lu(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)) \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \tag{2.12}$$

una EDPE com (2.11) i sigui $\Gamma(x,t)$ la solució fonamental associada a L. Una solució de (2.12) és un procés previsible $u = \{u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ (és a dir, $u(x,t,\omega) \in \mathcal{P}$) complint:

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]} \mathbb{E}\left(|u(x,t)|^2\right) < \infty$$

per a tot $T > 0$ i

$$\begin{aligned} u(x,t) = I_0(x,t) + &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y, t-s) \sigma(u(y,s)) W(dy, ds) \\ + &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y, t-s) b(u(y,s)) dy ds \end{aligned} \tag{2.13}$$

on $I_0(x,t)$ és tal que es compleixen les condicions inicials i les condicions de vora.

Per alleugerir la notació, convé definir les funcios següents:

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)^2 dx, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$
$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)dt, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Suposarem la següent hipòtesi sobre la solució fonamental Γ:
($\mathbf{H}_S$) Per a tot $T > 0$ existeix una constant $C_T > 0$ complint,

$$\sup_{t\in[0,T]} G(t) \vee \sup_{t\in[0,T]} H(t) \leq C_T.$$

Observem que ($\mathbf{H}_S$) és equivalent a dir que per a tot $T > 0$ existeix una constant $C_T > 0$ tal que

$$\int_0^T g(s)ds \vee \int_0^T h(s)ds \leq C_T.$$

En el que resta de capítol, demostrarem l'existència i unicitat de solucions d'una família de EDPEs. Per fer-ho, necessitem una extensió del conegut *lema de Gronwall* que es fa servir a Equacions Diferencials Ordinàries.

Lema 2.11. *(Extensió del lema de Gronwall) Sigui* $g : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *una funció no-negativa tal que*

$$\int_0^T g(s)ds < \infty.$$

Aleshores, existeix una successió $\{a_n; n \geq 1\}$ *de nombres reals no-negatius tals que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ *i que compleixen propietat següent: sigui* $\{f_n; n \geq 0\}$ *una successió de funcions no-negatives definides en* $[0,T]$*. Sigui* $k_1(t)$ *una funció positiva, mesurable i fitada i* $k_2 \geq 0$ *un nombre real tal que per a tot* $0 \leq t \leq T$*,*

$$f_n(t) \leq k_1(t) + \int_0^t (k_2 + f_{n-1}(s))g(t-s)ds. \tag{2.14}$$

Si $\sup_{0\leq s \leq T} f_0(s) = M < \infty$ *i* $k_1(t) \leq k_1$*, aleshores per a tot* $n \geq 1$*,*

$$f_n(s) \leq k_1(t) + (k_1 + k_2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i + (k_2 + M)a_n. \tag{2.15}$$

En particular, $\sup_{n\geq 0}\sup_{t\in[0,T]} f_n(t) < \infty$ *i si* $k_2 = k_1(t) \equiv 0$*,* $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ *convergeix uniformement en* $[0,T]$*.*

Demostració. A [6] es pot trobar la prova en cas que $k_1(t) \equiv k_1 \in \mathbb{R}$. La adaptació al cas $k_1(t) \geq 0$ fitada és senzilla resseguint la prova pel cas $k_1 \geq 0$ constant. Els detalls de la prova es troben a A.9. $\square$

L'objectiu ara, es enunciar i provar un resultat que ens demostri l'existència i unicitat d'un tipus concret de EDPEs. Per fer-ho, considerem una EDPE del tipus (2.12) i recordem que les solucions són de la forma (2.13). Direm que una EDPE satisfà les hipòtesis ($\mathbf{H}_1$) si:

- Les funcions σ, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són globalment Lipschitz. És a dir, que existeixen constants $L(\sigma)$, $L(b) > 0$ tals que, per a tot $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L(\sigma)|x - y| \quad \text{i} \quad |b(x) - b(y)| \leq L(b)|x - y|.$$

- Les funcions σ i b són fitades.

- La funció $(x, t) \mapsto I_0(x, t)$ és determinista, contínua en les dues variables i per a tot $T > 0$:

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} |I_0(x, t)| < \infty.$$

Teorema 2.12. *Sota les hipòtesis* $(\boldsymbol{H}_1)$ *i* $(\boldsymbol{H}_S)$*, la EDPE (2.12) té una única solució en el sentit de la definició 2.10. A més, per a tot* $T > 0$ *i per a tot* $p \geq 2$*,*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u(x, t)|^p) < \infty.$$

Demostració. Considerem l'esquema iteratiu següent:

$$u^{(0)}(x, t) = I_0(x, t)$$

i per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x, t) = I_0(x, t) + & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x - y, t - s)\sigma(u^{(n-1)}(y, s))W(dy, ds) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x - y, t - s)b(u^{(n-1)}(y, s))dyds \\ & = I_0(x, t) + I_1^{(n-1)}(x, t) + I_2^{(n-1)}(x, t). \end{aligned}$$

La prova es divideix en 3 etapes:

PAS 1: Primer de tot comprovarem per inducció que $u^{(n)}(x, t)$ és previsible per a tot $n \geq 0$ i que per a tot $T > 0$, $p \geq 2$,

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u^{(n)}(x, t)|^p) < \infty.$$

Tractem primer el cas inicial. Sota les hipòtesis del teorema, $I_0(x, t)$ és previsible i

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|I_0(x, t)|^p) < \infty.$$

Suposem cert per $n - 1$ i trobem que, en el cas de $u^{(n)}$, la previsibilitat és certa gràcies a la proposició 1.35. A més, observem que existeix una constant $K_p > 0$ que fa que disposem de la descomposició següent:

$$\begin{aligned} & \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|u^{(n)}(x, t)|^p) \\ \leq & K_p \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |I_0(x, t)|^p + \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|I_1^{(n-1)}(x, t)|^p) + \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|I_2^{(n-1)}(x, t)|^p) \right). \end{aligned}$$

Per una banda, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |I_0(x,t)|^p < \infty$ per hipòtesi. Pel que fa al segon sumand, tenim:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\sigma(u^{(n-1)}(y,s))W(dy,ds)\right)^p\right] \\
\leq &C_p \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2\sigma(u^{(n-1)}(y,s))^2 dyds\right)^{p/2}\right].
\end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Hölder a la integral respecte la mesura $\Gamma(x-y,t-s)^2 dyds$ obtenim

$$\begin{aligned}
&C_p \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2\sigma(u^{(n-1)}(y,s))^2 dyds\right)^{p/2}\right] \\
\leq &C_p \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(y,s)^2 dyds\right)^{p/2-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 \sup_x \mathbb{E}\left[\sigma(u^{(n-1)}(x,s))^p\right] dyds \\
\leq &K \int_0^t \left(1 + \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|u^{(n-1)}(x,s)|^p)\right) g(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Pel que fa al tercer sumand tenim, per la desigualtat de Jensen aplicada a la mesura $\Gamma(x-y,t-s)dyds$ i les condicions globals de Lipschitz,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)b(u^{(n-1)}(y,s))dyds)\right)^p\right] \\
\leq &K \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)(1+\mathbb{E}\left[|u^{(n-1)}(y,s)|^p\right] dyds \\
\leq &K \int_0^t \left(1 + \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|u^{(n-1)}(x,s)|^p)\right) h(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Si definim les funcions $f_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|u^{(n)}(x,t)|^p)$, podem resumir els càlculs anteriors en que existeixen constants $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$f_n(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t (1 + f_{n-1}(s)) (h(t-s) + g(t-s)) ds.$$

Aplicant el lema de Gronwall, tenim

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{t\in[0,T]} f_n(t) = \sup_{n\geq 1} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u^{(n)}(x,t)|^p) < \infty.$$

PAS 2: Demostrem l'existència d'una solució. Per fer-ho, veurem que la successió $u^{(n)}(x,t)$ convergeix en $L^2(\Omega)$ cap a un procés $u(x,t)$ que resol la EDPE. Posem $d_n(x,t) = u^{(n+1)}(x,t) - u^{(n)}(x,t)$. D'aquesta manera

$$\begin{aligned}
d_n(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) \left[\sigma(u^{(n+1)}(y,s)) - \sigma(u^{(n)}(y,s))\right] W(dy,ds) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) \left[b(u^{(n+1)}(y,s)) - b(u^{(n)}(y,s))\right] dyds.
\end{aligned}$$

Per tant, tenim la descomposició

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_n(x,t)|^2) \leq C(D_1 + D_2),$$

on

$$D_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[\sigma(u^{(n+1)}(y,s)) - \sigma(u^{(n)}(y,s))\right] W(dy,ds)\right|^2\right],$$

$$D_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[b(u^{(n+1)}(y,s)) - b(u^{(n)}(y,s))\right] dyds\right|^2\right].$$

Per una banda

$$\begin{aligned}
D_1 &\leq L(\sigma)^2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) d_{n-1}(y,s) W(dy,ds)\right|^2\right] \\
&\leq L(\sigma)^2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 d_{n-1}(y,s)^2 dyds\right] \\
&\leq L(\sigma)^2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_{n-1}(x,s)|^2) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 dyds \\
&\leq K \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_{n-1}(x,s)|^2) g(t-s) ds,
\end{aligned}$$

on $L(\sigma)$ i C són constants. D'altra banda

$$\begin{aligned}
D_2 &\leq L(b)^2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) d_{n-1}(y,s) dyds\right|^2\right] \\
&\leq L(b)^2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) d_{n-1}(y,s)^2 dyds\right] \\
&\leq L(b)^2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_{n-1}(x,s)|^2) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) dyds \\
&\leq L(b)^2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_{n-1}(x,s)|^2) h(t-s) ds.
\end{aligned}$$

Si definim les funcions $f_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d_n(x,t)|^2)$ trobem que existeix una constant $k \geq 0$ tal que

$$f_n(t) \leq k \int_0^t f_{n-1}(s)\left(g(t-s) + h(t-s)\right) ds.$$

Aplicant novament el lema de Gronwall, deduïm que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) < \infty$ i, per tant, $u^{(n)}(x,t)$ convergeix uniformement en $L^2(\Omega)$ a un procés $u(x,t)$ que, per construcció, resol la EDPE.

PAS 3: Demostrem la unicitat quasi segura de la solució. Suposem que tenim dues solucions $u(x,t)$ i $v(x,t)$ de la EDP anterior. Aleshores definim $d(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ i aquest procés d satisfà l'equació integral:

$$\begin{aligned}
d(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[\sigma(u(y,s)) - \sigma(v(y,s))\right] W(dy,ds) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[b(u(y,s)) - b(v(y,s))\right] dyds.
\end{aligned}$$

En particular, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,t)|^2)$ admet la següent descomposició:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,t)|^2) \leq C(E_1 + E_2),$$

on

$$E_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[\sigma(u(y,s)) - \sigma(v(y,s))\right] W(dy,ds)\right)^2\right],$$
$$E_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)\left[b(u(y,s)) - b(v(y,s))\right] dyds\right)^2\right].$$

Fent exactament el mateix raonament que en el pas 2 tenim que existeixen constants K_1, $K_2 > 0$ complint

$$\begin{aligned} E_1 &\leq K_1 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,s)|^2 \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 dyds \\ &\leq K_1 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,s)|^2 g(t-s)ds \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} E_2 &\leq K_2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,s)|^2) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s) dyds \\ &\leq K_2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,s)|^2) h(t-s)ds. \end{aligned}$$

Definint la funció $f(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(|d(x,t)|^2$, els càlculs anteriors ens donen que existeix $k > 0$ tal que

$$f(t) \leq k \int_0^t f(s)\left(g(t-s) + h(t-s)\right) ds.$$

Aplicant el lema de Gronwall a les funcions $f_n(t) = f(t)$ tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} f(t) < \infty$. Per tant, necessàriament $f(t) \equiv 0$ i conseqüentment $u(x,t) = v(x,t)$ q.s. Això conclou la prova del teorema. $\square$

2.2.3 Aplicacions del teorema: L'equació de la calor estocàstica i l'equació d'ones estocàstica

L'equació de la calor estocàstica

En aquesta secció, estudiarem el model de l'equació de la calor quan la font de calor és aleatòria i es pot modelitzar mitjançant un soroll blanc espai-temps.

Més concretament, suposem que tenim una barra infinitament llarga, de tal manera que podem identificar-la amb $\mathbb{R}$. Suposem que la temperatura inicial de la barra és determinista i val $u(x,0) = u_0(x)$. Considerem el següent problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Adaptant la definició de solució d'una EDPE al cas de la calor, cercarem solucions en el sentit de la definició 2.10 on $\Gamma(x,t)$ és la solució fonamental de l'equació de la calor.

Teorema 2.13. *Sota les hipòtesis* $(\boldsymbol{H}_1)$*, l'equació (2.16) satisfà les hipòtesis* $(\boldsymbol{H}_S)$ *i per tant (2.16) té solució i és única q.s. A més, per a tot* $T > 0$ *i* $p \geq 2$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u(x,t)|^p) < \infty.$$

Demostració. En virtut del teorema d'existència i unicitat, hem de comprovar només que per a tot $T > 0$ existeix una constant $C_T > 0$ complint

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)^2 dxdt \vee \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t) dxdt \leq C_T,$$

on $\Gamma(x,t)$ és la solució fonamental de l'equació de la calor. Però això és directe de la definició de Γ i de la proposició 2.6. $\square$

L'equació d'ones estocàstica Considerem el següent problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)) & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.17}$$

De la mateixa manera que en l'equació de la calor, adaptem la definició de solució d'una EDPE a aquest cas i, per tant, cerquem solucions en el sentit de la definició 2.10 on $\Gamma(x,t)$ és la solució fonamental de l'equació d'ones.

Teorema 2.14. *Sota les hipòtesis* $(\boldsymbol{H}_1)$*, l'equació (2.17) satisfà les hipòtesis* $(\boldsymbol{H}_S)$ *i per tant (2.17) té solució i és única q.s. A més, per a tot* $T > 0$ *i* $p \geq 2$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u(x,t)|^p) < \infty.$$

Demostració. En virtut del teorema d'existència i unicitat, hem de comprovar només que per a tot $T > 0$ existeix una constant $C_T > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)^2 dxdt \vee \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t) dxdt \leq C_T,$$

on $\Gamma(x,t)$ és la solució fonamental de l'equació d'ones. Però això és directe de la definició de Γ i de la proposició 2.8. $\square$

3 Càlcul de Malliavin i aplicació a les EDPEs

Introduïm les notacions següents:

- Denotem per $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espai de funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitament diferenciables tals que f i totes les seves derivades parcials tenen creixement polinòmic.
- Denotem per $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitament diferenciables, tals que f i totes les seves derivades parcials són fitades.

- Denotem per $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitament diferenciables i amb suport compacte.

Per comoditat, en comptes de considerar l'espai $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m)$ del capítol 1, considerarem $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+), l)$ on l denota la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Per agilitzar la notació, posem $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ i $H = L^2(R)$. Denotem per $\dot{W}$ un soroll blanc basat en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m)$ i per $\{\dot{W}(h); h \in H\}$ el procés isonormal associat.

3.1 Caos de Wiener

3.1.1 Polinomis d'Hermite

Definició 3.1. *Per a cada $n \geq 0$, definim l'n-èssim polinomi d'Hermite com*

$$H_0(x) = 1$$

i per a tot $n \geq 1$,

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right)$$

Un càlcul directe ens diu que els polinomis d'Hermite són els coeficients de la sèrie de Taylor en potències de t de la funció $F(x,t) = \exp\{tx - \frac{t^2}{2}\}$. Per tant, d'aquí deduïm les següents propietats

Proposició 3.2.

$$\begin{aligned} nH_n'(x) &= H_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \\ (n+1)H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \\ H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Lema 3.3. *Siguin X, Y dos variables amb distribució conjunta gaussiana i amb $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 1$. Aleshores per a tot $n, m \geq 0$ tenim*

$$\mathbb{E}\left(H_n(X)H_m(Y)\right) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{n!}\mathbb{E}(XY)^n & n = m. \end{cases}$$

Demostració. Es pot trobar a [12]. ☐

Lema 3.4. *La família de variables aleatòries $\{e^{\dot{W}(h)}; h \in H\}$ formen un subconjunt total de $L^2(\Omega)$.*

Demostració. Es pot trobar a [12]. ☐

Teorema 3.5. *Per a cada $n \geq 1$, sigui $\mathcal{H}_n$ el subespai tancat de $L^2(\Omega)$ format per les variables aleatories $\{H_n(\dot{W}(h)); ||h||_H = 1\}$. Aleshores $L^2(\Omega)$ es pot escriure com a suma directa ortogonal de $\mathcal{H}_n$. És a dir*

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

Demostració. Es pot trobar a [12]. ☐

3.2 Càlcul de Malliavin

3.2.1 L'operador de derivació (derivada de Malliavin)

Sigui $\mathcal{S}$ la classe de variables aleatòries de la forma

$$F = f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))$$

on $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_1, \dots h_n \in H$ i $n \geq 1$. Si $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ aleshores denotem aquest espai per $\mathcal{S}_b$. A més, si f és un polinomi, el denotem per $\mathfrak{P}$. Observem que els espais definits anteriorment són densos en $L^p(\Omega)$ per a tot $p \geq 1$.

Definició 3.6. *La derivada de Malliavin d'una variable aleatòria $F \in \mathcal{S}$ és l'aplicació a valors en H donada per*

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))h_i.$$

En particular, per a cada $z \in R$,

$$D_z F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))h_i(z).$$

Per a cada $h \in H$ podem definir la derivada direccional de $F \in \mathcal{S}$ en direcció $h \in H$ com $D_h F = \langle DF, h \rangle_H$.

Lema 3.7. *Per a tot $F \in \mathcal{S}$ i $h \in H$ es té*

$$\mathbb{E}(\langle DF, h \rangle_H) = \mathbb{E}(F\dot{W}(h)).$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem assumir que $F = f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))$ on $h_1 = h$ i $h_1, \dots, h_n$ són ortonormals. D'aquesta manera

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle DF, h \rangle_H) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} f(x_1, \dots, x_n)\phi_n(dx_1, \dots, dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)x_1\phi_n(dx_1, \dots, dx_n) = \mathbb{E}(F\dot{W}(h_1)).\end{aligned}$$

on $\phi_n(dx_1, \dots, dx_n)$ és la llei gaussiana n-dimensional. □

Aquest lema és clau per demostrar la fòrmula següent.

Proposició 3.8. *Siguin $F, G \in \mathcal{S}$ i $h \in H$. Aleshores*

$$\mathbb{E}(G\langle DF, h \rangle_H) = \mathbb{E}(FGW(h) - F\langle DG, h \rangle_H)$$

Demostració. Resulta d'aplicar el lema 3.7 a FG. □

Aquesta relació d'integració per parts és clau per demostrar que l'operador D es pot definir a la clausura de $\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{S}}$. Denotem per $L^p(\Omega; H)$ l'espai de variables aleatòries F a valors en H complint $\mathbb{E}(||F||_H^p)^{1/p} < \infty$.

Proposició 3.9. *L'operador D és tancable (veure A.7) de $L^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega; H)$ per a tot $p \geq 1$.*

Demostració. Sigui $\{F_n; n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries pertanyents a $\mathcal{S}$ que tendeixen a 0 en $L^p(\Omega)$. En virtut de la proposició A.8, hem de veure que si considerem la successió $\{DF_n; n \geq 1\}$ i suposem que convergeix en $L^p(\Omega; H)$ a un element $\eta \in H$, aleshores $\eta = 0$. Sigui $h \in H$ i sigui $F \in \mathcal{S}_b$ de tal manera que $F\dot{W}(h)$ és fitada. Tenim

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle \eta, h\rangle_H F) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\langle DF_n, h\rangle_H F) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(F_n F\dot{W}(h) - F_n\langle DF, h\rangle_H) = 0.\end{aligned}$$

Si veiem que el conjunt de variables aleatories $F \in \mathcal{S}_b$ tals que $F\dot{W}(h)$ és fitada és dens en $L^p(\Omega)$, aleshores per un argument d'aproximació trobariem que $\langle \eta, h\rangle_H = 0$ per a tot $h \in H$ i per tant $\eta = 0$. Com $\mathcal{S}_b$ és dens en $L^p(\Omega)$, és suficient veure que la nostra classe de variables aleatòries és densa en $\mathcal{S}_b$. Per fer-ho, considerem $G \in \mathcal{S}_b$ i la successió $F_n = G\exp\{\frac{\dot{W}(h)^2}{n}\}$. Clarament $F\dot{W}(h)$ és fitada i $F_n \to G$ en $L^p(\Omega)$ per a tot $p \geq 1$.

Així, la classe de variables aleatòries $F \in \mathcal{S}_b$ tals que $F\dot{W}(h)$ és fitada és densa en $\mathcal{S}_b$ i, per tant, també ho és en $L^p(\Omega)$. Amb el raonament fet anteriorment deduïm per tant que $\eta = 0$. $\square$

Per a cada $p \geq 1$, denotem per $\mathbb{D}^{1,p}$ el domini de D en $L^p(\Omega)$. És a dir, $\mathbb{D}^{1,p}$ és la clausura de $\mathcal{S}$ respecte la norma

$$||F||_{1,p} = \left[\mathbb{E}(|F|^p) + \mathbb{E}(||DF||_H^p)\right]^{1/p}.$$

En el cas $p = 2$, es pot demostrar que $\mathbb{D}^{1,2}$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \mathbb{E}(FG) + \mathbb{E}(\langle DF, DG\rangle_H).$$

3.2.2 L'operador de divergència (integral de Skorohod)

Definició 3.10. *Definim l'operador de divergència δ com l'adjunt de l'operador de derivació D. És a dir, δ és un operador no fitat de $L^2(\Omega; H)$ a valors en $L^2(\Omega)$ de tal manera que*

- *El domini de δ, $Dom(\delta)$, és el conjunt d'elements $u \in L^2(\Omega; H)$ tals que per a tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$*

$$|\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle_H)| \leq c||F||_{L^2(\Omega)},$$

  on c és una constant positiva que depèn de u.

- *Si $u \in Dom(\delta)$, aleshores $\delta(u)$ és l'element de $L^2(\Omega)$ caracteritzat per*

$$\mathbb{E}(F\delta(u)) = \mathbb{E}(\langle DF, u\rangle_H) \tag{3.1}$$

  per a tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Normalment, la relació (3.1) reb el nom de *propietat de dualitat*. Denotem per $\mathcal{S}_H$ el conjunt d'elements de $L^2(\Omega; H)$ de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j$$

on $F_j \in \mathcal{S}$ per a tot $j = 1, \dots, n$ i $h_j \in H$ per a tot $j = 1, \dots, n$. Es satisfà que si $u \in \mathcal{S}_H$ aleshores $u \in Dom(\delta)$. En efecte, per a tot $F \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\langle DF, u\rangle_H)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(F_j \langle DF, h_j\rangle_H\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \Big(|\mathbb{E}(F\langle DF_j, h_j\rangle_H) + |\mathbb{E}(FF_j\dot{W}(h_j))|\Big) \\
&\leq ||F||_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^{n} ||\langle DF_j, h_j\rangle_H||_{L^2(\Omega)} + ||F_j\dot{W}(h_j)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq c||F||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

doncs $F_j \in \mathcal{S}$ per a tot j. A més, del fet que $\mathcal{S}$ és dens en $L^2(\Omega)$ es dedueix que $\mathcal{S}_H$ és dens en $L^2(\Omega; H)$. Gràcies a la propietat de dualitat i a que D és un operador tancable trobem que $\delta : Dom(\delta) \to L^2(\Omega)$ és un operador tancat.

3.3 Càlcul de Malliavin amb integrals múltiples de Wiener

Fins ara, H podia ser un espai de Hilbert separable qualsevol. Ara farem servir que $H = L^2(R)$. Com $H = L^2(R)$, podem identificar $L^2(\Omega; H)$ amb $L^2(R \times \Omega)$. D'aquesta manera, podem entendre la derivada de Malliavin d'un element $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ com un procés estocàstic $\{D_z F; z \in R\}$. Similarment, podem construir derivades d'ordre superior. Si $f, g \in L^2(R)$, definim $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Aleshores, si $F \in \mathcal{S}$, tenim

$$DF = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))h_i$$

i podem definir D^2F com

$$D^2F = D(DF) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_i,x_j} f(\dot{W}(h_1), \dots, \dot{W}(h_n))h_i \otimes h_j$$

D'aquesta manera, per a tot $k \geq 1$ podem veure la derivada k-èssima de F, D^kF com un element de $L^2(R^k \times \Omega)$ i també com el procés multiparamètric $\{D^k_{z_1,\dots,z_k}F; z_j \in R\}$ definit inductivament de la mateixa manera que hem definit D^2F. Això ens porta a definir els espais $\mathbb{D}^{k,2}$ de forma inductiva: Sigui $F \in \mathbb{D}^{k,2}$, aleshores $F \in \mathbb{D}^{k+1,2}$ si, i només si, $D^k_{z_1,\dots,z_k}F \in \mathbb{D}^{1,2}$ i l'aplicació $z \mapsto \mathbb{E}\left(||D_z D^k_{z_1,\dots,z_k}F||^2_{L^2(R^k)}\right)$ pertany a $L^2(R)$.

Del fet que D esdevingui un operador de $L^2(\Omega)$ a valors a $L^2(R \times \Omega)$ degut a la identificació anterior, l'operador de divergència serà per tant un operador de $L^2(R \times \Omega)$ a valors en $L^2(\Omega)$.

3.3.1 Integrals múltiples de Wiener

Sigui $\mathfrak{E}_n$ el conjunt de funcions de la forma

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{k} a_{j_1,\dots,j_n} \mathbb{1}_{A_{j_1}\times\cdots\times A_{j_n}}(z_1, \dots, z_n),$$

on els $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$ són conjunts disjunts dos a dos de mesura finita i els coeficients $a_{j_1,\dots,j_n}$ valen 0 si algun dels índexs $j_1, \dots, j_n$ coincideix. Per aquest tipus de funcions, definim

$$I_n(f) = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{k} a_{j_1,\dots,j_n} \dot{W}(A_{j_1}) \cdots \dot{W}(A_{j_n}).$$

Per a cada $f \in L^2(R^n)$, denotem per $\tilde{f}$ la simmetrització de f. És a dir,

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}).$$

D'aquesta manera, I_n defineix una aplicació lineal de $\mathfrak{E}_n$ a $L^2(\Omega)$ satisfent

1. $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$.
2. $\mathbb{E}(I_n(f)I_m(g)) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ n!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2((\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)^n)} & n = m. \end{cases}$

Proposició 3.11. *El conjunt $\mathfrak{E}_n$ és dens en $L^2(R^n)$.*

Demostració. Es pot trobar a [12]. □

Gràcies a la densitat de $\mathfrak{E}_n$, i per la propietat 2 de I_n aplicada a $f = g$, obtenim que

$$\mathbb{E}(I_n(f)^2) = n!||\tilde{f}||_{L^2(R^n)} \leq n!||f||_{L^2(R^n)}.$$

Per tant, podem extendre I_n a un operador continu de $L^2(R^n)$ que pren valors a $L^2(\Omega)$.

Definició 3.12. *Siguin $f \in L^2(R^p)$ i $g \in L^2(R^q)$ funcions simètriques. Per a cada $1 \leq r \leq p \wedge q$ definim la contracció de r índexs de f i g com*

$$(f \otimes_r g)(z_1, \dots, z_{p+q-2r})$$
$$= \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)^r} f(z_1, \dots, z_{p-r}, s_1, \dots, s_r) g(z_{p-r+1}, \dots, z_{p+q-2r}, s_1, \dots, s_r) m(ds_1) \cdots m(ds_r)$$

Observem a més que $f \otimes_r g \in L^2(R^{p+q-2r})$.

Generalment, $f \otimes_r g$ no serà una funció simètrica. Denotem per $f \tilde{\otimes}_r g$ la simetrització de $f \otimes_r g$.

Proposició 3.13. *Sigui $f \in L^2(R^p)$ una funció simètrica i $g \in L^2(R)$. Aleshores,*

$$I_p(f)I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + pI_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Demostració. Es pot trobar a [12]. □

El següent resultat relaciona el concepte d'integrals múltiples de Wiener amb els polinomis d'Hermite. Fent servir que els polinomis d'Hermite formen un sistema ortogonal de $L^2(R)$, obtindrem una descomposició en integrals múltiples de Wiener de qualsevol funció $f \in L^2(R)$.

Proposició 3.14. *Per a tota $g \in L^2(R)$ tenim*

$$I_n(g^{\otimes n}) = ||g||^n_{L^2(R)} H_n \left(\frac{\dot{W}(g)}{||g||_{L^2(R)}} \right)$$

on $g^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) = g(t_1) \cdots g(t_n)$ i H_n denota l'n-èssim polinomi d'Hermite. En particular, $I_n : L^2_{sim}(R^n) \to \mathcal{H}_n$ és bijectiva.

Demostració. Podem suposar que $||g||_{L^2(R)} = 1$. Ho demostrarem per inducció en n. En el cas $n = 1$ és immediat, doncs $H_1(x) = x$ i $I_1(g) = \dot{W}(g)$. Suposarem cert per $n = 1, 2, \dots, n-1, n$. Aplicant la proposició 3.13 obtenim:

$$\begin{aligned} I_{n+1}(g^{\otimes(n+1)}) =& I_n(g^{\otimes n}) I_1(g) - nI_{n-1}(g^{\otimes(n-1)}) \\ =& H_n(\dot{W}(g))\dot{W}(g) - nH_{n-1}(\dot{W}(g)) \\ =& H_{n+1}(\dot{W}(g)). \end{aligned}$$

□

Gràcies a aquesta proposició i a la descomposició en caos de Wiener (teorema 3.5) deduïm el següent resultat:

Proposició 3.15. *Qualsevol variable aleatoria $F \in L^2(\Omega)$ es pot expandir en forma de sèrie de integrals estocàstiques múltiples*

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n),$$

on $f_0 = \mathbb{E}(F)$ i I_0 és la aplicació identitat.

Ens referirem a l'expressió anterior com expansió en integrals múltiples de Wiener de F o descomposició de Wiener de F.

3.3.2 Derivació i integració de Skorohod en el caos de Wiener

Proposició 3.16. *Sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ de tal manera que $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$ on $f_n \in L^2_{sim}(R)$. Aleshores, F pertany al domini de D si, i només si,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! ||\tilde{f}||^2_{L^2(R^n)} < \infty.$$

En tal cas, se satisfà

$$D_z F = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot, z))$$

per a tot $z \in R$.

Demostració. Es pot trobar a [13]. □

Proposició 3.17. *Sigui $u \in L^2(R \times \Omega)$ amb descomposició de Wiener*

$$u_z = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n(\cdot, z)).$$

on $f_n \in L^2(R^{n+1})$ és simètrica en les n primeres variables. Aleshores, $u \in Dom(\delta)$ si, i només si, la sèrie

$$\sum_{n \geq 0} I_{n+1}(f_n)$$

és convergent en $L^2(\Omega)$. A més, si convergeix, es té

$$\delta(u) = \sum_{n \geq 0} I_{n+1}(f_n).$$

Demostració. Es pot trobar a [13]. □

Sigui $\dot{W}$ un soroll blanc basat en $(R, \mathcal{B}_b(R), l)$. Si $u = \{u(x,t); (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ és un procés que pertany a $Dom(\delta)$, aleshores sovint es fa servir la notació

$$\delta(u) = \int_R u_z \delta W_z$$

Veurem que, pel que fa al tipus de processos que estem tractant en aquesta memòria, la integral de Skorohod coincideix amb la integral de Walsh que vam tractar al capítol 1.

Per a cada $G \in \mathcal{B}_b(R)$, anomenem $\mathcal{F}_G$ a la σ-àlgebra generada per les variables aleatòries $\dot{W}(B)$, $B \in \mathcal{B}_b(R)$, $B \subset G$.

Lema 3.18. *Sigui $\dot{W}$ un soroll blanc basat en $(R, \mathcal{B}_b(R), l)$. Sigui F una variable aleatòria de quadrat integrable amb expansió en integrals múltiples de Wiener $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$. Aleshores, per a tot $G \in \mathcal{B}_b(R)$,*

$$E\left(F|\mathcal{F}_G\right) = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n \mathbb{1}_G^{\otimes n})$$

on $\mathbb{1}_G^{\otimes n}(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_G(z_i)$.

Demostració. És suficient demostrar-ho per $F = I_n(f_n)$ on $f_n \in L^2_{sim}(R^n)$. A més, com les funcions $\mathfrak{E}_n$ són denses en $L^2(R^n)$, és suficient considerar el cas $f_n = \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_n}$ on A_i són disjunts dos a dos i de mesura finita. En aquest cas, tenim

$$I_n(f_n) = \prod_{i=1}^n \dot{W}(A_i)$$

i per tant

$$E\left(F|\mathcal{F}_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \dot{W}(A_i)|\mathcal{F}_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^n (\dot{W}(A_i \cap G) + \dot{W}(A_i \cap G^c))|\mathcal{F}_G\right)$$

Com les variables $\dot{W}(A_i \cap G^c)$ són independents de $\mathcal{F}_G$ i a més són centrades, l'esperança condicionada de qualsevol producte creuat que tingui un factor de la forma $\dot{W}(A_i \cap G^c)$ serà nul·la. D'aquesta manera, trobem que

$$E\left(\prod_{i=1}^{n}(\dot{W}(A_i \cap G) + \dot{W}(A_i \cap G^c))|\mathcal{F}_G\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n}\dot{W}(A_i \cap G)|\mathcal{F}_G\right) = \prod_{i=1}^{n}\dot{W}(A_i \cap G)$$

i la última expressió és igual a = $I_n\left(\mathbb{1}_{A_1 \cap G \times \cdots \times A_n \cap G}\right) = I_n(f_n \mathbb{1}_G^{\otimes n})$, tal i com volíem demostrar. □

Lema 3.19. *Sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ i $G \in \mathcal{B}_b(R)$. Aleshores, $E(F|\mathcal{F}_G) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i*

$$D_z E\left(F|\mathcal{F}_G\right) = E\left(D_z F|\mathcal{F}_G\right)\mathbb{1}_G(z).$$

Demostració. Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, pel lema anterior és clar que $E(F|\mathcal{F}_G) \in L^2(\Omega)$. A més,

$$D_z E(F|\mathcal{F}_G) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, z)\mathbb{1}_G^{\otimes(n-1)})\mathbb{1}_G(z)$$

i per tant, al ser $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, tenim que la norma del sumand dret és finita i per tant $E(F|\mathcal{F}_G) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Fent els càlculs, trobem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, z)\mathbb{1}_G^{\otimes(n-1)})\mathbb{1}_G(z) = E\left(D_z F|\mathcal{F}_G\right)\mathbb{1}_G(z).$$

□

Corol·lari 3.20. *Sigui $G \in \mathcal{B}_b(R)$ i sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatòria $\mathcal{F}_G$-mesurable, aleshores $D_z F = 0$ gairebé per a tot $(z, \omega) \in G^c \times \Omega$.*

Demostració. El resultat és directe aplicant el lema anterior, doncs tenim que $D_z F = E\left(D_z F|\mathcal{F}_G\right)\mathbb{1}_G(z)$. □

La següent proposició ens dona la relació entre la integral de Skorohod i la integral de Walsh

Proposició 3.21. *Sigui $G \in \mathcal{B}_b(R)$ i F una variable aleatòria de quadrat integrable $\mathcal{F}_{G^c}$-mesurable. Aleshores $F\mathbb{1}_G \in Dom(\delta)$ i a més*

$$\delta\left(F\mathbb{1}_G\right) = F\dot{W}(G).$$

Demostració. Suposem primer $F \in \mathcal{S}$, aleshores $F\mathbb{1}_G \in Dom(\delta)$ i amb un càlcul directe obtenim

$$\delta(F\mathbb{1}_G) = F\dot{W}(G) - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} D_{(x,t)}F\mathbb{1}_G((x,t))dxdt.$$

Aplicant els lemes anteriors, obtenim

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} D_{(x,t)}F\mathbb{1}_G((x,t))dxdt = 0.$$

Com $\mathcal{S}$ és dens en $L^2(\Omega)$ i δ és un operador tancat, deduïm que el resultat és cert per $F \in L^2(\Omega)$. □

En particular, observem que el resultat anterior és cert per a les funcions simples definides en el capítol 1 i, per tant, la integral estocàstica dels processos integrables en el sentit de Walsh coincideix amb la integral en el sentit de Skorohod. És per això que a partir d'ara, si $u = \{u(x,t); (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ és un procés previsible de quadrat integrable, podem suposar que la integral

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} u(x,t)W(dx,dt)$$

és en el sentit de Skorohod i per tant podem aplicar les eines del càlcul de Malliavin a aquestes integrals.

3.3.3 Càlcul diferencial

Proposició 3.22. *Sigui $p \geq 1$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$ un vector aleatori tal que $F_j \in \mathbb{D}^{1,p}$ $\forall j = 1, \ldots m$ i sigui $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ amb derivades parcials fitades. Aleshores $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ i*

$$D\varphi(X) = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}\varphi(X)DF_j. \tag{3.2}$$

Demostració. Si $F_j \in \mathcal{S}$ i $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ amb derivades parcials fitades, el resultat és directe aplicant la regla de la cadena clàssica. Pel cas general, considerem per a cada $j = 1, \ldots, n$ una successió $F_j^{(n)}$ convergent a F_j en $\mathbb{D}^{1,p}$ (és a dir, $F_j^{(n)} \to F_j$ en $L^p(\Omega)$ i $DF_j^{(n)} \to DF_j$ en $L^p(\Omega; H)$). Considerem també per a cada $n \geq 1$ una aproximació de la identitat α_n de tal manera que podem construir la successió $\{\varphi_n; n \geq 1\}$ de funcions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ amb derivades parcials fitades donada per $\varphi_n = \varphi * \alpha_n$. D'aquesta manera, denotant per $F^{(n)} = (F_1^{(n)}, \ldots, F_m^{(n)})$, obtenim

$$\varphi_n(F^{(n)}) \to \varphi(F) \quad \text{en} \quad L^p(\Omega),$$
$$D\varphi_n(F^{(n)}) = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}\varphi(F^{(n)})DF_j^{(n)} \to \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}\varphi(F)DF_j \quad \text{en} \quad L^p(\Omega; H).$$

Com D és un operador tancat, es té $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ i (3.2) es satisfà. □

Lema 3.23. *Sigui $\{F_n; n \geq 0\}$ una successió de variables aleatòries de $\mathbb{D}^{1,2}$ que convergeix a F en $L^2(\Omega)$ i satisfent*

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(||DF||_H^2) < \infty$$

Aleshores $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ i la successió $\{DF_n; n \geq 0\}$ convergeix a DF en la topologia feble de $L^2(R \times \Omega)$ (veure A.2).

Demostració. Es pot trobar a [13] □

Proposició 3.24. *Sigui $u \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ (és a dir, $u \in L^2(R \times \Omega)$ i $Du \in L^2(R^2 \times \Omega)$). Suposem que gairebé per a tot $r \in R$, el procés $\{D_r u_z; z \in R\}$ pertany a $Dom(\delta)$ i que existeix una modificació del procés $\{\delta(D_r u_z); r \in R\}$ que pertany a $L^2(R \times \Omega)$. Aleshores, $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i*

$$D_z\delta(u) = u_z + \delta(D_z u)$$

Demostració. Es pot trobar a [13]. □

3.4 Criteri de continuitat absoluta

Proposició 3.25. *Sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatòria tal que $||DF||_H^2 > 0$ q.s. Aleshores, la llei de F és absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue*

Demostració. Hem de veure tot subconjunt $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesura zero satisfà $\mathbb{P}(F \in E) = 0$. Equivalentment, hem de veure que $\mathbb{1}_E(F) = 0$ q.s. Observem que si F té llei absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue i ϕ és un difeomorfisme, aleshores la llei de $\phi(F)$ és també absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue. D'aquesta manera, podem suposar sense pèrdua de generalitat que F pren valors a $(-1, 1)$ i, per tant, ens podem restringir només a borelians $E \subset (-1, 1)$ de mesura zero.

Denotem per P_F la llei de F. Tenim que existeix una successió de funcions f_n continues que convergeixen puntualment a $\mathbb{1}_E$ g.p.t. respecte la mesura $P_F + dx$ (és a dir, $f_n(x) \to \mathbb{1}_E(x)$ g.p.t. $x \in (-1, 1)$ i $f_n(F) \to \mathbb{1}_E(F)$ q.s.). Definim $\varphi_n(t) = \int_{-1}^t f_n(x)$. Aleshores φ_n és de classe $\mathcal{C}^1$ i cada φ_n té derivada fitada. Apliquem doncs la regla de la cadena i trobem que $\varphi_n(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i $D\varphi_n(F) = \varphi_n'(F)DF = f_n(F)DF$. Com $f_n(x) \to \mathbb{1}_E$ puntualment g.p.t., $\varphi_n(x) \to 0$ g.p.t. Pel teorema de la convergència dominada, tenim:

$$\varphi_n(F) \to 0 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega),$$
$$f_n(F)DF \to \mathbb{1}_E(F)DF \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

Com la derivada de Malliavin és un operador tancat, tenim $\mathbb{1}_E(F)DF = 0$ q.s. i per tant $\mathbb{1}_E(F)||DF||_H^2 = 0$ q.s. Com $||DF||_H^2 > 0$ q.s. deduïm que $\mathbb{1}_E(F) = 0$ q.s. □

Tot i que aquest criteri sembla senzill i poc restrictiu, trobar que $||DF||_H^2 = \int_R ||D_r F|^2 dr > 0$ q.s. és un càlcul difícil. El següent lema ens ajudarà a comprovar aquesta condició:

Lema 3.26. *Sigui F una variable aleatòria no negativa. Aleshores $\mathbb{E}(F^{-p}) < \infty$ per a tot $p \geq 2$ si i només si per a tot $q \geq 2$ existeix un $\epsilon_0(q) > 0$ tal que $\mathbb{P}(F < \epsilon) \leq C\epsilon^q$ per a tot $\epsilon \leq \epsilon_0(q)$.*

Demostració. Es pot trobar a [10]. □

Per tant, si aconseguim veure que per a algun $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_R |D_z F|^2 dZ\right)^{-2p}\right] < \infty,$$

tindrem que la variable $||DF||_H^{-2p}$ és finita q.s. i, per tant, $||DF||_H^2 > 0$ q.s.

3.5 Aplicació del càlcul de Malliavin a les EDPEs

Considerem una EDPE de la forma

$$Lu(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)) \tag{3.3}$$

per a $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$. Per simplicitat, considerem condicions inicials homogènies. Suposem que se satisfan les hipòtesis $(\mathbf{H}_1)$ i $(\mathbf{H}_S)$. Recordem que busquem solucions a (3.3) en el sentit de la definició 2.10. Recordem també que a partir de la solució fonamental Γ és convenient definir les funcions següents:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)^2 dx, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds, \\ h(t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t)dt, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds. \end{aligned}$$

Reforçant les condicions sobre les funcions σ i b obtenim el següent resultat:

Teorema 3.27. *Siguin σ, b funcions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ amb derivades fitades. Aleshores per a tot (x,t), $u(x,t) \in \mathbb{D}^{1,p}$. A més, per a tot $(y,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la derivada $D_{y,s}u(x,t)$ satisfà l'equació*

$$\begin{aligned} D_{y,s}u(x,t) =& \Gamma(x-y,t-s)\sigma(u(y,s)) \\ &+ \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)\sigma'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)W(dz,dr) \\ &+ \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)b'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)dzdr \end{aligned} \tag{3.4}$$

per $s \leq t$ i s'anul·la per $s > t$. A més, per a tot $T > 0$,

$$\sup_{n\geq 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}\left(||D_{y,s}u(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right) < \infty.$$

Demostració. La prova la dividirem en dues passes.

PAS 1: Fixem $p \geq 2$ i veiem per inducció que $u^{(n)} \in \mathbb{D}^{1,2}$ per a tot $n \geq 0$. Considerem l'esquema iteratiu de Picard que vam considerar per la prova de l'existència i unicitat de solucions. És a dir,

$$u^{(0)}(x,t) = 0$$

i per $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)\sigma(u^{(n)}(z,r))W(dz,dr) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)b(u^{(n)}(z,r))dzdr. \end{aligned}$$

Ho demostrarem per inducció. Per una banda, és clar que $u^{(0)}(x,t) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Ara, suposem $u^{(n)}(x,t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i tenint en compte l'esquema iteratiu anterior, apliquem les regles de càlcul de Malliavin i trobem que $u^{(n+1)}(x,t) \in \mathbb{D}^{1,2}$. A més, $D_{y,s}u^{(n+1)}(x,t)$ satisfà l'equació integral

$$\begin{aligned} D_{y,s}u^{(n+1)}u(x,t) =& \Gamma(x-y,t-s)\sigma(u^{(n)}(y,s) \\ &+ \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)\sigma'(u^{(n)}(z,r))D_{y,s}u^{(n)}(z,r)W(dz,dr) \\ &+ \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)b'(u^{(n)}(z,r))D_{y,s}u^{(n)}(z,r)dzdr \end{aligned}$$

i $D_{y,s}u^{(n+1)}u(x,t) = 0$ per $t \leq s$, doncs $u(x,t)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable.

PAS 2: Veurem que per a tot $n \geq 0$, per a tot $p \geq 2$ i per a tot $T > 0$,

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(||D_{y,s}u^{(n)}(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}) < \infty.$$

Per demostrar-ho, farem un raonament on busquem aplicar el lema de Gronwall. Primer de tot observem que com per a tot $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, $Du^{(0)}(x,t) = 0$, aleshores és clar que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(||D_{y,s}u^{(0)}(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}) = 0.$$

D'altra banda, tenim la descomposició següent:

$$\mathbb{E}(||D_{y,s}u^{(n+1)}(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}) \leq C\,(I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n})$$

on, aplicant els teoremes de Fubini i Tonelli, podem escriure $I_{j,n}$ per $j = 1,2,3$ com

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2\sigma(u^{(n)}(y,s))^2 dyds\right)^{p/2}\right], \\ I_{2,n} &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)\sigma'(u^{(n)}(z,r))D_{y,s}u^{(n)}(z,r)W(dz,dr)\right)^2 dyds\right)^{p/2}\right], \\ I_{3,n} &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)b'(u^{(n)}(z,r))D_{y,s}u^{(n)}(z,r)dzdr\right)^2 dyds\right)^{p/2}\right]. \end{aligned}$$

Pel que fa a la primera integral, tenim, per la desigualtat de Hölder aplicada a la integral respecte la mesura $\Gamma(x-y,t-s)^2dyds$

$$\begin{aligned} I_{1,n} \leq& \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 dyds\right)^{p/2-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 \mathbb{E}\left[|\sigma(u^{(n)}(y,s))|^p\right] dyds \\ \leq& C_1 \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y,t-s)^2 dyds\right)^{p/2} \left(1 + \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \mathbb{E}(|u^{(n)}(x,t)|^p)\right) \\ \leq& C_T. \end{aligned}$$

Pel que fa a la segona integral, aplicant la desigualtat tipus Burkholder A.16, les propietats de σ i la desigualtat de Hölder respecte la mesura $\Gamma(x-z,t-r)dzdr$

trobem que:

$$
\begin{aligned}
I_{2,n} \leq & c_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\int_s^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\sigma'(u^{(n)}(z,r))^2D_{y,s}u^{(n)}(z,r)^2dzdrdyds\right)^{p/2}\right]\\
\leq & c_p||\sigma'||_\infty^p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\left(\int_0^r\int_{\mathbb{R}}|D_{y,s}u^{(n)}(z,r)|^2dyds\right)dzdr\right)^{p/2}\right]\\
\leq & c_p||\sigma'||_\infty^2\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\right)^{p/2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}(z,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)dzdr\\
\leq & ||\sigma'||_\infty^2 C_{T,p}\int_0^t\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}(x,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2dzdr\\
\leq & ||\sigma'||_\infty^2 C_{T,p}\int_0^t\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}(x,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)g(t-r)dr.
\end{aligned}
$$

Per últim, aplicant la desigualtat de Jensen respecte la mesura $\Gamma(x-z,t-r)dzdr$ deduïm que

$$
\begin{aligned}
I_{3,n} \leq & \mathbb{E}\left[\left(\int_0^r\int_{\mathbb{R}}\int_s^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)b'(u^{(n)}(z,r))^2|D_{y,s}u^{(n)}(z,r)|^2dzdrdyds\right)^{p/2}\right]\\
\leq & ||b'||_\infty^p\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}u(z,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)dzdr\\
\leq & ||b'||_\infty^2\int_0^t\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}u(x,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)dzdr\\
= & ||b'||_\infty^p\int_0^t\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}u(x,r)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)h(t-r)dr.
\end{aligned}
$$

Aplicant el lema de Gronwall, obtenim

$$
\sup_{n\geq 0}\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}\mathbb{E}\left(||D_{y,s}u^{(n)}(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}\right)<\infty. \tag{3.5}
$$

Pel teorema d'existència i unicitat, per (3.5) i pel lema 3.24 trobem que $u(x,t)\in\mathbb{D}^{1,p}$ i efectivament $D_{y,s}u(x,t)$ satisfà l'equació integral (3.4). $\square$

Abans de donar un resultat sobre continuitat absoluta de les solucions d'algunes EDPEs, necessitem un lema tècnic.

Lema 3.28. *Sigui $T>0$ arbitrari i suposem que es satisfan les hipòtesis del teorema anterior. Aleshores, per a tot $0<t_1\leq t_2\leq T$,*

$$
\sup_{x\in\mathbb{R},t_1\leq t\leq t_2}\mathbb{E}\left(||Du(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])}\right)\leq C_p(T)G(t_2-t_1)^{p/2}
$$

on $C_p(T)$ és una constant real positiva que depèn només de p i de T.

Demostració. Donat $t\in[t_1,t_2]$ tenim la descomposició següent:

$$
\mathbb{E}(||Du(x,t)||^p_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])})\leq C\left(I_1+I_2+I_3\right)
$$

on, aplicant els teoremes de Fubini i Tonelli, podem escriure I_j per $j = 1, 2, 3$ com

$$I_1 = \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-y,t-s)^2\sigma(u(y,s))^2 dyds\right)^{p/2}\right],$$

$$I_2 = \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{s}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)\sigma'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)W(dz,dr)\right)^2 dyds\right)^{p/2}\right],$$

$$I_3 = \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{s}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)b'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)dzdr\right)^2 dyds\right)^{p/2}\right].$$

Pel que fa la primera integral, observem que si σ' és fitada, aleshores σ és globalment Lipschitz. A més, per la desigualtat de Hölder.

$$\begin{aligned} I_1 \leq& \left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-y,t-s)^2 dyds\right)^{p/2-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-y,t-s)^2\sigma(u(y,s))^2 dyds\right] \\ \leq& \left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-y,t-s)^2 dyds\right)^{p/2}\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}\mathbb{E}(|\sigma(u(x,t))|^2) \\ \leq& C_1\left(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-y,t-s)^2 dyds\right)^{p/2} = C_1 G(t-t_1)^{p/2}. \end{aligned}$$

Per la segona integral, apliquem la desigualtat tipus Burkholder A.16 i fem servir que σ' és fitada per trobar que

$$I_2 \leq C_p||\sigma'||_{\infty}^{p} G(t-t_1)^{p/2-1}\int_{t_1}^{t} g(t-r)\sup_{(x,\tau)\in\mathbb{R}\times[t_1,r]}\mathbb{E}(||Du(x,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t])}^{p})dr.$$

De forma similar tenim, per la tercera integral,

$$I_3 \leq C_p||b'||_{\infty}^{p} H(t-t_1)^{p-1}\int_{t_1}^{t} h(t-r)\sup_{(x,\tau)\in\mathbb{R}\times[t_1,r]}\mathbb{E}(||Du(x,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t])}^{p})ds.$$

Fent servir que existeix una constant positiva C_T tal que $G(t) \vee H(t) \leq C_T$ tenim

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,s)\in\mathbb{R}\times[t_1,t]}\mathbb{E}(||Du(x,s)||_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t])}) \\ \leq& C_{p,T}\left(G(t-t_1)^{p/2} + \int_{t_1}^{t}\sup_{(x,\tau)\in\mathbb{R}\times[t_1,r]}\mathbb{E}(||Du(x,\tau)||_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t])}^{p})\left(g(t-r)+h(t-r)\right)dr\right). \end{aligned}$$

Aplicant el lema de Gronwall obtenim que existeix $C_p(T) > 0$ tal que

$$\sup_{(x,s)\in\mathbb{R}\times[t_1,t]}\mathbb{E}(||Du(x,s)||_{L^2(\mathbb{R}\times[t_1,t])}) \leq C_p(T)G(t-t_1)^{p/2}$$

per a tot $t \in [t_1, t_2]$. En particular, obtenim el resultat desitjat per a $t = t_2$. □

Considerem les hipòtesis següents

($\mathbf{H'}_1$) Les funcions σ i b són de classe $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ amb derivades fitades i σ satisfent $\inf\{|\sigma(x)|; x \in \mathbb{R}\} \geq \sigma_0 > 0$.

$(\mathbf{H}_\alpha)$ Els nombres reals positius $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ satisfan

$$\alpha_1 < 2\alpha_2 \wedge (\alpha_2 + \alpha_3).$$

Ara podem demostrar el següent resultat sobre la llei de la solució $u(x,t)$.

Teorema 3.29. *Suposem que l'EDPE (3.3) satisfà* $(\boldsymbol{H'}_1)$ *i que existeixen* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *nombres reals positius satisfent* $(\boldsymbol{H}_\alpha)$ *tals que*

$$\begin{aligned} t^{\alpha_1} \leq G(t) &\leq t^{\alpha_2}, \\ H(t) &\leq t^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Aleshores, la llei de $u(x,t)$ *és absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue per a tot* $x \in \mathbb{R}$*,* $t > 0$*.*

Demostració. En virtut del lema 3.26, hem de comprovar que per a tot $p \geq 2$ existeix $\epsilon_0(p)$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} D_{y,s}u(x,t)^2 dyds < \epsilon\right) \leq C\epsilon^p$$

per a tot $\epsilon \leq \epsilon_0(p)$. Posem $\epsilon_0(p) < 1$. Per una banda, tenim la següent desigualtat

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} D_{y,s}u(x,t)^2 dyds < \epsilon\right) \leq p_1(\epsilon, \beta) + p_2(\epsilon, \beta).$$

on

$$p_1(\epsilon, \beta) = \mathbb{P}\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} D_{y,s}u(x,t)^2 dyds < \epsilon, \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s)^2 \sigma(u(y,s))^2 dyds \geq 4\epsilon\right)$$

$$p_2(\epsilon, \beta) = \mathbb{P}\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s)^2 \sigma(u(y,s))^2 dyds < 4\epsilon\right)$$

Per una banda,

$$\begin{aligned} \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s)^2 \sigma(u(y,s))^2 dyds \geq& \sigma_0^2 \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t-s)^2 dyds \\ =& \sigma_0^2 \int_0^{\epsilon^\beta} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, s)^2 dyds \\ \geq& C\sigma_0^2 \epsilon^{\alpha_1 \beta}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$p_2(\epsilon, \beta) \leq \mathbb{P}\left(C\epsilon^{\alpha_1\beta} < 4\epsilon\right) = 0$$

si $\beta < 1/\alpha_1$. D'altra banda,

$$p_1(\epsilon, \beta) \leq \mathbb{P}\left(I(\epsilon, \beta) \geq \epsilon\right)$$

on

$$I(\epsilon, \beta) = \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z, t-r)\sigma'(u(z,r)) D_{y,s}u(z,r) W(dz, dr) + \right.$$
$$\left. \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z, t-r)\sigma'(u(z,r)) D_{y,s}u(z,r) dzdr\right)^2 dyds$$

i, a més, $I(\epsilon,\beta) \le 2(I_1(\epsilon,\beta)+I_2(\epsilon,\beta))$, on

$$I_1(\epsilon,\beta) = \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)\sigma'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)W(dz,dr) \right)^2 dyds.$$
$$I_2(\epsilon,\beta) = \int_{t-\epsilon^\beta}^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-z,t-r)b'(u(z,r))D_{y,s}u(z,r)dzdr \right)^2 dyds.$$

Apliquem la desigualtat de Chebyshev per trobar que per a tot $p>0$,

$$\mathbb{P}\left(I(\epsilon,\beta)\ge\epsilon\right) \le \frac{1}{\epsilon^p}\left(\mathbb{E}(|I_1(\epsilon,\beta)|^p)+\mathbb{E}(|I_2(\epsilon,\beta)|^p)\right).$$

Analitzant l'expressió de la dreta, observem que $r\in[s,t]$ i $s\in[t-\epsilon^\beta,t]$ si i només si $r\in[t-\epsilon^\beta,t]$ i $s\in[t-\epsilon^\beta,r]$. Per tant canviem els límits d'integració i trobem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|I_1(\epsilon,\beta)|^p)\\
\le& c_p\mathbb{E}\left[\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\int_s^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\sigma'(u(z,r))^2D_{y,s}u(z,r)^2dzdrdyds\right)^p\right]\\
\le& c_p||\sigma'||_\infty^{2p}\mathbb{E}\left[\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2\int_{t-\epsilon^\beta}^r\int_{\mathbb{R}}D_{y,s}u(z,r)dydsdzdr\right)^p\right]\\
\le& c_p||\sigma'||_\infty^{2p}G(\epsilon^\beta)^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)^2||D_{y,s}u(z,r)||^{2p}_{L^2(\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,t])}dzdr\right]\\
\le& c_p||\sigma'||_\infty^{2p}G(\epsilon^\beta)^p\sup_{(x,\tau)\in\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,t]}\mathbb{E}(||Du(x,\tau)||^{2p}_{L^2(\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,t])})\\
\le& C\epsilon^{2p\beta\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Aplicant les desigualtats de Jensen i Hölder al segon sumand, canviant els límits d'integració i amb uns càlculs similars a la integral anterior, arribem a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|I_2(\epsilon,\beta)|^p)\\
\le&\mathbb{E}\left[\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\int_s^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)b'(u(z,r))^2D_{y,s}u(z,r)^2dzdrdyds\right)^p\right]\\
\le&||b'||_\infty^{2p}\mathbb{E}\left[\left(\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)\int_{t-\epsilon^\beta}^r\int_{\mathbb{R}}D_{y,s}u(z,r)dydsdzdr\right)^p\right]\\
\le&||b'||_\infty^{2p}H(\epsilon^\beta)^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_{t-\epsilon^\beta}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-z,t-r)||D_{y,s}u(z,r)||^{2p}_{L^2(\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,r])}dzdr\right]\\
\le&CH(\epsilon^\beta)^p\sup_{(x,\tau)\in\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,t]}\mathbb{E}(||Du(x,\tau)||^{2p}_{L^2(\mathbb{R}\times[t-\epsilon^\beta,t])})\\
\le&CH(\epsilon^\beta)^pG(\epsilon^\beta)^p\le C\epsilon^{p\beta(\alpha_2+\alpha_3)}
\end{aligned}$$

i, en conseqüència,

$$p_1(\epsilon,\beta)\le C\left(\epsilon^{2p\beta\alpha_2-1}+\epsilon^{p\beta(\alpha_2+\alpha_3)-1}\right)$$

D'aquesta manera, si escollim β de tal manera que

$$\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}\vee\frac{1}{2\alpha_2}<\beta<\frac{1}{\alpha_1}$$

obtenim el resultat desitjat. □

Corołari 3.30. *La llei de la solució $u(x,t)$ de l'equació de la calor estocàstica*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.6}$$

on σ i b satisfan les hipòtesi $(\boldsymbol{H'}_1)$ és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Demostració. Hem de comprovar que existeixen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ satisfent $(\mathbf{H}_\alpha)$ i

$$\begin{aligned} C_1 t^{\alpha_1} \leq G(t) &\leq C_2 t^{\alpha_2}, \\ H(t) &\leq C_3 t^{\alpha_3}, \end{aligned}$$

per a $t \in (0,1)$. Com $G(t) = C_1\sqrt{t}$ i $H(t) = C_2 t$ escollim per exemple $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = 1/2$ i $\alpha_3 = 1$. D'aquesta manera

$$\begin{aligned} Ct^{2/3} \leq C_1 t^{1/2} \leq &G(t) \leq C_2 t^{1/2}, \\ &H(t) = C_3 t, \end{aligned}$$

i

$$\frac{2}{3} < 1 \wedge \left(\frac{3}{2}\right).$$

□

Corołari 3.31. *La llei de la solució $u(x,t)$ de l'equació d'ones estocàstica*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sigma(u(x,t))\dot{W} + b(u(x,t)), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.7}$$

on σ i b satisfan les hipòtesis $(\boldsymbol{H'}_1)$ és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Demostració. Hem de comprovar que existeixen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ satisfent $(\mathbf{H}_\alpha)$ i

$$\begin{aligned} C_1 t^{\alpha_1} \leq &G(t) \leq C_2 t^{\alpha_2}, \\ &H(t) \leq C_3 t^{\alpha_3} \end{aligned}$$

per a $t \in (0,1)$. Com $G(t) = C_1 t^2$ i $H(t) = C_2 t^2$ escollim per exemple $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ i $\alpha_3 = 2$. D'aquesta manera

$$\begin{aligned} Ct^3 \leq C_1 t^2 \leq &G(t) \leq C_2 t^2, \\ &H(t) = C_3 t^2, \end{aligned}$$

i

$$3 < 4 \wedge (2+2).$$

□

4 Conclusions

Gràcies a aquest treball. m'he introduit en les Equacions en Derivades Parcials Estocàstiques (EDPEs). L'objectiu des de l'inici, ha estat intentar respondre a algunes preguntes que hom es fa quan es troba una EDPE. En particular, en aquesta memòria hem pogut donar un resultat d'existència i unicitat de solucions, així com un resultat sobre la continuitat absoluta de la llei de les solucions d'algunes EDPEs.

Ha estat molt enriquidor seguir les passes de Walsh [5] per poder definir la integral estocàstica respecte el soroll blanc espai-temps, doncs he hagut d'aprendre molt càlcul estocàstic a banda del que s'ha exposat en aquesta memòria per tal de ser capaç de demostrar els resultats tècnics que apareixen al primer capítol.

La idea original del segon capítol era demostrar existència i unicitat de solucions tant per a l'equació de la calor estocàstica com per a l'equació d'ones estocàstica. Tanmateix, un cop havia provat els dos resultats per separat, em vaig adonar que es podia generalitzar a un únic resultat. D'aquesta manera, provar teoremes sobre l'existència i unicitat de solucions de les equacions de la calor i ones estocàstiques es va reduir a dos senzills corol·laris que deriven del teorema general.

El tercer capítol ha estat el que més esforç m'ha requerit. Provar l'existència de densitat de les solucions d'algunes EDPEs era un objectiu que volia complir sí o sí, i això requeria entendre el càlcul de Malliavin. Per fer-ho, els llibres de referència han sigut [12] i [13]. Un estudi més en profunditat sobre el càlcul de Malliavin requereix un coneixement sobre espais de Hilbert i anàlisi funcional que s'escapa de l'objectiu d'aquest treball. En aquest capítol ha passat una cosa semblant al capítol anterior, vaig aconseguir demostrar la continuitat absoluta de la llei de l'equació de la calor i l'equació d'ones per separat. Al principi no veia una manera senzilla de generalitzar el resultat. Tot i això, en nombrosos articles apareixen resultats generalitzats i aquest fet em va conduir a revisar exhaustivament les proves dels resultats per les dues equacions i analitzar les semblances. Tot aquest esforç desemboca als teoremes 3.27 i 3.29, que són els resultats que considero més rellevants de tota la memòria.

A APÈNDIX

A.1 Eines d'anàlisi real

Teorema A.1. *(Derivació sota signe integral) Sigui $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espai de mesura complet, Y un interval de $\mathbb{R}$ i $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ complint*

1. $f(\cdot, y) \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ *per a tot* $y \in Y$.
2. $f(x, \cdot)$ *és derivable en* Y *g.p.t.* $x \in X$.
3. *Existeix una funció* $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ *tal que* $|\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$ *g.p.t.* $x \in X$ *i per a tot* $y \in Y$.

Aleshores, la funció $F : Y \to \mathbb{R}$ definida per la integral paramètrica

$$F(y) = \int_X f(x, y)\mu(dx)$$

és derivable i la seva derivada s'obté derivant sota el signe integral. És a dir

$$F'(y) = \int_X \partial_y f(x, y)\mu(dx).$$

Demostració. Es pot trobar a [2]. □

Observem que si imposem $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}^k(Y)$ g.p.t. $x \in X$, aleshores $F \in \mathcal{C}^k(Y)$ i les derivades de tots els ordres fins a k és calculen derivant sota el signe integral.

Definició A.2. *Sigui H un espai de Hilbert, direm que una successió $\{x_n; n \geq 1\} \subset H$ convergeix en la topologia feble de H a $x \in H$ (també es diu que convergeix feblement) si per a tot $y \in H$,*

$$\langle x_n, y \rangle_H \to \langle x, y \rangle_H.$$

A.2 Eines d'anàlisi funcional

Definició A.3. *Un espai lineal X sobre $\mathbb{R}$ és un espai lineal quasi-normat si per a cada $x \in X$ existeix un nombre real $||x||$ anomenat quasi-norma (o semi-norma) de x complint*

1. $||x|| \geq 0$ *i* $||x|| = 0 \iff x = 0$.
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
3. $|| - x|| = ||x||$
4. $\lim_{\alpha_n \to 0} ||\alpha_n x|| = 0$ *i* $\lim_{||x_n|| \to 0} ||\alpha x||$ *on* $\{\alpha_n; n \geq 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definició A.4. *Siguin X, Y dos espais de Banach i sigui $T : X \to Y$ un operador lineal. Es defineix el domini de T, $Dom(T)$, com el conjunt*

$$Dom(T) = \{x \in X; \exists y \in Y, Tx = y\}.$$

Definició A.5. *Siguin X, Y dos espais de Banach i sigui $T : Dom(T) \to Y$ un operador lineal. Es diu que T és fitat si existeix una constant $M > 0$ de tal manera que per a tot $x \in X$,*

$$||Tx||_Y \leq M||x||_X.$$

Definició A.6. *El graf $G(T)$ d'un operador lineal entre espais de Banach $T : Dom(T) \to Y$ és el conjunt $\{(x, Tx); x \in Dom(T)\} \subset X \times Y$. L'operador T es diu que és tancat si $G(T)$ és un subespai lineal tancat de $X \times Y$.*

Definició A.7. *Siguin X, Y espais lineals quasi-normats i $T : Dom(X) \to Y$ un operador lineal. T és tancable si la clausura de $G(T)$ en $X \times Y$ es correspon al graf d'un operador lineal $S : Dom(S) \subset X \to Y$.*

Proposició A.8. *Siguin X, Y espais lineals quasi-normats, aleshores un operador $T : Dom(T) \subset X \to Y$ és tancable si, i només si, es satisfà la condició següent*

$$\{x_n; n \geq 1\} \subset Dom(T), \lim_n x_n = 0 \text{ i } \lim_n Tx_n = y \Rightarrow y = 0.$$

Demostració. Es troba a [15]. □

A.3 Lema de Gronwall

Lema A.9. *(Extensió del lema de Gronwall) Sigui $g : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ una funció no-negativa tal que*

$$\int_0^T g(s)ds < \infty.$$

Aleshores, existeix una successió $\{a_n; n \geq 1\}$ de nombres reals no-negatius tals que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ i que compleixen propietat següent: sigui $\{f_n; n \geq 0\}$ una successió de funcions no-negatives definides en $[0, T]$. Sigui $k_1(t)$ una funció positiva, mesurable i fitada i $k_2 \geq 0$ un nombre real tal que per a tot $0 \leq t \leq T$,

$$f_n(t) \leq k_1(t) + \int_0^t (k_2 + f_{n-1}(s))g(t-s)ds. \tag{A.1}$$

Si $\sup_{0 \leq s \leq T} f_0(s) = M < \infty$ i $k_1(t) \leq k_1$, aleshores per a tot $n \geq 1$,

$$f_n(s) \leq k_1(t) + (k_1 + k_2)\sum_{i=1}^{n-1} a_i + (k_2 + M)a_n. \tag{A.2}$$

En particular, $\sup_{n \geq 0} \sup_{t \in [0,T]} f_n(t) < \infty$ i si $k_2 = k_1(t) \equiv 0$, $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ convergeix uniformement en $[0, T]$.

Demostració. Definim $G(t) = \int_0^t g(s)ds$ i suposem $k_1(t) \leq k_1$. Per evitar el cas trivial $g \equiv 0$ suposarem $G(T) > 0$. Siguin $\{X_n; n \geq 1\}$ variables aleatòries i.i.d. a valors en $[0, T]$ i amb densitat $g(s)/G(T)$. Definim $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Podem reescriure (A.1) com

$$f_n(t) \leq k_1(t) + G(T)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_1 \leq t\}}(k_2 + f_{n-1}(t - X_1)\right].$$

Analitzant l'esperança anterior, podem trobar una fita de la forma següent:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f_{n-1}(t-X_1)\mathbb{1}_{\{X_1\leq t\}}\right]\\
\leq &\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X_1(\omega_1)\leq t\}}(k_1(t-X_1)+G(T)\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X_2(\omega_2)\leq t-x_1(\omega_1)\}}\\
&\times(k_2+f_{n-2}(t-X_1(\omega_1)-X_2(\omega_2)))\mathbb{P}(d\omega_2))\mathbb{P}(d\omega_1)\\
\leq &k_1\mathbb{P}(X_1\leq t)+G(T)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_1+X_2\leq t\}}(k_2+f_{n-2}(t-X_1-X_2))\right]
\end{aligned}$$

Per tant, (A.1) es pot expressar com

$$\begin{aligned}
f_n(t) \leq &k_1(t)+G(T)(k_1+k_2)\mathbb{P}(X_1\leq t)\\
&+G(T)^2\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_1+X_2\leq t\}}(k_2+f_{n-2}(t-X_1-X_2))\right].
\end{aligned}$$

Procedint de forma inductiva, trobem

$$\begin{aligned}
f_n(t) \leq &k_1(t)+(k_1+k_2)\sum_{i=1}^{m-1}G(T)^i\mathbb{P}(S_i\leq t)\\
&+G(T)^m\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_m\leq t\}}(k_2+f_{n-m}(t-S_m))\right]
\end{aligned}$$

i, en particular, per $m=n$,

$$f_n(t)\leq k_1(t)+(k_1+k_2)\sum_{i=1}^{n-1}G(T)^i\mathbb{P}(S_i\leq t)+(k_2+M)G(T)^n\mathbb{P}(S_n\leq t).$$

Definim $a_n=G(T)^n\mathbb{P}(S_n\leq t)$ i per tant només resta per provar que $\sum_{n=1}^\infty a_n<\infty$. Aquesta última comprovació es troba al lema 17 de [6]. □

Una versió alternativa del lema de Gronwall que no fa us de successions de funcions és la següent:

Lema A.10. *Siguin $x(t),a(t),b(t)$ funcions positives en la variable t i fitades en un interval $c\leq t\leq d$. Sigui $k(s,t)$ una funció no-negativa i fitada en la regió triangular $c\leq s\leq t\leq d$. Suposem que $x(t)$ és mesurable i $k(s,t)$ és una funció mesurable en $s\in[c,d]$ per a cada t. Siguin $f(u),g(u)$ funcions positives per a $u\geq 0$ amb f estrictament creixent i g no decreixent. Aleshores, si definim*

$$A(t)=\sup_{c\leq s\leq t}a(s),\quad B(s)=\sup_{c\leq s\leq t}b(s),$$
$$K(s,t)=\sup_{s\leq\sigma\leq t}k(\sigma,s),$$

la desigualtat

$$f(x(t))\leq a(t)+b(t)\int_c^t k(t,s)g(x(s))ds,\quad c\leq t\leq d$$

implica

$$x(t)\leq f^{-1}\left[\Omega^{-1}\left(\Omega(A(t))+B(t)\int_c^t K(t,s)ds\right)\right],\quad c\leq t\leq d'\leq d$$

on

$$\Omega(u)=\int_\epsilon^u\frac{dw}{g(f^{-1}(w))},\quad \epsilon>0,u>0$$

i

$$d'=\max\left[c\leq\tau\leq d;\Omega(A(\tau))+B(\tau)\int_c^\tau K(\tau,s)ds\leq\Omega(f(\infty))\right].$$

Demostració. Es troba a [3]. □

D'aquest lema se'n desprenen diversos corol·laris.

Corołari A.11. *Suposem les condicions del lema A.10. Si a més $a(t)$, $b(t)$ són no-decreixents en t, i $k(s,t)$ és no-decreixent en t per a cada $s \in [c,d]$, la conclusió del lema A.10 es pot reemplaçar per*

$$x(t) \le f^{-1}\left[\Omega^{-1}\left(\Omega(a(t)) + b(t)\int_c^t k(t,s)ds\right)\right], \quad c \le t \le d' \le d.$$

Aquest últim corol·lari admet modificacions en cas que no totes les funcions involucrades siguin no-decreixents.

Corołari A.12. *Sota les condicions del lema A.10, si $f(u) = g(u) = u^p$, aleshores la conclusió del lema A.10 es pot escriure com*

$$x(t) \le \left[A(t)\exp\left(B(t)\int_c^t K(t,s)ds\right)\right]^{1/p}$$

per a tot $t \in [c,d]$.

A.4 Desigualtat de Burkholder per martingales a valors en un espai de Hilbert

Fixem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat complet i H un espai de Hilbert separable sobre $\mathbb{R}$.

Definició A.13. *Una variable aleatòria a valors en H és una aplicació*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{B}(H))$$

on $\mathcal{B}(H)$ és la σ-àlgebra de Borel de H.

Per construir $\mathcal{B}(H)$ hem de tenir en compte que H és un espai normat, i per tant, existeix una distància d en H que ve donada per

$$d(x,y) = ||x-y||_H.$$

Aquesta distància determina una topologia en H i es definex, per tant, $\mathcal{B}(H)$ com la σ-àlgebra generada pels oberts de H.

De la mateixa manera que hem considerat variables aleatòries a valors en H, podem considerar processos estocàstics a valors en H.

Definició A.14. *Un procés estocàstic $M = \{M_t; t \in I\}$ on $I \subset \mathbb{R}_+$ és una martingala a valors en H respecte una filtració $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ si*

- *Per a tot $t \in I$, M_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- *Per a tot $t \in I$, $\mathbb{E}\left(||M_t||_H\right) < \infty$*

- *Per a tot* $s < t$, $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ *g.p.t.*

Definició A.15. *Donada una martingala* $M = \{M_t; t \in I\}$ *a valors en* H, *es defineix la seva variació quadràtica* $\langle M \rangle_t$ *com l'únic procés real de tal manera que*

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t$$

és una martingala a valors en H.

Proposició A.16. *Sigui* $M = \{M_t; t \in I\}$ *una martingala a valors en* H *i sigui* $p \geq 2$, *aleshores existeix una constant* $c_p > 0$ *de tal manera que*

$$\mathbb{E}\left(||M_t||_H^p\right) \leq c_p \mathbb{E}\left(\langle M \rangle_t^{p/2}\right)$$

Demostració. Es pot trobar a [11]. □

Referències

[1] Aureli Alabert. *Mesura i probabilitat*, volume 23. Univ. Autònoma de Barcelona, 1996.

[2] Joaquim Bruna. *Anàlisi real*, volume 26. Univ. Autònoma de Barcelona, 1996.

[3] Geoffrey Butler and Thomas Rogers. A generalization of a lemma of bihari and applications to pointwise estimates for integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 33(1):77–81, 1971.

[4] R. Cairoli and John B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. *Acta Mathematica*, 134(none):111 – 183, 1975.

[5] René Carmona, Harry Kesten, and John B. Walsh. *An introduction to stochastic partial differential equations*. Springer, 1986.

[6] Robert Dalang. Extending the Martingale Measure Stochastic Integral With Applications to Spatially Homogeneous S.P.D.E.'s. *Electronic Journal of Probability*, 4(none):1 – 29, 1999.

[7] Robert C Dalang, Davar Khoshnevisan, Carl Mueller, David Nualart, and Yimin Xiao. *A minicourse on stochastic partial differential equations*. Springer, 2009.

[8] Davar Khoshnevisan. *Multiparameter Processes: an introduction to random fields*. Springer Science & Business Media, 2002.

[9] John Lamperti. *Stochastic processes: a survey of the mathematical theory*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Rémi Léandre and Francesco Russo. *Small stochastic perturbation of a one-dimensional wave equation*. Springer, 1992.

[11] Carlo Marinelli and Michael Röckner. On the maximal inequalities of burkholder, davis and gundy. *Expositiones Mathematicae*, 34(1):1–26, 2016.

[12] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Springer, 2006.

[13] Marta Sanz Solé. *Malliavin calculus: with applications to stochastic partial differential equations*. EPFL press, 2005.

[14] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

[15] Kōsaku Yosida. *Functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.