



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL PROBLEMA RESTRINGIT DELS TRES COSSOS

Autor: Jhemili de Souza Mesquita

Director: Dr. Àngel Jorba
Realitzat a: Departament
Matemàtiques Aplicades

Barcelona, 12 de juny de 2023

Abstract

The restricted three-body problem is a particular version of the three-body problem widely used in astronomical problems, where one of the bodies is assumed to have negligible mass and no gravitational influence on the others. In this work we give an introduction to the general three-body problem and subsequently study the restricted three-body problem, its zero velocity curves and the stability of its equilibrium points.

Resum

El problema restringit dels tres cossos és un cas particular del problema dels tres cossos molt utilitzat en els problemes astronòmics, on se suposa que un dels cossos té massa negligible i no té influència gravitacional sobre els altres. En aquest treball fem una introducció sobre el problema dels tres cossos general i posteriorment estudiem el problema restringit dels tres cossos, les seves corbes de velocitat zero i l'estabilitat dels seus punts d'equilibri.

Agraïments

Vull agrair, en primer lloc, al tutor d'aquest treball de fi de grau, el Dr. Jorba, per la seva ajuda i disponibilitat per resoldre tots els dubtes que em van anar sorgint durant l'elaboració del treball. També per recomanar-me referències que podia consultar, que han sigut crucials en la redacció de la memòria del treball, i per suggerir-me temes que podia tractar, sempre donant-me l'autonomia d'escollir el que més m'interessés. A més, també li agraeixo per animar-me en cada sessió dient que anava bé de temps, quan jo pensava que no, això ha estat essencial, ja que l'estrès és un amic inseparable quan tenim quelcom tan important per fer.

També vull agrair a la meva família, amics i amigues, tota la bona energia i paraules de consol, sobretot a la meva mare per sempre donar-me el seu suport i tranquil·litzar-me en els meus moments de tensió i ansietat, sense ella mai hauria pogut superar aquest gran repte que és cursar el grau de matemàtiques, i menys aconseguir fer aquest treball.

Gràcies a totes i a tots.

Índex

1	Introducció	1
2	El problema dels tres cossos	2
2.1	Introducció	2
2.2	Conservació del moment lineal	2
2.3	Conservació de l'energia: La fórmula de Lagrange-Jacobi	4
2.4	Solucions d'equilibri	5
2.5	Conservació del moment angular	6
2.6	Collisió triple	7
2.7	El problema dels tres cossos: Coordenades de Jacobi	9
2.8	Solució de Lagrange	12
2.9	Solució d'Euler	14
3	El problema restringit dels tres cossos	18
3.1	Introducció	18
3.2	El problema restringit circular: La constant de Jacobi	20
3.3	Solucions d'equilibri	21
3.4	Corbes de velocitat zero	24
3.4.1	Corbes exteriors i interiors ovals ($C_2 < C$)	26
3.4.2	Corbes exteriors ovals i interiors en forma de pera ($C_1 < C < C_2$) .	30
3.4.3	Corbes en forma de ferradures ($C_3 < C < C_1$)	31
3.4.4	Corbes en forma de capgròs ($3 = C_4 = C_5 < C < C_3$)	31
3.5	Estabilitat dels punts de libració	33
4	Conclusions	48
A	Annex	50
A.1	Codi simulació de les corbes de velocitat zero	50

1 Introducció

El projecte

Els humans des dels nostres orígens sempre hem sigut molt curiosos, no deixem de plantejar-nos dubtes i intentar entendre situacions que observem, i això ens ha permès evolucionar i demostrar diversos resultats, des de com semblar aliments per donar-nos menjar a com enviar un satèl·lit a l'espai perquè puguem comunicar-nos amb qualsevol persona a qualsevol part del planeta. Tot això ha estat possible gràcies a la curiositat d'algú, que es va plantejar un dubte, va començar a investigar, i encara que no va arribar a veure el resultat, més endavant, potser després de dècades, o fins i tot segles, un altre ho va aconseguir demostrar. Un d'aquests dubtes plantejats fa temps, però que encara pot donar molts fruits, és l'anomenat problema dels tres cossos.

El problema dels tres cossos va estar tot un repte per als matemàtics, van passar molts anys fins que van arribar al fet que, en general, no es pot trobar solució. Aquest problema consisteix, donat condicions inicials, en determinar la trajectòria de tres partícules de masses arbitràries que es mouen únicament sota la influència de les seves forces gravitatòries. Aquest problema s'ha considerat en temes relacionats amb l'astronomia, vols espacials, dinàmica galàctica, formació estel·lar, entre altres.

Hi ha casos particulars del problema dels tres cossos que s'han trobat solucions, un d'aquests és el problema restringit dels tres cossos en el qual se suposa que una de les partícules té massa negligible i no influeix en el moviment de les altres dues partícules, mentre les altres sí que influeixen en el seu moviment. Un exemple és agafar un satèl·lit com la partícula de massa negligible i les altres partícules podrien ser la Terra i la Lluna.

Constantment s'envien satèl·lits a l'espai a estudiar algun fenomen, això ens permet pensar que el problema restringit dels tres cossos està present en el càlcul de la trajectòria de molts dels satèl·lits que es troben a l'espai, per no dir de tots.

En aquest treball introduïm el plantejament del problema dels tres cossos i ens tracem com a objectiu estudiar el problema restringit dels tres cossos; les seves solucions d'equilibri, les seves corbes de velocitat zero i l'estabilitat de les seves solucions d'equilibri, per tant, la part més extensa del treball serà dedicada a aquest últim tema mencionat.

Estructura de la Memòria

El treball comença amb una explicació sobre el problema dels tres cossos, on demostrarem algunes propietats que redueixen el nombre de funcions incògnites del problema, però que encara així continua sent un problema complex. També demostrarem que no existeixen solucions d'equilibri, i calcularem la solució de Lagrange i la solució d'Euler.

Posteriorment, ens centrarem en el problema restringit dels tres cossos. Tractarem el problema restringit planar circular dels tres cossos, és a dir, on el moviment de les partícules té lloc en un pla i les dues partícules de masses arbitràries es mouen formant una òrbita aproximadament circular. Sota aquestes hipòtesis, calcularem les solucions d'equilibri del problema, que veurem que seran punts. També calcularem les corbes de velocitat zero del problema, utilitzant les gràfiques de les corbes de velocitat zero del sistema Terra-Lluna per a il·lustrar-ho. I finalment, estudiarem l'estabilitat dels punts d'equilibri del problema.

2 El problema dels tres cossos

El problema dels tres cossos és un dels problemes més antics de la dinàmica clàssica que continua produint noves idees per als matemàtics. Va ser un tema central en la física matemàtica des de mitjans del 1700 fins a principis del 1900. Es van obtenir diversos resultats exactes, com són la solució del triangle equilàter de Lagrange i la col·lineal d'Euler.

Per començar, farem una explicació de què és i les propietats que té el problema dels tres cossos, basant-nos en el llibre *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics* de Harry Pollard.

2.1 Introducció

Definició 2.1. *El problema dels tres cossos consisteix en, donat condicions inicials, determinar el moviment de tres partícules de masses arbitràries m_1, m_2, m_3 , respectivament, que es mouen sota, únicament, la influència de les seves forces gravitatòries.*

Considerem tres partícules de masses arbitràries m_1, m_2, m_3 , respectivament, que es mouen en un sistema de referència inercial, \mathbb{R}^3 , i que l'única força que actua sobre elles és la seva atracció gravitacional mútua. Denotem per \mathbf{r}_i el vector posició de la partícula i -èsima i $m_i > 0$ la seva massa.

La segona llei de Newton implica que la massa per l'acceleració de la partícula i -èsima, $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, és igual a la suma de les forces que actuen sobre la partícula. A més, la llei de la gravetat de Newton, també coneguda com llei de la gravitació univesal, diu que la magnitud de la força en la partícula i causada per la partícula j és proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre elles, $\frac{\mathcal{G}m_i m_j}{r_{ij}^2}$ (\mathcal{G} és la constant de proporcionalitat i $r_{ij} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$). La direcció d'aquesta força ve donada per un vector unitari que va de la partícula i a la partícula j , $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)/\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$. Ajuntant-ho tot dona l'equació de moviment

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}^2} \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ji}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

on \mathcal{G} és la constant gravitacional ($\mathcal{G} \approx 6,67408 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}$ en el Sistema Internacional D'Unitats).

En resum, per a resoldre el problema dels tres cossos, donat unes condicions inicials, necessitem resoldre el següent sistema d'equacions diferencials

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mathcal{G}m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{\mathcal{G}m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{\mathcal{G}m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \end{cases} \quad (2.2)$$

Notem que el nombre de funcions incògnites és divuit.

2.2 Conservació del moment lineal

El problema dels tres cossos conserva el seu moment lineal, això implica que el centre de massa de les tres partícules descriu un moviment rectilini uniforme, cosa que ens permetrà

fixar-lo a l'origen, i així per a resoldre el problema dels tres cossos només caldrà determinar el moviment de cada una de les tres partícules relatiu al centre de massa. Això permet reduir el nombre de funcions incògnites del problema, de divuit a dotze.

Anem a demostrar el que hem comentat abans. Per fer-ho primer donarem la definició d'alguns conceptes que utilitzarem.

Definició 2.2. *El moment lineal \mathbf{p} d'una partícula de massa m és el producte de la seva massa per la seva velocitat, és a dir,*

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}.$$

A més, sabem que $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, on \mathbf{r} és el vector posició de la partícula.

Definició 2.3. *El moment lineal d'un sistema generat per n partícules és la suma de tots els moments lineals de totes les partícules d'aquest sistema, és a dir,*

$$\mathbf{p}_{\text{sistema}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i,$$

on \mathbf{p}_i és el moment lineal de la partícula i -èsima del sistema.

Definició 2.4. *Direm que el moment lineal d'un sistema es conserva si aquest és constant en el temps, és a dir,*

$$\mathbf{p}_{\text{sistema}} = k$$

on k és una constant.

Proposició 2.5 (Conservació del moment lineal). *El sistema generat per les tres partícules del problema dels tres cossos conserva el seu moment lineal.*

Demostració: Notem que $\sum_{k=1}^3 m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = 0$, ja que, de (2.1),

$$\sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{G m_j m_i}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i),$$

això s'anul·la perquè per cada aparició de $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ també apareix $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ i per tant es cancel·len. Aleshores tenim que

$$0 = \sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^3 m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{p}_{\text{sistema}}}{dt},$$

això implica que el moment lineal del sistema és constant, per tant el sistema conserva el seu moment lineal. ■

Observació 2.6. Si posem $M = \sum_{i=1}^3 m_i$, la massa total del sistema, i $\mathbf{r}_c = M^{-1} \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i$, el centre de massa del sistema, aleshores $\ddot{\mathbf{r}}_c = 0$, ja que $\sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$. Integrant dos cops, tenim $\mathbf{r}_c = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$, on \mathbf{a} i \mathbf{b} son vectors constants. Aquesta última equació satisfà el principi de conservació del moment lineal: El centre de massa es mou uniformement en línia recta. Això determina el moviment del centre de massa, aleshores ens quedarà determinar el moviment relatiu al centre de massa, per això és convenient moure l'origen al centre de massa, reemplaçant cada \mathbf{r}_i per $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$. Com $\ddot{\mathbf{r}}_c = 0$, l'equació (2.1) es manté igual un cop fet el canvi. Per aquesta raó simplement assumirem a partir d'ara que el centre de massa del sistema està fixat en l'origen.

A més a més, degut a que

$$\frac{1}{M} \sum_{i=3}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{a}, \quad \frac{1}{M} \sum_{i=3}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b},$$

aquestes dues equacions vectorials, corresponents a sis equacions escalars amb sis constants escalars de integració (i.e. les coordenades de \mathbf{a} i \mathbf{b}), representen sis integrals amb les quals el sistema d'equacions diferencials (2.2) pot passar de tenir divuit funcions incògnites a tenir dotze.

2.3 Conservació de l'energia: La fórmula de Lagrange-Jacobi

El problema dels tres cossos també conserva l'energia, és a dir, la suma de l'energia cinètica i l'energia potencial del sistema format per les tres partícules és constant en el temps. Aquest fet també redueix el nombre de funcions incògnites del sistema d'equacions diferencials (2.2), que passa de tenir dotze funcions incògnites a tenir onze. Procedim a demostrar-ho.

Retornem a les equacions (2.1), assumint, d'ara endavant, que el centre de massa està fixat a l'origen. Definim

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}}. \quad (2.3)$$

Donat que $r_{ji} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$, la funció U depèn únicament de les posicions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ de les partícules. Hem de pensar les posicions \mathbf{r}_i com un vector amb components x_i, y_i, z_i , per tant quan diguem gradient de U en la direcció \mathbf{r}_i ens estarem referint al vector

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right],$$

i ho denotarem per $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$. D'aquí tenim que

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

per tant U és l'energia potencial canviada de signe. Això implica que

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (2.5)$$

La part dreta de la igualtat és la derivada total de U respecte t , ja que, reescrivint-ho,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right] = \frac{dU}{dt} = \dot{U}.$$

Per tant, com $v_i^2 = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$, (2.5) pot ser escrit com

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 = \dot{U}.$$

Denotem per T l'energia cinètica, per tant $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2$. Llavors $\dot{T} = \dot{U}$ o, el que és el mateix,

$$T = U + h, \quad (2.6)$$

on h és una constant, l'energia total (recordem que U és l'energia potencial canviada de signe).

Degut a que l'energia total $h = T - U$ és constant, això demostra la següent proposició que enunciaré i, a més, ens permet eliminar una funció incògnita del sistema d'equacions diferencials (2.2), que passa a tenir onze funcions incògnites.

Proposició 2.7 (Conservació de l'energia). *El sistema generat per les tres partícules del problema dels tres cossos conserva la seva energia total.*

2.4 Solucions d'equilibri

De les equacions diferencials (2.4), tenim que una solució d'equilibri ha de complir

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0,$$

per $i = 1, 2, 3$. Passem a estudiar l'existència de solucions d'equilibri del problema dels tres cossos.

Definició 2.8. *El moment de inèrcia del sistema es defineix com $2I$, on*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i). \quad (2.7)$$

Proposició 2.9 (Identitat Lagrange-Jacobi). *Si I el moment de inèrcia, T l'energia cinètica, U l'energia potencial canviada de signe, i h l'energia total del sistema generat per les partícules del problema dels tres cossos, aleshores*

$$\ddot{I} = T + h = U + 2h, \quad (2.8)$$

Demostració: Primer derivem dos cops respecte de t la igualtat $I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)$, això ens dona

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{r}}_i,$$

on $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$.

Ara bé, utilitzant (2.1), $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G} m_j m_i}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$, ens queda

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G} m_j m_i}{r_{ji}^3} [(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i) - r_i^2] \\ &= 2T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G} m_j m_i}{r_{ji}^3} [r_j^2 - r_i^2 - r_{ji}^2]. \end{aligned}$$

on utilitzem que $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}(r_{ji}^2 - r_j^2 - r_i^2)$.

Aleshores,

$$\ddot{I} - 2T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}^3} r_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}^3} r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}}.$$

Notem que els dos primers termes de la part dreta de la igualtat es cancel·len, ja que si intercanviem la j amb la i en el primer terme, quedaria igual que el segon. A més, l'últim terme és $-U$, per la definició de U . Aleshores ens queda $\ddot{I} = 2T - U$, donat que $T = U + h$, tenim per tant $\ddot{I} = T + h = U + 2h$. ■

La identitat anterior i les seves variacions, també anomenades fórmula de Lagrange-Jacobi, son àmpliament usades en els estudis del creixement i col·lapse dels sistemes gravitacionals. En el proper apartat d'aquesta secció explicarem una aplicació simple, però important, d'aquesta identitat. A més a més, ens servirà per a demostrar la següent proposició:

Proposició 2.10. *El problema dels tres cossos no té solucions d'equilibri, és a dir, no hi ha cap manera de disposar les tres partícules perquè totes romanguin en repòs.*

Demostració: En la demostració anterior hem vist que \ddot{I} es pot escriure de la següent manera $\ddot{I} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, com que $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$, substituïnt tenim que

$$\ddot{I} = 2T + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

També de la demostració anterior sabem que $\ddot{I} = 2T - U$, aleshores substituïnt en l'equació anterior ens queda

$$2T - U = 2T + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -U.$$

Com que per a aconseguir que les partícules romanguin en repòs, necessitem que $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$ per $i = 1, 2, 3$, aleshores la part esquerra de la igualtat anterior seria zero i ens quedaria $-U = 0$, però això no pot passar, ja que U és la suma de termes positius, per tant és positiu i no pot ser zero. ■

2.5 Conservació del moment angular

El problema dels tres cossos també conserva el seu moment angular i, com en els altres casos, això també ens permet reduir el nombre de funcions incògnites del problema dels tres cossos, passarem de onze funcions incògnites a vuit, és a dir, la conservació del moment angular ens permet reduir tres funcions incògnites.

Comencem fent el producte vectorial als dos costats de la igualtat (2.1) per \mathbf{r}_i i sumem respecte i , aleshores ens queda

$$\sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathcal{G}m_j m_i}{r_{ji}^3} [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{r}_i].$$

Com que $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i = 0$, la igualtat anterior ens queda

$$\sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{Gm_j m_i}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i).$$

La part dreta de la igualtat anterior s'anulla, degut a que cada cop que apareix el terme $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t$ el terme $\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_s$ també apareix i, a més, sabem que $\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_s = -(\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t)$, per tant es cancel·len. Aleshores

$$\sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = 0.$$

Integrant un cop la igualtat anterior,

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i),$$

on la constant \mathbf{c} és el moment angular del sistema. Això demostra el següent resultat:

Proposició 2.11 (Conservació del moment angular). *El sistema generat per les tres partícules del problema dels tres cossos conserva el seu moment angular.*

A més podem observar que el fet que \mathbf{c} sigui una constant realment ens permet reduir tres funcions incògnites del problema dels tres cossos.

2.6 Col·lisió triple

En aquest apartat estudiarem la possibilitat de que un sistema de partícules pateixi un col·lapse total, amb això volem dir que totes les partícules es troben al mateix lloc en el mateix temps. Ho farem pel cas en que tenim tres partícules, que s'anomena *col·lisió triple*, però el cas amb N partícules seria anàlog.

Comencem escrivint el moment de inèrcia d'una nova manera. Donat que

$$\sum_{j=1}^3 m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2 = \sum_{j=1}^3 m_j(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j) - 2\mathbf{r}_i \cdot \sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^3 m_j(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i),$$

com el centre de massa està fixat a l'origen tenim $\sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{r}_j = 0$ i $I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)$, ens queda

$$\sum_{j=1}^3 m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2 = 2I + 0 + Mr_i^2,$$

on M és la massa total del sistema. Multipliquem cada costat de la igualtat anterior per m_i i sumem respecte i . Com $r_{ji}^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2$, el resultat és

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_j m_i r_{ji}^2 = 2IM + M(2I) = 4IM.$$

En la part esquerra de la igualtat podem eliminar el termes amb $j = i$, ja que llavors $r_{ji} = 0$. Per tant,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 m_j m_i r_{ji}^2 = 4IM. \quad (2.9)$$

Donat que el col·lapse total significa que totes les r_{ji} es converteixen en zero simultàniament, i per tant col·lisió triple significa el mateix per un sistema amb tres partícules, es desprèn de (2.9) que la col·lisió triple significa que $I \rightarrow 0$, o que totes les partícules coneixen l'origen alhora. A partir d'ara, quan diguem col·lapse total ens estarem referint a col·lisió triple.

A continuació introduïrem uns resultats que utilitzarem en la demostració del teorema del col·lapse total de Sundman.

Primer recordem el següent resultat, sense demostració, que farem servir en la pròpia demostració:

Lema 2.12 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Siguin a_1, \dots, a_n i b_1, \dots, b_n , aleshores*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Lema 2.13 (Desigualtat de Sundman). *Sigui $c = \|\mathbf{c}\|$ el mòdul del moment angular i $h = T - U$ l'energia total del sistema, aleshores*

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h), \quad (2.10)$$

on I és el moment de inèrcia del sistema.

Demostració: Notem que

$$c = \|\mathbf{c}\| = \left\| \sum m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \right\| \leq \sum m_i \|\mathbf{r}_i\| \|\dot{\mathbf{r}}_i\| = \sum (\sqrt{m_i} \|\mathbf{r}_i\|) (\sqrt{m_i} \|\dot{\mathbf{r}}_i\|).$$

Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwarz, obtenim

$$c^2 \leq \sum m_i \|\mathbf{r}_i\|^2 \sum m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 = 2I2T.$$

Ara, per la identitat de Lagrange-Jacobi, sabem que $\ddot{I} = T + h \Rightarrow T = \ddot{I} - h$, per tant

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h),$$

que és el que volíem demostrar. ■

Finalment, enunciem i demostrem el teorema del col·lapse total de Sundman:

Teorema 2.14 (Teorema del col·lapse total de Sundman). *Si es produeix un col·lapse total, aleshores el moment angular s'anul·la i només triguarà una quantitat finita de temps en ocórrer. Això és, si $I(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow t_1$, aleshores $t_1 < \infty$ i $\mathbf{c} = 0$.*

Demostració: Primer de tot, demostrem que si el col·lapse total esdevé, no s'hi arribarà asimptòticament, és a dir, ha de passar en un temps finit: Sigui h l'energia total del sistema, llavors per la identitat de Lagrange-Jacobi $\ddot{I} = T + h$. Considerem $I(t)$ definida per tot $t \geq 0$ i $I \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$. Aleshores $U \rightarrow \infty$, ja que $r_{ij} \rightarrow 0$, i com h és constant $T \rightarrow \infty$ també. Per tant existeix un $t^* > 0$ tal que $\ddot{I} \geq 1$ per a tot $t \geq t^*$. Integrem aquesta desigualtat per obtenir $I(t) \geq \frac{1}{2}t^2 + at + b$ per $t \geq t^*$ on a i b son constants. Per tant arribem a una contradicció, ja que havíem suposat que $I \rightarrow 0$, per tant el col·lapse total ha d'ocórrer en un temps finit.

Ara suposem que $I \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow t_1^- < \infty$ i com abans $U \rightarrow \infty$ i $\ddot{I} \rightarrow \infty$. Llavors, existeix t_2 tal que $I(t) > 0$ en $t_2 \leq t < t_1$. Com $I(t) > 0, \ddot{I} > 0$ en $t_2 \leq t < t_1$, i $I(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow t_1$, tenim que $\dot{I} \leq 0$ en $t_2 \leq t < t_1$.

Ara multipliquem ambdós costats de la desigualtat de Sundman per $-\dot{I}I^{-1} > 0$ per obtenir

$$-\frac{1}{4}c^2\dot{I}I^{-1} \leq h\dot{I} - \dot{I}\ddot{I}.$$

Integrem aquesta desigualtat per a obtenir

$$\frac{1}{4}c^2 \log I^{-1} \leq hI - \frac{1}{2}\dot{I}^2 + K \leq hI + K$$

on la K és una constant de integració. Aleshores

$$\frac{1}{4}c^2 \leq \frac{hI + K}{\log I^{-1}}.$$

Com $t \rightarrow t_1, I \rightarrow 0$ i per tant el costat dret de la desigualtat anterior tendeix a zero. I això implica $c = 0$. ■

2.7 El problema dels tres cossos: Coordenades de Jacobi

Recordem que vam dir que per a resoldre el problema dels tres cossos hem de resoldre el sistema d'equacions diferencials (2.2), que és el següent:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_3m_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mathcal{G}m_3m_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{\mathcal{G}m_3m_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{\mathcal{G}m_3m_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \end{cases}$$

Donat que vam considerar que el centre de massa està fixat a l'origen, és a dir, $M^{-1} \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = 0$ on $M = m_1 + m_2 + m_3$, aleshores $\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$, per tant podem posar una \mathbf{r}_i en funció de les altres dues. Procedirem de la següent manera: Considerem el moviment de la partícula de massa m_2 relatiu a la partícula de massa m_1 utilitzant el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ i el moviment de la partícula de massa m_3 relatiu al centre de massa \mathcal{O}' de les partícules de masses m_1 i m_2 . La localització d'aquest centre de massa és a $(m_1 + m_2)^{-1}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = -(m_1 + m_2)^{-1} m_3 \mathbf{r}_3$, utilitzant $m_3 \mathbf{r}_3 = -(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$. Llavors la posició ρ de la partícula de massa m_3 relativa a aquest centre de massa és $\mathbf{r}_3 + (m_1 + m_2)^{-1} m_3 \mathbf{r}_3 = M \mu^{-1} \mathbf{r}_3$, on $\mu = m_1 + m_2$. Per tant, $\rho = M \mu^{-1} \mathbf{r}_3$.

Utilitzant $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$ i $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, és fàcil verificar que

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \rho + m_2 \mu^{-1} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \rho - m_1 \mu^{-1} \mathbf{r}.$$

Retornem al sistema (2.2). Dividim la primera equació per m_1 i la segona per m_2 , i ens queda:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\mathcal{G}m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathcal{G}m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mathcal{G}m_3}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

Les restem:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathcal{G}m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \frac{\mathcal{G}m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{\mathcal{G}m_3}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathcal{G}}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(m_2 + m_3) + \mathcal{G}m_3 \left[\frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{r_{13}^3} - \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{r_{23}^3} \right].\end{aligned}$$

Per tant, utilitzant els resultats previs, podem escriure la igualtat anterior de la següent forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathcal{G}\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathcal{G}m_3 \left[\frac{\rho - m_1\mu^{-1}\mathbf{r}}{r_{23}^3} - \frac{\rho + m_2\mu^{-1}\mathbf{r}}{r_{13}^3} \right], \quad (2.11)$$

on $r = \|\mathbf{r}\|$.

Ara multipliquem l'última equació de (2.2) per $M\mu^{-1}m_3^{-1}$ i obtenim

$$\ddot{\rho} = -\frac{M\mathcal{G}m_1\mu^{-1}}{r_{13}^3}(\rho + m_2\mu^{-1}\mathbf{r}) - \frac{M\mathcal{G}m_2\mu^{-1}}{r_{23}^3}(\rho - m_1\mu^{-1}\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

Els vectors ρ i \mathbf{r} son anomenats *coordenades de Jacobi*.

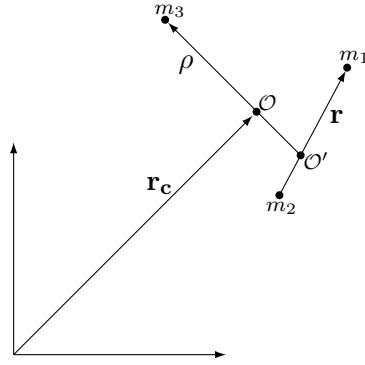


Figura 1: Partícules en les coordenades de Jacobi.

Proposició 2.15. *Siguin $g_1 = m_1m_2\mu^{-1}$ i $g_2 = m_3\mu M^{-1}$. Aleshores, tenint en compte que \mathbf{c} és el moment angular, I és el moment d'inèrcia i T és l'energia cinètica del sistema generat per les tres partícules del problema dels tres cossos,*

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= g_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + g_2(\rho \times \mathbf{V}), \\ 2I &= g_1r^2 + g_2\rho^2, \\ 2T &= g_1v^2 + g_2V^2,\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\rho} = \mathbf{V}$, $v = \|\mathbf{v}\|$ i $V = \|\mathbf{V}\|$.

Demostració: Anem a demostrar les igualtats de la proposició: Sabem que

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 m_i(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = m_1(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3(\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3),$$

anem a calcular $g_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + g_2(\rho \times \mathbf{V})$:

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + g_2(\rho \times \mathbf{V}) &= m_1 m_2 \mu^{-1} [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)] + m_3 \mu M^{-1} [M \mu^{-1} \mathbf{r}_3 \times M \mu^{-1} \dot{\mathbf{r}}_3] \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} [(\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) - (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)] + m_3 \mu^{-1} M(\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + \\
&\quad + (m_3 + m_3^2 \mu^{-1}) (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + \\
&\quad + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) + \mu^{-1} (m_3 \mathbf{r}_3 \times m_3 \dot{\mathbf{r}}_3) \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + \\
&\quad + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) + \mu^{-1} [(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) \times (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2)] \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + \\
&\quad + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) + \mu^{-1} m_1^2 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + \mu^{-1} m_1 m_2 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + \mu^{-1} m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + \\
&\quad + \mu^{-1} m_2^2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) \\
&= (\mu^{-1} m_1 m_2 + \mu^{-1} m_1^2) (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + (\mu^{-1} m_1 m_2 + \mu^{-1} m_2^2) (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) \\
&= m_1 \mu^{-1} (m_2 + m_1) (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 \mu^{-1} (m_1 + m_2) (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) \\
&= m_1 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) = \mathbf{c},
\end{aligned}$$

per tant tenim la primera igualtat $\mathbf{c} = g_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + g_2(\rho \times \mathbf{V})$. Hem utilitzat que $m_3 \mathbf{r}_3 = - (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$ per aconseguir el resultat.

Ara bé, recordem que

$$2I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2,$$

anem a calcular $g_1 r^2 + g_2 \rho^2 = m_1 m_2 \mu^{-1} r^2 + m_3 \mu M^{-1} \rho^2$:

$$\begin{aligned}
g_1 r^2 + g_2 \rho^2 &= m_1 m_2 \mu^{-1} r^2 + m_3 \mu M^{-1} \rho^2 \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 + m_3 \mu M^{-1} (M \mu^{-1} \mathbf{r}_3)^2 \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (r_2^2 - 2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 + r_1^2) + m_3 \mu^{-1} M r_3^2 \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} (r_2^2 - 2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 + r_1^2) + (m_3 + m_3^2 \mu^{-1}) r_3^2 \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} r_2^2 + m_1 m_2 \mu^{-1} r_1^2 - m_1 m_2 \mu^{-1} 2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 + m_3 r_3^2 + \mu^{-1} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)^2 \\
&= (m_1 m_2 \mu^{-1} + \mu^{-1} m_1^2) r_1^2 + (m_1 m_2 \mu^{-1} + \mu^{-1} m_2^2) r_2^2 + m_3 r_3^2 + \\
&\quad + (2 m_1 m_2 \mu^{-1} - 2 m_1 m_2 \mu^{-1}) \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 \\
&= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 2I
\end{aligned}$$

d'aquí surt la demostració de la segona igualtat de la proposició. També fem servir la igualtat $m_3 \mathbf{r}_3 = - (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$ per a aconseguir el resultat.

Per últim ens queda demostrar l'última igualtat de la proposició. Recordem que

$$2T = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2.$$

Calculem $g_1v^2 + g_2V^2$:

$$\begin{aligned}
g_1v^2 + g_2V^2 &= m_1m_2\mu^{-1}(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)^2 + m_3\mu M^{-1}(M\mu^{-1}\dot{\mathbf{r}}_3)^2 \\
&= m_1m_2\mu^{-1}v_1^2 + m_1m_2\mu^{-1}v_2^2 - 2m_1m_2\mu^{-1}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + m_3v_3^2 + m_3^2\mu^{-1}\dot{\mathbf{r}}_3^2 \\
&= m_1m_2\mu^{-1}v_1^2 + m_1m_2\mu^{-1}v_2^2 - 2m_1m_2\mu^{-1}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + m_3v_3^2 + \mu^{-1}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2)^2 \\
&= (m_1m_2\mu^{-1} + \mu^{-1}m_1^2)v_1^2 + (m_1m_2\mu^{-1} + \mu^{-1}m_2^2)v_2^2 + m_3v_3^2 + \\
&\quad + (2m_1m_2\mu^{-1} - 2m_1m_2\mu^{-1})\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \\
&= m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 = 2T.
\end{aligned}$$

On hem utilitzat també la igualtat $m_3\mathbf{r}_3 = -(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$.

Així queda demostrada la proposició. ■

A partir de la proposició anterior demostrarem el següent teorema:

Teorema 2.16 (Teorema de Weierstrass). *Si $\mathbf{c} = 0$, tot el moviment té lloc en un pla fix.*

Demostració: Suposem que $\mathbf{c} = g_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + g_2(\rho \times \mathbf{V}) = 0$. Si $\mathbf{r} \times \rho = 0$, tenim $\mathbf{r} \times \rho = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (M\mu^{-1}\mathbf{r}_3) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) - (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)$, aleshores el moviment té lloc en un pla. Per tant suposem que $\mathbf{r} \times \rho \neq 0$. Llavors $(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \parallel (\rho \times \mathbf{V})$, aleshores $\mathbf{r} \cdot \rho \times \mathbf{V} = 0$ i $\rho \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$. Per tant, $\rho \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0$ i $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \rho = 0$. Ara sigui $\mathbf{u} = \mathbf{r} \times \rho$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} &= (\mathbf{r} \times \rho) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r} \times \rho) \times (\mathbf{v} \times \rho) \\
&= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho - (\rho \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{V})\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \rho)\rho - (\rho \cdot \mathbf{v} \times \rho)\mathbf{r} = 0.
\end{aligned}$$

Com $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$, tenim que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{u}}{u}\right) = \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) \times \mathbf{u}}{u^3} = 0$ quan $u \neq 0$, per $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Per tant, si $\mathbf{r} \times \rho \neq 0$, el vector perpendicular a \mathbf{r} i ρ és constant. Això segueix que tot moviment està en un pla. ■

Si utilitzem les coordenades de Jacobi, podem reduir el nombre de funcions incògnites a sis.

2.8 Solució de Lagrange

Utilitzarem l'apartat anterior per buscar un conjunt de solucions del problema dels tres cossos molt especial, on les partícules es mouen uniformement en cercles, en el mateix pla, i amb la mateixa velocitat angular. En imposar que el moviment sigui en un pla utilitzem només dues de les tres dimensions de l'espai, per tant el nombre de incògnites es redueix a quatre.

Com ja hem comentat, suposem que el moviment té lloc en un pla i agafem un sistema de coordenades fix x, y, z amb origen a \mathcal{O} tal que $z = 0$ és el pla de moviment. Sigui $(x_i, y_i, 0)$ les coordenades de la partícula de massa m_i . Llavors $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, 0]$ i les equacions de (2.1) es converteixen en

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (x_j - x_i), \\
\ddot{y}_i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (y_j - y_i),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

on $i = 1, 2, 3$.

Sigui ω la velocitat angular de les partícules en el seu pla de moviment. Introduïm en aquest pla un sistema de coordenades (ξ, η) que gira amb velocitat angular ω . En aquest nou sistema de coordenades les partícules estan en repòs. Passem les equacions (2.13) a aquest nou sistema, utilitzant les relacions

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i \cos \omega t - \eta_i \sin \omega t \\ y_i &= \xi_i \sin \omega t + \eta_i \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observem a Figura 2 en què suposa aquest canvi de coordenades.

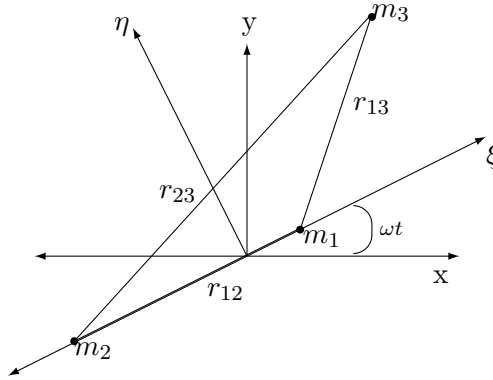


Figura 2: Partícules en el sistema de coordenades fix i en el sistema de coordenades rotatori.

Ara bé, derivem dos cops cada una de les igualtats anterior i substituïm a (2.13), i queda

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i - 2\omega\dot{\eta}_i - \omega^2\xi_i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\xi_j - \xi_i), \\ \ddot{\eta}_i + 2\omega\dot{\xi}_i - \omega^2\eta_i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\eta_j - \eta_i), \end{aligned} \quad (2.15)$$

on $i = 1, 2, 3$. Aleshores un cop es resolen les equacions anteriors per a ξ i η , a partir de les igualtats de (2.14) es pot aconseguir x i y .

Considerem $\tau_i = \xi_i + i\eta_i$, on $i = \sqrt{-1}$. Multipliquem la segona equació de (2.15) per i i la sumem a la primera, és a dir, fem

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i - 2\omega\dot{\eta}_i - \omega^2\xi_i + \ddot{\eta}_i i + 2\omega\dot{\xi}_i i - \omega^2\eta_i i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\xi_j - \xi_i) + \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\eta_j - \eta_i) i \\ \Leftrightarrow (\ddot{\xi}_i + \ddot{\eta}_i i) + 2\omega(-\dot{\eta}_i + \dot{\xi}_i i) - \omega^2(\xi_i + \eta_i i) &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} [(\xi_j + \eta_j i) - (\xi_i - \eta_i i)] \\ \Leftrightarrow \ddot{\tau}_i + 2i\omega\dot{\tau}_i - \omega^2\tau_i &= \mathcal{G} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\tau_j - \tau_i). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mentre les partícules estiguin en repòs en el sistema de rotació, cada $\dot{\tau}_i$ és nul·la. Per tant les posicions τ_1, τ_2, τ_3 satisfan les equacions

$$-\tau_i = \lambda \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\tau_j - \tau_i),$$

per $i = 1, 2, 3$, on $\lambda = \mathcal{G}\omega^{-2}$.

Siguin $\rho_1 = \lambda r_{23}^{-3}, \rho_2 = \lambda r_{31}^{-3}, \rho_3 = \lambda r_{12}^{-3}$. La primera i la tercera equacions, corresponents a $i = 1$ i $i = 3$ de l'equació anterior, respectivament, queden de la següent manera, utilitzant aquesta nova notació,

$$\begin{aligned} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)\tau_1 + m_2\rho_3\tau_2 + m_3\rho_2\tau_3 &= 0, \\ m_1\rho_2\tau_1 + m_2\rho_1\tau_2 + (1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\tau_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donat que el centre de massa està fixat en el origen \mathcal{O} , l'equació buscada pot ser substituïda per

$$m_1\tau_1 + m_2\tau_2 + m_3\tau_3 = 0.$$

Existeixen dues possibilitats: La primera és que τ_1, τ_2, τ_3 en algun moment t no estiguin alineades; i la segona és que sí. En el primer cas, els coeficients de cada τ_i en les tres equacions anteriors son proporcionals. Això segueix que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1/M$, on M és la massa total del sistema. En altres paraules, l'única solució possible tal que τ_1, τ_2, τ_3 no estiguin alineades en cap moment posa les masses en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costats $(\mathcal{G}M\omega^{-2})^{\frac{1}{3}}$. Això és important per observar que això és independent de les masses, llavors el centre de massa i el centre del triangle no necessiten coincidir. Aquesta solució es deu a Lagrange.

2.9 Solució d'Euler

En l'apartat anterior vam comentar que la solució de Lagrange és obtinguda a partir de la hipòtesi de que les tres partícules situades als punts τ_1, τ_2, τ_3 no estan alineades, ara explicarem la solució donada per Euler a partir de la hipòtesi de que sí que ho estan.

Suposem que τ_1, τ_2, τ_3 en algun instant t estan en una recta L . Donat que L ha de contenir el centre de massa, ha de passar per l'origen i també podem suposar que està a l'eix ξ fent que tot η_i desaparegui. Reordenant les partícules, podem posar que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ llavors $r_{12} = \xi_2 - \xi_1, r_{23} = \xi_3 - \xi_2, r_{13} = \xi_3 - \xi_1$. Per tant les equacions (2.18) poden ser escrites com

$$\begin{aligned} -\xi_1 &= \lambda \left[\frac{m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2} \right], \\ \xi_3 &= \lambda \left[\frac{m_1}{r_{13}^2} + \frac{m_2}{r_{23}^2} \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

on

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0. \quad (2.19)$$

Ara sigui $r_{12} = a, r_{23} = a\rho, r_{13} = a(1 + \rho)$. Aleshores l'equació (2.19) pot ser escrita en qualsevol de les següents formes

$$\begin{aligned} m_2a + m_3a(1 + \rho) &= -M\xi_1, \\ m_1a(1 + \rho) + m_2a\rho &= M\xi_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Obtenim $-\xi_1/\xi_3$ a partir de la divisió de les equacions de (2.18) i de les equacions de (2.20). Igualem els resultats per obtenir

$$\frac{m_2 + m_3(1 + \rho)}{m_1(1 + \rho) + m_2\rho} = \frac{m_2 + m_3(1 + \rho)^{-2}}{m_1(1 + \rho)^{-2} + m_2\rho^{-2}}. \quad (2.21)$$

Ara suposem que ρ pot ser determinada a partir de l'equació anterior. Reemplacem ξ_1 de l'esquerra de la primera equació de (2.18) pel seu valor donat a (2.20). Trobem que

$$a^3[m_2 + m_3(1 + \rho)] = \lambda[m_2 + m_3(1 + \rho)^{-2}].$$

Això determina a . Per tant, (2.18) determina ξ_1 i ξ_3 . Finalment $\xi_2 = a + \xi_1$.

Tot això redueix el problema en la determinació del valor positiu de ρ que satisfà (2.21). Per fer-ho escrivim (2.21) com

$$(m_2 + m_3) + (2m_2 + 3m_3)\rho + (3m_3 + m_2)\rho^2 - (3m_1 + m_2)\rho^3 - (3m_1 + 2m_2)\rho^4 - (m_1 + m_2)\rho^5 = 0,$$

aquesta equació s'anomena **l'equació quintica d'Euler**.

De la teoria de Galois, estudiada a l'assignatura *Equacions Algebraiques*, sabem que no existeix una fórmula algebraica que doni les arrels d'un polinomi de grau més gran que 4, aleshores no podem recórrer a això per donar les solucions del polinomi anterior. Per a poder dir que l'equació anterior té almenys una solució positiva, farem servir el següent resultat:

Teorema 2.17 (La regla dels signes de Descartes). *Si els termes d'un polinomi amb coeficients reals es disposen en ordre decreixent de grau, aleshores el nombre possible d'arrels positives del polinomi és igual al nombre de canvis de signe en els coeficients dels termes o menor que els canvis de signe per un múltiple de 2.*

Demostració: Sigui $p(x)$ un polinomi, denotem per $V[p(x)]$ el nombre de variacions (o canvis) del signe dels seus coeficients i per $P[p(x)]$ el nombre d'arrels positives de $p(x)$.

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $p(x)$ és mònic, és a dir, que el coeficient del terme de grau més gran és 1, ja que si no ho fos podríem dividir els termes del polinomi per aquest coeficient, fent-lo mònic, i el nou polinomi seguiria tenint les mateixes arrels que abans.

De la mateixa manera, observem que si el terme independent és nul, podem dividir el polinomi $p(x)$ per alguna potència x^m de x amb $m \geq 1$ per a obtenir un nou polinomi amb terme independent no nul, amb les mateixes arrels positives i els mateixos canvis de signe que $p(x)$, ja que un factor x^m no afecta ni a les arrels positives ni a les variacions en el signe a $p(x)$. Aleshores suposarem, sense pèrdua de generalitat, que el terme independent de $p(x)$ és no nul.

Per tant, el polinomi $p(x)$ és de la següent forma

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Ara tenint en compte les suposicions anteriors, comencem la demostració.

- i. Primer fem la següent observació: Sigui $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Si $a_0 < 0$, aleshores $V[p(x)]$ és imparell; si $a_0 > 0$, aleshores $V[p(x)]$ és parell: Aquest

és un exemple d'una propietat bàsica de sistemes de dos estats: Si canvieu el seu estat un nombre senar de vegades, acabareu en l'estat oposat de l'estat amb el qual heu començat; si canvieu d'estat un nombre parell de vegades, recuperareu l'estat original.

ii. Sorprenentment, podem fer una declaració similar sobre les arrels positives de $p(x)$: Sigui $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Si $a_0 < 0$, aleshores $P[p(x)]$ és imparell; si $a_0 > 0$, aleshores $P[p(x)]$ és parell. Demostrem-ho per inducció sobre n :

- Si $n = 1$, aleshores $p(x) = x + b$. Per tant l'arrel de $p(x)$ és $x = -b$. Si $b < 0$, tenim $P[p(x)] = 1$; si $b > 0$, tenim que $P[p(x)] = 0$. Llavors, es compleix l'enunciat per $n = 1$.
- Suposem cert per polinomis amb grau menor que n i ho demostrem per n : Suposem primer que $a_0 < 0$, això implica que $p(0) = a_0 < 0$. Per altra banda, $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) \rightarrow +\infty$, per tant existeix un x suficientment gran tal que $p(x) > 0$. Aleshores, com tot polinomi és una funció contínua, podem aplicar el Teorema de Bolzano, per tant $p(x)$ té alguna arrel positiva, és a dir, existeix $p_0 > 0$ tal que $p(p_0) = 0$. A causa d'això, $(x - p_0)$ divideix el polinomi $p(x)$, per tant podem escriure $p(x) = (x - p_0)g(x)$, on $g(x)$ és un polinomi mònic de grau $n - 1$. De fet, el terme independent de $g(x)$, que denotem b_0 , ha de ser positiu, ja que $a_0 = -p_0b_0$. Aplicant la hipòtesi de inducció, sabem que $P[g(x)]$ és parell. Però

$$P[p(x)] = P[(x - p_0)g(x)] = P[g(x)] + 1,$$

per tant $P[p(x)]$ és imparell.

Suposem ara que $a_0 > 0$. Hi ha dues possibilitats, una és que $P[p(x)] = 0$, i com 0 és un nombre parell ja ho tenim, i l'altra és que hi ha alguna arrel positiva p_0 , i aleshores procediríem com abans: ens donaria que $g(x) = p(x)/(x - p_0)$ té terme independent negatiu, aleshores $P[g(x)]$ és imparell, el que fa que $P[p(x)]$ sigui parell.

La combinació d'aquestes afirmacions ens dona que $V[p(x)]$ i $P[p(x)]$ tenen la mateixa paritat, és a dir, son ambdues parelles o imparelles, això és $V[p(x)]$ i $P[p(x)]$ difereixen en un enter múltiple de 2.

Ens falta demostrar que hi ha més canvis de signe que arrels positives, és a dir, el nombre de canvis de signe és una cota superior del nombre d'arrels positives. Per fer-ho, primer demostrarem que si $p_0 > 0$, aleshores $V[p(x)(x - p_0)] > V[p(x)]$: Tenim que

$$q(x) = p(x)(x - p_0) = -p_0a_0 + \sum_{i=1}^n (a_{i-1} - p_0a_i)x^i + x^{n+1},$$

això implica que $q_{n+1} = 1$, per tant el coeficient que acompanya el terme d'ordre més gran de $q(x)$ té el mateix signe que el coeficient que acompanya el terme d'ordre més gran de $p(x)$. A més a més, iterant de $j = n$ a $j = 1$, tenim que $q_j = a_{i-1} - p_0a_i$ té el mateix signe que a_{i-1} . Així començant amb q_{n+1} , existeix una subseqüència de q_i , que anomenem q_{i_j} , que els signes dels coeficients son els mateixos que els de la subseqüència $a_{i_{j-1}}$ corresponent de $p(x)$. Per tant, el nombre de canvis de signe de tota la seqüència q_i no és més petit que el nombre de canvis de signe de qualsevol subseqüència, s'han comptabilitzat almenys $V[p(x)]$ canvis de signe a $q(x)$, el que implica que $V[p(x)(x - p_0)] \geq$

$V[p(x)]$. Finalment, $q_0 = -p_0a_0$, on $p_0 > 0$, aleshores el terme independent de $q(x)$ té signe oposat al de $p(x)$, utilitzant els resultats anteriors, tenim que $V[q(x)] \geq V[p(x)] + 1$, per tant $V[p(x)(x - p_0)] > V[p(x)]$.

Per últim, si escrivim

$$p(x) = N(x)(x - p_1)(x - p_2) \cdot \dots \cdot (x - p_m),$$

on $p_1, p_2, \dots, p_m > 0$ son les m arrels positives del polinomi, llistat repetidament, si cal, segons la seva multiplicitat, i $N(x)$ és un polinomi que no té arrels positives, aplicant la propietat anterior repetidament per cada p_i , aconseguim que $V[p(x)] \geq P[p(x)]$.

En conclusió, el nombre possible d'arrels positives del polinomi és igual al nombre de canvis de signe en els coeficients dels termes o menor que els canvis de signe per un múltiple de 2. ■

Ara retornem a l'equació quàntica d'Euler, aquesta és, reordenant els seus termes de manera decreixent de grau,

$$-(m_1+m_2)\rho^5 - (3m_1+2m_2)\rho^4 - (3m_1+m_2)\rho^3 + (3m_3+m_2)\rho^2 + (2m_2+3m_3)\rho + (m_2+m_3) = 0.$$

Notem que si $\rho = 0$, la part de l'esquerra de la igualtat anterior és positiva. I també que tendeix a $-\infty$ si $\rho \rightarrow \infty$. Com que només es produeix un canvi de signe entre els coeficients de l'equació anterior, per la regla dels signes de Descartes, l'equació anterior té només una arrel positiva. Per tant existeix un únic valor de ρ que soluciona el problema. Està clar que, reordenant les partícules, es pot obtenir dues noves solucions del problema principal. Aquesta solució col·lineal es deu a Euler.

3 El problema restringit dels tres cossos

En la secció anterior vam veure que podem reduir el nombre de funcions incògnites del problema dels tres cossos, utilitzant les seves propietats, d'ordre divuit fins a ordre quatre si el moviment té lloc en un pla, que és el millor que es coneix. Després d'aquestes reduccions, el problema encara és extremadament complicat i manté ocupats els matemàtics des de fa més de dos-cents anys.

En aquesta secció estudiarem un cas particular del problema dels tres cossos que és més tractable, aquest és el problema restringit dels tres cossos on es considera el moviment d'una partícula de massa infinitesimal que es mou en un pla sota la influència de la força gravitacional d'atracció de dues partícules que es mouen l'una al voltant de l'altra en una òrbita circular del problema de Kepler.

3.1 Introducció

El problema restringit dels tres cossos es planteja de la següent manera: Siguin tres partícules de masses m_1, m_2, m_3 , suposem que m_3 és tan petita que no influeix en el moviment de les altres partícules de masses m_1 i m_2 , però aquestes últimes sí que afecten el moviment de la partícula de massa m_3 .

Definició 3.1. Anomenarem *partícules primàries* (o *només primàries*) a les partícules de masses m_1 i m_2 . A la partícula de massa m_3 se l'anomena *partícula secundària*.

Notació 1. Recordem que en la primera secció vam denotar \mathbf{r}_i com el vector posició de la partícula i -èsima.

Tenint en compte la formulació d'aquestes hipòtesis, matemàticament el que es fa és suposar que $m_3 = 0$, o el que és equivalent, $M = \mu$, on M és la massa total del sistema format per aquestes tres partícules i $\mu = m_1 + m_2$. Així, el centre de massa del sistema ara és el centre de massa de les primàries. Si agafem $\rho_1 = r_{13}$ i $\rho_2 = r_{23}$, les equacions diferencials (2.11) i (2.12) es converteixen, respectivament, en

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathcal{G}\mu\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.1)$$

on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ i $r = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$, i

$$\ddot{\rho} = -\frac{\mathcal{G}m_1}{\rho_1^3}(\rho + m_2\mu^{-1}\mathbf{r}) - \frac{\mathcal{G}m_2}{\rho_2^3}(\rho - m_1\mu^{-1}\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

on $\rho = M\mu^{-1}\mathbf{r}_3$ i, com $M = \mu$, queda $\rho = \mathbf{r}_3$.

La primera equació es pot resoldre, la seva solució és una cònica, i per tant ja tenim determinat el moviment de les primàries. A més a més, com $\rho = \mathbf{r}_3$, el moviment de la partícula de massa m_3 queda totalment descrit per l'equació (3.2).

A causa de la suposició física sobre la partícula de massa m_3 — que $m_3 = 0$ — es pot demostrar que no es compleix per exemple la llei de conservació de l'energia, diferent del problema dels tres cossos que sí que la complia, per tant no podem utilitzar-la per reduir el nombre de funcions incògnites de l'equació diferencial (3.2), que és sis. El que farem primer serà suposar que tot el moviment té lloc en un pla (el *problema restringit planar*), que redueix el nombre de funcions incògnites de l'equació diferencial (3.2) a

quatre. I finalment, suposarem que les primàries giren uniformement al voltant del seu centre de massa (el *problema restringit planar circular*). Així aconseguirem la solució del problema restringit dels tres cossos sota les condicions que vam imposar. Tot seguit estudiarem l'existència de solucions d'equilibri i de les corbes de velocitat zero també sota les condicions imposades. En darrer lloc estudiarem l'estabilitat de les solucions d'equilibri.

Abans de començar fem les següents observacions que ens seran útils per a resoldre el problema restringit dels tres cossos sota les condicions comentades abans:

Observació 3.2. El període P de les primàries, d'acord amb l'equació diferencial (3.1), ve donat per $2\pi(\sqrt{\mathcal{G}\mu})^{-1}r^{3/2}$, on r és la distància entre les primàries. Per tant, podem usar el sistema de referència utilitzat per a obtenir la solució de Lagrange i la solució d'Euler del problema dels tres cossos, amb $\omega = \sqrt{\mathcal{G}\mu}r^{-3/2}$. En aquest sistema de coordenades les primàries estan en repòs i podem desplaçar-les a l'eix ξ . Si substituïm τ per t_3 , ρ_1 per r_{13} i ρ_2 per r_{23} , l'equació (2.16) es converteix en

$$\ddot{\tau} + 2\omega\dot{\tau}i - \omega^2\tau = \mathcal{G}m_1\rho_1^{-3}(\tau_1 - \tau) + \mathcal{G}m_2\rho_2^{-3}(\tau_2 - \tau). \quad (3.3)$$

Recordem $\eta_1 = \eta_2 = 0$, per tant $\tau_1 = \xi_1, \tau_2 = \xi_2$, ja que les primàries estan en repòs i les hem desplaçat a l'eix ξ . A més, $\tau = \xi + i\eta$, amb $i^2 = -1$.

És convenient escollir la unitat de massa tal que $M = m_1 + m_2 = 1$, de longitud tal que $r = 1$ i de temps tal que $\mathcal{G} = 1$. La massa més lleugera la denotarem per μ i la posem en ξ_1 , a l'esquerra de l'origen. Clarament, $\mu \leq \frac{1}{2}$. Donat que $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0$ i $\xi_2 - \xi_1 = 1$, això implica que $\xi_1 = -1 + \mu$, $\xi_2 = \mu$. Per tant la partícula de massa m_1 està localitzada en $(-1 + \mu, 0)$ i la partícula de massa m_2 està localitzada en $(\mu, 0)$.

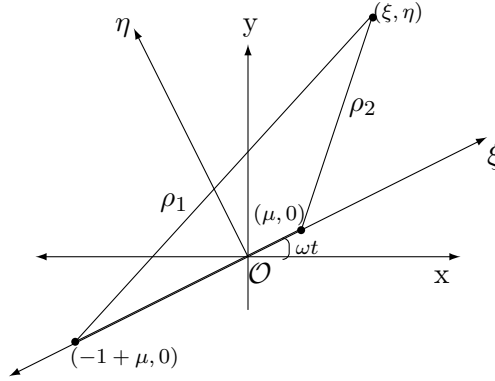


Figura 3: Partícules del problema restringit dels tres cossos en el sistema de coordenades fix i en el sistema de coordenades rotatori.

Finalment, l'equació de moviment en el sistema de coordenades rotatori es converteix en

$$\ddot{\tau} + 2i\dot{\tau} - \tau = -\frac{\mu(\tau + 1 - \mu)}{\rho_1^3} - \frac{(1 - \mu)(\tau - \mu)}{\rho_2^3}. \quad (3.4)$$

Tenint en compte les observacions anteriors, la resta del capítol es dedicarà a un estudi de l'equació (3.4).

3.2 El problema restringit circular: La constant de Jacobi

Podríem pensar que el problema plantejat abans està representat artificialment, però existeix fenòmens naturals que ho reflecteix. Per a convèncer que val la pena investigar aquest problema particular, exposarem dos exemples en que apareix.

El primer és el moviment d'un grup d'asteroides el moviment dels quals està controlat principalment pel Sol i Júpiter. Com que Júpiter és el planeta més gran del sistema solar i podem fer una aproximació de la seva òrbita per una òrbita circular, una primera aproximació del moviment d'aquests asteroides ve donada per una solució del problema restringit dels tres cossos amb Júpiter i el Sol com a primàries.

L'altre exemple és el moviment d'un satèl·lit artificial amb la Terra i la Lluna com a primàries, si considerem que el moviment de la Lluna al voltant de la Terra és circular.

Per entrar en matèria, escriurem l'equació (2.15) de la següent manera:

Considerem $U(\xi, \eta) = \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}$, aleshores

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi &= \frac{\mu(-1 + \mu - \xi)}{\rho_1^3} + \frac{(1 - \mu)(\mu - \xi)}{\rho_2^3} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta &= \frac{\mu(-\eta)}{\rho_1^3} + \frac{(1 - \mu)(-\eta)}{\rho_2^3} = \frac{\partial U}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{3.5}$$

on $\rho_i = |\tau - \tau_i|$, per $i = 1, 2$.

Passem ara al problema principal d'investigar l'equació (3.5):

Si definim un nou potencial Φ per

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu),\tag{3.6}$$

les equacions (3.5) es converteixen en

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{3.7}$$

La constant $\frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$ que apareix en la definició de Φ no és important en l'equació anterior, però és convenient després.

Sabem que sota les hipòtesis del problema restringit dels tres cossos, alguna llei de conservació no és complida, com la de conservació de l'energia, però existeixen substituïts i els veurem ara.

Definició 3.3. *Definim com integral de Jacobi l'expressió*

$$2\Phi - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2.$$

Proposició 3.4. *La integral de Jacobi es manté constant durant tot el moviment. A aquesta constant l'anomenem constant de Jacobi.*

Demostració: Multipliquem la primera equació de (3.7) per $\dot{\xi}$, la segona per $\dot{\eta}$ i les sumem, ens queda

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} - 2\dot{\xi}\dot{\eta} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\dot{\eta} \Leftrightarrow \dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Integrant tenim que

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Phi - C.$$

I això dona el resultat que volíem demostrar. ■

El sistema (3.7) pot ser escrit com

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha, & \dot{\eta} &= \beta, \\ \dot{\alpha} &= 2\beta + \Phi_\xi, & \dot{\beta} &= -2\alpha + \Phi_\eta \end{aligned} \quad (3.8)$$

que té quatre incògnites, i $\Phi_\xi = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$, $\Phi_\eta = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$. Ara dividim les dues primeres equacions anteriors per la tercera i la quarta, respectivament, per eliminar el temps. Aconsegüim

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\alpha}{2\beta + \Phi_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\beta} = \frac{\beta}{-2\alpha + \Phi_\eta}.$$

Donat que $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Phi - C$, sabem que $\alpha^2 + \beta^2 = 2\Phi - C$. Això es pot resoldre per β i el resultat el substituïm en el parell precedent per a aconseguir equacions de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\alpha} &= F(\xi, \eta, \alpha) \\ \frac{d\eta}{d\alpha} &= G(\xi, \eta, \alpha), \end{aligned}$$

un sistema amb dues incògnites. Si la solució és donada per $\xi = f(\alpha)$, $\eta = g(\alpha)$, aleshores procedim de la següent manera: Donat $\alpha = \xi = f'(\alpha)\dot{\alpha}$, podem, en teoria, determinar $\alpha(t)$. Per tant,

$$\xi = \xi_0 + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau,$$

per tant $\xi(t)$ està determinat. També $\dot{\eta} = \beta = g'(\alpha)\dot{\alpha} = \alpha g'(\alpha)/f'(\alpha)$. Per tant,

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t \frac{\alpha(\tau)g'(\alpha(\tau))}{f'(\alpha(\tau))} d\tau.$$

En la pràctica, aquest mètode no és útil, ja que $f(\alpha)$ i $g(\alpha)$ són impossibles de determinar explícitament. Per tant, en lloc de seguir aquesta línia de pensament, buscarem solucions explícites senzilles, com ho vam en el cas del problema dels tres cossos no restringit, que vam trobar la solució de Lagrange i la solució d'Euler.

3.3 Solucions d'equilibri

En el primer capítol vam demostrar que el problema dels tres cossos general no té solucions d'equilibri, però si que vam veure que en el cas que el moviment de les partícules té lloc en un pla existeixen solucions en que les partícules segueixen un moviment uniforme rotatori. En particular, existeixen solucions en que les partícules es mouen al llarg de la solució del triangle equilàter de Lagrange, i existeix també la solució col·lineal d'Euler. Aquestes solucions son solucions d'equilibri en el sistema de coordenades rotatori. Com el problema restringit planar circular dels tres cossos és un cas particular en coordenades de rotació, esperem veure vestigis d'aquestes solucions d'equilibri.

Com que ja estem en el cas en que les partícules de masses m_1 i m_2 estan en repòs, buscarem solucions del problema restringit dels tres cossos per a les quals la partícula de

massa m_3 roman en repòs en el sistema de coordenades relatiu. Aquestes solucions son anomenades *solucions d'equilibri*.

Donat que ξ i η , en aquest cas, son constants, les equacions (3.7) es simplifiquen i es converteixen en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0. \quad (3.9)$$

És convenient expressar Φ en termes de les denominades *coordenades bipolars* ρ_1 i ρ_2 del punt (ξ, η) . Donat que $\rho_1^2 = (\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2$, $\rho_2^2 = (\xi - \mu)^2 + \eta^2$, aconseguim $\xi^2 + \eta^2 = \mu\rho_1^2 + (1 - \mu)\rho_2^2 - \mu(1 - \mu)$. Ara bé, com $\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$ on $U(\xi, \eta) = \mu/\rho_1 + (1 - \mu)/\rho_2$, tenim

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = \mu\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 + \rho_1^{-1}\right) + (1 - \mu)\left(\frac{1}{2}\rho_2^2 + \rho_2^{-1}\right). \quad (3.10)$$

Les relacions (3.9) es converteixen en

$$\begin{aligned} \mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{\xi + 1 - \mu}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{\xi - \mu}{\rho_2} &= 0 \\ \mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{\eta}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{\eta}{\rho_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Primer suposem que $\eta \neq 0$. Aleshores

$$\mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{1}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{1}{\rho_2} = 0. \quad (3.12)$$

Això implica que els termes que contenen ξ en la primera equació de (3.11) se'n van, és a dir,

$$\mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{\xi}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{\xi}{\rho_2} = 0.$$

Aleshores de la primera equació de (3.11) ens queda

$$\mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{1 - \mu}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{-\mu}{\rho_2} = 0,$$

per tant, traient com a factor comú $\mu(1 - \mu)$, tenim

$$\left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{1}{\rho_1} - \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{1}{\rho_2} = 0. \quad (3.13)$$

Ara bé, l'única solució que compleix (3.12) i (3.13) alhora és $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Aquesta solució es troba al vèrtex d'un triangle equilàter la base del qual és el segment de recta que uneix les primàries, això és, el segment que uneix els punts $(-\mu, 0)$ i $(1 - \mu, 0)$. Com hi ha dues orientacions, existeixen dues solucions d'equilibri d'aquest tipus: una en el semiplà superior denotada per \mathcal{L}_4 , i una en el semiplà inferior denotada per \mathcal{L}_5 .

Aquestes solucions s'atribueixen a Lagrange. Lagrange pensava que no tenien importància astronòmica, però al segle XX, centenars d'asteroides, els Troians, van ser trobats oscil·lant al voltant de la posició \mathcal{L}_4 en el sistema Sol-Júpiter i un nombre similar d'asteroides, els Grecs, van ser trobats oscil·lant al voltant de la posició \mathcal{L}_5 . És a dir, un

grup d'asteroides, el Sol i Júpiter formen un triangle equilàter, aproximat, i l'altre grup també. Amb telescopis millors s'han trobat més i més asteroides.

Per altra banda, si $\eta = 0$ les equacions (3.11) es redueixen a una única equació,

$$\mu \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{\xi + 1 - \mu}{\rho_1} + (1 - \mu) \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{\xi - \mu}{\rho_2} = 0, \quad (3.14)$$

on $\rho_1 = |\xi + 1 - \mu|$ i $\rho_2 = |\xi - \mu|$. La podem dividir en tres casos: $\xi < -1 + \mu$, $-1 + \mu < \xi < \mu$ i $\xi > \mu$, en que tenim, respectivament,

$$\begin{aligned} (a) \quad & \rho_1 = -1 - \xi + \mu, & \rho_2 = -\xi + \mu, & \rho_2 = 1 + \rho_1; \\ (b) \quad & \rho_1 = 1 + \xi - \mu, & \rho_2 = -\xi + \mu, & \rho_2 = 1 - \rho_1; \\ (c) \quad & \rho_1 = 1 + \xi - \mu, & \rho_2 = \xi - \mu, & \rho_2 = \rho_1 - 1. \end{aligned}$$

Podem reescriure l'equació (3.14) en cada un dels casos de la següent manera:

(a) Sigui $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = 1 + \rho$. Aleshores

$$\mu \left[\rho - \frac{1}{\rho^2} \right] + (1 - \mu) \left[\rho + 1 - \frac{1}{(\rho + 1)^2} \right] = 0$$

(b) Sigui $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = 1 - \rho$. Aleshores

$$\mu \left[\rho - \frac{1}{\rho^2} \right] - (1 - \mu) \left[1 - \rho - \frac{1}{(1 - \rho)^2} \right] = 0.$$

(c) Sigui $\rho_2 = \rho$, $\rho_1 = 1 + \rho$. Aleshores

$$\mu \left[1 + \rho - \frac{1}{(1 + \rho)^2} \right] + (1 - \mu) \left[\rho - \frac{1}{\rho^2} \right] = 0.$$

Cada una d'aquestes tres equacions tenen una única solució positiva per ρ . En els casos (a) i (c) això es pot veure de la següent manera: Cada una d'aquestes equacions és de la forma

$$F(\rho) = \frac{\rho - \rho^{-2}}{\rho + 1 - (\rho + 1)^{-2}} = -c,$$

on $c > 0$. És fàcil comprovar que $F'(\rho) > 0$, el que implica que F és estrictament creixent. A més, $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = -\infty$ i $F(1) = 0$. Tot això implica que $F(\rho) = -c$ en un únic valor de ρ que es troba a $(0, 1)$. Les solucions son denotades per \mathcal{L}_1 en el cas (a) i \mathcal{L}_3 en el cas (c).

El cas (b) és similar. Ara l'equació és

$$F_1(\rho) = \frac{1 - \rho - (1 - \rho)^{-2}}{\rho - \rho^{-2}} = \frac{1 - \mu}{\mu} \geq 1,$$

perquè $\mu \leq \frac{1}{2}$. La funció $F_1(\rho)$ és creixent en el interval $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$. A més, $F_1(\frac{1}{2}) = 1$ i $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} F_1(\rho) = \infty$, llavors $F_1(\rho) = \frac{1 - \mu}{\mu}$ en només un valor de $\rho \in [\frac{1}{2}, 1)$. Això implica que el punt d'equilibri es troba més a prop de la partícula de massa més petita que de les altres, si no $\mu = \frac{1}{2}$; a aquest punt el denotem \mathcal{L}_2 .

Aquests tres punts d'equilibri col·lineals s'atribueixen a Euler.

Definició 3.5. *Els cinc punts \mathcal{L}_i son anomenats punts de libració.*

Observació 3.6. Per a trobar les solucions d'equilibri també podríem haver utilitzat la solució de Lagrange i la solució d'Euler del problema dels tres cossos general imposant $m_3 \rightarrow 0$.

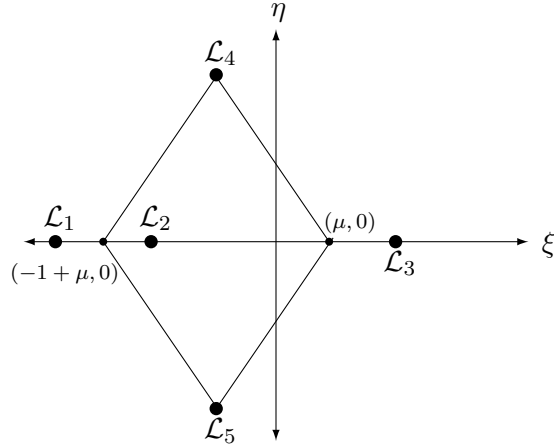


Figura 4: Solucions d'equilibri del problema restringit dels tres cossos.

3.4 Corbes de velocitat zero

Les solucions d'equilibri són les úniques solucions de (3.7) que són conegudes explícitament. No obstant això, fent servir la integral de Jacobi és possible derivar algunes propietats importants de totes les solucions.

Dels apartats anteriors sabem que la integral de Jacobi es manté constant durant tot el moviment, és a dir, es compleix $\xi^2 + \eta^2 = 2\Phi - C$, on C és la constant de Jacobi del moviment. Per tant si denotem $v = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, la velocitat relativa, tenim que es compleix

$$v^2 = 2\Phi - C. \quad (3.15)$$

Ja vam demostrar que en coordenades bipolars ρ_1 i ρ_2 podem escriure Φ de la següent forma

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = \mu\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 + \rho_1^{-1}\right) + (1 - \mu)\left(\frac{1}{2}\rho_2^2 + \rho_2^{-1}\right).$$

Tenint en compte això,

$$2\Phi = \mu(\rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}) + (1 - \mu)(\rho_2^2 + 2\rho_2^{-1}). \quad (3.16)$$

Definició 3.7. *Les corbes de velocitat zero (o regions de Hill) són les corbes de nivell que satisfan $2\Phi = C$.*

En aquest apartat estudiarem les corbes de velocitat zero, aquestes són la frontera que separa àrees de possible moviment de la partícula de massa m_3 d'àrees on el moviment de la partícula no és possible, ja que de l'equació $v^2 = 2\Phi - C$ tenim que si $\Phi - C > 0$ podem calcular v , però si $\Phi - C < 0$ no, per tant en aquest cas el moviment és impossible. Comencem demostrant algunes propietats de la funció Φ .

Proposició 3.8. *El valor mínim de 2Φ és 3.*

Demostració: Sabem que

$$2\Phi = \mu(\rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}) + (1 - \mu)(\rho_2^2 + 2\rho_2^{-1}),$$

per tant si denotem $A = \rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}$ i $B = \rho_2^2 + 2\rho_2^{-1}$, tenim que

$$2\Phi = \mu A + (1 - \mu)B.$$

Primer demostrem que si $0 \leq \mu \leq 1$, $A \geq 0$ i $B \geq 0$, aleshores

$$A\mu + B(1 - \mu) \geq \min(A, B).$$

Suposem que $A \geq B$, aleshores $A\mu + B(1 - \mu) \geq B\mu + B(1 - \mu) = B = \min(A, B)$. El cas $B \geq A$ és anàlog. Per tant es compleix la desigualtat.

Això implica que

$$2\Phi \geq \min(A, B) = \min(\rho_2^2 + 2\rho_2^{-1}, \rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}).$$

Ara calculem el mínim de la funció $f(x) = x^2 + 2x^{-1}$: $f'(x) = 2x - 2x^{-2}$ i

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2x^{-2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

ara bé, com $f'(1^-) < 0$ i $f'(1^+) > 0$, a $x = 1$ la funció f assoleix el seu mínim valor per $x > 0$, i aquest valor és $f(1) = 3$.

Per tant, $2\Phi \geq 3$ que era el que volíem demostrar. ■

Observació 3.9. De la demostració anterior podem observar que 2Φ assoleix el seu valor mínim únicament quan $\rho_1 = \rho_2 = 1$, això és, en els punts de llibració de Lagrange.

Proposició 3.10.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\xi, \eta) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \Phi(\xi, \eta) = \lim_{\rho_2 \rightarrow 0} \Phi(\xi, \eta) = \infty.$$

Demostració: Escrivint

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}$$

amb $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$, podem observar que $\Phi \rightarrow \infty$ quan $\rho \rightarrow \infty$. De la mateixa manera es comprova els altres resultats. ■

Proposició 3.11. La funció Φ és simètrica respecte l'eix ξ , és a dir, Φ compleix $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\xi, -\eta)$.

Demostració: Per a escriure Φ en coordenades bipolars fem el següent canvi

$$\begin{aligned} \rho_1 &= [(\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \rho_2 &= [(\xi - \mu)^2 + \eta^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

per tant, donat que $\rho_i(\xi, \eta) = \rho_i(\xi, -\eta)$ per $i = 1, 2$, i tenint en compte la fórmula de Φ en coordenades bipolars, $\Phi(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}$, tenim el resultat. ■

La següent propietat l'enunciarem sense demostrar-la, ja que la necessitarem en la demostració de la propietat posterior a aquesta. La seva demostració la podem trobar al llibre [3].

Proposició 3.12. La funció $\Phi(\xi, 0)$ assoleix els seus mínims locals als punts d'equilibri col·lineals.

Proposició 3.13.

$$1.5 = \Phi(\mathcal{L}_4) = \Phi(\mathcal{L}_5) \leq \Phi(\mathcal{L}_3) \leq \Phi(\mathcal{L}_1) \leq \Phi(\mathcal{L}_2).$$

Demostració: Ja hem vist que la funció Φ assoleix el seu mínim als punts \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 , i aquest mínim és 3, per tant amb això queda demostrada la primera part de la inequació.

La segona part està relacionada amb els punts d'equilibri col·lineals, els que estan situats sobre l'eix ξ , per tant la desigualtat que volem demostrar pot ser escrita de la següent manera

$$1.5 \leq \Phi(x_3, 0) \leq \Phi(x_1, 0) \leq \Phi(x_2, 0),$$

on x_1 , x_2 i x_3 son les abscises dels punts d'equilibri col·lineals.

Primer veurem que $\Phi(\mu + \alpha, 0) < \Phi(\mu - \alpha, 0)$, on $0 < \alpha < 1$. Com que, tenint en compte l'expressió de Φ en el sistema de coordenades (ξ, η) , (3.6),

$$\Phi(\mu + \alpha, 0) = \frac{1}{2}(\mu + \alpha)^2 + \frac{\mu}{2}(1 - \mu) + \frac{1 - \mu}{\alpha} + \frac{\mu}{1 + \alpha}$$

i

$$\Phi(\mu - \alpha, 0) = \frac{1}{2}(\mu - \alpha)^2 + \frac{\mu}{2}(1 - \mu) + \frac{1 - \mu}{\alpha} + \frac{\mu}{1 - \alpha},$$

tenim que

$$\Phi(\mu - \alpha, 0) - \Phi(\mu + \alpha, 0) = \frac{2\mu}{1 - \alpha^2}(\alpha^2 - \alpha + 1) > 0,$$

ja que el discriminant de la forma quadràtica és negatiu. A més, $\Phi(x_3, 0) < \Phi(\mu + \alpha, 0)$ per $0 < \alpha < x_3 - \mu$, perquè el mínim de la funció $\Phi(\xi, 0)$ està en x_3 en la regió $\mu < \xi < \infty$. També $x_3 - \mu > \mu - x_2$ (no ho demostrarem, està demostrat a [3]). A causa d'això, si $\mu - \alpha = x_2$, tenim $\Phi(x_3, 0) < \Phi(x_2, 0)$. La inequació $\Phi(x_1, 0) < \Phi(x_2, 0)$ es pot verificar de manera semblant. ■

Observació 3.14. Com a conseqüència directa de la proposició anterior, les constants de Jacobi corresponents ($C_i = 2\Phi(\mathcal{L}_i)$) satisfan

$$3 = C_4 = C_5 \leq C_3 \leq C_1 \leq C_2.$$

Al llibre [3] hi ha un estudi de cadascuna d'aquestes constants segons el valor de μ .

A continuació es farà una discussió sistemàtica sobre les corbes de velocitat zero utilitzant la constant de Jacobi com a paràmetre en lloc de $\Phi = C/2$. Els dibuixos de les corbes de nivell zero estan fets a partir d'un programa en C el codi del qual es pot trobar a l'annex d'aquest treball.

3.4.1 Corbes exteriors i interiors ovals ($C_2 < C$)

Quan $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty$ o $\rho_1 \rightarrow 0$ o $\rho_2 \rightarrow 0$, tenim que $\Phi \rightarrow \infty$; per tant, les corbes de velocitat zero formen tres branques per a grans valors de C . Estudiem cada cas per separat:

- i. *Ovals de velocitat zero al voltant de la primària de massa més gran.*

Considerem primer $\rho_2 \rightarrow 0$. Donat que al mateix temps $\rho_1 \rightarrow 1$, en l'equació $C = 2\Phi$, el terme $2(1 - \mu)/\rho_2$ domina donant

$$C \cong 2(1 - \mu)/\rho_2.$$

Per tant les corbes de velocitat zero son ovals al voltant de m_1 . Com més gran C esdevé més petits son els efectes dels termes negligibles i l'aproximació

$$\rho_z = \rho_2 = 2(1 - \mu)/C \quad (3.17)$$

esdevé millor; la forma de les corbes de velocitat zero s'aproximen a un cercle. També, quan C creix ρ_1 decreix, per tant, com més gran sigui C , més petit esdevenen els ovals. Donat

$$\frac{d\Phi}{d\rho_2} \cong -\frac{1 - \mu}{\rho_2^2} < 0,$$

és possible el moviment dintre del oval de velocitat zero, això és degut a: Siguin v_0 i $\rho_2 = \rho_0$ les condicions inicials tal que el corresponent valor de la constant de Jacobi

$$C_0 \cong 2(1 - \mu)/\rho_0 - v_0^2 \quad (3.18)$$

és aproximadament correcte. La corba de velocitat zero per aquest valor de $C = C_0$ és aproximadament un cercle de radi $2(1 - \mu)/C_0 = \rho_z$. Observem que ρ_0 i ρ_z es mesuren de la partícula de massa m_2 , això és de la localització de la primària més gran de massa $1 - \mu$, i que $\rho_z > \rho_0$ ja que de (3.18)

$$v_0^2 = 2(1 - \mu)(1/\rho_0 - 1/\rho_z) > 0.$$

Agafem ara qualsevol altre punt a distància ρ'_0 de la primària més gran. La velocitat v'_0 de la partícula (amb constant de Jacobi C_0) és

$$(v'_0)^2 = 2(1 - \mu)/\rho'_0 - C_0$$

o

$$(v'_0)^2 = 2(1 - \mu)(1/\rho'_0 - 1/\rho_z). \quad (3.19)$$

D'això es dedueix que sempre que la partícula estigui dins del cercle de velocitat zero, $\rho'_0 < \rho_z$, v'_0 és real i el moviment és possible. Quan $\rho'_0 = \rho_z$, $v'_0 = 0$ i quan $\rho'_0 > \rho_z$, v'_0 és imaginari. Aleshores la partícula no pot creuar a l'altre costat de la corba de velocitat zero.

ii. *Ovals de velocitat zero al voltant de la primària de massa més petita.*

Quan $\rho_1 \ll 1$ i $\rho_2 \cong 1$, les corbes de velocitat zero son ovals al voltant de la primària de massa més petita. Els radis de les corbes de velocitat zero aproximadament circulars son

$$\rho_z = \rho_1 \cong 2\mu/C. \quad (3.20)$$

Una comparació amb (3.17) mostra que el radi de la corba aproximada de velocitat zero, per a una C donada, que envolta la primària amb la massa més gran és més gran que el de la corba que encercla l'altra primària; de fet,

$$0 < \rho_2 - \rho_1 \cong 2/C < 2/3,$$

ja que les corbes de velocitat zero no existeixen per $C < 3$, ja que vam demostrar que el valor mínim de 2Φ és 3. El ratio dels radis és $(1 - \mu)/\mu$. Per tant, per μ petita, tenim $\rho_2 \cong \mu\rho_1$.

iii. *Ovals de velocitat zero al voltant de les dues primàries.*

Quan ambdues distàncies radials (ρ_1 i ρ_2) augmenten molt més enllà dels punts d'equilibri, de nou es poden obtenir grans valors de C . De fet, escrivint $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, tenim de (3.16)

$$C \cong \rho^2.$$

Aquesta equació expressa la situació física quan – a causa de la gran distància – els efectes de la gravetat son negligibles en comparació amb la força centrífuga (la potencial de la qual és ρ^2). La integral de Jacobi és

$$v^2 \cong \rho^2 - C$$

i les corbes de velocitat zero son donades per

$$C^{1/2} \cong \rho_z;$$

és a dir, son aproximadament cercles.

Observem que aquest radi és sempre més gran que els anteriors, $2(1 - \mu)/C$, ja que la comparació només té sentit quan $C > 3$.

Els ovals de velocitat zero creixen quan C creix, per tant el moviment és possible fora d'aquestes corbes límit.

El següent esquema mostra l'aproximació circular per a $\mu = 0.2$ i $C = 4$. Els radis son $2\mu/C = 0.1$, $2(1 - \mu)/C = 0.4$ i $C^{1/2} = 2$.

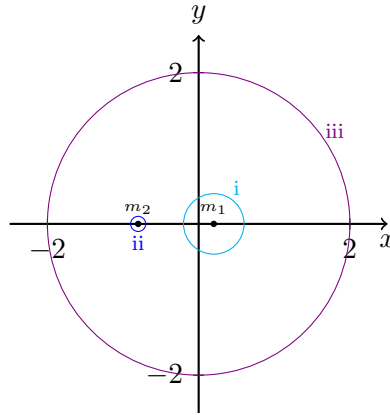


Figura 5: Aproximació circular de les corbes de velocitat per a $C = 4$ i $\mu = 0.2$.

Es pot comprovar que si la constant de Jacobi decreix, la mida dels ovals de velocitat zero que envolten m_1 i m_2 augmenta, mentre l'oval exterior s'encongeix. En la Figura 6 podem observar aquesta evolució per a $\mu = 0.012141$ (corresponent al sistema Terra-Lluna) i $C = 3.712$ i $C = 3.262$.

Sabem que, per a qualsevol valor de $\mu \leq \frac{1}{2}$, tenim que

$$\Phi(\mathcal{L}_2) > \Phi(\mathcal{L}_1) > \Phi(\mathcal{L}_3),$$

i per tant, quan el valor de la constant de Jacobi és reduït de $C > 2\Phi(\mathcal{L}_2)$, el primer valor crític de C trobat és $2\Phi(\mathcal{L}_2) = C_2$. La corba de velocitat zero associada a aquesta constant de Jacobi té dues branques. L'oval exterior s'encongeix i en C_2 manté el seu

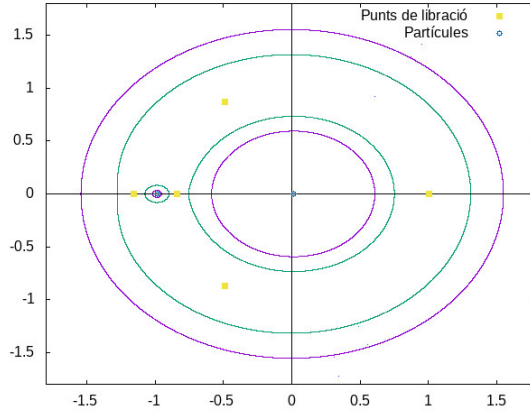


Figura 6: Corbes de velocitat zero per a $\mu = 0.012141$, la corba de color violeta amb $C = 3.712$ i la corba de color blau amb $C = 3.262$.

caràcter previ; tanca tant les primàries com tots els punts d'equilibri. Els ovals interiors s'amplien, es troben al punt \mathcal{L}_2 , i formen una figura en forma de vuit. En aquest procés els punts \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_3 queden fora dels ovals interiors, ja que els corresponents valors de la constant de Jacobi, C_1 i C_3 , són més petits que C_2 . Els ovals exteriors són més propers a \mathcal{L}_1 que a \mathcal{L}_3 , i els ovals interiors més grans, els que envolten la partícula de major massa, esdevenen en la meitat més gran de la figura en forma de vuit a C_2 . Aquest fet ho podem contemplar en la Figura 7 per a $\mu = 0.012141$.

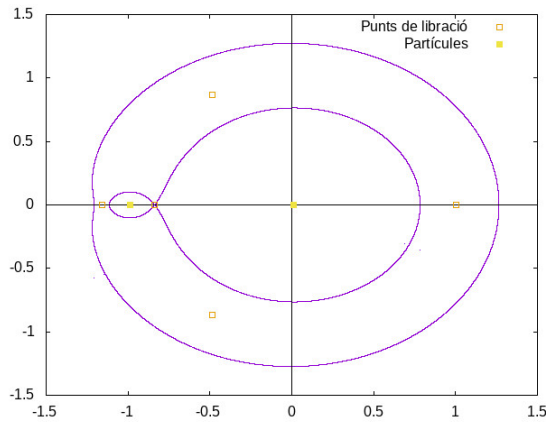


Figura 7: Corba de nivell zero per a $\mu = 0.012141$ i $C = C_2 \approx 3.2004$.

El càlcul de les interseccions dels ovals i de la figura en forma de vuit amb l'eix ξ facilita la construcció de les corbes de velocitat zero.

Les interseccions del costat de la dreta de la partícula de massa més gran amb l'eix ξ es poden obtenir de la següent manera: Tenint en compte l'expressió de 2Φ , (3.16), la constant de Jacobi ve donada per

$$C = \rho_2^2 + \mu(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2}, \quad (3.21)$$

i, com que $\rho_2 = \rho_1 - 1$ (cas (c) de quan vam trobar els punts d'equilibri d'Euler), tenim

que

$$C = \rho_2^2 + \mu(2\rho_2 + 1) + \frac{2\mu}{\rho_2 + 1} + \frac{2(1 - \mu)}{\rho_2}. \quad (3.22)$$

Per tant, per treure el valor de C , hem de resoldre una equació de quart grau per ρ_2 . Substituint $\rho_1 = \sqrt{(\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2}$ i $\rho_2 = \sqrt{(\xi - \mu)^2 + \eta^2}$ es pot comprovar que l'equació que ens queda té dos canvis de signe, per tant per la regla de Descartes, aquesta equació té dues arrels positives per a valors grans de C , una més petita i una més gran que $x_3 - \mu$, on x_3 és la coordenada de les abscises de \mathcal{L}_3 , això degut a que \mathcal{L}_3 separa les corbes de velocitat zero interiors i exteriors.

Quan estem entre les dues partícules, la intersecció de la figura en forma de vuit amb l'eix ξ s'obté quan $C = C_2$ és substituït en l'equació (3.22).

I, per últim, les interseccions al costat de l'esquerra de la partícula de massa més petita, son obtingudes també de l'equació (3.21), però ara utilitzant que $\rho_2 = 1 + \rho_1$, per tant hem de resoldre

$$C = (1 + \rho_1)^2 - \mu(1 + 2\rho_1) + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{1 + \rho_1}. \quad (3.23)$$

Tornem a tenir una equació de quart grau, però ara per ρ_1 . Aquesta equació torna a tenir dos canvis de signe, per tant per la regla de Descartes té dues arrels positives per a grans valors de C . Una arrel està a l'esquerra de \mathcal{L}_1 i l'altra a la dreta de \mathcal{L}_1 (i abans d'on es troba la partícula m_1), ja que sabem que \mathcal{L}_1 separa les corbes de velocitat zero interiors i exteriors. En $C = C_1$, aquestes dues arrels esdevenen iguals, com veurem després.

El moviment encara és possible tant dintre de la corba en forma de vuit com fora de la corba exterior en forma oval.

Una major reducció del valor de la C canvia la corba de velocitat zero en forma de vuit a una en forma de pera, ja que la corba no tornarà a creuar l'eix ξ a \mathcal{L}_2 ; de fet, no hi ha encreuament entre les primàries. La figura en forma de vuit per tant separa dos tipus de corbes de velocitat zero: això finalitza el cas $C > C_2$, amb corbes de velocitat zero ovals a l'interior i a l'exterior, i dona pas al següent cas $C_1 < C < C_2$, amb corbes de velocitat zero en forma de pera a l'interior i ovals a l'exterior.

3.4.2 Corbes exteriors ovals i interiors en forma de pera ($C_1 < C < C_2$)

El primer valor crític de $C = C_2$ s'aconsegueix a mesura que C decreix de $+\infty$. Amb una major disminució s'obté el valor de $C = C_1 < C_2$.

Quan $C_1 < C < C_2$ les corbes de velocitat zero constitueixen dues branques. La primera branca és la figura en forma de pera dins de la qual el moviment és possible. Aquesta corba envolta m_1 , m_2 i \mathcal{L}_2 , però \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_3 estan fora. Quan $C = C_2 - \varepsilon$, on $\varepsilon > 0$ i arbitràriament petit, la forma de vuit s'obre a \mathcal{L}_2 i forma la forma de pera per $C_1 < C < C_2$.

Similarment quan $C = C_1 + \varepsilon'$ la corba de velocitat zero de l'exterior no passa per \mathcal{L}_1 , però inclou totes les partícules i els punts de libració. Quan C decreix de C_2 a C_1 els ovals exteriors mantenen la seva forma general i només mostra un sagnat a prop de \mathcal{L}_1 . El moviment és sempre possible fora d'aquests ovals.

A la Figura 8 podem observar gràficament el que passa quan estem en aquest cas per $\mu = 0.012141$.

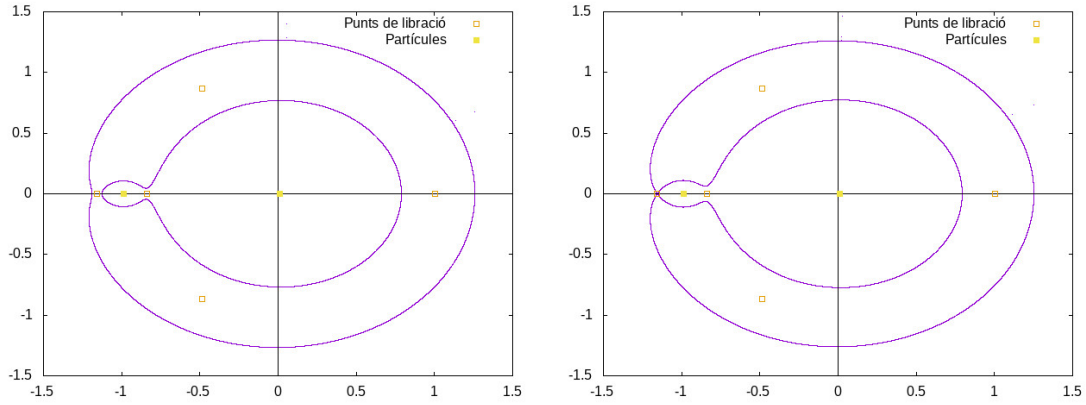


Figura 8: Corbes de velocitat zero per a $\mu = 0.012141$, amb $C = 3.192$ en la primera imatge i amb $C = C_1 \approx 3.1842$ en la segona.

3.4.3 Corbes en forma de ferradures ($C_3 < C < C_1$)

Quan el valor de C es redueix més enllà de $C = C_1$, el punt \mathcal{L}_1 no està en la corba de velocitat zero i només hi ha una branca de la corba. La cúspide a \mathcal{L}_1 , que existeix quan $C = C_1$, desapareix a mesura que la corba ja no intersecta l'eix x entre $-\infty$ i $\mu - 1$. La imatge de l'esquerra de la Figura 9 mostra corbes en forma de ferradures que inclouen \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 . Les interseccions amb l'eix de les x a prop de \mathcal{L}_3 es mouen més a prop de \mathcal{L}_3 quan $C \rightarrow C_3$ i, quan $C = C_3$ es forma una cúspide a \mathcal{L}_3 . La sèrie de corbes amb forma de ferradura comencen en C_1 quan una cúspide és formada en \mathcal{L}_1 i acaba amb C_3 quan la cúspide està a \mathcal{L}_3 , ho podem observar a la imatge de la dreta de la Figura 9. El moviment és possible a tot arreu fora de l'àrea tancada per la ferradura.

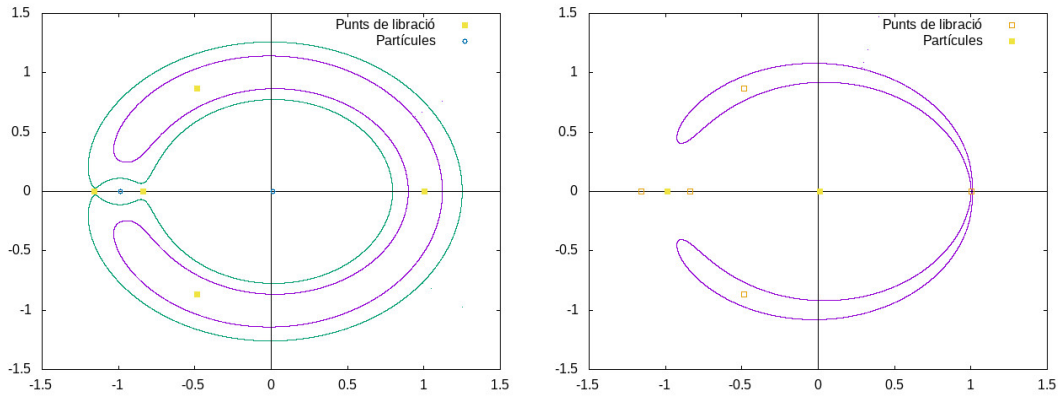


Figura 9: A l'esquerra corbes de velocitat zero per a $\mu = 0.012141$ i $C = 3.182$ en blau i amb $C = 3.062$ en violeta. A la dreta corba de velocitat zero per a $\mu = 0.012141$ i $C = C_3 \approx 3.02417$.

3.4.4 Corbes en forma de capgròs ($3 = C_4 = C_5 < C < C_3$)

Amb una major reducció de la constant de Jacobi des de C_3 , la cúspide desapareix a mesura que la corba deixa \mathcal{L}_3 . Les sèries de corbes de velocitat zero formen dues branques, una que tanca \mathcal{L}_4 i l'altra \mathcal{L}_5 . Aquestes corbes s'encongeixen als punts \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 a mesura

que C s'aproxima a 3. Es pot observar això a la Figura 10 on $\mu = 0.012141$, a més sabem que per simetria el mateix passa al voltant de \mathcal{L}_5 .

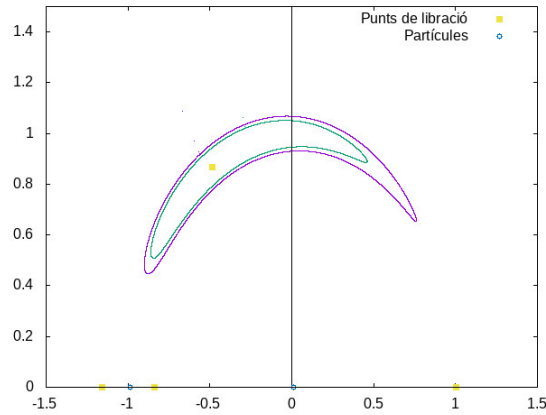


Figura 10: Corbes de velocitat zero per a $\mu = 0.012141$, la corba de color verd és la que té $C = 3.019$ i la de color violeta la que té a $C = 3.01299$.

Això conclou la discussió detallada de les diverses classes de corbes de velocitat zero. En resum, llavors, podem distingir quatre rangs de la constant de Jacobi, amb quatre tipus diferents de corbes de velocitat zero, corresponent a quatre tipus diferents d'àrees de possible moviment (en les figures que venen a seguir les corbes estan dibuixades per a $\mu = 0.3$).

- i. Per a grans valors de la constant de Jacobi, $C > C_2$, les àrees de possible moviment es mostren esquemàticament ombrejades en la Figura 11. Es pot veure que no hi ha comunicació entre les àrees.

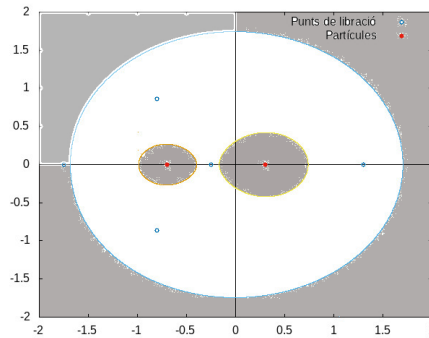


Figura 11: Forma general de les àrees permetides de moviment per $C > C_2$.

- ii. Quan el valor de la constant de Jacobi està entre C_1 i C_2 , l'àrea canvia i passa a ser l'àrea ombrejada en la Figura 12. Ara és possible la comunicació o l'intercanvi de partícules entre els entorns de les dues primàries, però el tercer cos encara roman fora del gran oval o dins de l'àrea en forma de campana.
- iii. El següent pas en el desenvolupament es produeix quan el valor de la constant de Jacobi està entre C_3 i C_1 . L'àrea permitida està ombrejada en la Figura 13. Ara és possible l'intercanvi entre les àrees exteriors i interiors i això ocorre al costat de la primària de massa més petita.

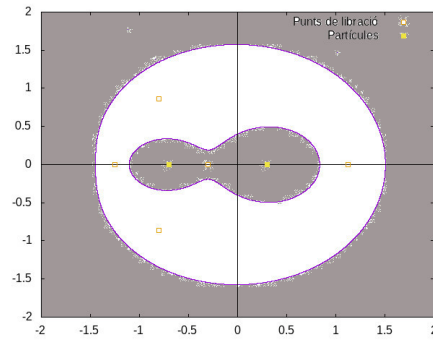


Figura 12: Forma general de les àrees permetides de moviment per a $C_1 < C < C_2$.

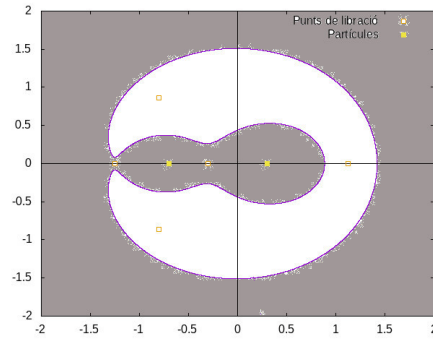


Figura 13: Forma general de les àrees permetides de moviment per a $C_3 < C < C_1$

- iv. L'últim pas és quan el valor de la constant de Jacobi està entre C_3 i 3, o $3 = C_4 = C_5 < C < C_3$. Les àrees prohibides que envolten \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 es redueixen quan $C \rightarrow 3$ i el moviment és possible a tot arreu quan $C \leq 3$. La Figura 14 mostra l'àrea ombrejada en que és possible el moviment (per simetria veuríem el mateix a \mathcal{L}_5).

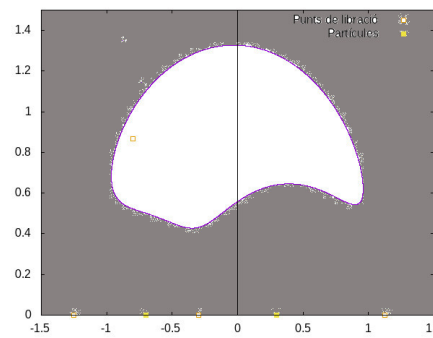


Figura 14: Forma general de les àrees permetides de moviment per a $C \leq C_3$.

3.5 Estabilitat dels punts de libració

Finalment, després de calcular els punts d'equilibri del problema restringit planar circular dels tres cossos i estudiar les seves corbes de velocitat zero, ara el nostre objectiu és

estudiar l'estabilitat d'aquests punts. Per fer-ho primer donarem definicions i alguns resultats que ens seran útils en l'estudi.

Definició 3.15. *Un sistema Hamiltonià és un sistema de $2n$ equacions diferencials ordinàries de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p, & \dot{p} &= -H_q, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p), & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.24)$$

on $H = H(t, q, p)$, el Hamiltonià, és una funció suau de valors reals definida per $(t, q, p) \in \mathcal{O}$, on \mathcal{O} és un conjunt obert en $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Els vectors² $q = (q_1, \dots, q_n)$ i $p = (p_1, \dots, p_n)$ son tradicionalment anomenats vectors posició i moment, respectivament, perquè això és el que aquestes variables representen en molts exemples clàssics. A més, la variable t és anomenada temps.

Definició 3.16. *L'enter n de la definició de sistema Hamiltonià és el nombre de graus de llibertat del sistema.*

Notació 2. *En general, introduïm el vector $2n$ z , la matriu antisimètrica $2n \times 2n$ J i el gradient de H per*

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}$$

on 0 és la matriu $n \times n$ que té tots els seus coeficients zero i I és la matriu identitat $n \times n$. En aquesta notació (3.24) s'esdevé

$$\dot{z} = J \nabla H(t, z). \quad (3.25)$$

Proposició 3.17. *Considerem el sistema Hamiltonià (3.25). Aleshores*

$$\operatorname{div}(J \nabla H) = 0.$$

Demostració: Utilitzant la definició de sistema Hamiltonià tenim

$$\operatorname{div}(J \nabla H) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Proposició 3.18. *Si $H(\xi, \eta; p, P) = \frac{1}{2}(p + \eta)^2 + \frac{1}{2}(P - \xi)^2 - \Phi(\xi, \eta)$, amb $p = \dot{\xi} - \eta$ i $P = \dot{\eta} + \xi$. Aleshores el sistema (3.7) es pot escriure com un sistema Hamiltonià*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial H}{\partial P}, & \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

²Els vectors s'han d'entendre com a vectors columnnes, però en el text els escriurem com a vectors fila.

Demostració: Comencem observant que podem escriure (3.7) de la següent manera

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{\xi} - \eta) &= \dot{\eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\eta} + \xi) &= -\dot{\xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},\end{aligned}$$

d'aquesta manera tenim

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= P - \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \frac{dP}{dt} &= -p - \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= p + \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= P - \xi.\end{aligned}$$

Ara tenint tot això en compte demostrem l'enunciat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial(\frac{1}{2}(p + \eta)^2 + \frac{1}{2}(P - \xi)^2 - \Phi(\xi, \eta))}{\partial p} = p + \eta = \dot{\xi}, \\ -\frac{\partial H}{\partial \xi} &= -\frac{\partial(\frac{1}{2}(p + \eta)^2 + \frac{1}{2}(P - \xi)^2 - \Phi(\xi, \eta))}{\partial \xi} = -(-P + \xi - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}) = \dot{p}.\end{aligned}$$

Les altres igualtats es demostren de manera anàloga. ■

Notació 3. Aquest cas en la notació que hem utilitzat per a definir un sistema Hamiltonià, tenim que $q = (\xi, \eta)$ i $p = (p, P)$.

Definició 3.19. A la H definida en la proposició anterior l'anomenem Hamiltonià del problema restringit dels tres cossos. També el podem escriure de la següent forma

$$\begin{aligned}H(p, P, \xi, \eta) &= \frac{1}{2}(p^2 + P^2) - (\xi P - \eta p) + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \Phi(\xi, \eta) \\ &= \frac{1}{2}(p^2 + P^2) - (\xi P - \eta p) - U(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)\end{aligned}$$

A partir d'ara deixarem de treballar amb les equacions (3.7) i passarem a treballar amb el Hamiltonià del problema restringit dels tres cossos.

Proposició 3.20. El punt (p, P, ξ, η) és un punt d'equilibri si, i només si, $p = -\eta$, $P = \xi$, $\xi + \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$ i $\eta + \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$.

Demostració: Sabem que un punt d'equilibri és aquell que anul·la totes les derivades parcials del Hamiltonià H , per tant imposam que el punt (p, P, ξ, η) és un punt d'equilibri i això ens donarà el que volem:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\xi} = p + \eta \Leftrightarrow p = -\eta, \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \eta} = -\dot{P} = p + \eta - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = p + \eta - \eta - \frac{\partial U}{\partial \eta} = p - \frac{\partial U}{\partial \eta} \Leftrightarrow p - \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{\eta} = P - \xi \Leftrightarrow P = \xi, \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \xi} = -\dot{p} = -P + \xi - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -P + \xi - \xi - \frac{\partial U}{\partial \xi} = -P - \frac{\partial U}{\partial \xi} \Leftrightarrow -P - \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0,\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$ i la definició de \dot{p} , \dot{P} , $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$ donada en la demostració de la proposició (3.18). Substituint p per $-\eta$ en la segona equació i P per ξ en l'última equació, tenim el resultat. ■

Observació 3.21. A l'apartat anterior vam demostrar que el problema restringit dels tres cossos té cinc punts d'equilibri, aquests són els punts de libració. Si suposem que un d'aquests punts té coordenades (ξ, η) , de la proposició anterior tenim que aquest punt té coordenades $(-\eta, \xi, \xi, \eta)$ en el sistema Hamiltonià descrit en la proposició (3.18).

Ara bé, el nostre objectiu és saber què passa si es col·loca una partícula a prop d'un dels punts de libració amb velocitat (relativa) propera a zero, romandrà en aquesta posició per sempre? Això passaria si el punt d'equilibri és estable.

Considerem l'equació diferencial

$$\dot{z} = f(z), \quad (3.27)$$

on f és una funció suau que va d'un conjunt obert $O \subset \mathbb{R}^m$ a \mathbb{R}^m . Suposem que l'equació té un punt d'equilibri en $z_0 \in O$, llavors, $f(z_0) = 0$. Sigui $\phi(t, z)$ la solució general de (3.27).

Definició 3.22. Es diu que el punt d'equilibri z_0 és positivament (respectivament, negativament) estable en el sentit de Lyapunov, si per tot $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t, z) - z_0\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

(respectivament, $\forall t \leq 0$).

Definició 3.23. El punt d'equilibri z_0 és estable en sentit de Lyapunov si és positivament i negativament estable alhora. I z_0 és inestable si no és estable.

Observació 3.24. En molts llibres el concepte estable és equivalent a positivament estable, però el criteri anterior és comú en la teoria d'equacions diferencials hamiltonianes.

A més a més, els adjectius “positivament” i “negativament” també es poden utilitzar amb el concepte “inestable”.

Definició 3.25. El punt d'equilibri z_0 és asimptòticament estable, si és positivament estable, i existeix $\zeta > 0$ tal que $\phi(t, z) \rightarrow z_0$ quan $t \rightarrow +\infty$ per tot $\|z - z_0\| < \zeta$.

Una de les tècniques per demostrar l'estabilitat d'un punt d'equilibri d'un sistema d'equacions diferencials, és analitzar el sistema linealitzat al voltant d'aquest punt, és a dir, escriure (3.27) en la forma, suposant que el punt d'equilibri es troba a l'origen,

$$\dot{z} = Az + g(z), \quad (3.28)$$

on $A = \partial f(0)/\partial z$ i $g(z) = f(z) - Az$; per tant, $g(0) = \partial g(0)/\partial z = 0$.

El teorema següent ens dona les eines per a saber, a partir dels valors propis de A si el punt d'equilibri $z_0 = 0$ és asimptòticament estable. No veurem la seva demostració, però aquesta es pot trobar a diferents bibliografies, com per exemple al llibre [7].

Teorema 3.26 (Mètode indirecte de Lyapunov). Considerem l'equació diferencial (3.28). Aleshores,

i. L'origen és asimptòticament estable si tots els valors propis de A tenen part real negativa.

ii. L'origen és inestable si un o més dels valors propis de A tenen part real positiva.

Per a poder aplicar el teorema anterior sobre el sistema Hamiltonià (3.25) amb el Hamiltonià del problema restringit dels tres cossos, el que farem serà linealitzar el sistema posant-lo en la forma (3.28) i estudiar els valors propis de A en cada un dels punts d'equilibri. Per fer-ho, abans necessitem uns resultats previs que introduïm a continuació.

Definició 3.27. *Siguin*

$$y_k = y_k(x_1, \dots, x_m), \quad k = 1, \dots, m$$

funcions que denoten un canvi de variables en una regió m -dimensional. Suposem que cada derivada parcial $\partial y_k / \partial x_l$ existeix i és contínua. Anomenem matriu Jacobiana del canvi de variables a la matriu

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Definició 3.28. *Sigui $M \in gl(2n, \mathbb{F})$, matriu $2n \times 2n$ amb coeficients a \mathbb{R} o \mathbb{C} . Diem que M és simplèctica si compleix*

$$M^T J M = J,$$

on J és la matriu $2n \times 2n$ definida anteriorment i M^T denota la matriu trasposada de M .

Corollari 3.29. *Sigui M una matriu simplèctica, aleshores M té inversa i $M^{-1} = -JM^T J$.*

Demostració: És fàcil comprovar, per la definició de la matriu J , que $J^2 = -I$ i que $J^{-1} = -J$, on I és la matriu identitat. Tenint en compte això, $|J^2| = |J|^2 = |I| = 1$, el que implica que $|J| \neq 0$.

Ara bé, donat que $|M^T J M| = |J|$, ja que M és una matriu simplèctica, i $|M^T| = |M|$, el fet que $|J| \neq 0$ implica que $|M|^2 = \pm 1 \neq 0$, per tant la matriu M té inversa. ■

Proposició 3.30. *El sistema Hamiltonià es manté sota un canvi de variables canònic, és a dir, sota un canvi de variables tal que la seva matriu Jacobiana és simplèctica.*

Demostració: Sabem que un sistema Hamiltonià és un sistema de $2n$ equacions diferencials ordinàries de la forma

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.29)$$

i H és una funció de $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$. Sigui

$$\begin{aligned} p_k &= p_k(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n) \\ q_k &= q_k(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n) \end{aligned} \quad (3.30)$$

un canvi de variables canònic. Substituint les variables originals pel canvi de variables anterior, H esdevé una funció de $P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n$. Demostrarem que el sistema (3.29) manté la seva forma original sota el canvi de variable (3.30), aquesta és,

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

Denotem per \dot{p} la matriu $n \times 1$ amb elements $\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n$, i de manera similar \dot{q} , \dot{P} , \dot{Q} . Les funcions del sistema (3.30) tenen derivades

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial p_k}{\partial P_l} \dot{P}_l + \frac{\partial p_k}{\partial Q_l} \dot{Q}_l \right), \\ \dot{q}_k &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial q_k}{\partial P_l} \dot{P}_l + \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \dot{Q}_l \right). \end{aligned}$$

Si \mathcal{M} és la matriu Jacobiana de (3.30), això significa que

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix}.$$

I com que \mathcal{M} és una matriu simplèctica pel corollari anterior sabem que té inversa, aleshores

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Ara bé, sabem que $\mathcal{M}^T J \mathcal{M} = J$, per tant $\mathcal{M}^{-1} = J^{-1} \mathcal{M}^T J$, i com que $J^{-1} = -J$, ens queda $\mathcal{M}^{-1} = -J \mathcal{M}^T J$, per tant

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = -J \mathcal{M}^T J \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Tenint en compte la definició de la matriu J , tenim

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = -J \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{pmatrix}.$$

Multipliquem la matriu J per l'esquerra de cada costat de la igualtat anterior, com que $J^2 = -I$, tenim

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ -\dot{P} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{pmatrix}.$$

Per (3.29), això esdevé

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ -\dot{P} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

Calculant la multiplicació de les dues matrius de la part dreta de la igualtat anterior obtenim

$$\begin{aligned} \dot{Q}_k &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_k} + \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right), \\ \dot{P}_k &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right). \end{aligned}$$

Finalment, per la regla de la cadena tenim que la part de la dreta de les igualtats anterior i de les igualtats (3.31) son iguals. Això completa la demostració. ■

Passem a linealitzar el sistema Hamiltonià (3.25) utilitzant el Hamiltonià del problema restringit dels tres cossos per a estudiar els seus valors propis en cada un dels punts d'equilibri: Hem vist que si (x_1, x_2) és un punt tal que compleix (3.9), un punt d'equilibri, aleshores el punt (x_1, x_2, y_1, y_2) és un punt d'equilibri del sistema Hamiltonià on $y_1 = -x_2$ i $y_2 = x_1$. Sigui (ξ, η) un dels cinc punts d'equilibri del problema restringit dels tres cossos. Per tal d'estudiar el moviment a prop d'aquest punt d'equilibri, fem el següent canvi de coordenades

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - \xi, & v_1 &= y_1 + \eta, \\ u_2 &= x_2 - \eta, & v_2 &= y_2 - \xi. \end{aligned}$$

Aquest canvi de coordenades (u_1, u_2, v_1, v_2) és clarament simplèctic, ja que la seva matriu Jacobiana és la identitat, llavors, podem realitzar aquest canvi de coordenades en el Hamiltonià (3.26) i, per la proposició (3.30), es preservarà la seva estructura. Expandint el Hamiltonià fins als termes de segon ordre, obtenim

$$H = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_2v_1 - u_1v_2 - \frac{1}{2}(U_{x_1x_1}u_1^2 + 2U_{x_1x_2}u_1u_2 + U_{x_2x_2}u_2^2) + \dots$$

No hi ha termes lineals perquè l'expansió es realitza en un punt d'equilibri, per tant s'anul·len i el terme constant ha sigut omès perquè no contribueix en la formació del sistema corresponent d'equacions diferencials. Si linealitzem el sistema, la funció hamiltoniana quadràtica anterior dona lloc a la següent matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1x_1} & U_{x_1x_2} & 0 & 1 \\ U_{x_1x_2} & U_{x_2x_2} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Els següents càlculs son una mica més compactes definint

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + U(x_1, x_2).$$

Els valors propis de la matriu (3.32) determinen el comportament del sistema linealitzat. El polinomi característic és

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (4 - V_{x_1x_1} - V_{x_2x_2})\lambda^2 + V_{x_1x_1}V_{x_2x_2} - V_{x_1x_2}^2 = 0. \quad (3.33)$$

On les derivades parcials son

$$\begin{aligned} V_{x_1x_1} &= 1 + \mu \frac{3(x_1 + 1 - \mu)^2 - \rho_1^2}{\rho_1^5} + (1 - \mu) \frac{3(x_1 - \mu)^2 - \rho_2^2}{\rho_2^5}, \\ V_{x_1x_2} &= 3x_1x_2 \left(\frac{\mu}{\rho_1^5} + \frac{1 - \mu}{\rho_2^5} \right), \\ V_{x_2x_2} &= 1 + \mu \frac{3x_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1^5} + (1 - \mu) \frac{3x_2^2 - \rho_2^2}{\rho_2^5}. \end{aligned}$$

Cal avaluar-les en els punts d'equilibri. Llavors considerarem els punts col·lineals i els punts triangulars separatament.

Lema 3.31. *En els punts col·lineals, la matriu (3.32) té dos valors propis reals i dos valors propis purament imaginaris.*

Demostració: Per càlcul directe, utilitzant $x_1 = \xi$ i $x_2 = 0$, es troba que als punts col·lineals

$$\begin{aligned} V_{x_1x_1} &= 1 + 2\mu\rho_1^{-3} + 2(1-\mu)\rho_2^{-3} > 0 \\ V_{x_1x_2} &= 0 \\ V_{x_2x_2} &= 1 - \mu\rho_1^{-3} - (1-\mu)\rho_2^{-3} < 0. \end{aligned}$$

Només l'última afirmació requereix un treball addicional. Ho farem per \mathcal{L}_1 .

Si $(\xi, 0)$ son les coordenades del punt d'Euler \mathcal{L}_1 , aleshores $\rho_1 = \xi + 1 - \mu$, $\rho_2 = \xi - \mu$, i ξ és una solució real de $V_{x_1} = 0$, això és, del polinomi de grau cinc

$$\xi - \mu\rho_1^{-2} - (1-\mu)\rho_2^{-2} = 0.$$

Utilitzem aquesta relació de la següent forma

$$(1-\mu)\rho_2^{-2} = \rho_2 - \mu\rho_1^{-2} + \mu$$

quan avaluem la segona derivada de V en $(\xi, 0)$; això és, obtenim

$$\begin{aligned} V_{x_2x_2} &= 1 - \mu\rho_1^{-3} - \frac{1}{\rho_2}(\rho_2 - \mu\rho_1^{-2} + \mu) \\ &= \frac{\mu}{\rho_2}(1 - \rho_1^{-2} - \rho_2\rho_1^{-3}) \\ &= \frac{\mu}{\rho_2}(1 - \rho_1^{-3}) < 0. \end{aligned}$$

L'última igualtat segueix de que $\rho_2 = 1 + \rho_1$ i la desigualtat del fet que $0 < \rho_1 < 1$.

Agafant $A = 2 - \frac{1}{2}(V_{x_1x_1} + V_{x_2x_2})$ i $B = V_{x_1x_1}V_{x_2x_2}$, el polinomi característic per als punts col·lineals té la següent forma

$$\lambda^4 + 2A\lambda + B = 0$$

amb solucions

$$\lambda^2 = -A \pm \sqrt{A^2 - B}.$$

Com que $B < 0$ tenim el resultat. ■

Lema 3.32. *Els punts d'equilibri d'Euler son inestables. Per tant, algunes solucions que comencen a prop dels punts d'equilibri d'Euler s'allunyanaran d'aquests punts quan el temps tendeix a infinit.*

Demostració: Aquest resultat és directe del teorema del mètode indirecte de Lyapunov aplicat al lema anterior.

Lema 3.33. *En els punts d'equilibri triangular, la matriu (3.32) té valors propis purament imaginaris per a valors de μ en el interval $0 < \mu < \mu_1$, on $\mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9)$. Per $\mu = \mu_1$ la matriu té els valors propis repetits $\pm i\sqrt{2}/2$ amb divisors no elementals. Per $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$, els valors propis estan fora de l'eix imaginari. (μ_1 és anomenada massa de Routh).*

Demostració: Utilitzant que $\rho_1 = \rho_2 = 1$ on $\rho_1^2 = (\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2$ i $\rho_2 = (\xi - \mu)^2 + \eta^2$, aconseguim que les coordenades del punt d'equilibri \mathcal{L}_4 son $(\mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (per simetria \mathcal{L}_5 es troba a $(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$). Per tant podem calcular les segones derivades de V explícitament. Aquestes son

$$V_{x_1x_1} = \frac{3}{4}, \quad V_{x_1x_2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad V_{x_2x_2} = \frac{9}{4}.$$

Per tant el polinomi característic, donat a (3.33), queda de la següent forma

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

I té com arrels

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}]. \quad (3.34)$$

Quan l'arrel quadrada anterior és zero, tenim el doble valor propi $\pm i\sqrt{2}/2$. Això ocorre quan $\mu = \mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9)$ (i a causa de la simetria també per a $1 - \mu_1$). Es pot veure que la matriu (3.32) no té divisors elementaris simples, el que significa que no és diagonalitzable.

Per $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$, l'arrel quadrada de (3.34) dona valors imaginaris, ja que el que té dintre és negatiu, i per tant λ serà un nombre complex amb part real no nul·la. Els valors propis de (3.33) es troben fora de l'eix imaginari, per tant els punts triangulars de Lagrange no poden ser estables.

Per últim, per a $0 < \mu < \mu_1$ (i $1 - \mu_1 < \mu < 1$) la matriu (3.32) té valors propis purament imaginaris de la forma $\pm\omega_1$ i $\pm\omega_2$. Per conveni agafem com a ω_1 el més gran dels dos valors, per tant ω_1 i ω_2 son únicament definits per les condicions

$$0 < \omega_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \omega_1, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1, \quad \omega_1^2\omega_2^2 = \frac{27\mu(1 - \mu)}{4},$$

i les aconseguim utilitzant el polinomi característic. ■

Lema 3.34. *Per a $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$, els punts \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son inestables.*

Demostració: Pel lema anterior sabem que per a $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$ els valors propis de (3.32) tenen part real i part imaginària. A més sabem que el sistema Hamiltonià té divergència nul·la això implica que un dels valors propis reals és positiu i l'altre negatiu, per tant, pel teorema indirecte de Lyapunov, tenim que \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son inestables per aquests valors de μ . ■

Arribats a aquest punt ja sabem que \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 son inestables sempre, independentment del valor de μ , i que \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son inestables quan $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$. A partir d'ara presentarem resultats que ens diuen una mica més de com és aquesta inestabilitat en cada un d'aquests punts.

Considerem un altre cop l'equació diferencial $\dot{z} = f(z)$. Sigui z_0 un punt d'equilibri. Sigui $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ suau on O és un entorn obert del punt d'equilibri z_0 .

Definició 3.35. *Es diu que V és definida positiva (respecte a z_0) si existeix un entorn $Q \subset O$ de z_0 tal que $V(z_0) < V(z), \forall z \in Q \setminus \{z_0\}$. Això és, z_0 és un mínim local estricte de V .*

Definició 3.36. Definim la derivada orbital de V , per $\dot{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$ on

$$\dot{V}(z) = \nabla V(z) \cdot f(z).$$

Teorema 3.37 (Teorema d'estabilitat de Lyapunov). *Si existeix una funció V que és definida positiva respecte a z_0 i tal que $\dot{V} \leq 0$ en un entorn de z_0 , aleshores el punt d'equilibri z_0 és positivament estable. La funció V és anomenada funció de Lyapunov.*

Demostració: Sigui $\epsilon > 0$. Sense pèrdua de generalitat, suposem que $z_0 = 0$ i que $V(0) = 0$. Donat que $V(0) = 0$ i 0 és un mínim estricte de V , existeix $\gamma > 0$ tal que $V(z)$ és positiu per $0 < \|z\| \leq \gamma$. Agafant γ molt petita si és necessari, podem assegurar que $\dot{V}(z) \leq 0$ per $\|z\| \leq \gamma$ i que $\gamma < \epsilon$.

Sigui $M = \min\{V(z) : \|z\| = \gamma\}$. Com que $V(0) = 0$ i V és contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $V(z) < M$ per $\|z\| < \delta$ i $\delta < \gamma$. Afirmem que si $\|\zeta\| < \delta$ aleshores $\|\phi(t, \zeta)\| \leq \gamma < \epsilon$ per tot $t \geq 0$.

Donat que $\|\zeta\| < \delta$, existeix t^* tal que $\|\phi(t, \zeta)\| < \gamma$ per tot $0 \leq t < t^*$ i t^* és el nombre més petit que compleix això. Assumim que t^* és finit i llavors $\|\phi(t^*, \zeta)\| = \gamma$. Definim $v(t) = V(\phi(t, \zeta))$, per tant $v(0) < M$ i $\dot{v}(t) \leq 0$ per $0 \leq t < t^*$ i aleshores $v(t^*) < M$. Però $v(t^*) = V(\phi(t^*, \zeta)) \geq M$ que és una contradicció i per tant t^* ha de ser infinit. ■

Una implicació immediata del teorema de l'estabilitat de Lyapunov és la següent. Considerem el sistema Hamiltonià

$$\dot{z} = J\nabla H(z),$$

on H és una funció suau de $O \subset \mathbb{R}^{2n}$ en \mathbb{R} . Un altre cop sigui $z_0 \in O$ un punt d'equilibri i sigui $\phi(t, \zeta)$ la solució general. Un bon candidat a funció de Lyapunov en aquest sistema Hamiltonià és la funció Hamiltoniana mateixa, perquè les òrbites del sistema Hamiltonià viuen en els conjunts de nivell del Hamiltonià. Per tant $\dot{V} = \dot{H} = 0$. Per tant, si H és definida positiva podem aplicar el teorema anterior. I si H és definida negativa podem agafar $-H$ com a funció de Lyapunov.

Corollari 3.38 (Teorema d'estabilitat de Dirichlet). *Si z_0 és un mínim o un màxim local estricte de H , aleshores z_0 és un punt d'equilibri estable del sistema Hamiltonià.*

Demostració: Com que $\pm H$ és una integral, podem assumir que H té un mínim. Com que $\dot{H} = 0$, el sistema és positivament estable. Invertim el temps substituint t per $-t$. En el nou temps $\dot{H} = 0$, per tant el sistema és positivament estable en el nou temps o negativament estable en el temps original. ■

Exemples 3.39. Considerem un Hamiltonià H de dos graus de llibertat que pot ser desenvolupat com

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^2 + y_2^2) + O(\|z\|^3), \quad (3.35)$$

per certs ω_1 i ω_2 reals no nuls. Els valors propis del camp vectorial linealitzat son $\pm\omega_1 i$, $\pm\omega_2 i$, per tant no podem concloure estabilitat o inestabilitat per aquests valors propis. No obstant, si ω_1 i ω_2 son del mateix signe, aleshores H és definida a prop del 0. Aleshores pel teorema de Dirichlet 0 és estable.

Es pot comprovar que per $0 < \mu < \mu_1$ i $1 - \mu_1 < \mu < 1$ el desenvolupament de Taylor del Hamiltonià del problema restringit dels tres cossos pot ser escrit com (3.35), la demostració es pot trobar a [4]. Breument, això es dona expandint H al voltant dels punts d'equilibri fins a segon ordre. Això dona una part quadràtica de H a prop del punt d'equilibri. I utilitzant un canvi de coordenades lineal simplèctic, podem escriure aquesta part quadràtica com (3.35). Però, sabem que ω_1 i ω_2 tenen signes oposats per a qualsevol valor de μ , per tant no podem aplicar el teorema de Dirichlet. Aleshores necessitarem arguments més sofisticats.

Teorema 3.40 (Teorema de Chetaev). *Sigui $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suau i sigui Ω un subconjunt obert de O amb les següents propietats:*

- $z_0 \in \partial\Omega$.
- $V(z) > 0$ per $z \in \Omega$.
- $V(z) = 0$ per $z \in \partial\Omega$.
- $\dot{V} = V(z) \cdot f(z) > 0$ per $z \in \Omega$.

Aleshores la solució d'equilibri z_0 de (3.27) és inestable. En particular, existeix un entorn Q del punt d'equilibri tal que totes les solucions que comencen en $Q \cap \Omega$ abandonen Q en temps positiu.

Demostració: Un altre cop suposem $z_0 = 0$. Sigui $\epsilon > 0$ petita de manera que la bola tancada de radi ϵ i centre z_0 està continguda en el domini O , i sigui $Q = \Omega \cap \{\|z\| < \epsilon\}$. Afirmem que existeixen punts arbitràriament propers al punt d'equilibri que es mouen com a mínim a distància ϵ del punt d'equilibri.

Q té punts arbitràriament propers a l'origen, per tant per algun $\delta > 0$ existeix un punt $p \in Q$ amb $\|p\| < \delta$ i $V(p) > 0$.

Sigui $v(t) = V(\phi(t, p))$. Qualsevol $\phi(t, p)$ es manté en Q per tot $t \geq 0$ o $\phi(t, p)$ travessa la fita de Q per primer cop en el temps t^* .

Si $\phi(t, p)$ es manté en Q , aleshores $v(t)$ és creixent perquè $\dot{v} > 0$, i llavors $v(t) \geq v(0) > 0$ per $t \geq 0$. L'adherència de $\{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ és compacta i $\dot{v} > 0$ en aquest conjunt, per tant $\dot{v} \geq \kappa > 0$ per tot $t \geq 0$. Aleshores $v(t) \geq v(0) + \kappa t \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$. Això és una contradicció perquè $\phi(t, p)$ es manté en un entorn de l'origen i v és contínua.

Ara, si $\phi(t, p)$ creua la fita de Q per primera vegada en el temps $t^* > 0$, aleshores $\dot{v} > 0$ per $0 \leq t < t^*$ i $v(t^*) \geq v(0) > 0$. Com que la fita de Q consisteix en punts q on $V(q) = 0$ o on $\|q\| = \epsilon$, això implica que $\|v(t^*)\| = \epsilon$. ■

Com a primera aplicació considerem un sistema Hamiltonià de dos graus de llibertat amb un punt d'equilibri tal que els valors propis d'aquest sistema en el punt d'equilibri són $\pm\omega i, \pm\lambda$, $\omega \neq 0, \lambda \neq 0$; és a dir, un parell de valors propis imaginaris purs i un parell de valors propis reals. Ja vam veure que els punts d'equilibri col·lineals $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ i \mathcal{L}_3 són d'aquest tipus. A més ja sabem que són inestables, però podem saber més sobre el flux a prop d'aquests punts. Considerem el sistema

$$H = \frac{\omega}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \lambda x_2 y_2 + H_r(x, y) \quad (3.36)$$

on H_r és una funció real analítica en un entorn de l'origen en \mathbb{R}^4 en els arguments mostrats i d'almenys tercer grau. Es pot veure que el Hamiltonià dels punts d'equilibri d'Euler es pot escriure de la forma (3.36).

Per a determinar els detalls sobre la inestabilitat dels punts d'equilibri d'Euler, o punts d'equilibri col·lineals, necessitarem el resultat del següent teorema, el teorema d'existència de solucions periòdiques, anomenat *Teorema del centre de Lyapunov*. Però, abans d'enunciar-lo i demostrar-lo, necessitem definir uns conceptes i demostrar un resultat previ que es necessita en la demostració.

Suposem que les equacions diferencials depenen d'alguns paràmetres, per tant considerem

$$\dot{z} = f(z, \nu), \quad (3.37)$$

on $f : O \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^m$ és suau, O (el domini) és obert en \mathbb{R}^m , i \mathcal{Q} (l'espai de paràmetres) és obert en \mathbb{R}^k . La solució general $\phi(t, \zeta, \nu)$ també és suau en el paràmetre ν .

Sigui ζ' un punt d'equilibri quan $\nu = \nu'$, és a dir, $f(\zeta', \nu') = 0$.

Definició 3.41. Una continuació del punt d'equilibri ζ' és una funció suau $u(\nu)$ definida per ν prop ν' tal que $u(\nu') = \zeta'$, i $u(\nu)$ és un punt d'equilibri de (3.37) per tot ν , és a dir, $f(u(\nu), \nu) = 0$.

Definició 3.42. El punt d'equilibri ζ' és un punt d'equilibri elemental si $\frac{\partial f(\zeta', \nu')}{\partial \zeta}$ no és singular, és a dir, si tots els seus valors propis són diferents de zero.

Definició 3.43. La solució $\phi(t, \zeta', \nu')$ és T -periòdica si i només si $\phi(T, \zeta', \nu') = \zeta'$.

Definició 3.44. Sigui $\phi(t, \zeta', \nu')$ una solució T -periòdica. Una continuació d'aquesta solució periòdica és un parell de funcions suaus, $u(\nu), \tau(\nu)$, definides per tot ν prop ν' tal que $u(\nu') = \zeta'$ i $\tau(\nu') = T$, i $\phi(t, u(\nu), \nu)$ és $\tau(\nu)$ -periòdica.

Enunciem el següent lema sense demostració, la seva demostració la podem trobar al llibre [2]:

Lema 3.45. Sigui $\phi(t, \zeta', \nu')$ una solució T -periòdica. Aquesta solució és elemental si $+1$ és un valor propi de la matriu $\frac{\partial \phi(T, \zeta', \nu')}{\partial \zeta}$ amb multiplicitat un per a equacions diferencials autònomes generals i amb multiplicitat dos per a sistemes amb integrals no degenerades, és a dir, sistemes amb integrals que compleixen que el gradient en el punt és no nul (per exemple, sistemes Hamiltonians).

Definició 3.46. Sigui $\phi(t, \zeta', \nu')$ una solució T -periòdica. Els valors propis de la matriu $\frac{\partial \phi(T, \zeta', \nu')}{\partial \zeta}$ són anomenats multiplicadors (de la solució periòdica).

Definició 3.47. Sigui $\phi(t, \zeta')$ una solució T -periòdica. Definim com a aplicació de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ com

$$\pi(\zeta) = \phi(\mathcal{T}(\zeta), \zeta),$$

on Σ és un hiperplà de codimensió un a ζ' i transversal a $f(\zeta')$ (secció transversal), Σ_0 és un entorn de ζ' i, per a cada $\zeta \in \Sigma_0$, $\mathcal{T}(\zeta)$ està prop de T , l'anomenem primer temps de retorn.

Per a la demostració dels dos resultats que segueixen necessitem definir el concepte d'aplicació de Poincaré en una superfície integrable, però se'n escapa del contingut d'aquest treball i el citarem sense definir-lo, més informació sobre és possible trobar al llibre [2].

Proposició 3.48. Un punt d'equilibri elemental, o una solució periòdica elemental, o una solució periòdica elemental en un sistema amb una integral no degenerada poden ser continuats.

Demostració: Per a un punt d'equilibri, apliquem el teorema de la funció implícita a la funció $f(\zeta, \nu) = 0$. Suposem que $f(\zeta', \nu') = 0$ i que $\frac{\partial f(\zeta', \nu')}{\partial \zeta}$ és no singular, aleshores el teorema de la funció implícita afirma l'existència de la funció $u(\nu)$ tal que $u(\nu') = \zeta'$ i $f(u(\nu), \nu) \equiv 0$.

Ara considerem el cas periòdic. Com que l'existència del primer temps de retorn i de l'aplicació de Poincaré depenen del teorema de la funció implícita (demostrat a l'assignatura d'EDOs), aquestes funcions depenen suaument del paràmetre ν . Per acabar, apliquem el teorema de la funció implícita a $\pi(\zeta, \nu) - \zeta = 0$, on $\pi(\zeta, \nu)$ és l'aplicació de Poincaré de la secció transversal a la solució periòdica quan $\nu = \nu'$.

Per acabar, si el sistema té una integral $I(\zeta, \nu)$, aleshores la construcció de l'aplicació de Poincaré en una superfície integrable depèn suaument de ν . Apliquem el teorema de la funció implícita una altra cop a l'aplicació $Q(\zeta, \nu) - \zeta = 0$, on $Q(\zeta, \nu)$ és una aplicació de Poincaré en una superfície integral de la secció transversal a la solució periòdica si $\nu = \nu'$. ■

Ara suposant que la solució d'equilibri es troba a l'origen, enunciem i comentem la demostració del teorema del centre de Lyapunov.

Teorema 3.49 (Teorema del centre de Lyapunov). *Considera un sistema Hamiltonià d'equacions diferencials en \mathbb{R}^{2n} , $\dot{z} = f(z)$ amb $f(0) = 0$. Suposa que els valors propis del sistema linealitzat al voltant del 0 són no nuls i de la forma $\pm\omega i, \lambda_3, \dots, \lambda_{2n}$, on $\omega \in \mathbb{R}$ i $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 3, \dots, 2n$. Si $\lambda_j/i\omega \notin \mathbb{Z}$ per tot $j = 3, \dots, 2n$, aleshores existeix una família 1-paramètrica d'òrbites periòdiques emanant des del punt d'equilibri. A més, en aproximar-se al punt d'equilibri al llarg de la família, els períodes tendeixen a $2\pi/\omega$ i els multiplicadors no trivials tendeixen a $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$, $j = 3, \dots, 2n$. Aquesta família d'òrbites periòdiques l'anomenem centre de Lyapunov.*

Demostració: Suposem que $z = 0$ és un punt d'equilibri, i l'equació és

$$\dot{z} = Az + g(z)$$

on $g(0) = \partial g(0)/\partial z = 0$. Com que busquem solucions periòdiques properes a l'origen, s'escala per $z \rightarrow \epsilon z$ on ϵ s'ha de considerar com un paràmetre petit. L'equació es converteix en

$$\dot{z} = Az + O(\epsilon),$$

i quan $\epsilon = 0$, el sistema és lineal. Donat que aquest sistema té valors propis $\pm\omega i$, té una solució periòdica de període $2\pi/\omega$ de la forma $\exp(At)a$, on a és un vector constant no nul. Els multiplicadors d'aquesta solució periòdica són els valors propis de $\exp(A2\pi/\omega)$, o 1, -1, $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$. Assumim que el multiplicador no trivial no és +1, i per tant aquesta solució periòdica és elemental. Per la proposició anterior, existeix una solució periòdica de la forma $\exp(At)a + O(\epsilon)$. En les coordenades sense escalar, la solució és de la forma $\epsilon \exp(At)a + O(\epsilon^2)$ i es té el resultat. ■

El teorema anterior implica que el sistema (3.36) admet una superfície analítica anomenada centre de Lyapunov ple de solucions periòdiques. De fet, tenim el següent resultat:

Teorema 3.50. *El punt d'equilibri a l'origen del sistema Hamiltonià (3.36) és inestable. De fet, existeix un entorn de l'origen tal que qualsevol solució que comenci al centre de Lyapunov s'escapa de l'entorn tant en temps positiu com en negatiu. En particular, les petites solucions periòdiques donades en el centre de Lyapunov són inestables.*

Demostració: Suposem, sense pèrdua de generalitat, que λ és positiu. Les equacions del moviment son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega y_1 + \frac{\partial H_r}{\partial y_1}, & \dot{y}_1 &= -\omega x_1 - \frac{\partial H_r}{\partial x_1}, \\ \dot{x}_2 &= \lambda x_2 + \frac{\partial H_r}{\partial y_2}, & \dot{y}_2 &= -\lambda y_2 - \frac{\partial H_r}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Podem assumir que el centre de Lyapunov està en el pla de coordenades $x_2 = y_2 = 0$; és a dir, $\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = 0$ quan $x_2 = y_2 = 0$. Això significa que H_r no té termes de la forma $x_2(x_1^n y_1^m)$ o de la forma $y_2(x_1^n y_1^m)$.

Considerem la funció de Chetaev $V = \frac{1}{2}(x_2^2 - y_2^2)$ i calculem la derivada orbital de V

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda(x_2^2 + y_2^2) + x_2 \frac{\partial H_r}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial H_r}{\partial x_2} \\ &= \lambda(x_2^2 + y_2^2) + W(x, y). \end{aligned}$$

Afirmem que en un entorn Q de l'origen suficientment petit $\|W(x, y)\| \leq (\lambda/2)(x_2^2 + y_2^2)$ i per tant $\dot{V} > 0$ en $Q \setminus \{x_2 = y_2 = 0\}$; és a dir, fora del centre de Lyapunov. Sigui $H_r = H_0 + H_2 + H_3$ on H_0 és independent de x_2 i y_2 , H_2 és quadràtic en x_2 i y_2 , i H_3 és almenys cúbic en x_2 i y_2 . H_0 no contribueix res a W ; H_2 contribueix a W una funció que és quadràtica en x_2 i y_2 i almenys lineal en x_1 i y_1 , i per tant pot ser estimada per $O(\{x_1^2 + y_1^2\}^{1/2})O(\{x_2^2 + y_2^2\})$; i H_3 contribueix a W una funció que és cúbica en x_2 i y_2 i per tant és $O(\{x_2^2 + y_2^2\}^{3/2})$. Aquestes estimacions demostren l'afirmació que havíem fet.

Sigui $\Omega = \{x_2^2 > y_2^2\} \cap Q$ i apliquem el teorema de Chetaev per concloure que totes les solucions que comencen a Ω marxen de Q en temps positiu. Si revertim el temps es pot concloure que totes les solucions que comencen en $\Omega^- = \{x_2^2 < y_2^2\} \cap Q$ marxen de Q en temps negatiu. ■

El teorema anterior descriu el flux del problema restringit dels tres cossos a prop dels punts d'Euler \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 :

Proposició 3.51. *Els punts de libració d'Euler \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 del problema restringit dels tres cossos son inestables. Existeix un entorn d'aquests punts tal que no hi ha conjunts invariants en aquest entorn que no siguin les solucions periòdiques de la varietat del centre de Lyapunov.*

Com a segona aplicació considerem un sistema Hamiltonià de dos graus de llibertat amb un punt d'equilibri tal que els valors propis d'aquest sistema en el punt d'equilibri son $\pm\alpha \pm \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és a dir, dos valors propis amb part real positiva i dos amb part real negativa. Per exemple, el Hamiltonià del problema restringit en els punts de Lagrange \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 és d'aquest tipus quan $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$. Demostrem que el punt d'equilibri és inestable. Específicament, considerem el sistema

$$H = \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2) + \beta(y_1 x_2 - y_2 x_1) + H_r(x, y), \quad (3.38)$$

on H_r és una funció real analítica en un entorn de l'origen de \mathbb{R}^4 en els arguments mostrats i almenys de tercer grau. Tornem a suposar que el punt d'equilibri està l'origen.

Teorema 3.52. *El punt d'equilibri en l'origen per al sistema Hamiltonià (3.38) és inestable. De fet, existeix un entorn de l'origen tal que qualsevol solució no nul·la marxa de l'entorn en temps tant positiu com negatiu.*

Demostració: Suposem que $\alpha > 0$. Les equacions de moviment son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \frac{\partial H_r}{\partial y_1}, & \dot{x}_2 &= -\beta x_1 + \alpha x_2 + \frac{\partial H_r}{\partial y_2}, \\ \dot{y}_1 &= -\alpha y_1 + \beta y_2 - \frac{\partial H_r}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 &= -\beta y_1 - \alpha y_2 + \frac{\partial H_r}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Considerem la funció de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2)$$

i calculem

$$\dot{V} = \alpha(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + W,$$

on W és com a mínim cúbica. Clarament V pren valors positius a prop de l'origen i \dot{V} és definida positiva, per tant totes les solucions en $\{(x, y) : V(x, y) > 0\}$ marxen d'un petit entorn en temps positiu. Revertint el temps veiem que totes les solucions en $\{(x, y) : V(x, y) < 0\}$ marxen d'un petit entorn en temps negatiu. ■

Donat que el Hamiltonià en els punts d'equilibri de Lagrange es pot escriure de la forma (3.38), demostrat a [4], del teorema anterior tenim el següent resultat:

Proposició 3.53. *Els punts d'equilibri de Lagrange \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 del problema restringit dels tres cossos son inestables per $\mu_1 < \mu < 1 - \mu_1$. Existeix un entorn d'aquests punts tal que no existeixen conjunts invariants en aquest entorn que no sigui el punt d'equilibri mateix.*

Fins aquí hem estudiat l'estabilitat de tots els punts d'equilibri del problema restringit dels tres cossos, excepte per als punts de Lagrange amb $0 < \mu \leq \mu_1$ i $1 - \mu_1 \leq \mu < 1$. La teoria que hem desenvolupat fins aquí no és suficient en aquests casos, i tampoc desenvoluparem la necessària per a fer l'estudi, per tant només enunciarem, sense demostració, què passa en aquests casos concrets. Tot el desenvolupament per a la demostració de les proposicions següents es pot trobar al llibre [2].

Proposició 3.54. *En el problema restringit dels tres cossos els punts d'equilibri de Lagrange \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son estables per $0 < \mu \leq \mu_1$ amb $\mu \neq \mu_2, \mu_3$ (o $1 - \mu$), on $\mu_2 = 0.0242938\dots$ i $\mu_3 = 0.0135116\dots$*

Proposició 3.55. *En el problema restringit dels tres cossos els punts d'equilibri de Lagrange \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son inestables per μ_2 i μ_3 on $\mu_2 = 0.0242938\dots$ i $\mu_3 = 0.0135116\dots$*

En el sistema Sol-Júpiter, el resultat de la proposició (3.54) es pot observar: Si dibuixem els triangles equilàters que tenen com a base el segment traçat entre el Sol i Júpiter, aleshores trobem dos grups d'asteroides en el tercer vèrtex: Aquests son anomenats els Trojans i els Grecs.

4 Conclusions

Com hem pogut observar al llarg d'aquest treball, el problema dels tres cossos és molt ric quant a possibilitats de plantejar-ho, una d'elles és la que hem estudiat, el problema restringit dels tres cossos planar circular, la més senzilla, però un pot estudiar moltes altres variacions.

En resum:

Per una banda, hem fet un estudi del problema dels tres cossos general. Hem pogut veure que la conservació del moment lineal, de l'energia i del moment angular ens permet reduir el nombre de les funcions incògnites del problema. Aquesta reducció també ocorre quan passem el problema a les coordenades de Jacobi i també si imposem que el moviment de les partícules té lloc en un pla. També hem calculat la solució de Lagrange i la solució d'Euler.

Per altra banda, hem estudiat el problema restringit dels tres cossos planar circular, calculant els seus punts d'equilibri, aquests són els punts triangulars de Lagrange i els punts col·lineals d'Euler, analitzant la forma de les seves corbes de nivell zero i, per últim, estudiant l'estabilitat dels seus punts d'equilibri.

Amb els resultats de l'estabilitat dels punts d'equilibri del problema restringit dels tres cossos planar circular, es pot aconseguir fets importants, com és respondre per què hi han grups d'asteroides acumulats en un dels vèrtexs del triangle equilàter que té com a base el segment traçat entre el Sol i Júpiter, tant si dibuixem el triangle cap amunt o cap avall, que ja hem vist que és degut a que \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 son estables per alguns valors de μ .

En conclusió, esperem que s'hagi complert la finalitat d'aquest treball, que no és altra que introduir al lector el problema restringit dels tres cossos planar circular, com són les seves solucions d'equilibri i les seves corbes de velocitat zero. L'estudi del problema restringit dels tres cossos encara es pot allargar molt més, estudiant què passa si el moviment de les partícules no esdevé en un pla o si el moviment de les primàries no es pot aproximar per un moviment circular.

Referències

- [1] Pollard, H.: *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-Hall, New Jersey, 1966.
- [2] Meyer, K. R.; Offin, D. C.: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem*, 3a edició, Springer International Publishing AG, 2017.
- [3] Szebehely, V.: *Theory Of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press Inc, New York, 1967.
- [4] Jorba, À.: *The Lagrangian Solutions*, Barcelona, 2012.
- [5] Rink, B.; Tuwankotta, T.: *STABILITY IN HAMILTONIAN SYSTEMS: Applications to the Restricted Three-Body Problem*, Utrecht, The Netherlands, 2000.
- [6] Vasil'eva, A. B.: *Asymptotic Behaviour of Solutions to Certain Problems Involving Non-Linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives*, Russ. Math. Surv. 18 13, 1963.
- [7] Cesari, L.: *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [8] Masoliver, J.: *Fonaments de Física. Grau de Matemàtiques (Textos docents: 352)*, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2010.

A Annex

A.1 Codi simulació de les corbes de velocitat zero

Per a poder obtenir els dibuixos de les corbes de nivell de la secció 3.4 es va fer una implementació d'un programa que fa servir un dels mètodes de continuació, específicament, el **mètode predictor-corrector amb pseudo-paràmetre arc** que va ser explicat a l'assignatura *Mètodes Numèrics II* del grau.

Com per a implementar aquest mètode es necessita un punt inicial sobre la corba, per a obtenir un interval petit que el contingui es va fer un estudi de la funció

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}} + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} + \mu(1-\mu) - C,$$

on C és la constant de Jacobi que es vol utilitzar, en les semirectes $\{y = 0, x > 0\}$ i $\{x = 0, y > 0\}$, l'últim cas per les corbes que envolten només \mathcal{L}_4 i \mathcal{L}_5 (cas $3 < C < C_3$), un cop es té aquest interval, s'introdueix al programa amb la constant de Jacobi utilitzada, el programa retorna un fitxer amb els punts de la corba i es dibuixen aquests punts amb **gnuplot**.

El codi és el següent:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
double avaluarf(double x, double y, double J, double mu);
double avaluardxf(double x, double y, double mu);
double avaluardyf(double x, double y, double mu);
void prediccio(double *x0, double *y0, double h, double v
[2]);
void correccio(double x0, double y0, double *x, double *y,
double h, double J, double mu);
int main(void){
double x0, x1, y0, x, y, v[2], xAnt, h, norma, mu, J,
error, aux, aux2;
int k, n;
char fitxer[30];
FILE *fout;

printf("DonaM el interval on esta la aproximacio inicial
:x0_y0\n");
scanf("%lf %lf", &x0, &x1);

printf("DonaM el nombre de punts que vols calcular en
cada sentit\n");
scanf("%d", &n);

printf("DonaM el valor de la constant de Jacobi\n");
scanf("%lf", &J);

printf("DonaM el valor de la mu\n");
```

```

scanf("%lf", &mu);

/* Calculem el punt de tall amb el metode de Newton*/
k = 0;
xAnt = x1;
do{
    x = xAnt - (avaluarf(xAnt,0,J,mu)/avaluardxf(xAnt,0,
        mu));
    error = fabs(x - xAnt);
    xAnt = x;
    if(x > x1 || x < x0){
        printf("El interval donat no conte un punt de
            tall\n");
        exit(1);
    }
    k++;
}while(k < 10000 && error >= 1E-13);

y = 0;
printf("%.4lf, %.4lf, %.9lf\n", x, y, avaluarf(x,y,J,mu)
    );

h = 1E-3;
k = 0;

aux = x;
aux2 = y;

/*Demanem el fitxer de sortida*/
printf("DonaM el nom del fitxer de sortida (maxim 30
    characters)\n");
scanf("%s", fitxer);
fout = fopen(fitxer, "a");
if(fout == NULL){
    printf("Error en obrir fitxer de sortida\n");
    exit(1);
}

/*Apliquem el metode de predictor-corrector*/
do{
    x0 = x;
    y0 = y;

    if(k < n){
        v[0] = (-1)*avaluardyf(x, y, mu);
        v[1] = avaluardxf(x, y, mu);
        norma = sqrt(avaluardxf(x, y, mu)*avaluardxf(x,
            y, mu) + avaluardyf(x, y, mu)*avaluardyf(x, y
            , mu));
    }
}

```

```

        v[0] /= norma;
        v[1] /= norma;
    } else {
        if(k == n){
            x = aux;
            y = aux2;
        }
        v[0] = avaluardyf(x, y, mu);
        v[1] = (-1)*avaluardxf(x, y, mu);
        norma = sqrt(avaluardxf(x, y, mu)*avaluardxf(x,
            y, mu) + avaluardyf(x, y, mu)*avaluardyf(x, y
            , mu));
        v[0] /= norma;
        v[1] /= norma;
    }

    prediccio(&x, &y, h, v);
    if(norma < 10E-6){
        printf("Som molt a prop de un punt singular\n");
        exit(1);
    }

    correccio(x0, y0, &x, &y, h, J, mu);

    fprintf(fout, "%.8lf %.8lf\n", x, y);
    if(k == n-1){
        fprintf(fout, "\n");
    }
    k++;

} while(k < 2*n);

fclose(fout);
return 0;
}

/*Funcio que avalua f en el punt (x,y)*/

double avaluarf(double x, double y, double J, double mu){
    double f;

    f = (x*x) + (y*y);
    f += 2*((mu/sqrt((x + 1 - mu)*(x + 1 - mu) + y*y)) +
        ((1-mu)/sqrt((x - mu)*(x - mu) + y*y))) + mu*(1-mu);
    f -= J;

    return f;
}

```



```

/*Funcio que avalua df/dx (dx) en el punt (x,y)*/

double avaluadx(double x, double y, double mu){
    double dx;

    dx = 2*x;
    dx -= (2*mu*(x-mu+1))/(sqrt(((x-mu+1)*(x-mu+1) + y*y)
        *((x-mu+1)*(x-mu+1) + y*y)*((x-mu+1)*(x-mu+1) + y*y))
        );
    dx -= (2*(1-mu)*(x-mu))/(sqrt(((x-mu)*(x-mu) + y*y)*((x-
        -mu)*(x-mu) + y*y)*((x-mu)*(x-mu) + y*y)));

    return dx;
}

/*Funcio que avalua df/dy (dy) en el punt (x,y)*/

double avaluady(double x, double y, double mu){
    double dy;

    dy = 2*y;
    dy -= (2*mu*y)/(sqrt(((x-mu+1)*(x-mu+1) + y*y)*((x-mu
        +1)*(x-mu+1) + y*y)*((x-mu+1)*(x-mu+1) + y*y)));
    dy -= (2*(1-mu)*y)/(sqrt(((x-mu)*(x-mu) + y*y)*((x-mu)
        *(x-mu) + y*y)*((x-mu)*(x-mu) + y*y)));

    return dy;
}

/*Funcio prediccio*/

void prediccio(double *x0, double *y0, double h, double v
    [2]){

    *x0 += h*v[0];
    *y0 += h*v[1];
}

/*Funcio per a fer la correccio*/

void correccio(double x0, double y0, double *x, double *y,
    double h, double J, double mu){
    double det, aux, invDF[2][2], F[2], norma;
    int k = 0;

    F[0] = avaluarf(*x, *y, J, mu);
    F[1] = ((*x - x0) * (*x - x0)) + ((*y - y0) * (*y - y0))
        - (h * h);
}

```

```

/*Apliquem el metode de Newton-Raphson*/
do{
    /*Apliquem la formula per a calcular la matriu
    inversa de DF*/
    det = avaluardxf(*x, *y, mu) * 2 * (*y - y0);
    det -= (avaluardyf(*x, *y, mu) * 2 * (*x - x0));

    invDF[0][0] = (1./det) * 2 * (*y - y0);
    invDF[1][0] = (1./det) * (-2) * (*x - x0);
    invDF[0][1] = (1./det) * (-1) * avaluardyf(*x, *y,
    mu);
    invDF[1][1] = (1./det) * avaluardxf(*x, *y, mu);

    aux = *x - invDF[0][0]*F[0] - invDF[0][1]*F[1];
    *x = aux;

    aux = *y - invDF[1][0]*F[0] - invDF[1][1]*F[1];
    *y = aux;

    F[0] = avaluarf(*x, *y, J, mu);
    F[1] = ((*x - x0) * (*x - x0)) + ((*y - y0) * (*y -
    y0)) - (h * h);

    norma = sqrt(F[0]*F[0] + F[1]*F[1]);
    k++;

}while(k < 100 && norma < 1E-10);

}

```

El programa demana el nombre de punts que es vol calcular en cada sentit, n , ja que el que fa és calcular n punts continuant per la dreta del punt inicial i n punts continuant per l'esquerra del punt inicial. El terme 'continuànt' es fa servir en referència a que s'aplica el mètode de continuació específic.

El codi abans ensenyat no serveix per a dibuixar les corbes de velocitat zero pel cas $3 < C < C_3$, però amb una petita modificació al principi del codi, on es fa servir el mètode de Newton per a trobar el punt inicial sobre la corba, es pot aconseguir-la, utilitzant l'eix y en lloc de l'eix x per a trobar el punt inicial. La implementació del mètode predictor-corrector no es modifica.