Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ESPAIS VECTORIALS DE LINEALITZACIONS PER A MATRIUS POLINOMIALS

Autora: Irene Fernández Montseny

Director: Dra. Maria Eulàlia Montoro Lopez

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

"L'art és la ciència de la bellesa, les matemàtiques són la ciència de la veritat"

Oscar Wilde

Abstract

For eigenvalue problems of polynomial matrices we find that the classic solution method is linearization of the polynomial matrix. Reformulating the initial eigenvalue problem we obtain an expression for matrix pencils, that is, matrices of the form $\lambda X + Y$, $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$, which maintains the spectral structure. Within the framework of linear algebra and matrix theory, polynomial matrices are objects of recent study. In this work we focus on square regular polynomial matrices, i.e. with non-zero determinant. We introduce the basic concepts necessary to understand them, then we see what the linearization of regular polynomial matrices consist of and we define the "companion forms" or companion matrices. Finally, we study the vector spaces of linearizations; more specifically, how to construct two vector spaces of dense pencils in the set of linearizations.

Resum

Per als problemes de valors propis de matrius polinomials trobem que el mètode clàssic de resolució és la linealització de les matrius polinomials. Reformulant el problema de valors propis inicial s'obté una expressió de feixos matricials, és a dir, matrius de la forma $\lambda X + Y$, $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$, que manté l'estructura espectral. Dins el marc de l'àlgebra lineal i la teoria de matrius, les matrius polinomials són objectes d'estudi recent. Aquest treball es centra en les matrius polinomials regulars quadrades, és a dir, amb determinant diferent de zero. Introdueix els conceptes bàsics necessaris per comprendre-les, a continuació s'analitza en què consisteix la linealització de matrius polinomials regulars i es defineixen les "companion forms" o matrius companyes. Finalment, es fa un estudi dels espais vectorials de linealitzacions; més concretament, com construir dos espais vectorials de feixos densos en el conjunt de les linealitzacions.

2020 Mathematics Subject Classification. 15A18, 15A21, 15A22, 15B99

Agraïments

El Treball de fi de grau significa el final d'una etapa i un aprenentatge. Durant aquesta etapa, m'han acompanyat la meva familia i amics, a qui vull aprofitar per agrair tot el seu suport i comprensió. Sense vosaltres no hagués estat possible arribar fins aquí.

El grau de matemàtiques és una carrera de fons i no hagués estat possible arribar a la meta sense l'acompanyament de tots vosaltres.

Als meus amics. Gràcies per totes les hores de biblioteca, els somriures, els ànims i la comprensió en aquest viatge compartit amb vosaltres.

Als meus pares. Gràcies pel vostre amor i suport incondicional i per no deixar de creure en mi i donar-me la llibertat que necessitava per trobar el meu camí.

A la Paula. Gràcies per ser el meu pilar imprescindible. Per creure en mi sempre, escoltar-me i ajudar-me quan ho he necessitat.

Finalment, vull agrair a tots els professors i professores tots els coneixements apresos. En especial, vull agrair l'acompanyament, el temps i la dedicació de la meva tutora Eulàlia Montoro, qui ha confiat en tot moment en el meu projecte.

Índex

Capítol 1

Introducció

Dins el camp de la recerca i investigació de l'àlgebra lineal, l'estudi de les matrius polinomials és molt recent. No va ser fins els inicis de l'any 1976, quan va començar la col·laboració entre Israel Gohberg, Peter Lancaster i Leiba Rodman, els autors que es van dedicar a la recerca dels problemes relacionats amb aquest estudi. Posant en comú els seus coneixements i diferents punts de vista, ja haurien trobat la solució a alguns dels problemes per a matrius polinomials mòniques l'estiu de l'any 1976. Tots tenien un context econòmic, social i polític diferent però sentien un desig comú per entendre les matrius polinomials des del punt de vista de la teoria espectral. [1]

Les contribucions i participació internacional de diversos companys que van rebre va ajudar en la complementació del seu estudi i treball, afavorint que avui en dia tinguem aquests coneixements respecte les matrius polinomials.

En l'estudi d'una matriu, resulta essencial obtenir-ne els seus valors propis, ja que ens permeten calcular formes més senzilles de manipular, com per exemple la forma de Jordan. Calcular de manera eficient valors propis de matrius polinomials comporta problemes.
L'objecte d'aquest treball és analitzar com afrontar-los mitjançant la linealització. Aquest mètode ens permetrà realitzar una transformació de la matriu polinomial mantenint l'estructura i les propietats, i també els espais vectorials de linealitzacions, on trobarem els conjunts de linealitzacions de les matrius polinomials.

La linealització de les matrius polinomials facilita el treballar sobre una expressió més simple. Aquest mètode permet estudiar sistemes dinàmics, analitzar grafs i és utilitzat en la criptografía, entre d'altres aplicacions.

[1] La teoria espectral és un terme inclusiu per a les teories que estenen la teoria de vectors i valors propis d'una matriu quadrada a la teoria de l'estructura d'operadors més àmplia en certs espais matemàtics.

Per exemple, podem trobar matrius polinomials en l'estudi de sistemes d'equacions diferencials ordinàries (d'ordre $d > 1$) amb coeficients constants. Aquests sistemes es representen com

$$\sum_{i=0}^{d} A_i(\frac{d}{dt})^i u(t) = 0. \tag{1.0.1}$$

Buscant solucions de la forma $u(t) = x_0 e^{\lambda_0 t}$, amb x_0, λ_0 independents del temps, immediatament obtenim problemes de valors propis per a una matriu polinomial: $P(\lambda_0)x_0 = 0$.

És a dir, imposant que $u(t) = x_0 e^{\lambda_0 t}$ sigui solució, quan substituim a (1.0.1), obtindrem $P(\lambda_0)x_0 = 0$, on $P(\lambda_0)$ és una matriu polinomial.

Com hem vist, si bé les matrius polinomials apareixen en les equacions diferencials, també són emprades en problemes de valors en la frontera, la "Wiener-Hopf technique", teoria de sistemes, anàlisi de vibracions d'estructures mecàniques, vibroacústica: problemes d'interacció d'estructura de fluids, teoria de xarxes, anàlisi numèric i altres àrees [1].

En primer lloc, profunditzarem en el concepte de matrius polinomials quadrades regulars i veurem també, per a matrius polinomials no necessàriament regulars, la forma canònica de Smith, els polinomis invariants i els divisors elementals, per tal d'establir la base teòrica sobre la que versa el treball.

A continuació, procedirem a aplicar el mètode de linealització de matrius polinomials. En particular, el tipus de linealitzacions més importants que s'anomenen matrius companyes. A partir d'aquestes veurem que es pot definir un conjunt de linealitzacions que presenten estructura d'espai vectorial.

Per últim, introduirem espais vectorials d'on obtenir linealitzacions d'una matriu polinomial quadrada regular. Calcularem tanmateix la dimensió i estudiarem amb més profunditat aquests espais vectorials.

Capítol 2

Notació

- Denotarem $\mathbb{F}$ un cos qualsevol, $\mathbb{C}$ el cos dels complexos i $\mathbb{R}$ el cos dels reals.
- $\mathbb{F}^{n\times n}$ són les matrius $n\times n$ amb coeficients a $\mathbb{F}$.
- $\mathbb{F}^{n\times n}[\lambda]$ són les matrius polinomials $n\times n$.
- Denotarem per I_n la matriu identitat $n\times n$. R_n denota la identitat inversa $n\times n$. N_n és un bloc nilpotent de Jordan, i.e.,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- Denotem per Λ el vector $\begin{bmatrix} \lambda^{d-1} & \lambda^{d-2}\dots\lambda & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^{1\times d}[\lambda]$.
- El producte de Kronecker de $A\in\mathbb{F}^{p\times q}$ i $B\in\mathbb{F}^{r\times s}$ es defineix com

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}B & \dots & a_{qp}B \end{bmatrix}.$$

  Algunes de les propietats principals del producte de Kronecker són:

  1. $(\alpha A)\otimes B = A\otimes(\alpha B) \quad \forall \alpha\in\mathbb{K}, A\in\mathbb{F}^{p\times q}, B\in\mathbb{F}^{r\times s}$.
  2. $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T \quad \forall A\in\mathbb{F}^{p\times q}, B\in\mathbb{F}^{r\times s}$.
  3. $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C) \quad \forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{p\times q}, C\in\mathbb{F}^{r\times s}$.
  4. $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C \quad \forall A,B\in\mathbb{F}^{p\times q}, C\in\mathbb{F}^{r\times s}$.
  5. $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C \quad \forall A\in\mathbb{F}^{p\times q}, B,C\in\mathbb{F}^{r\times s}$.
  6. $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD \quad \forall A\in\mathbb{F}^{p\times q}, B\in\mathbb{F}^{r\times s}, C\in\mathbb{F}^{q\times k}, D\in\mathbb{F}^{s\times l}$.

7. $tr(A \otimes B) = tr(B \otimes A) = tr(A) \otimes tr(B) \quad \forall A \in \mathbb{F}^m, B \in \mathbb{F}^n$, on $tr(A), tr(B)$ denota la traça de A i B, respectivament.
8. $det(A \otimes B) = det(B \otimes A) = (det(A))^n (det(B))^m \quad \forall A \in \mathbb{F}^m, B \in \mathbb{F}^n$.

Exemple 2.0.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

- Donada $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}[\lambda]$, $detP(\lambda)$ denota el seu determinant, $revP(\lambda) = \lambda^d P(\frac{1}{\lambda})$ denota el seu revers i $rangP(\lambda)$ és el seu rang.

Capítol 3

Matrius Polinomials Regulars

En aquest capítol veurem com es defineixen una matriu polinomial i els valors propis d'aquesta. Introduirem alguns tipus de classificacions i la relació d'equivalència que existeix entre matrius polinomials. L'equivalència és un concepte imprescindible per tal de comprendre amb profunditat l'anàlisi d'aquest treball i resulta un terme recurrent al llarg de l'estudi. Abordarem també la forma canònica de Smith, els polinomis invariants i els divisors elementals i veurem de quina manera aquests conceptes intervenen amb les matrius polinomials.

3.1 Matrius polinomials regulars quadrades

Resulta necessari en primer lloc assentar els termes bàsics que resultaran d'aplicació al llarg del treball. És per això que aquesta secció defineix els principals conceptes elementals.

Definició 3.1.1. *Una* matriu polinomial quadrada *es defineix com:*

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^d A_d \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \qquad A_0, \ldots, A_d \in \mathbb{C}^{n\times n}, A_d \neq 0 \quad (3.1.1)$$

on $d = deg(P(\lambda))$ és el grau de $P(\lambda)$.

Les matrius polinomials que satisfan $detP(\lambda) \not\equiv 0$ s'anomenen *regulars*. En cas contrari direm que $P(\lambda)$ és *singular*.

Una matriu polinomial $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és diu que és *mònica* si $detA_d \neq 0$. En aquest cas, multiplicant per A_d^{-1} podem considerar que $A_d = I_n$.

Exemple 3.1.2. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

Aleshores

$$det(P(\lambda)) = \lambda(\lambda+2) - (\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 + 2\lambda - (\lambda^2 - 1) = 2\lambda + 1 \not\equiv 0$$

Tenim, doncs, que $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$ és una matriu regular.

Exemple 3.1.3. Sigui

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda - 2 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

Aleshores

$$det(Q(\lambda)) = \lambda(\lambda+2) - (-\lambda)(-\lambda-2) = \lambda^2 + 2\lambda - (-\lambda(-\lambda-2)) = \lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 - 2\lambda \equiv 0$$

Tenim, doncs, que $Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$ és una matriu singular.

En el cas mònic, si $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i té grau d, llavors tenim que $deg(detP(\lambda)) = dn$, per tant, podem trobar dn zeros.

Definició 3.1.4. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ una matriu regular mònica. Llavors diem que $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ és un valor propi de $P(\lambda)$ si $detP(\lambda_0) = 0$. Denotarem com m_{λ_0} la multiplicitat algebraica de λ_0.*

Exemple 3.1.5. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Aleshores

$$detP(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)\lambda(\lambda-1).$$

Obtenim els valors propis $\{0,1,2\}$ amb $m_0 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1$, respectivament.

Si $P(\lambda)$ no és mònica, tenim que $deg(detP(\lambda)) < dn$ i, per tant, ens "falten"valors propis.

Definició 3.1.6. *Donada $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de grau d, el* revers *de $P(\lambda)$ és la matriu polinomial*

$$revP(\lambda) := \lambda^d P(\frac{1}{\lambda}) = P_0\lambda^d + \ldots + P_{d-1}\lambda + P_d = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_{d-i} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]. \tag{3.1.2}$$

Definició 3.1.7. *Els* valors propis infinits *de* $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *no mònica són els valors propis zeros del* $revP(\lambda)$.

Exemple 3.1.8. Si considerem

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

Clarament $det(A_2) = 0$, per tant estem en el cas no mònic i, si calculem els valors propis,

$$detP(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$$

Obtenim 2 valors propis. Ara bé, calculant el revers

$$revP(\lambda) = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

i calculant els valors propis d'aquest, obtenim

$$det(revP(\lambda)) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda^4 = 0 \iff \lambda^2(1 - \lambda^2) = 0$$

que té valors propis $\lambda = 0$, amb $m_0 = 2$, i $\lambda = \pm 1$, amb $m_1 = 1, m_{-1} = 1$. És a dir, 4 valors propis. Per tant, $P(\lambda)$ té valors propis $\infty, 1, -1$ amb $m_\infty = 2, m_1 = 1, m_{-1} = 1$.

Definició 3.1.9. *Si* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *i* $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $v \neq 0$ *satisfà* $P(\lambda_0)v = 0$, *aleshores es diu que* v *és el* vector propi dret *de* $P(\lambda)$ *corresponent al valor propi (finit)* λ_0.

Exemple 3.1.10. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

$detP(\lambda) = 0 \iff \lambda(\lambda + 2) - (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = \frac{-1}{2}$

Per $\lambda = \frac{-1}{2}$,

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Els vectors propis drets són de la forma $(-3y, y)$.

Definició 3.1.11. *Sigui* $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *regular de grau* $d \geq 1$. *Aleshores* $P(\lambda)$ *té un valor propi a l'*∞ *amb vector propi* v *si* $revP(\lambda)$ *té el valor propi* 0 *amb vector propi* v.

Exemple 3.1.12. Sigui $P(\lambda)$ una matriu com a (3.1.8), calculem els vectors propis.

- $\lambda = \pm 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aleshores $v_1 = (1, -1)$ és vector propi de valor propi 1 i -1.

Calculem ara els vectors propis del $revP(\lambda)$

- $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Aleshores $v_2 = (0, 1)$

- $\lambda = \pm 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Aleshores $v_3 = (1, -1)$.

Observem que en aquest cas el subespai de vectors propis és el mateix per a valors propis diferents.

Definició 3.1.13. *Una* matriu unimodular $U(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *és una matriu tal que existeix la seva inversa i aquesta és també una matriu polinomial. Equivalentment, una matriu polinomial* $U(\lambda)$ *és unimodular si* $det(U(\lambda)) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *És a dir, és una matriu invertible.*

Per a matrius polinomials podem definir una relació d'equivalència de forma similar al cas de matrius.

Definició 3.1.14. *Dues matrius polinomials* $P_1(\lambda), P_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *són* equivalents, *escrivim* $P_1(\lambda) \sim P_2(\lambda)$, *si existeixen matrius unimodulars* $U(\lambda)$, $V(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *tals que*

$$P_1(\lambda) = U(\lambda)P_2(\lambda)V(\lambda).$$

Exemple 3.1.15. Siguin

$$P_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda], \quad P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

on $P_1(\lambda)$ és una matriu singular ($detP_1(\lambda) = 0$).

Simplifiquem $P_1(\lambda)$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-(\lambda-1)F_1]{} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_2-C_1]{} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_1-\lambda C_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Intercanviant les columnes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_2(\lambda) \sim P_1(\lambda).$$

Calculem ara $U(\lambda), V(\lambda)$:

$$V(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 1+\lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda], \quad U(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

En efecte, es satisfà

$$P_2(\lambda) = U(\lambda)P_1(\lambda)V(\lambda).$$

Una relació d'equivalència més forta entre matrius polinomials ve donada per la següent definició.

Definició 3.1.16. *Dues matrius polinomials $P_1(\lambda), P_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ són* fortament equivalents *si, i nomès si existeixein U, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrius invertibles tals que*

$$P_1(\lambda) = UP_2(\lambda)V.$$

3.2 Forma Canònica de Smith i Polinomis Invariants

En aquesta secció definim la forma canònica de Smith i demostrem el principal resultat de l'apartat. Aquest resultat és que qualsevol matriu polinomial és equivalent a la forma canònica de Smith. A més, veiem que la forma canònica de Smith proporciona uns certs polinomis, que denominarem invariants, que ens caracteritzen unívocament les matrius polinomials respecte la relació dequivalència que havíem definit en la secció anterior.

Considerem matrius polinomials no necessàriament regulars.

Definició 3.2.1. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$. Diem que $P(\lambda)$ està en* forma canònica de Smith *si*

$$P(\lambda) = diag[i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_n(\lambda)],$$

on $i_j(\lambda)$ és zero, o bé un polinomi mònic, $j = 2, 3, \dots, n$, i $i_j(\lambda)$ és divisible per $i_{j-1}(\lambda)$, $j = 2, 3, \dots, n$.

Si hi ha zeros entre els polinomis $i_j(\lambda)$, aleshores han d'ocupar les últimes posicions, ja que els polinomis diferents de zero no són divisibles per aquests.

A més, si $i_j(\lambda)$ són escalars diferents de zero, aleshores han de ser 1 i ocupar les primeres posicions, ja que només seran divisibles per 1. Tenim, doncs, la forma general d'una matriu polinomial canònica

$$P(\lambda) = diag[1, \dots, 1, i_1(\lambda), \dots, i_d(\lambda), 0, \dots, 0]$$

on $i_j(\lambda)$ és un polinomi mònic, com a mínim de grau 1, i divisible ($j = 2, \dots, d$) per $i_{j-1}(\lambda)$.

Teorema 3.2.2. *[3] Qualsevol $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és equivalent a una matriu en forma canònica de Smith.*

Demostració. Pas 1: Suposem $P(\lambda) \neq 0$. Sigui $p_{ij}(\lambda)$ l'element (diferent de zero) de $P(\lambda)$ de menor grau; intercanviant files i columnes portem aquest element a la posició 1,1 i l'anomenem $p_{11}(\lambda)$. Per cada element de la fila i columna de la matriu resultant, trobem el quocient i el residu de la divisió per $p_{11}(\lambda)$: $p_{1j}(\lambda) = p_{11}(\lambda)q_{1j}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$, $j = 2, 3, \dots, n$. $p_{i1}(\lambda) = p_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda)$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Ara, per $j = 2, 3, \dots, n$, $col_j = col_j - q_{1j}col_1$, i per $i = 2, 3, \dots, n$, $fila_i = fila_i - q_{i1}fila_1$. Aleshores els elements $p_{1j}(\lambda), p_{i1}(\lambda)$ són reemplaçats per $r_{1j}(\lambda)$ i $r_{i1}(\lambda)$, respectivament $(i, j = 2, 3, \dots, n)$ on tots són o bé polinomis zero o bé tenen menor grau que $p_{11}(\lambda)$. Repetim el procés per reduir el grau dels elements de la primera fila i la primera columna fora de la diagonal perque siguin inferiors al nou $p_{11}(\lambda)$. Eventualment obtenim la matriu reduïda:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22}(\lambda) & \dots & p_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p_{n2}(\lambda) & \dots & p_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]. \tag{3.2.1}$$

Pas 2: A (3.2.1) pot haver-hi elements diferents de zero, p_{ij}, $2 \leq i, j \leq n$, amb grau menor que el grau de $p_{11}(\lambda)$. En aquest cas, repetim el primer pas i arribem a una altra matriu de la forma de (3.2.1) però amb grau més reduït. Per tant, repetint el primer pas consecutivament podem trobar una matriu de la forma de (3.2.1) que sigui equivalent a $P(\lambda)$ i per la qual $p_{11}(\lambda)$ és un element diferent de zero i de menor grau.

Pas 3: Si hi ha elements diferents de zero que no són divisibles per $p_{11}(\lambda)$, li diem $p_{ij}(\lambda)$, afegim la columna j a la columna 1, trobem quocients i residus de la nova col_1 en la divisió per $p_{11}(\lambda)$ i repetim els passos 1 i 2, acabant amb una forma com (3.2.1).

Repetim el procés un nombre finit de vegades fins arribar a una matriu de la forma

$$\begin{bmatrix} p_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]. \tag{3.2.2}$$

on $p_1(\lambda)$ és mònic i tots els elements de $b_{ij}(\lambda)$ diferents de zero són divisibles per $p_1(\lambda)$ sense residu.

Pas 4: Si tots els $b_{ij}(\lambda) = 0$, el teorema queda demostrat. En cas contrari, podem reduïr la matriu (3.2.2) a la forma

$$\begin{bmatrix} p_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda].$$

on $p_2(\lambda)$ és divisible per $p_1(\lambda)$ i els elements $c_{ij}(\lambda)$, $3 \leq i, j \leq n$ són divisibles per $p_2(\lambda)$. Continuant el procés queda demostrat el teorema.

□

Exemple 3.2.3. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 2\lambda + 1 & 3\lambda^4 + 2\lambda & \lambda^2 \\ 2\lambda^2 - \lambda & 0 & 1 \\ 3\lambda^2 + 1 & -2\lambda^3 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda]$$

Col·loquem a la posició 1,1 el terme de menor grau. És a dir, intercanviem col_1 i col_3 i fil_1 i fil_2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\lambda^2 - \lambda \\ \lambda^2 & 3\lambda^4 + 2\lambda & \lambda^3 - 2\lambda + 1 \\ \lambda & -2\lambda^3 & 3\lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$p_{12}(\lambda) = 0 = 1\cdot 0 \implies col_2 = col_2 - 0\cdot col_1$

$p_{13}(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda = 1\cdot(2\lambda^2 - \lambda) \implies col_3 = col_3 - (2\lambda^2 - \lambda)\cdot col_1$

$p_{21}(\lambda) = \lambda^2 = 1\cdot\lambda^2 \implies fil_2 = fil_2 - \lambda^2\cdot fil_1$

$p_{31}(\lambda) = \lambda = 1\cdot\lambda \implies fil_3 = fil_3 - \lambda\cdot fil_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda^4 + 2\lambda & -2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda + 1 \\ 0 & -2\lambda^3 & -2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Intercanviem fil_2 i fil_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^3 & -2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 1 \\ 0 & 3\lambda^4 + 2\lambda & -2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Anàlogament al procediment anterior, (Multipliquem $-2\lambda^3$ per fil_3 i $3\lambda^4+2\lambda$ per fil_2).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda^3 & -2\lambda^3+4\lambda^2+1 \\ 0 & 0 & (-2\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda+1)(-2\lambda^3)-(-2\lambda^3+4\lambda^2+1)(3\lambda^4+2\lambda) \end{bmatrix}$$

Finalment, multiplicant col_3 per $-2\lambda^3$ i restem a la col_2 multiplicada per $(-2\lambda^3+4\lambda^2+1)$ obtenim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10\lambda^7-16\lambda^6+5\lambda^4-10\lambda^3-2\lambda \end{bmatrix}$$

Definició 3.2.4. *El* rang *d'una matriu polinomial és l'ordre del seu menor més gran que no és idènticament zero.*

Exemple 3.2.5. Sigui $P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}[\lambda]$.

$detP(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)-(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda) = 0$. Per tant, el $rang(P(\lambda)) = 1$.

Sigui ara $P_0(\lambda) = diag[i_1(\lambda),\dots,i_r(\lambda),0,\dots,0] \in \mathbb{C}^{n\times n}(\lambda)$, el $rang(P_0(\lambda)) = r$.

Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ amb $rangP(\lambda) = r$. Definim $d_j(\lambda)$ com el màxim comú divisor de tots els menors de $P(\lambda)$ d'ordre j, $j = 1,2\dots,r$.

Qualsevol menor d'ordre $j \geqslant 2$ es pot expressar com una combinació de menors d'ordre $j-1$.

Si definim $d_0(\lambda) \equiv 1$, a la seqüència

$$d_0(\lambda), d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda),$$

$d_j(\lambda)$ és divisible per $d_{j-1}(\lambda), j = 1,2\dots,r$.

Proposició 3.2.6. *Siguin $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de rang r. Siguin $\delta_j(\lambda)$ el màxim comú divisor mònic de tots els menors de $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$. Si $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ són equivalents, aleshores els polinomis $d_j(\lambda)$ i $\delta_j(\lambda)$ coincideixen ($j = 1,2,\dots,r$).*

Definició 3.2.7. *Siguin*

$$i_1(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)},\dots,\ i_r(\lambda) = \frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}.$$

En vista de la divisibilitat de $d_j(\lambda)$ per $d_{j-1}(\lambda)$, els quocients $i_j(\lambda)$ ($j = 1,2,\dots,r$) són polinomis. S'anomenen polinomis invariants *de $P(\lambda)$. La invariància es refereix a les transformacions d'equivalència. Per $j = 1,2,\dots,r$, $d_j(\lambda) = i_1(\lambda)i_2(\lambda)\dots i_j(\lambda)$ i per $j = 2,3,\dots,r$, $i_j(\lambda)$ és divisible per $i_{j-1}(\lambda)$.*

Exemple 3.2.8. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda].$$

$$detP(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^7 - 2\lambda^6 \neq 0 \implies rangP(\lambda) = 3.$$

Per tant, $d_3(\lambda) = mcd(detP(\lambda)) = \lambda^7 - \lambda^6$.

Calculem els menors 2×2 diferents de zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^5 \end{vmatrix} = \lambda^6 - \lambda^5, M_2 = \begin{vmatrix} \lambda^5 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^6, M_3 = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^3, M_4 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2, M_5 = \begin{vmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^4.$$

Per tant, $d_2(\lambda) = mcd(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) = \lambda^2$.

Ara, mirant els elements de la matriu $P(\lambda)$, obtenim $d_1(\lambda) = \lambda$.

Considerem $d_0 = 1$.

Aleshores,

$$i_1(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)} = \lambda, \quad i_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda, \quad i_3(\lambda) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = \lambda^5 - \lambda^4$$

Teorema 3.2.9. *[3] Una matriu polinomial $P(\lambda)$ de rang r és equivalent a la matriu polinomial canònica*

$$S(\lambda) = diag[i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda), 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$$

on $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ són polinomis invariants de $P(\lambda)$.

Denotem per $diag[i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda), 0, \dots, 0]$ la *forma canònica de Smith.* Els polinomis mònics diferents de zero $i_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, r$ satisfan $\frac{i_{j-1}(\lambda)}{i_j(\lambda)}$, $j = 2, 3, \dots, r$. Si algún $i_j(\lambda)$ és escalar, haurà de ser 1. Per tant, podem escriure de manera general la forma canònica de Smith com

$$S(\lambda) = diag[1, \dots, 1, i_k(\lambda), \dots, i_r(\lambda), 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda].$$

Exemple 3.2.10. La forma canònica de Smith de la matriu $P(\lambda)$ de l'exemple (3.2.8) és:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^5 - \lambda^4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda]$$

Corol·lari 3.2.11. *[3] Dues matrius polinomials són equivalents si, i només si tenen els mateixos polinomis invariants.*

Demostració. [1] Donades $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$. Suposem que els polinomis invariants de $P(\lambda), Q(\lambda)$ són els mateixos. Aleshores les seves formes de Smith són iguals:

$$P(\lambda) = E_1(\lambda)D(\lambda)F_1(\lambda), \quad Q(\lambda) = E_2(\lambda)D(\lambda)F_2(\lambda)$$

on $det(E_i(\lambda)) = const \neq 0$, $det(F_i(\lambda)) = const \neq 0$, $i = 1, 2$. Conseqüentment,

$$(E_1(\lambda))^{-1}P(\lambda)(F_1(\lambda))^{-1} = (E_2(\lambda))^{-1}Q(\lambda)(F_2(\lambda))^{-1}$$

i $P(\lambda) = E(\lambda)Q(\lambda)F(\lambda)$, on $E(\lambda) = E_1(\lambda)(E_2(\lambda))^{-1}$ i $F(\lambda) = F_1(\lambda)(F_2(\lambda))^{-1}$.

Donat que $E_2(\lambda)$ i $F_2(\lambda)$ són matrius polinomials amb determinant constant diferent de zero, el mateix és cert per $E^{-1}(\lambda)$ i $F^{-1}(\lambda)$ i, per tant, també per $E(\lambda)$ i $F(\lambda)$. Aleshores $P(\lambda) \equiv Q(\lambda)$.

Suposem ara $P(\lambda) = E(\lambda)Q(\lambda)F(\lambda)$, on $det(E(\lambda)) = const \neq 0$, $det(F(\lambda)) = const \neq 0$. Sigui $D(\lambda)$ la forma de Smith de $Q(\lambda)$:

$$Q(\lambda) = E_1(\lambda)D(\lambda)F_1(\lambda).$$

Aleshores $D(\lambda)$ és també la forma de Smith de $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = E(\lambda)E_1(\lambda)D(\lambda)F_1(\lambda)F(\lambda).$$

Per la unicitat de la forma de Smith per $P(\lambda)$ (en particular, per la unicitat dels polinomis invariants de $P(\lambda)$), segueix que els polinomis invariants de $P(\lambda)$ són els mateixos que els de $Q(\lambda)$. □

3.3 Divisors elementals

A partir dels polinomis invariants, podem definir uns certs valors característics de cada matriu polinomial. En aquesta secció veurem com utilitzant els divisors elementals podem observar relacions entre les matrius polinomials, determinant unívocament, per exemple, la relació d'equivalència entre aquestes.

Considerem una matriu $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de rang r i polinomis invariants $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$. Escrivim

$$detP(\lambda) = k_1 \prod_{j=1}^{s}(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

on $k_1 \neq 0; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ són les diferents arrels de $P(\lambda)$ i $m_j \geq 1$ per cada j la multiplicitat algebraica del valor propi λ_k.

De la forma canònica de Smith, deduïm que

$$detP(\lambda) = k_2 \prod_{j=1}^{r} i_j(\lambda)$$

on $k_2 \neq 0$. Donat que els polinomis invariants són mònics, $k_1 = k_2$ i

$$\prod_{j=1}^{r} i_j(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

Ara bé, $i_j(\lambda)$ és divisor de $i_{j+1}(\lambda)$ per $j = 1, 2, \ldots, r-1$. Per tant, existeixen $\alpha_{jk}, 1 \leq j \leq r$ i $1 \leq k \leq s$ tals que

$$i_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{12}} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{1s}} \tag{3.3.1}$$

$$i_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{22}} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{2s}} \tag{3.3.2}$$

$$i_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{r1}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{r2}} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{rs}} \tag{3.3.3}$$

Cada factor $(\lambda - \lambda_k)^{\alpha_{jk}}$ que apareix a la factorització amb $\alpha_{jk} > 0$ s'anomena divisor elemental de $P(\lambda)$.

En resum, els elements diagonals $i_1(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ en la forma de Smith s'anomenen *polinomis invariants* de $P(\lambda)$. El nombre r de polinomis invariants es pot definir com

$$r = max_{\lambda \in \mathbb{C}} \{rangP(\lambda)\}.$$

Representem cada polinomi invariant com un producte de factors lineals

$$i_i = (\lambda - \lambda_{i1})^{\alpha_{i1}} \ldots (\lambda - \lambda_{ik})^{\alpha_{ik} k_i}, \quad i = 1, \ldots, r$$

on $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i,k_i}$ són diferents nombres complexos i $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i}$ són integrands positius.

Els factors $(\lambda - \lambda_{ij})^{\alpha_{ij}}, j = 1, \ldots, k_i, i = 1, \ldots, r$ s'anomenen divisors elementals de $P(\lambda)$.

El nombre total de divisors elementals de $P(\lambda)$ és $\sum_{i=1}^{r} k_i$.

Proposició 3.3.1. *[1] Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}[\lambda]$ tal que $detP(\lambda) \neq 0$. Aleshores la suma $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij}$ de graus dels divisors elementals $(\lambda - \lambda_{ij})^{\alpha_{ij}}$ coincideix amb els graus del $detP(\lambda)$.*

Exemple 3.3.2. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 + 1 \\ 0 & -1 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}[\lambda]$$

Calculem els seus divisors elementals.

Primerament, apliquem $fil_3 - (-\frac{1}{\lambda^2+1})fil_2$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 + 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Seguidament, fem $col_3 - col_2$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Finalment, la forma de Smith de la matriu $P(\lambda)$ és:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)\lambda^2(\lambda^2 + 1) \end{bmatrix}.$$

Per tant, els polinomis invariants són: $\lambda - 1, \lambda^2 + 1$ i λ^2 i també seran els divisors elementals en $\mathbb{R}$. Ara bé, els divisors elementals en $\mathbb{C}$ seran: $\lambda - 1, \lambda^2, \lambda - i, \lambda + i$.

Veiem que $detP(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) + (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2$ és de grau 5 i, si sumem els graus dels divisors elementals obtenim 5 també.

Definició 3.3.3. *Un divisor elemental tal que* $\alpha_{jk} = 1$ *es diu que és* lineal. *En cas contrari, s'anomena* no lineal.

Exemple 3.3.4. Tornant als exemples (3.2.8) i (3.2.10), hem vist que la forma de Smith de la matriu

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}[\lambda].$$

és

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^5 - \lambda^4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}[\lambda]$$

i els polinomis invariants són: $i_1(\lambda) = \lambda, i_2(\lambda) = \lambda$ i $i_3(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4$.

Aleshores, com $\lambda^5 - \lambda^4 = \lambda^4(\lambda - 1)$, els divisors elementals són: $\lambda, \lambda, \lambda^4$ i $\lambda - 1$.

Teorema 3.3.5. *[3] Dues matrius polinomials complexes són equivalents si, i només si, tenen els mateixos divisors elementals.*

Teorema 3.3.6. *[3] Siguin $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, aleshores el conjunt de divisors elementals de la matriu diagonal per blocs*

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & Q(\lambda) \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

és la unió dels conjunts de divisors elementals de $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$.

Demostració. Definim $D_1(\lambda)$ i $D_2(\lambda)$ les formes de Smith de $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$, respectivament. Aleshores,

$$C(\lambda) = E(\lambda) \begin{bmatrix} D_1(\lambda) & 0 \\ 0 & D_2(\lambda) \end{bmatrix} F(\lambda) \tag{3.3.5}$$

per algunes $E(\lambda), F(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ amb $detE(\lambda) = c_1, detF(\lambda) = c_2$, $c_1, c_2 \neq 0$ constants. Siguin $(\lambda-\lambda_0)^{\alpha_1}, \dots, (\lambda-\lambda_0)^{\alpha_p}$ i $(\lambda-\lambda_0)^{\beta_1}, \dots, (\lambda-\lambda_0)^{\beta_q}$ divisors elementals de $D_1(\lambda)$ i $D_2(\lambda)$ respectivament, corresponents a la mateixa arrel complexa λ_0. Ordenem els exponents de manera no decreixent:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{p+q}\}, 0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{p+q}.$$

De la definició de polinomis invariants, deduïm que, en la forma de Smith $D = diag[i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda), 0, \dots, 0]$ de $diag[D_1(\lambda), D_2(\lambda)]$, el polinomi invariant $i_r(\lambda)$ és divisible per $(\lambda-\lambda_0)^{\gamma_{p+q}}$, però no per $(\lambda-\lambda_0)^{\gamma_{p+q}+1}$; i $i_{r-1}(\lambda)$ és divisible per $(\lambda-\lambda_0)^{\gamma_{p+q-1}}$ però no per $(\lambda-\lambda_0)^{\gamma_{p+q-1}+1}$ i així successivament. Per tant, els divisors elementals de

$$\begin{bmatrix} D_1(\lambda) & 0 \\ 0 & D_2(\lambda) \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

(i, per tant, també aquells de $C(\lambda)$ corresponents a λ_0) són $(\lambda-\lambda_0)^{\gamma_1}, \dots, (\lambda-\lambda_0)^{\gamma_{p+q}}$, i el teorema queda provat. □

Capítol 4

Linealització de Matrius Polinomials Regulars Quadrades

Calcular els valors propis d'una matriu polinomial es resol mitjançant la linealització. Aquest mètode consisteix en la transformació de $P(\lambda)x = 0$ en un problema de valors propis lineals de major mida, $L(\lambda)z = (\lambda X + Y)z = 0$ amb la mateixa estructura espectral, de manera que els mètodes clàssics de resolució de problemes per a valors propis lineals puguin ser emprats.

Anomenarem *feix* a qualsevol matriu polinomial de la forma $\lambda X + Y$.

Comencem estudiant la linealització pel cas mònic.

Definició 4.0.1. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de grau $d \geq 1$. Un feix $L(\lambda) = \lambda X + Y$ amb $X, Y \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$ s'anomena* linealització *de $P(\lambda)$ si existeixen matrius polinomials unimodulars $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ tals que*

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(d-1)n} \end{bmatrix} = E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda). \tag{4.0.1}$$

En el cas mònic, és suficient la definició de linealització, ja que tenim $L(\lambda) \sim P(\lambda)$ i, llavors, $E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda)$ és també linealització i manté els valors propis i els divisors elementals.

Hi ha moltes maneres de definir les matrius companyes però, donat que aquestes són estrictament equivalents entre elles, és suficient definir el següent:

Definició 4.0.2. *Una* matriu companya *és una linealització de $P(\lambda)$, $C(\lambda) = \lambda X + Y$, on X, Y són de la forma*

$$X = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrius companyes es poden construir immediatament a partir de les dades de $P(\lambda)$ i els vectors propis de $P(\lambda)$ es poden recuperar fàcilment dels vectors propis de la matriu companya. Un problema d'aquestes és que no preserven l'estructura de valors propis que pugui estar present en el polinomi original $P(\lambda)$.

Per al cas general, sigui

$$X_1 = X_2 = diag(A_d, I_{(d-1)n})$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{dn\times dn}, \quad \text{i} \quad Y_2 = \begin{bmatrix} A_{d-1} & -I_n & \dots & 0 \\ A_{d-2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$$

Aleshores $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1 \in \mathbb{C}^{dn\times dn}[\lambda]$ i $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2 \in \mathbb{C}^{dn\times dn}[\lambda]$ són, respectivament, la primera i la segona matriu companya de $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.

A continuació veiem la linealització d'una matriu mònica $n \times n$ en termes dels seus coeficients. Per al següent resultat, tornem a definir les matrius companyes C_1 i C_2, ja que resulta més convenient treballar amb aquestes formes, equivalents a la definició (4.0.2).

Proposició 4.0.3. *[1] Per una matriu polinomial mònica $n\times n$, $P(\lambda) = I\lambda^d + \sum_{j=0}^{d-1} A_j \lambda^j \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$:*

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & I \\ -A_0 & -A_1 & & \dots & -A_{d-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$$

on $C_1(\lambda)$ és la primera matriu companya de $P(\lambda)$.

Aleshores

$$I\lambda - C_1 \sim \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

De la definició de C_1, $det(I\lambda - C_1) = det P(\lambda)$. En particular, els valors propis de $P(\lambda)$ i els valors propis de $I\lambda - C_1$ són iguals. A més, donat que

$$I\lambda - C_1 \sim \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.0.2}$$

els divisors elementals (i, per tant, les multiplicitats parcials a cada valor propi) de $I\lambda - C_1$ i $P(\lambda)$ són els mateixos.

La matriu

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I & \dots & 0 & -A_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & -A_{d-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$$

és una linealització de la matriu polinomial $P(\lambda) = I\lambda^d + \sum_{j=0}^{d-1} A_j\lambda^j$.

Per al cas no mònic necessitem linealització forta, ja que el valor propi 0 no manté l'estructura espectral. En aquest cas, tenim $UL(\lambda)V$, amb U, V matrius no singulars.

Definició 4.0.4. $L(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *és una* linealització forta *de* $P(\lambda)$ *si, a més de la condició* (4.0.1)*, existeixen* $H(\lambda), K(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *unimodulars tals que*

$$\begin{bmatrix} rev(P(\lambda)) & \\ & I_{(d-1)n} \end{bmatrix} = H(\lambda) rev(L(\lambda)) K(\lambda) \tag{4.0.3}$$

és una relació d'equivalència que conecta el polinomi del revers amb el feix del revers.

Exemple 4.0.5. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.0.4}$$

$detP(\lambda) = 1$, per tant, la matriu $P(\lambda)$ no té valors propis finits.

Calculem el seu revers:

$$revP(\lambda) = \lambda P(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{4.0.5}$$

calculant $det(revP(\lambda))$ obtenim el valor propi $\lambda = 0$, amb $m_0 = 3$. Per tant, el valor propi ∞ de $P(\lambda)$ té $m_\infty = 3$.

De la matriu $revP(\lambda)$ obtenim la següent informació:

- El màxim comú divisor dels menors 1×1 és 1. Anomenem $d_1 = 1$. El màxim comú divisor dels menors 2×2 és λ. Anomenem $d_2 = \lambda$. El màxim comú divisor dels menors 3×3 és λ^3. Anomenem $d_3 = \lambda^3$.

- $$i_1 = \frac{d_1}{d_0} = 1, \quad i_2 = \frac{d_2}{d_1} = \lambda, \quad i_3 = \frac{d_3}{d_2} = \lambda^2. \tag{4.0.6}$$

- Per tant, la forma de Smith és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \tag{4.0.7}$$

Multiplicant $P(\lambda)$ per les matrius unimodulars

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.0.8}$$

obtenim

$$Q(\lambda) = U(\lambda)P(\lambda)V(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.0.9}$$

que tampoc té valos propis finits. Ara bé, calculant el seu revers

$$revQ(\lambda) = \lambda Q(\frac{1}{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{4.0.10}$$

El valor propi obtingut és, com abans, $\lambda = 0$ amb $m_0 = 3$, que serà el valor propi ∞ de $Q(\lambda)$. Per tant, és necessària la linealització forta per al càlcul d'aquests valors propis.

De la matriu $revQ(\lambda)$ obtenim la següent informació:

- El màxim comú divisor dels menors 1×1 és 1. Anomenem $d_1 = 1$. El màxim comú divisor dels menors 2×2 és 1. Anomenem $d_2 = 1$. El màxim comú divisor dels menors 3×3 és λ^3. Anomenem $d_3 = \lambda^3$.

- $$i_1 = \frac{d_1}{d_0} = 1, \quad i_2 = \frac{d_2}{d_1} = 1, \quad i_3 = \frac{d_3}{d_2} = \lambda^3. \tag{4.0.11}$$

- Per tant, la forma de Smith és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \tag{4.0.12}$$

Hem vist, doncs, que en el valor propi 0 no es manté l'estructura. Les matrius tenen diferents divisors elementals i la multiplicitat algebraica no manté el grau d'aquests. En conclusió, no es manté l'estructura espectral en el valor propi ∞ de la matriu $P(\lambda)$ donada. La linealització forta assegura que els divisors elementals a l'infinit siguin precisament els de $P(\lambda)$.

Proposició 4.0.6. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ una matriu polinomial regular amb valor propi a l'infinit de multiplicitat algebraica $k > 0$. Aleshores, per qualsevol partició de k en integrands positius, $k = \sum_{j=1}^{p} k_j$, hi ha una linealització de $P(\lambda)$ amb valor propi a l'infinit que té p divisors elementals de graus $k_1, \dots, k_p$.*

A continuació veiem un exemple de linealització en el cas no mònic:

Exemple 4.0.7. Sigui

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

Podem escriure $P(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2$.

Calculem els valors propis de $P(\lambda)$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 = 0 \iff \lambda = 0$$

amb $m_0 = 2$.

La linealització serà, doncs,

$$C_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$$

Calculem els valors propis de $C_1(\lambda)$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = +\lambda \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

Aleshores $\lambda = 0$ amb $m_0 = 2$.

En conclusió, veiem que la linealització $C_1(\lambda)$ de la matriu $P(\lambda)$ manté els valors propis i les seves multiplicitats.

Teorema 4.0.8. *[2] La primera i la segona matrius companyes (feixos companys) $C_1(\lambda)$ i $C_2(\lambda)$ són linealitzacions fortes de $P(\lambda)$ d'ordre dn.*

Demostració. Ho provem per $C_2(\lambda)$.
Per $j = 1, \ldots, d-1$, definim

$$F_j(\lambda) = \sum_{v=j}^{d} \lambda^{v-j} A_v, \quad K_j(\lambda) = \sum_{v=0}^{j-1} \lambda^{j-v} A_v.$$

Aleshores,

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \lambda I_n & \ldots & \lambda^{d-1} I_n \\ 0 & I_n & \ldots & \lambda^{d-2} I_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda I_n \\ 0 & 0 & \ldots & I_n \end{bmatrix}, \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} F_1(\lambda) & -I_n & 0 & \ldots & 0 \\ F_2(\lambda) & 0 & -I_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ F_{d-1}(\lambda) & 0 & 0 & \ldots & -I_n \\ I_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1} I_n & \ldots & \lambda I_n & I_n \\ \lambda^{d-2} I_n & \ldots & I_n & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda I_n & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K(\lambda) = \begin{bmatrix} -K_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & I_n \\ -K_2(\lambda) & 0 & \ldots & I_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ -K_{d-1}(\lambda) & I_n & \ldots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

són matrius polinomials unimodulars.

Les següents identitats són certes:

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{n(d-1)} \end{bmatrix} = E(\lambda) C_2(\lambda) F(\lambda) \tag{4.0.13}$$

$$\begin{bmatrix} rev(P(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_{n(d-1)} \end{bmatrix} = H(\lambda) rev C_2(\lambda) K(\lambda) \tag{4.0.14}$$

$rev(P(\lambda))$ i $rev(C_2(\lambda)) = \lambda C_2(\lambda^{-1})$. Tenim, doncs, $C_2(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$ d'ordre dn.

El resultat anàleg per $C_1(\lambda)$ s'obté prenent el bloc transposat de (4.0.13) i (4.0.14). □

Proposició 4.0.9. *[2] Si $L(\lambda) \in \mathbb{C}^{dn \times dn}[\lambda]$ és una linealització de $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}[\lambda]$, aleshores tot $EL(\lambda)F$, on $E, F \in \mathbb{C}$ no singulars, és també linealització.*

Proposició 4.0.10. *[2] Si $P(\lambda)$ és regular, aleshores qualssevol linealitzacions de $P(\lambda)$ d'ordre dn són estrictament equivalents. En particular, $C_1(\lambda)$ i $C_2(\lambda)$ són estrictament equivalents.*

Demostració. Siguin $\lambda G_1 - A_1 \in \mathbb{C}^{dn \times dn}[\lambda]$ i $\lambda G_2 - A_2 \in \mathbb{C}^{dn \times dn}[\lambda]$ linealitzacions de $P(\lambda)$ d'ordre dn. Les fórmules

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{n(d-1)} \end{bmatrix} = E(\lambda)(\lambda G - A)F(\lambda) \tag{4.0.15}$$

i

$$\begin{bmatrix} rev(P(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_{n(d-1)} \end{bmatrix} = H(\lambda)(G - \lambda A)K(\lambda) \tag{4.0.16}$$

és satisfan per $\lambda G_1 - A_1$ i $\lambda G_2 - A_2$. Existeixen matrius polinomials unimodulars $E_0(\lambda), F_0(\lambda), H_0(\lambda), K_0(\lambda)$ amb determinant constant diferent de zero tals que

$$\lambda G_1 - A_1 = E_0(\lambda)(\lambda G_2 - A_2)F_0(\lambda) G_1 - \lambda A_1 = H_0(\lambda)(G_2 - \lambda A_2)K_0(\lambda)$$

Per tant, els feixos regulars $\lambda G_1 - A_1$ i $\lambda G_2 - A_2$ tenen els mateixos divisors elementals en cada punt finit i també a l'infinit. Però aleshores els dos feixos són estrictament equivalents. $\square$

Capítol 5

Espais Vectorials de Linealitzacions

5.1 Espais vectorials de potencials linealitzacions

En aquest capítol introduirem espais vectorials d'on obtenir linealitzacions d'una matriu polinomial regular quadrada.

En el capítol anterior hem vist que les linealitzacions clàssiques de les matrius polinomials venen donades per les matrius companyes. Les matrius companyes tenen l'avantatge de ser fàcilment construïbles però poden presentar l'inconvenient de no preservar estructures algebraiques de la matriu polinomial original. Per exemple, si $P(\lambda)$ és simètrica, és convenient que la seva linealització $L(\lambda)$ també sigui simètrica. Per això, necessitem un mètode que ens permeti trobar diferents linealitzacions.

Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ regular, volem resoldre $P(\lambda)x = 0$, on $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}[\lambda]$.

Introduïm les variables $x_1 = \lambda^{d-1}x, x_2 = \lambda^{d-2}, \ldots, x_{d-1} = \lambda x, x_d = x$. D'aquesta manera, transformem el problema $P(\lambda)x = 0$ en

$$A_d(\lambda x_1) + A_{d-1}x_1 + A_{d-2}x_2 + \ldots + A_1x_{d-1} + A_0x_d = 0$$

que podem reescriure com

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} A_d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \ldots & A_0 \\ -I_n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & -I_n & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = 0 \tag{5.1.1}$$

Recíprocament, si comencem per (5.1.1), les últimes $d-1$ files de blocs restringeixen qualssevol solució a la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{bmatrix} = \Lambda \otimes x$$

on $\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1} & \dots & \lambda & 1 \end{bmatrix}^T$.

Aleshores, tenim que

$$C_1(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{d-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{bmatrix} = 0 \iff C_1(\lambda)(\Lambda \otimes x) = 0 \iff \begin{bmatrix} (P(\lambda)x)^T & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T = 0 \ \forall x \in \mathbb{C}^n$$

Tota solució de (5.1.1) és solució del problema original $P(\lambda)x = 0$.

Podem generalitzar el procés anterior i considerem el conjunt $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{C}^{dn \times dn}[\lambda]$, que satisfà:

$$L(\lambda) \cdot (\Lambda \otimes I_n) = L(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{d-1}I_n \\ \vdots \\ \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 P(\lambda) \\ \vdots \\ v_{d-1}P(\lambda) \\ v_d P(\lambda) \end{bmatrix} = v \otimes P(\lambda) \tag{5.1.2}$$

per algun $v = [v_1, \dots, v_d]^T \in \mathbb{C}^{d \times 1}$.

Aquest conjunt de feixos es denota per $\mathbb{L}_1(P)$. Més concretament:

Definició 5.1.1.

$$\mathbb{L}_1(P) := \{L(\lambda) = \lambda X + Y : X, Y \in \mathbb{C}^{dn \times dn}, L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) \in \mathcal{V}_P\},$$

on $\mathcal{V}_P = \{v \otimes P(\lambda) : v \in \mathbb{C}^{d \times 1}\}$.

Lema 5.1.2. *$\mathcal{V}_P$ és un espai vectorial (isomorf a $\mathbb{C}^{d \times 1}$).*

Demostració. Les propietats d'espai vectorial s'obtenen a partir de les propietats del producte de Kronecker. □

Una conseqüència del lema anterior és la següent proposició:

Proposició 5.1.3. *[4] Per a tot $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}[\lambda]$, $\mathbb{L}_1(P)$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Observem que $C_1(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, i per tant $\mathbb{L}_1(P) \neq 0$.

A continuació veiem que, tal com passa amb les formes companyes, és fàcil construir els feixos $\mathbb{L}_1(P)$ a partir de les dades de $P(\lambda)$. Com a conseqüència d'aquesta construcció, obtenim una caracterització de tots els feixos de $\mathbb{L}_1(P)$ i un càlcul de la seva dimensió. Cal introduïr una nova operació (convenient per treballar amb productes de la forma $L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n)$ abans d'enunciar la caracterització de feixos en $\mathbb{L}_1(P)$), la *suma desplaçada.*

Definició 5.1.4. *Siguin X, $Y \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$*

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{d1} & \dots & X_{dd} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{d1} & \dots & Y_{dd} \end{bmatrix}$$

amb blocs X_{ij}, $Y_{ij} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Aleshores la suma desplaçada per columnes *de X i Y és defineix com*

$$X \boxplus\!\!\rightarrow Y := \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1d} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{d1} & \dots & X_{dd} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{11} & \dots & Y_{1d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & Y_{d1} & \dots & Y_{dd} \end{bmatrix}$$

on els blocs $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Exemple 5.1.5. La suma desplaçada per la primera matriu companya $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$ de $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i$, $X_1 \boxplus\!\!\rightarrow Y_1$ és

$$\begin{bmatrix} A_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

Si en (5.1.2) considerem $L(\lambda) = C_1(\lambda)$, aleshores tenim $C_1(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = e_1 \otimes P(\lambda)$.

Aplicant la suma desplaçada definida anteriorment obtenim $X_1 \boxplus\!\!\rightarrow Y_1 = e_1 \otimes \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix}$.

Aquesta operació està dissenyada per imitar el producte d'un feix $L(\lambda) = \lambda X + Y$ amb matrius columna per blocs $\Lambda \otimes I_n$.

Lema 5.1.6. *[4] Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{C}^{dn\times dn}[\lambda]$. Aleshores per $v \in \mathbb{C}^{d\times 1}$,*

$$(\lambda X + Y)(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda) \iff X \boxplus\!\!\rightarrow Y = v \otimes \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix}.$$

Per tant podem definir

$$\mathbb{L}_1(P) = \{\lambda X + Y : X \boxplus\!\!\rightarrow Y = v \otimes \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix}, \ v \in \mathbb{C}^{d\times 1}\}.$$

Els feixos de matrius polinomials es poden construir a partir de les dades proporcionades per P. Com a conseqüència, obtenim la caracterització de tots els feixos de $\mathbb{L}_1(P)$

i el càlcul de $dim(\mathbb{L}_1(P))$.

Teorema 5.1.7. *[4](Caracterització de feixos en $\mathbb{L}_1(P)$)*
Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i $v \in \mathbb{C}^{d\times 1}$ un vector qualsevol. Aleshores el conjunt de feixos a $\mathbb{L}_1(P)$ ve donat per els $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{C}^{dn\times dn}[\lambda]$ tals que

$$X = \begin{bmatrix} v\otimes A_d & W \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times(d-1)n} \quad i \quad Y = \begin{bmatrix} W + (v\otimes \begin{bmatrix} A_{d-1} & \dots & A_1 \end{bmatrix}) & v\otimes A_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(d-1)n\times n},$$

amb $W \in \mathbb{C}^{dn\times(d-1)n}$ arbitrari.

Demostració. Considerem la multiplicació $\mathcal{M}$, que trobem implícita a la definició de $\mathbb{L}_1(P)$:

$$\mathcal{M} : \mathbb{L}_1(P) \to \mathcal{V}_P,$$

tal que $\mathcal{M}(L(\lambda)) = L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n)$.

Clarament, $\mathcal{M}$ és lineal.
Veiem que $\mathcal{M}$ és exhaustiva. Sigui $v \otimes P(\lambda)$ un element arbitrari de $\mathcal{V}_P$ i construïm

$$X_v = \begin{bmatrix} v\otimes A_d & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad Y_v = \begin{bmatrix} v\otimes \begin{bmatrix} A_{d-1} & \dots & A_1 \end{bmatrix} & v\otimes A_0 \end{bmatrix}.$$

Aleshores $X_v \boxplus\!\!\rightarrow Y_v = v \otimes \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix}$. Pel lema (5.1.2), $L_v(\lambda) := \lambda X_v + Y_v$ és una $\mathcal{M}$-preimatge de $v \otimes P(\lambda)$. Aquest conjunt de $\mathcal{M}$-preimatges de $v \otimes P(\lambda)$ és llavors $L_v(\lambda) + ker\mathcal{M}$, per tant només cal calcular $ker\mathcal{M}$. El kernel de $\mathcal{M}$ consisteix en tots els feixos $\lambda X + Y$ que satisfan $X \boxplus\!\!\rightarrow Y = 0$. La definició de la suma desplaçada implica que X i Y han de ser de la forma

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -W \end{bmatrix} \quad i \quad Y = \begin{bmatrix} W & 0 \end{bmatrix},$$

on $W \in \mathbb{C}^{dn\times(d-1)n}$ és arbitrari. Amb això queda completada la demostració. □

Corol·lari 5.1.8. *[4] $dim(\mathbb{L}_1(P)) = d(d-1)n^2 + d$.*

Demostració. $\mathcal{M}$ és exhaustiva, aleshores

$$dim\mathbb{L}_1(P) = dim(ker\mathcal{M}) + dim\mathcal{V}_P = d(d-1)n^2 + d.$$

□

Veiem, doncs, que $\mathbb{L}_1(P)$ és un subespai relativament ampli de l'espai de feixos de matrius polinomials. No obstant, els feixos $\mathbb{L}_1(P)$ són fàcilment construïbles a partir de les dades de P.

Anem a veure les propietats de les formes companyes:

1. Suposem $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ té vector "ansatz" dret $v = \alpha e_1$. Aleshores

$$X = \begin{bmatrix} \alpha A_d & X_{12} \\ 0 & -Z \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \alpha A_0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$$

   per algun $Z \in \mathbb{C}^{(d-1)n \times (d-1)n}$.

2. Relació entre els vectors propis de les matrius companyes i els de la matriu polinomial P que s'està linealitzant.

   El problema lineal de valors propis que estem estudiant és

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} A_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.1.4)$$

   Un vector propi de $C_1(\lambda)$ és de la forma $\Lambda \otimes x$, on x és un vector propi de P. Per tant, els vectors propis de P és recuperen extraient les n últimes coordenades dels vectors propis de la forma companya.

Les linealitzacions a $\mathbb{L}_1(P)$ també tenen aquesta propietat.

Teorema 5.1.9. *[4](Propietat de recuperació de VEPs per $\mathbb{L}_1(P)$)*
Sigui $P(\lambda)$ una matriu polinomial $n \times n$ de grau d, i $L(\lambda)$ un feix qualsevol de $\mathbb{L}_1(P)$ amb $v \neq 0$ vector "ansatz" dret. Aleshores $x \in \mathbb{C}^n$ és VEP de $P(\lambda)$ amb VAP finit $\lambda \in \mathbb{C}$ si, i només si $\Lambda \otimes x$ és un VEP de $L(\lambda)$ amb VAP λ. Si, a més, P és regular i $L \in \mathbb{L}_1(P)$ és una linealització de P, aleshores tot VEP de L amb valor propi λ és de la forma $\Lambda \otimes x$ per algun VEP x de P.

Demostració.

$$L(\lambda)(\Lambda \otimes x) = L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n)(1 \otimes x) = (v \otimes P(\lambda))(1 \otimes x) = v \otimes (P(\lambda)x).$$

Així doncs, queda demostrada la primera part del teorema.

Suposem ara $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propi finit de $L(\lambda)$ amb multiplicitat geomètrica m, i sigui $y \in \mathbb{C}^{dn}$ un vector propi de $L(\lambda)$ associat amb λ. Donat que $L(\lambda)$ és linealització de $P(\lambda)$, la multiplicitat geomètrica de λ per $P(\lambda)$ és m. Siguin $x_1, \dots, x_m$ vectors propis linealment independents de $P(\lambda)$ associats amb λ, i definim $y_i = \Lambda \otimes x_i$, $i = 1, \dots, m$. Aleshores $y_1, \dots, y_m$ són vectors propis linealment independents de $L(\lambda)$ amb valor propi λ, per tant y ha de ser combinació lineal de $y_1, \dots, y_m$. Aleshores y és de la forma $y = \Lambda \otimes x$ per algun vector propi $x \in \mathbb{C}^n$ per P. □

Veiem ara el cas anàleg per a les segones formes companyes, $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$.

En aquest cas, enlloc de tenir el producte de $(\Lambda \otimes I_n)$ per la dreta, el trobem a l'esquerre, de manera que

$$\begin{bmatrix} \lambda^{d-1} I_n & \dots & \lambda I_n & I_n \end{bmatrix} C_2(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \iff (\Lambda^T \otimes I_n) C_2(\lambda) = e_1^T \otimes P(\lambda). \tag{5.1.5}$$

Si considerem els feixos $L(\lambda) = \lambda X + Y$ corresponents l'espai vectorial $\mathbb{L}_2(P)$ i que satisfan l' "ansatz" per l'esquerra, aleshores

$$(\Lambda^T \otimes I_n) L(\lambda) = w^T \otimes P(\lambda) \tag{5.1.6}$$

on w és el vector "ansatz" esquerre.

Definició 5.1.10.

$$\mathbb{L}_2(P) := \{L(\lambda) = \lambda X + Y : X, Y \in \mathbb{C}^{dn \times dn}, (\Lambda^T \otimes I_n) L(\lambda) \in \mathcal{W}_P\},$$

on $\mathcal{W}_P = \{w^T \otimes P(\lambda) : w \in \mathbb{C}^{1 \times d}\}$.

Com abans, l'anàlisi de $\mathbb{L}_2(P)$ és ajudat per la introducció de la següent operació de matrius per blocs.

Definició 5.1.11. *Siguin* X, $Y \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{d1} & \dots & X_{dd} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{d1} & \dots & Y_{dd} \end{bmatrix}$$

amb blocs X_{ij}, $Y_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. *Aleshores la* suma desplaçada per files *de* X *i* Y *es defineix com*

$$X \underset{\downarrow}{\boxplus} Y := \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{d1} & \dots & X_{dd} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ Y_{11} & \dots & Y_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{d1} & \dots & Y_{dd} \end{bmatrix}$$

on els blocs $0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

El següent lema, anàlog a (5.1.6), estableix la correspondència entre l'"ansatz" esquerre i suma desplaçada per files.

Lema 5.1.12. *[4] Sigui $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{C}^{dn\times dn}$. Aleshores per $w \in \mathbb{C}^{1\times d}$,*

$$(\Lambda \otimes I_n)(\lambda X + Y) = w^T \otimes P(\lambda) \iff X \boxplus\!\!\!\downarrow Y = w^T \otimes \begin{bmatrix} A_d \\ A_{d-1} \\ \vdots \\ A_0 \end{bmatrix}.$$

Per tant podem definir

$$\mathbb{L}_2(P) = \{\lambda X + Y : X \boxplus\!\!\!\downarrow Y = w^T \otimes \begin{bmatrix} A_d & A_{d-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix}^T,\ w \in \mathbb{C}^{1\times d}\}.$$

A continuació, per un polinomi $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i$, utilitzem P^T pel polinomi $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i^T$. Per extensió, si $\mathcal{S}$ és un conjunt de matrius polinomials, $\mathcal{S}^T$ és $P^T : P \in \mathcal{S}$.

Proposició 5.1.13. *[4]* $\mathbb{L}_2(P) = [\mathbb{L}_1(P^T)]^T$.

Demostració. $L \in \mathbb{L}_1(P^T) \iff L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P^T(\lambda) \iff (\Lambda^T \otimes I_n)L^T(\lambda) = v^T \otimes P(\lambda) \iff L^T \in \mathbb{L}_2(P)$. □

Definició 5.1.14. *Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$. Un* VEP per l'esquerra *de $P(\lambda)$ associat a un VAP finit λ és un vector $y \in \mathbb{C}^n$, $y \neq 0$ tal que $yP(\lambda) = 0$.*

Un VEP per l'esquerra per $P(\lambda)$ corresponent al VAP ∞ és un VEP per l'esquerra per $revP(\lambda)$ associat al VAP 0.

El següent resultat mostra que els VEPs per l'esquerra de $P(\lambda)$ són fàcilment recuperables de les linealitzacions de $\mathbb{L}_2(P)$.

Teorema 5.1.15. *[4] Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de grau d, i $L(\lambda)$ qualsevol feix a $\mathbb{L}_2(P)$ amb vector "ansatz" esquerre w, $w \neq 0$. Aleshores $y \in \mathbb{C}^n$ és VEP per l'esquerra per $P(\lambda)$ amb VAP finit $\lambda \in \mathbb{C}$ si, i només si, $\overline{\Lambda} \otimes y$ és un VEP esquerre per $L(\lambda)$ amb VAP λ. Si, a més, P és regular i $L \in \mathbb{L}_2(P)$ és linealització de P, aleshores tot VEP per l'esquerra de L amb VAP finit λ és de la forma $\overline{\Lambda} \otimes y$ per algun VEP per l'esquerra y de P.*

5.2 Linealitzacions de feixos a $\mathbb{L}_1(P)$

Per qualsevol $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, per tal de garantir que $L(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$ hi ha unes "condicions de linealització" que s'han de satisfer. Veurem que cada feix de $\mathbb{L}_1(P)$ té la seva condició particular a satisfer per tal de ser una linealització de $P(\lambda)$.

El procediment per tal de determinar aquestes condicions per un feix de $\mathbb{L}_1$ és el següent:

1. Suposar que $P(\lambda)$ és un polinomi regular i $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ té vector "ansatz" $v \in \mathbb{C}^d$, $v \neq 0$, i.e., $L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$.
2. Selecciona qualsevol matriu M, M no singular, tal que $Mv = \alpha e_1$.
3. Aplica la transformació de blocs corresponent $M \otimes I_n$ a $L(\lambda)$ per obtenir $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n)L(\lambda)$,
$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda\tilde{X} + \tilde{Y} = \lambda \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} \\ 0 & -Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ Z & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.1}$$
on $\tilde{X}_{11}, \tilde{Y}_{12} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\tilde{Y} = (M \otimes I_n)Y$.
4. Obtenir $detZ \neq 0$, la condició de linealització per $L(\lambda)$.

Exemple 5.2.1. Sigui $P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$. Considerem els feixos de $\mathbb{L}_1$

$$L_1(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} A & B+C \\ A & 2B-A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C & C \\ A-B & C \end{bmatrix}, \quad L_2(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -B \\ A & B-C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & C \end{bmatrix}$$

Donat que
$$\begin{bmatrix} A & B+C \\ A & 2B-A \end{bmatrix} \boxplus\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} -C & C \\ A-B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

tenim $L_1(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ amb vector "ansatz" dret $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} -C & C \\ A-b+C & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, $Z = A - B + C$, i $det(A-B+C) = detP(-1) \neq 0$ és la condició de linealització. És a dir, $L_1(\lambda)$ és una linealització de P si, i només si $\lambda = -1$ *no* és un valor propi de P.

Per $L_2(\lambda)$ tenim
$$\begin{bmatrix} 0 & -B \\ A & B-C \end{bmatrix} \boxplus\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & B & C \end{bmatrix},$$

per tant $L_2(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ amb $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} C & C \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Per tant, $Z = \tilde{Y}_{21} = B$, i $detB \neq 0$ és la condició de linealització per $L_2(\lambda)$.

Teorema 5.2.2. *[4](Les linealitzacions són genèriques a $\mathbb{L}_1(P)$)*
Per tota $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de grau d, casi tots els feixos a $\mathbb{L}_1(P)$ són linealitzacions de $P(\lambda)$.

Demostració. Sigui $d = dim\mathbb{L}_1(P) = k + (k-1)kn^2$, i siguin $L_1(\lambda), L_2(\lambda), \ldots, L_d(\lambda)$ una base fixada de $\mathbb{L}_1(P)$. Com $L(\lambda)$ es pot expressar de la forma

$$L(\lambda) = \beta_1 L_1(\lambda) + \beta_2 L_2(\lambda) + \ldots + \beta_d L_d(\lambda),$$

podem interpretar $detL(\lambda)$ com un polinomi a λ els coeficients del qual són funcions polinòmiques de $\beta_1, \ldots, \beta_d$. Això és $c_i = c_i(\beta_1, \ldots, \beta_d)$, on $c_0, c_1, \ldots, c_{kn}$ són els coeficients esmentats.

Pel teorema (5.2.5), que veurem més endavant, sabem que $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$ no serà linealització de $P(\lambda)$ si, i només si, $detL(\lambda) \equiv 0$, equivalentment si tots els coeficients c_i són zero. Els feixos a $\mathbb{L}_1(P)$ que no són linealitzacions de $P(\lambda)$ es poden caracteritzar com el conjunt $\mathcal{Z}$ de polinomis $\{c_i(\beta_1, \ldots, \beta_d) : 0 \leq i \leq kn\}$, com un subconjunt algebraic de $\mathbb{F}^d$.

Donat que els conjunts algebraics de $\mathbb{F}^d$ són coneguts per ser tancats, la demostració quedarà completada quan demostrem que $\mathcal{Z}$ és un subconjunt propi de $\mathbb{F}^d$, o, equivalentment, que hi ha un feix a $\mathbb{L}_1(P)$ que és una linealització per $P(\lambda)$. Això és immediat: la primera matriu companya $C_1(\lambda)$ per $P(\lambda)$ es troba a $\mathbb{L}_1(P)$ i sempre és linealització de $P(\lambda)$. □

Finalment, veiem un exemple d'una linealització que no és ni $\mathbb{L}_1(P)$ ni $\mathbb{L}_2(P)$.

Exemple 5.2.3. Sigui $P(\lambda) = \lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$,

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & A_3 & 0 \\ I & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_0 \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

és una linealització de P. Utilitzant sumes desplaçades, és fàcil veure que no es ni de $\mathbb{L}_1(P)$ ni $\mathbb{L}_2(P)$.

Per al següent teorema, no s'assumeix que P sigui regular.

Teorema 5.2.4. *[4] Suposem* $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, *amb* $A_d \neq 0$, *i* $L(\lambda) = \lambda X + Y \in \mathbb{L}_1(P)$ *té vector "ansatz" dret* $v = \alpha e_1$, *de manera que*

$$L(\lambda) = (\Lambda \otimes I_n) = \alpha e_1 \otimes P(\lambda). \tag{5.2.2}$$

Fent les particions corresponents de X *i* Y,

$$L(\lambda) = \lambda X + Y = \lambda \begin{bmatrix} \alpha A_d & X_{12} \\ 0 & -Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11} & \alpha A_0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.2.3}$$

on $Z \in \mathbb{C}^{(d-1)n\times(d-1)n}$. *Aleshores* Z *no singular implica que* $L(\lambda)$ *és una linealització forta de* $P(\lambda)$.

Demostració. Primerament veiem que $L(\lambda)$ és linealització de $P(\lambda)$.

Siguin $T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{d-1} \\ & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \lambda^2 \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I$ i $G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \lambda^{d-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix} \otimes I$ matrius polinomials unimodulars, reduim $L(\lambda)$ a $diag(P(\lambda), I_{(d-1)n})$.

Donat que l'últim bloc de columnes de $G(\lambda)$ és $\Lambda \otimes I$, veiem de (5.2.2) que l'últim bloc de columnes de $L(\lambda)G(\lambda)$ és $\alpha e_1 \otimes P(\lambda)$. Fent particions de Z en blocs de columnes $[Z_1 Z_2 \dots Z_{d-1}]$, on $Z \in \mathbb{C}^{(d-1)n\times n}$ obtenim

$$L(\lambda)G(\lambda) = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & * \\ Z_1 & (Z_2 - \lambda Z_1) & \dots & (Z_{d-1} - \lambda Z_{d-2}) & -\lambda Z_{d-1} \end{bmatrix} G(\lambda)$$

$$= \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & \alpha P(\lambda) \\ Z_1 & (Z_2 - \lambda Z_1) & \dots & (Z_{d-1} - \lambda Z_{d-2}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ara,

$$L(\lambda)T(\lambda) = L(\lambda)G(\lambda) \begin{bmatrix} I & \lambda I & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & \lambda I & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & \lambda I \\ & & & I \\ & & & & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \alpha P(\lambda) \\ Z & 0 \end{bmatrix}.$$

Existeix $F(\lambda)$ matriu polinomial tal que

$$L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & W(\lambda) \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

per alguna matriu polinomial $W(\lambda)$.

Si Z és no singular,

$$\begin{bmatrix} I & -W(\lambda)Z^{-1} \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(d-1)n} \end{bmatrix}.$$

aleshores $L(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$.

Per veure que $L(\lambda)$ és linealització forta de $P(\lambda)$ veiem que $revL(\lambda) = \lambda Y + X$ és linealització de $revP(\lambda)$.

Donat que $revL(\lambda)$ no és un feix de $\mathbb{L}_1(revP)$, veiem que una petita modificació de $revL(\lambda)$ si ho és.

Observem que $\lambda^{d-1}\Lambda(\frac{1}{\lambda}) = [1, \lambda, \ldots, \lambda^{d-2}, \lambda^{d-1}]^T = R_d\Lambda$, on R_d denota la matriu identitat inversa. Replaçant λ per $1/\lambda$ en (5.2.2) i multiplicant per λ^d en ambdós costats obtenim

$$\lambda L(1/\lambda)(\lambda^{d-1}\Lambda(1/\lambda) \otimes I) = \alpha e_1 \otimes \lambda^d P(1/\lambda).$$

Equivalentment, $revL(\lambda)((R_d\Lambda)\otimes I) = \alpha e_1 \otimes revP(\lambda)$. Per tant, $\tilde{L}(\lambda) := revL(\lambda)(R_d \otimes I)$ satisfà

$$\tilde{L}(\lambda)(\Lambda \otimes I) = \alpha e_1 \otimes revP(\lambda) \tag{5.2.4}$$

i $\tilde{L} \in \mathbb{L}_1(revP)$.

Per completar la demostració cal veure que $\lambda\tilde{X} + \tilde{Y} := \tilde{L}(\lambda)$ és una linealització de $revP(\lambda)$, ja que $\tilde{L}$ i $revL$ són feixos equivalents. No obstant, $\tilde{X} = Y(R_d \otimes I)$ i $\tilde{Y} = X(R_d \otimes I)$ i de (5.2.3) segueix

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha A_0 & \tilde{X}_{12} \\ 0 & -\tilde{Z} \end{bmatrix} \quad i \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \alpha A_d \\ \tilde{Z} & 0 \end{bmatrix}$$

on $\tilde{Z} = -Z(R_{d-1} \otimes I)$. Clarament $\tilde{Z}$ és no singular si ho és Z, i per la part del teorema que ja hem demostrat, $\tilde{L}$ i, per tant, $revL$ és una linealització de $revP(\lambda)$.

□

El següent teorema mostra com un feix que satisfà (5.1.2) està molt proper a ser una linealització (forta) de P.

Teorema 5.2.5. *[4](Teorema de Linealització Forta)*
Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ regular, i sigui $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$. Són equivalents:

(i) $L(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$.

(ii) $L(\lambda)$ és un feix regular.

(iii) $L(\lambda)$ és una linealització forta de $P(\lambda)$.

Demostració. "$(i) \implies (ii)$": Si $L(\lambda)$ és una linealització de $P(\lambda)$, aleshores existeixen matrius unimodulars $E(\lambda), F(\lambda)$ tals que

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{(d-1)n} \end{bmatrix}.$$

La regularitat de $P(\lambda)$ implica la regularitat de $L(\lambda)$.

"$(ii) \implies (iii)$": Donat que $L(\lambda) \in \mathbb{L}_1(P)$, sabem que $L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = v \otimes P(\lambda)$ per algun $v \in \mathbb{C}^d$. No obstant, $L(\lambda)$ és regular aleshores v és diferent de zero. Sigui $M \in \mathbb{C}^{d\times d}$ una matriu no singular tal qur $Mv = \alpha e_1$. Aleshores el feix regular $\tilde{L}(\lambda) := (M \otimes I_n)L(\lambda)$ està a $\mathbb{L}_1(P)$ amb vector "ansatz" dret αe_1, ja que

$$\tilde{L}(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = (M \otimes I_n)L(\lambda)(\Lambda \otimes I_n) = (M \otimes I_n)(v \otimes P(\lambda)) = Mv \otimes P(\lambda) = \alpha e_1 \otimes P(\lambda).$$

Per la primera propietat de les formes companyes sabem que les matrius $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ a $\tilde{L}(\lambda) := \lambda\tilde{X} + \tilde{Y}$ són de la forma

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha A_d & \tilde{X}_{12} \\ 0 & -\tilde{Z} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \alpha A_0 \\ -\tilde{Z} & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\tilde{Z}$ fos singular, existiria un vector $w \in \mathbb{C}^{(d-1)n}$, $w \neq 0$ tal que $w^T\tilde{Z} = 0$. Això implicaria $\begin{bmatrix} 0 & w^T \end{bmatrix}(\lambda\tilde{X} + \tilde{Y}) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, fet que contradiu la regularitat de $\tilde{L}(\lambda)$. Per tant $\tilde{Z}$ és no singular i pel teorema (5.2.4) sabem que $\tilde{L}(\lambda)$, i per tant també $L(\lambda)$, és una linealització forta de $P(\lambda)$.

"$(iii) \implies (i)$" és trivial. □

Teorema 5.2.6. *[4](Recuperació de vectors propis a l'∞)*
Sigui $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ de grau d, i sigui $L(\lambda)$ un feix qualsevol de $\mathbb{L}_1(P)$(resp., $\mathbb{L}_2(P)$) amb vector "ansatz" dret (esquerre) v. Aleshores $x \in \mathbb{C}^n$ és un vector propi dret (esquerre) per $L(\lambda)$ amb valor propi ∞. Si, a més a més, P és regular i $L \in \mathbb{L}_1(P)$(resp., $\mathbb{L}_2(P)$) és

una linealització de P, aleshores tot vector propi dret (esquerre) de L amb valor propi ∞ és de la forma $e_1 \otimes x$ per algun vector propi dret (esquerre) x de P amb valor propi ∞.

Demostració. Definim $\tilde{L}(\lambda) := revL(\lambda)(R_d \otimes I)$. Aleshores $L \in \mathbb{L}_1(P) \implies \tilde{L} \in \mathbb{L}_1(revP)$ amb el mateix vector "ansatz" dret v. Pel teorema (5.1.9) sabem que x és vector propi de $revP$ amb valor propi 0 si, i només si $\Lambda \otimes x = e_d \otimes x$ és vector propi dret per $\tilde{L}$ amb valor propi 0. No obstant, $e_d \otimes x$ és vector propi dret per L si, i només si $e_1 \otimes x = (R_d \otimes I)(e_d \otimes x)$ és vector propi dret per $revL$, ambdós amb valor propi 0.

Si P és regular i $L \in \mathbb{L}_1(P)$ és una linealització de P, aleshores pel teorema (5.2.5) $\tilde{L} \in \mathbb{L}_1(revP)$ és una linealització de $revP$. El teorema (5.1.9) implica que tot vector propi dret de $\tilde{L}$ amb valor propi 0 és de la forma $e_d \otimes x$, on x és un vector propi dret de $revP$ amb valor propi 0; equivalentment tot vector propi dret de $revL$ amb valor propi 0 és de la forma $e_1 \otimes x$ per algun vector propi x de $revP$ amb valor propi 0. ◻

Capítol 6

Conclusions

El principal objectiu d'aquest projecte era estudiar la linealització de matrius polinomials, així com els espais vectorials de feixos de matrius polinomials on les linealitzacions de la matriu donada formen un conjunt dens. Podem afirmar que aquest objectiu ha estat assolit.

En l'estudi realitzat hem pogut observar, veient els principals resultats de cada capítol, les propietats fonamentals de les matrius polinomials. Tot i saber que es tracta d'un tema recent en l'àmbit de recerca, després de fer aquest treball veiem que les aplicacions que ens proporcionen les matrius polinomials omplen un ampli ventall de camps (que engloben aplicacions com l'estudi de sistemes dinàmics, l'anàlisi de grafs, la criptografia, la teoria de sistemes, la teoria de xarxes i l'anàlisi numèric, entre d'altres) i podem remarcar que les propietats bàsiques d'aquestes així com els resultats vistos en les seccions (3.2) i (3.3) ens ajudaran posteriorment en els següents capítols.

Un cop realitzat l'estudi del mètode de linealització de matrius polinomials tenint com a base l'article [4] i havent aplicat aquest mètode en exemples amb matrius polinomials 2×2 i 3×3, he assolit en profunditat els coneixements i conceptes continguts en el treball tenint una millor comprensió del mateix. Això m'ha permès veure els resultats numèricament.

Del capítol 3, m'agradaria destacar, en particular de la secció (3.2), la importància de l'equivalència entre matrius polinomials i com aquesta relació permet reescriure $P(\lambda)$ com una matriu en forma canònica de Smith. De (3.3) veiem que aquesta relació d'equivalència també és rellevant i permet veure aquesta propietat en matrius polinomials si aquestes tenen els mateixos divisors elementals.

Del capítol 4, arribem a la conclusió que la linealització forta resulta ser imprescindible, doncs ens permet estudiar el cas no mònic. Veiem a través de l'anàlisi realitzat que la linealització de matrius polinomials, tot i ser un mètode important de resolució per a problemes de valors propis en aquestes, també té alguns inconvenients:

- Un dels problemes que trobem en el mètode és que la linealització de formes companyes no reflecteix cap estructura que pugui estar present en el polinomi original, per tant, el seu ús per al càlcul numèric en algunes situacions pot ser problemàtic. Sería preferible que les propietats estructurals del polinomi es trobessin reflectides en la linealització de manera que fos possible un mètode numèric que deixes intactes les propietats qualitatives de l'espectre.
- Condicionament. Es tracta d'un aspecte important per als problemes computacionals. El condicionament és la sensibilitat a petites pertorbacions i, donat que les linealitzacions poden tenir condicionaments molt diferents, l'ideal seria tenir un conjunt de linealitzacions fàcilment construïbles a la nostra disposició per tal de poder utilitzar la més adequada per al problema original i amb el millor condicionament.
- Valors propis a l'∞. Un darrer problema el trobem quan la matriu principal de coeficients A és singular. No és força comú treballar amb aquest tipus de matrius (sempre s'utilitzen matrius regulars o, inclús la identitat). Algunes aplicacions d'aquest problema són els sistemes multicòs amb restriccions, la simulació de circuits i el disseny de guíes d'ones òptiques.

  Trobem que la linealització s'ha d'escollir amb un bon criteri, ja que no totes les linealitzacions reflecteixen adequadament l'estructura de Jordan del valor propi ∞. En aquest cas només es poden utilitzar les linealitzacions fortes (garanteixen la preservació de l'estructura de VAPs ∞).

  Per tal de solucionar aquest problema, convindria tenir a l'abast un gran nombre de possibles linealitzacions que sabéssim que són fortes.

Per últim, a través dels espais vectorials de feixos de matrius polinomials $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$ treballats en el capítol 5, queda palès com es defineixen els feixos (caracterització) en aquests espais. També la capacitat de recuperar vectors propis per $\mathbb{L}_1$, una de les propietats més importants.

Finalment, hi ha unes condicions de linealització que els feixos de matrius polinomials han de satisfer i un teorema important que permet estudiar $L(\lambda)$ com a linealització forta de $P(\lambda)$. La recuperació de vectors propis a l'∞ també permet observar que és un resultat de gran rellevància.

La realització d'aquest assaig m'ha permès desenvolupar habilitats treballades al llarg de la carrera per assolir i comprendre nous coneixements i ser capaç de superar les meves pròpies expectatives.

Bibliografia

[1] GOHBERG, I.; LANCASTER, P.; RODMAN, L. *Matrix Polynomials*, Academic Press, Nova York, 1982.

[2] GOHBERG, I.; KAASHOEAK, M.A.; LANCASTER, P. *Integral Equations and Operator Theory. Vol. II*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

[3] LANCASTER, P.; TISMENETSKY, M. *The Theory of Matrices Second edition with applications*, Academic Press, Inc.; 1985.

[4] STEVEN MACKEY, D.;MACKEY, N.; MEHL, C.; MEHRMANN, V. Vector spaces of linearizations for matrix polynomials. SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 28, No. 4, pp. 971-1004, 2006.

[5] SCHÄCKE, K. *On the Kronecker Product*, 2013.

[6] LANCASTER, P.; PSARRAKOS, P. *A Note on Weak and Strong Linearizations of Regular Matrix Polynomials*, Numerical Analysis Report No. 470, Manchester Center for Computational Mathematics, Manchester, UK, 2005.

[7] LANCASTER, P. *Linearization of regular matrix polynomials*, Electronic J. Linear Algebra. Vol. 17, pp. 21-27, 2008.

[8] GOHBERG, I.; KAASHOEK, M.A.; LANCASTER, P. *General theory of regular matriz polynomials and band Toeplitz operators*, Integral Equations Operator Theory, 11 (1988), pp. 776-882.

[9] HIGHAM, N.J.; LI, R.C.; TISSEUR, F. *Backward Error of Polynomial Eigenproblems Solved by Linearization*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 29. No 4. pp. 1218-1241, 2007.

[10] MAYER, C.D.; *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2010.