



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

**Estudi de camps vectorials
polinomials mitjançant la
compactificació de Poincaré**

Autor: Sergio Hernández Antón

Director: Dr. Xavier Jarque Ribera

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The study of solutions escaping to infinity is an important tool in order to understand the global portrait of a dynamical system in \mathbb{R}^n . The Poincaré compactification, which is a method to extend analytically a vector field in a compact manifold (in fact, to a sphere), is one of the most used methods to study the dynamic of vector fields in a neighbourhood of infinity. The main purpose of the project is to follow the path of its construction not only in the euclidean plane (in where it is most used), but also in the n -dimensional euclidean space, to end up applying it in the study of several dynamical systems.

Resum

L'estudi de les solucions que s'escapen a l'infinit és una eina important per entendre el retrat global d'un sistema dinàmic a \mathbb{R}^n . La compactificació de Poincaré, que és un mètode per estendre analíticament un camp vectorial a una varietat compacta (de fet, a una esfera), és un dels mètodes més utilitzats per estudiar la dinàmica de camps vectorials en un entorn de l'infinit. L'objectiu principal del treball és resseguir el camí de la seva construcció no només al pla euclidià (on s'utilitza majoritàriament), sinó també a l'espai euclidià n -dimensional, per acabar aplicant-la a l'estudi de diversos sistemes dinàmics.

Agraïments

En primer lloc, al Dr. Xavier Jarque per tota la seva ajuda durant la realització d'aquest treball. Pel temps dedicat, les correccions i aportacions i, sobretot, per ensenyar-me i permetre'm gaudir d'una nova branca de les matemàtiques al proposar-me aquest tema.

A la que ha estat gairebé la meva segona casa durant aquests quatre anys, la nostra estimada facultat, i a totes les persones que ens permeten aprendre any rere any d'aquest meravellós món que és el de les matemàtiques.

A la meva família i amics, que durant aquests quatre anys m'han omplert d'alegria i m'han encoratjat per continuar endavant en els moments més difícils. Vull acabar amb les persones més importants de la meva vida: la meva mare, el meu segon pare i el meu germà. Gràcies per tot, sense vosaltres això no hauria estat possible.

Índex

Introducció	1
1 Preliminars	3
1.1 Preliminars en Equacions Diferencials	3
1.1.1 Definició, existència i unicitat	3
1.1.2 Teoria qualitativa a \mathbb{R}^n	5
1.1.3 Teoria qualitativa a \mathbb{R}^2	8
1.2 Preliminars en Geometria Diferencial	10
1.2.1 Varietats diferenciables	10
1.2.2 Espai tangent	12
1.2.3 Camps vectorials	12
1.3 Miscel·lània	13
2 Compactificació de Poincaré a \mathbb{R}^2	14
2.1 Càlcul i definició de $P(X)$	14
2.2 Singularitats de $P(X)$ a l'infinit	19
3 Estudi de camps vectorials polinomials al pla	22
3.1 Anàlisi de les cartes coordenades de \mathbb{S}^2	22
3.2 Resolució de sistemes al pla	23
4 Compactificació de Poincaré a \mathbb{R}^n	31
5 Estudi de camps vectorials polinomials a l'espai	36
5.1 Anàlisi de les cartes coordenades de \mathbb{S}^3	36
5.2 Resolució de sistemes a l'espai	38
Conclusions	46
Bibliografia	47

Introducció

Motivació i metodologia

L'inici d'aquest treball de final de grau el marca la finalització del curs d'Equacions Diferencials del passat juny, quan vaig comentar-li al Dr. Xavier Jarque si podia ser el meu tutor i que m'agradaria dedicar aquest projecte final a la seva assignatura, però no va ser fins al setembre que ens vam reunir per parlar de l'objecte d'estudi.

Abans d'introduir la compactificació de Poincaré recordem primer un dels resultats més rellevants en l'estudi d'equacions diferencials autònomes sobre el pla euclidià: el Teorema de Poincaré-Bendixson. Aquest teorema ens garanteix que la semiòrbita positiva $\gamma_+(x_0)$ (o $\gamma_-(x_0)$) d'un punt x_0 tal que està inclosa en un compacte i el seu ω -límit (o α -límit) és no buit finalitza en (o inicia a) una òrbita periòdica, una singularitat o un conjunt finit d'òrbites on totes elles tenen com a α -límit i ω -límit un punt crític (un graf).

Notem que les úniques òrbites que aquest resultat no abarca son aquelles que s'escapen cap a infinit (o provenen d'ell). No obstant, entendre el comportament d'un camp vectorial en regions no acotades és essencial en molts dels àmbits on es plantegen aquests problemes, com per exemple a l'astrofísica. La compactificació de Poincaré, entre d'altres, va ser introduïda per respondre a aquesta necessitat.

El mètode consisteix en compactificar el pla euclidià a \mathbb{S}^2 mitjançant la identificació d'ambdós hemisferis amb \mathbb{R}^2 i \mathbb{S}^1 amb l'infinit. Degut a la duplicació d'aquests hemisferis, acabem donant el retrat de fase sobre el disc de Poincaré d'un camp $P(X)$ equivalent al camp X donat. Així doncs, la informació que desitgem sobre el comportament de les solucions a l'infinit de \mathbb{R}^2 es concentra en el de les solucions de $P(X)$ a l'equador de \mathbb{S}^2 , una subvarietat invariant. És clar, doncs, que voldríem aplicar l'eina a l'estudi d'un camp vectorial qualsevol. Aquesta construcció, però, en general col·lapsa sobre l'infinit quan les solucions en temps positiu o negatiu s'apropen amb *excessiva velocitat*. Per garantir un cert control sobre les solucions, haurem d'exigir que els camps vectorials emprats satisfacin unes certes condicions. En el nostre cas, considerarem aquells camps que siguin polinomials.

Si bé durant el transcurs del grau se'ns ensenyen diverses compactificacions (com la d'Alexandroff a la branca de Topologia), vaig trobar realment interessant que aquesta en particular permetés l'extensió analítica (i, per tant, diferenciable) dels esmentats camps vectorials sobre espais no euclidians. Cal destacar que per desenvolupar aquesta teoria de diferenciabilitat sobre espais no euclidians son imprescindibles conceptes de Geometria Diferencial que no formen part del currículum obligatori del grau. Tot i així, vaig decidir matricular-me en el curs optatiu de Geometria Diferencial per adquirir el coneixement i l'experiència necessaris.

No obstant, el nostre major obstacle residiria en l'obtenció d'informació. A la majoria de referències molts dels passos es donaven per sabuts, fet que ens impossibilitava justificar tot el camí de la deducció. Afortunadament, vam arribar a les referències [1] i [2], les quals han estat la nostra principal documentació en el desenvolupament de la teoria a \mathbb{R}^2 .

Una vegada completat l'estudi sobre el pla euclidià, vam seguir investigant per veure si era possible estendre la nostra definició a l'espai euclidià n -dimensional. Després d'una breu lectura de l'annex 1 de la referència [3] (on es defineix la compactificació de Poincaré a \mathbb{R}^n), vam decidir continuar per aquesta línia de treball i finalitzar amb l'aplicació d'aquesta teoria a l'estudi de diversos camps vectorials al pla i espai euclidians.

Així doncs, la principal finalitat d'aquest treball de final de grau és detallar el procés al qual es sotmet un camp vectorial polinomial definit a l'espai euclidià n -dimensional fins a obtenir la seva compactificació de Poincaré. D'altra banda, tenim com a objectiu secundari fer aquest text el més entenedor possible. Per aquest motiu, vam considerar oportuna la redacció d'un capítol introductorí que reculli els conceptes i resultats necessaris d'Equacions Diferencials i Geometria Diferencial, així com alguns teoremes auxiliars que requerirem per certes demostracions.

Estructura de la memòria

Hem dividit aquest text en tres blocs, el primer dels quals serveix com a nexa per facilitar la comprensió dels altres dos. Està format per un únic capítol, el qual conté tres seccions. A l'inici del capítol es fa una explicació sobre els temes tractats en cadascuna d'elles, però avancem que aquesta separació és conseqüència de la introducció de nocions de diverses branques de les matemàtiques.

A continuació es troba el bloc més extens, el qual abarca dos capítols. En el primer es dedueixen les expressions de la compactificació de Poincaré en el cas del pla euclidià; posteriorment, obtenim condicions per què en un camp vectorial polinomial apareguin punts singulars infinits hiperbòlics. En el segon, en canvi, apliquem aquest mètode a l'estudi de camps vectorials al pla euclidià, el qual va precedit per una breu explicació sobre les cartes coordenades emprades per parametritzar \mathbb{S}^2 .

Seguidament trobaríem el darrer bloc, format per dos capítols anàlegs als anteriors pel cas n -dimensional. El primer d'ells és força més curt que la seva contrapart, ja que la seva finalitat es donar una generalització del mètode i, per tant, no requereix la introducció de nous conceptes. No obstant, considerem que el més interessant d'aquesta part és l'estudi de camps vectorials a l'espai euclidià tridimensional per les seves possibles aplicacions en altres àmbits científics.

El treball finalitza amb l'apartat de conclusions, en el qual citem i resumim tot el contingut rellevant dels quatre darrers capítols, i les referències. De les nou que hom pot trobar, les tres primeres són les emprades per desenvolupar la part teòrica; d'altra banda, les cinc següents han estat utilitzades per justificar els resultats inclosos als preliminars; finalment, la darrera és un software que ens ha servit d'eina auxiliar durant els capítols més pràctics.

Capítol 1

Preliminars

En aquest primer capítol inclourem els resultats previs necessaris per desenvolupar tot el treball, això inclou també resultats auxiliars que requerirem per certes demostracions, tot i que no pertanyin a l'àrea en qüestió.

El dividirem en tres parts, la primera de les quals es tracta d'una introducció a la teoria general d'Equacions Diferencials, amb alguns resultats més específics quan ens restringim al pla real. Seguidament, la segona part estarà dedicada a Geometria Diferencial, ja que farem ús de cartes per parametritzar \mathbb{S}^n i requerim desenvolupar una teoria de diferenciabilitat en espais no euclidians. Finalment, la darrera part serà una miscel·lània de resultats d'altres àrees.

1.1 Preliminars en Equacions Diferencials

Aquesta secció està dividida en tres parts. La primera abarca des de la definició d'equació diferencial fins a garantir l'existència i unicitat d'aquestes donades unes certes condicions (Teorema de Picard). A continuació, es troba la teoria qualitativa general, on s'estudia les equacions diferencials que no depenen del temps (equacions diferencials autònomes) i els seus retrats de fase. Finalment, la secció conclou amb una darrera part on apareixen resultats més específics, restringits al pla real.

1.1.1 Definició, existència i unicitat

Durant tot aquest apartat, considerarem que el conjunt $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és obert i que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació contínua si no s'especifica el contrari.

Comencem donant la definició d'equació diferencial i de les seves solucions.

Definició 1.1. *L'equació*

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x) \tag{1.1}$$

s'anomena equació diferencial ordinària (de primer ordre).

Observació 1.2. Notem que, tot i que l'anomenem equació, de fet es tracta d'un sistema d'equacions, ja que f és n -dimensional.

Definició 1.3. *Direm que la corba*

$$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

és una solució de $\dot{x} = f(t, x)$ a l'interval obert I si $\forall t \in I$ es verifica:

- i) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$*
- ii) φ és derivable i $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$.*

El següent exemple il·lustra la necessitat de precisar i motiva la definició de problema de Cauchy:

Exemple 1.4. Sigui $\dot{x} = xt$ una equació diferencial definida a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Aleshores les corbes

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad \text{i} \quad \varphi_3(t) = 2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

son solucions definides a $I = \mathbb{R}$. És a dir, (1.1) admet més d'una solució segons la definició donada.

Per tant, el nostre primer objectiu és fixar una de les solucions.

Definició 1.5. *Sigui $(t_0, x_0) \in \Omega$. Anomenem **problema de Cauchy** al següent sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

En cas de tenir solució única, denotarem la corba solució per $\varphi(t)$ o $\varphi(t; t_0, x_0)$.

El següent pas és donar condicions per garantir que el problema de Cauchy té solució única.

Definició 1.6. *Direm que f és **Lipschitz respecte de la segona variable** (a Ω) si existeix $L > 0$ tal que:*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

*per qualssevol $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Direm que f és **localment Lipschitz respecte de la segona variable** (a Ω) si $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ existeix un entorn $V_{(t_0, x_0)}$ on f és Lipschitz respecte de la segona variable.*

Lema 1.7. *Si f és de classe $C^r(\Omega)$, $r \geq 1$, respecte de la segona variable, aleshores és Lipschitz a qualsevol compacte connex de Ω . En particular, és localment Lipschitz respecte de la segona variable a Ω .*

Demostració. Referència [4], pàgina 4. □

Anem ara a enunciar el Teorema de Picard, que garanteix el que estem buscant. Tot i que requerim d'una mica de notació abans: siguin $t_0 \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, denotem per $I_a(t_0)$ l'interval $[t_0 - a, t_0 + a]$ i $B_b(x_0)$ la bola tancada de radi b centrada en x_0 .

Teorema 1.8. (Teorema de Picard). *Sigui $f: \Omega = I_a(t_0) \times B_b(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua i Lipschitz respecte de la segona variable a Ω . Sigui $M = \max\{\|f(t, x)\|, (t, x) \in \Omega\}$. Aleshores el problema de Cauchy definit per (1.2) admet una solució única definida a $I_\alpha(t_0)$, on*

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Demostració. Referència [4], pàgines 5 i 6. □

Cal destacar que aquest és un resultat de caràcter local i no podem garantir que existeixi una solució definida fora de l'interval $I_{\alpha(t_0, x_0)}(t_0)$. A més, el teorema garanteix que les solucions d'un mateix problema de Cauchy coincideixen en el seu interval de definició. Finalitzem aquest apartat veient que existeix una única solució definida en un interval maximal.

Definició 1.9. *Signin φ_1, φ_2 dues solucions de (1.2) definides als intervals I_1, I_2 , respectivament. Si $I_1 \subset I_2$ i $\varphi_2|_{I_1} = \varphi_1$, aleshores direm que φ_2 és una **prolongació** de φ_1 . Direm que I és un interval maximal pel problema (1.2) si la solució φ definida a I és **improrrogable**; és a dir, no existeix cap prolongació de φ definida a un interval J tal que $I \subset J$.*

Teorema 1.10. *Sigui f Lipschitz respecte de la segona variable a Ω . Aleshores per cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, el problema de Cauchy definit per (1.2) té una única solució improrrogable. A més, l'interval maximal I és obert.*

Demostració. Referència [4], pàgines 6 i 7. □

1.1.2 Teoria qualitativa a \mathbb{R}^n

En aquesta segona part, considerarem $U \subset \mathbb{R}^n$ obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua de classe C^r i $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe C^r , amb $r \geq 1$.

Com ja hem esmentat breument a l'inici d'aquesta secció, la teoria qualitativa és l'estudi de les equacions diferencials autònomes (que no depenen del temps). En particular, considerarem equacions de la forma

$$\dot{x} = f(x),$$

on $f(x) = X(x)$ és un camp vectorial. Aquest fet motiva la següent definició:

Definició 1.11. *Anomenem **equació diferencial autònoma** a un sistema d'equacions de la forma*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.3}$$

on f garanteix existència i unicitat de solucions dels corresponents problemes de Cauchy.

Com les corbes solució de les equacions diferencials autònomes no depenen del temps, volem triar la que passa per la condició inicial x_0 en temps $t_0 = 0$.

Lema 1.12. *Signin $(t_0, x_0), (0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ condicions inicials per (1.3). Aleshores $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0)$, per a tot $t \in \mathbb{R}$ pertanyent als dos intervals de definició.*

Demostració. Referència [4], pàgina 15. □

Observació 1.13. Pel lema anterior, podem considerar sempre que $t_0 = 0$, ja que les solucions d'una equació diferencial autònoma son translacions.

Definició 1.14. Donada una equació (1.3), denotarem per $I(x_0)$ l'interval maximal de definició de la solució $\varphi(t, x_0) := \varphi(t; 0, x_0)$.

Passem ara a tractar les equacions diferencials autònomes de camps vectorials:

Definició 1.15. Considerem l'equació diferencial autònoma

$$\dot{x} = X(x), \quad (1.4)$$

definida a $\Omega = \mathbb{R} \times U$. Les solucions d'aquesta equació son les aplicacions $\varphi: I(x) \rightarrow U$ tals que:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \quad \forall t \in I(x)$$

i les anomenem **trajectòries** o **corbes integrals** de X (o de (1.4)).

El següent resultat mostra que les corbes integrals només depenen de la condició inicial.

Teorema 1.16. Sigui (1.4) l'equació diferencial associada a un camp vectorial X . Considerem l'aplicació:

$$\begin{aligned} \varphi: D \subset \mathbb{R} \times U &\rightarrow U \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) := \varphi(t; 0, x), \end{aligned}$$

on $D := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I(x)\}$. Aleshores es verifica:

- i) D és obert.
- ii) Per a tot $x \in U$ i $s \in I(x)$ es compleix:
 - a) $0 \in I(x)$ i $\varphi(0, x) = x$.
 - b) $t \in I(\varphi(s, x))$ si, i només si, $s + t \in I(x)$. A més, $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$.

Demostració. Referència [4], pàgina 15. □

Definició 1.17. Anomenem **flux local** associat al camp X a l'aplicació φ del Teorema anterior. En cas que φ estigui definida per tot $t \in \mathbb{R}$, l'anomenarem **flux global**.

Donat un camp vectorial i el seu flux associat, volem considerar la imatge del flux a l'interval maximal de definició i dividir l'espai en aquestes imatges, il·lustrant així el comportament del nostre objecte d'estudi.

Definició 1.18. Sigui X un camp vectorial i sigui φ el seu flux associat. Donat $x \in U$, definim la seva **òrbita** com:

$$\gamma(x) = \varphi(I(x), x) \subset U.$$

Definició 1.19. Definim a U la relació d'equivalència $x_1 \sim x_2 \iff \gamma(x_1) = \gamma(x_2)$.

La partició de l'espai de fases U en òrbites U/\sim s'anomena **retrat de fase**. Siguin x, y tals que $y \in \gamma(x)$, els punts de $\gamma(x)$ s'ordenen de la següent manera:

$$x \leq y \iff \exists t \geq 0 \mid \varphi(t, x) = y.$$

No tots els camps vectorials tenen retrats de fase diferents. Podem, doncs, estudiar el retrat de fase d'un camp vectorial a partir d'un camp equivalent:

Definició 1.20. *Sigui Y un camp vectorial amb les mateixes hipòtesis que X . Direm que X i Y son **equivalents** si els seus retrats de fase coincideixen.*

Per estudiar degudament aquests retrats de fase, és necessari introduir els conceptes d'òrbita periòdica i punt singular, així com la hiperbolicitat de les singularitats:

Definició 1.21. *Sigui X un camp vectorial i sigui φ el seu flux corresponent. Direm que $\gamma(x_0)$ és una **òrbita periòdica** de període $T > 0$ de X si $\varphi(T, x_0) = x_0$ i $\varphi(t, x_0) \neq x_0$ per a tot $t \in (0, T)$.*

Definició 1.22. *Direm que una òrbita periòdica γ és un **cicle límit** si existeix un entorn V de γ tal que γ és l'única òrbita periòdica continguda a V .*

Definició 1.23. *Si $\gamma(x_0) = \{x_0\}$, direm que x_0 és un **punt singular** o una **singularitat**. Observem que x_0 és singular si, i només si, $X(x_0) = 0$ i $\varphi(t, x_0) \equiv x_0$. Altrament, direm que x_0 és un punt regular.*

Definició 1.24. *Direm que $x_0 \in U$ és un **punt singular hiperbòlic** si $X(x_0) = 0$ i la part real de tots els valors propis de $DX(x)|_{\{x=x_0\}}$ és no nul·la.*

Definició 1.25. *Sigui $x_0 \in U$ un punt singular hiperbòlic de X . Definim l'**índex d'estabilitat** m de x_0 com el nombre de valors propis de $DX(x)|_{\{x=x_0\}}$ amb part real negativa.*

La necessitat d'introduir els conceptes previs es veu reflectida en el resultat següent:

Teorema 1.26. *Sigui X un camp vectorial i sigui φ el seu flux associat. Siguin $x_0 \in U$, $I(x_0)$ l'interval maximal de definició, $\varphi_0: I(x_0) \rightarrow U$ la solució improrrogable associada a (1.4) amb $\varphi_0(0) = x_0$ i $\gamma(x_0)$ l'òrbita del punt x_0 . Aleshores es verifica un, i només un, dels casos següents:*

- i) φ_0 és injectiva i és una corba oberta i simple.
- ii) $I(x_0) = \mathbb{R}$, φ_0 és constant i $\gamma(x_0) = \{x_0\}$.
- iii) $I(x_0) = \mathbb{R}$, φ_0 és periòdica i no constant i $\gamma(x_0)$ és una corba tancada i simple.

Demostració. Referència [4], pàgina 16. □

Hem vist al teorema anterior com caracteritzar les corbes integrals d'un camp vectorial. No obstant, el Teorema de Poincaré-Bendixson ens caracteritzarà quan la nostra solució és una òrbita periòdica i quan és una corba simple dins de regions compactes. Abans d'enunciar-lo, és necessari introduir els conjunts α -límit i ω -límit:

Definició 1.27. *Sigui X un camp vectorial i sigui φ el seu flux corresponent. Considerem $\varphi_0(t) := \varphi(t, x_0)$, que suposem definida a tot \mathbb{R} . Definim els conjunts **α -límit** i **ω -límit** pel punt x_0 com:*

$$\alpha(x_0) = \{x \in U \mid \exists \{t_n\}_n \rightarrow -\infty, \{\varphi_0(t_n)\}_n \rightarrow x\},$$

$$\omega(x_0) = \{x \in U \mid \exists \{t_n\}_n \rightarrow +\infty, \{\varphi_0(t_n)\}_n \rightarrow x\}.$$

Observació 1.28. Notem que si dos punts pertanyen a la mateixa òrbita, els seus α -límit i ω -límit coincideixen.

Definició 1.29. Sigui $\gamma(x_0)$ l'òrbita del punt $x_0 \in U$. Definim l' α -límit i l' ω -límit de l'òrbita com $\alpha(\gamma(x_0)) = \alpha(x_0)$ i $\omega(\gamma(x_0)) = \omega(x_0)$.

Teorema 1.30. Sigui $\gamma_+(x_0) := \{\varphi(t, x_0) \mid t \geq 0\}$. Suposem que $\gamma_+(x_0) \subset K \subset U$, per algun K compacte. Aleshores $\omega(x_0)$ és no buit, compacte, invariant per X i connex.

Demostració. Referència [4], pàgina 22. \square

Observació 1.31. Anàlogament, és també cert per $\gamma_-(x_0) := \{\varphi(t, x_0) \mid t \leq 0\}$ i $\alpha(x_0)$.

Teorema 1.32. (Teorema de Poincaré-Bendixson.) Sigui X un camp vectorial amb un número finit de punts singulars. Sigui $x_0 \in U$ i suposem que $\gamma_+(x_0) \subset K \subset U$, per algun K compacte. Aleshores es verifica una, i només una, de les opcions següents:

i) $\omega(x_0)$ conté només punts regulars i és una òrbita periòdica.

ii) $\omega(x_0)$ conté punts regulars i singulars i consisteix en un conjunt finit d'òrbites, on cadascuna tendeix a un dels punts singulars quan $t \rightarrow \pm\infty$.

iii) $\omega(x_0)$ no conté punts regulars i és un únic punt singular.

Demostració. Referència [4], pàgines 23 i 24. \square

Observació 1.33. El mateix resultat és cert per $\gamma_-(x_0)$ i $\alpha(x_0)$.

Finalment, introduïm les nocions de secció transversal i d'aplicació de Poincaré, utilitzades en l'estudi d'òrbites periòdiques:

Definició 1.34. Sigui $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Direm que una aplicació $g: A \rightarrow U$ de classe C^r , amb $r \geq 1$, és una **secció transversal** de X si per a tot $a \in A$ es verifica:

$$\det(Df(a) \mid X(g(a))) \neq 0.$$

Direm que $\Sigma := g(A)$ és una secció transversal de X .

Definició 1.35. Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe C^1 i sigui $\gamma(x_0)$ una òrbita periòdica de període $T > 0$. Sigui Σ una secció transversal de X en el punt x_0 i sigui $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Definim l'**aplicació de Poincaré** $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ com el primer punt en temps positiu de l'òrbita de x que talla Σ .

Observació 1.36. Si X és un camp analític i Σ és una secció transversal de X per un punt p qualsevol, aleshores l'aplicació de Poincaré $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ és també analítica.

1.1.3 Teoria qualitativa a \mathbb{R}^2

Finalitzem aquesta secció amb uns quants resultats que caracteritzaran el comportament de les òrbites periòdiques i les singularitats al pla real.

Definició 1.37. Sigui γ una òrbita periòdica a \mathbb{R}^2 . Denotem per $Ext(\gamma)$ al conjunt de punts que pertanyen a la component no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ i per $Int(\gamma)$ al conjunt de punts que pertanyen a la component acotada del mateix conjunt.

Proposició 1.38. Només existeixen tres tipus diferents de cicles límit a \mathbb{R}^2 :

i) Estable, si $\omega(q) = \gamma \forall q \in V$.

ii) Inestable, si $\alpha(q) = \gamma \forall q \in V$.

iii) Semiestable, si $\omega(q) = \gamma \forall q \in V \cap Ext(\gamma)$ i $\alpha(q) = \gamma \forall q \in V \cap Int(\gamma)$, o viceversa.

Demostració. Referència [2], secció 1.6. □

Teorema 1.39. *Sigui X un camp vectorial de classe C^1 definit sobre un obert $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Si γ és una òrbita periòdica de X tal que $\text{Int}(\gamma) \subset \Delta$, aleshores existeix un punt singular de X contingut a $\text{Int}(\gamma)$.*

Demostració. Referència [2], pàgina 30. □

Definició 1.40. *Sigui X un camp vectorial de \mathbb{R}^2 de classe C^1 definit en un entorn compacte V d'un punt singular p i sigui ∂V la seva frontera. Suposem que X no té singularitats a V tret de p .*

*i) Direm que p és un **centre** si ∂V és una òrbita periòdica i totes les òrbites a $V \setminus \{p\}$ també ho son.*

*ii) Direm que p és un **node/focus atractor o estable** si a tots els punts de ∂V el camp apunta a l'interior i per a tot $q \in V \setminus \{p\}$ $\omega(q) = \{p\}$ i $\gamma_-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.*

*iii) Direm que p és un **node/focus repulsor o inestable** si a tots els punts de ∂V el camp apunta a l'exterior i per a tot $q \in V \setminus \{p\}$ $\alpha(q) = \{p\}$ i $\gamma_+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.*

*iv) Direm que p és una **sella** si és hiperbòlic i no és cap dels anteriors.*

Teorema 1.41. (Classificació de singularitats hiperbòliques). *Sigui $p \in \mathbb{R}^2$ un punt singular aïllat d'un camp vectorial X de \mathbb{R}^2 . Siguin λ_1 i λ_2 els valors propis de $DX(p)$, aleshores:*

i) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, aleshores p és una sella. Si denotem per E_1 i E_2 els vectors propis associats a λ_1, λ_2 , respectivament; aleshores podem trobar dos corbes analítiques invariants, tangents respectivament a E_1 i E_2 en p , on una és estable i l'altre inestable.

ii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, aleshores p és un node. Si $\lambda_1 > 0$ (respectivament < 0), aleshores és repulsor o inestable (respectivament atractor o estable).

iii) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ amb $\alpha, \beta \neq 0$, aleshores p és un focus. Si $\alpha > 0$ (respectivament < 0), aleshores és repulsor o inestable (respectivament atractor o estable).

*iv) Si $\lambda_1 = i\beta$ i $\lambda_2 = -i\beta$ amb $\beta \neq 0$, aleshores p és un **centre lineal** i serà topològicament conjugat a un focus o un centre.*

Demostració. Referència [2], seccions 2.2-2.6. □

Teorema 1.42. (Classificació de singularitats semi-hiperbòliques). *Sigui $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ un punt singular aïllat d'un camp vectorial X de \mathbb{R}^2 definit per:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda y + B(x, y),\end{aligned}$$

on $\lambda > 0$, A i B son analítiques en un entorn de l'origen i $A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$. Sigui $y = f(x)$ la solució de l'equació $\lambda y + B(x, y) = 0$ a un entorn del punt $(0, 0)$ i suposem que la funció $g(x) = A(x, f(x))$ és de la forma $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, amb $m \geq 2$ i $a_m \neq 0$. Aleshores existeix una corba analítica invariant, anomenada varietat inestable forta, tangent a 0 a l'eix d'ordenades, on X és analíticament conjugat a $\dot{y} = \lambda y$; que representa comportament inestable per ser $\lambda > 0$.

A més, les següents afirmacions son certes:

i) Si m és senar i $a_m < 0$, aleshores $(0, 0)$ és una sella.

ii) Si m és senar i $a_m > 0$, aleshores $(0,0)$ és un node inestable.

iii) Si m és parell, aleshores $(0,0)$ és una **sella-node**; és a dir, una singularitat que és una sella i un node a la vegada.

Demostració. Referència [2], seccions 2.2-2.6. □

Definició 1.43. Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe C^1 . Direm que X és **integrable** si existeix una funció $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , anomenada **integral primera**, que és constant sobre les òrbites de X però no ho és en cap obert.

Definició 1.44. Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe C^1 . Direm que X és **conservatiu** si:

$$\operatorname{div}X(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

A més, si X és conservatiu, aleshores és integrable. En tal cas, direm que el sistema X és **Hamiltonià** amb integral primera el Hamiltonià H , que satisfà el sistema següent:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y).$$

Definició 1.45. Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe C^1 . Direm que una funció $\mu: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que no s'anul·la mai és un **factor integrant** de X si μX és conservatiu. És a dir, per a tot $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) + g(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) + \operatorname{div}X(x, y) \mu(x, y) = 0.$$

Proposició 1.46. Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe C^1 . Si X admet un factor integrant, aleshores X és integrable.

Demostració. Si X admet un factor integrant, aleshores μX és conservatiu. Per tant, $\mu \cdot \operatorname{div}X(x, y) = 0$, però com μ no s'anul·la mai, $\operatorname{div}X(x, y) = 0$. Tenim, doncs, que X és conservatiu, que implica que és integrable. □

1.2 Preliminars en Geometria Diferencial

Degut a la natura del treball, és imperatiu desenvolupar una teoria de diferenciabilitat en espais no euclidians. Dividim, doncs, aquesta secció en tres parts, essent la primera una introducció a la Geometria Diferencial i al concepte de varietat diferenciable. Posteriorment, definirem l'espai tangent a una varietat diferenciable i, finalment, introduïrem el concepte de camps vectorials sobre varietats diferenciables.

Les demostracions dels resultats d'aquesta secció es poden trobar a la referència [5], i a cadascuna s'especifica les pàgines que abarca.

1.2.1 Varietats diferenciables

En aquest primer apartat, definirem varietat diferenciable i estendrem el concepte de diferenciabilitat per aquestes. No obstant, hem d'introduir primer les nocions d'atlas i d'estructura diferenciable.

Definició 1.47. Sigui M un espai topològic, anomenem **atlas** de classe C^∞ de dimensió m a una col·lecció de parells $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, on per a tot $i \in I$ U_i és un obert de M , ϕ_i és un homeomorfisme de U_i sobre un obert de \mathbb{R}^m i es verifica:

$$i) M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

ii) $\forall i, j \in I$ tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'aplicació:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

és una aplicació de classe C^∞ entre els dos oberts de \mathbb{R}^m indicats.

Cada parell (U_i, ϕ_i) s'anomena **carta local** de l'atlas.

Definició 1.48. Siguin (U, ϕ) i (V, ψ) cartes locals de M . Direm que les cartes ϕ i ψ son **compatibles** si l'aplicació

$$\psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

és de classe C^∞ .

Definició 1.49. Sigui M un espai topològic, anomenem **estructura diferenciable** C^∞ de dimensió m sobre M a una classe d'equivalència d'atlas de classe C^∞ de dimensió m . Anomenem **carta** a una carta local qualsevol continguda en un atlas de la classe d'equivalència.

Ja podem donar, doncs, la definició de varietat diferenciable:

Definició 1.50. Anomenem **varietat diferenciable** de classe C^∞ de dimensió m a un espai topològic M tal que és Hausdorff, satisfà el segon axioma de numerabilitat i està dotat d'una classe d'equivalència d'atlas de classe C^∞ de dimensió m .

El nostre següent pas es estendre la noció de diferenciabilitat sobre aquestes varietats diferenciables, així com donar algunes de les seves propietats.

Definició 1.51. Sigui $f: M \longrightarrow N$ una aplicació contínua entre les varietats diferenciables M i N ; direm que l'aplicació f és **diferenciable** si per a dues cartes (U, ϕ) de M i (V, ψ) de N qualssevol, l'aplicació $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ és diferenciable.

Proposició 1.52. La composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable.

Demostració. Referència [5], pàgina 10. □

Proposició 1.53. Sigui $f: M \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable i A un obert de M , que és varietat diferenciable per la proposició anterior aplicada a l'aplicació inclusió. La restricció de f a A , $f|_A: A \longrightarrow N$, és diferenciable.

Demostració. Referència [5], pàgina 10. □

Proposició 1.54. Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de M (no necessàriament per cartes de l'estructura diferenciable) i una família d'aplicacions diferenciables $f_i: U_i \longrightarrow N$. Si $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, l'aplicació induïda $f: M \longrightarrow N$ és diferenciable.

Demostració. Referència [5], pàgina 11. □

Definició 1.55. Direm que una aplicació diferenciable $f: M \longrightarrow N$ és un **difeomorfisme** si f té inversa i aquesta és també diferenciable.

1.2.2 Espai tangent

A continuació, definirem l'espai tangent a una varietat diferenciable, així com la diferencial associada a una aplicació diferenciable entre varietats diferenciables.

Definició 1.56. *Siguin M una varietat diferenciable i $\mathcal{F}(M)$ l'anell de funcions diferenciables sobre M . Direm que una aplicació $\delta_p: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ és una **derivació** en el punt $p \in M$ si verifica:*

- i) $\delta_p(f_1 + f_2) = \delta_p(f_1) + \delta_p(f_2)$.
- ii) $\delta_p(\lambda f) = \lambda \delta_p(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- iii) $\delta_p(f_1 \cdot f_2) = f_1(p) \cdot \delta_p(f_2) + \delta_p(f_1) \cdot f_2(p)$.

Denotem per $\mathcal{D}_p(M, \mathbb{R})$ l'espai de les derivacions de $\mathcal{F}(M)$ en el punt p , que clarament té estructura d'espai vectorial sobre \mathbb{R} .

Definició 1.57. *Definim l'**espai tangent** a M en el punt p com l'espai vectorial $\mathcal{D}_p(M, \mathbb{R})$, que denotarem per $T_p M$.*

Definició 1.58. *Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, definim la **diferencial** de f en el punt $p \in M$ com l'aplicació:*

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

donada per $(d_p f(v_p))(g) = v_p(g \circ f)$, on g és una aplicació diferenciable definida en un entorn de $f(p)$.

1.2.3 Camps vectorials

Finalment, estendrem el concepte de camp vectorial sobre varietats diferenciables, així com les seves corbes integrals associades i presentarem el Teorema d'existència i unicitat, que és l'anàleg del de Picard per a varietats diferenciables.

Comencem, doncs, donant la definició de camp vectorial i alguns resultats bàsics.

Definició 1.59. *Sigui M una varietat diferenciable de dimensió n , anomenem **camp vectorial** sobre M a l'assignació a cada punt p de M d'un element $X_p \in T_p M$. Direm que el camp X és diferenciable si $\forall p \in M$ i tot entorn de coordenades al voltant d'aquest punt $(U, (x^1, \dots, x^n))$, l'expressió de X en aquest entorn és:*

$$X|_U = \sum_{i=1}^n \lambda^i(x^j) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

i les funcions λ^i son diferenciables.

Denotarem per $\mathcal{X}(M)$ al conjunt de camps vectorials diferenciables sobre M .

Proposició 1.60. *Tota derivació de $\mathcal{F}(M)$ està associada a un element de $\mathcal{X}(M)$.*

Demostració. Referència [5], pàgina 53. □

Proposició 1.61. *Siguin $f: M \rightarrow N$ un difeomorfisme i $X \in \mathcal{X}(M)$. Existeix un únic camp vectorial $df(X) \in \mathcal{X}(N)$ tal que $\forall p \in M$ $d_p f(X_p) = df(X)|_{f(p)}$.*

Demostració. Referència [5], pàgina 53. □

Passem ara a tractar les corbes integrals d'un camp vectorial.

Definició 1.62. *Sigui $X \in \mathcal{X}(M)$, anomenem **corba integral** de X a una aplicació diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \forall t \in I$, on I és un interval obert de \mathbb{R} .*

Observació 1.63. Per la proposició 1.61, si γ és una corba integral de X , aleshores $f \circ \gamma$ ho és de $df(X)$.

Teorema 1.64. *Sigui $X \in \mathcal{X}(M)$, per a tot $p \in M$ existeixen entorns oberts V de p i I de 0 i una aplicació diferenciable:*

$$\phi^{I,V}: I \times V \rightarrow M,$$

tals que:

i) $\forall q \in V, t \rightarrow \phi^{I,V}(t, q)$ és una corba integral de X .

ii) $\forall q \in V, \phi^{I,V}(0, q) = q$.

A més, si $\phi^{I,V}, \phi^{J,W}$ verifiquen les condicions anteriors, es verifica:

$$\phi^{I,V}(t, q) = \phi^{J,W}(t, q), \forall (t, q) \in (I \cap J) \times (V \cap W).$$

Demostració. Referència [5], pàgina 54. □

1.3 Miscel·lània

Aquesta darrera secció està dedicada a resultats auxiliars requerits per justificar degudament els passos realitzats als capítols següents, quan l'esmentat en les seccions prèvies no és suficient.

Teorema 1.65. *Sigui $f(x)$ un polinomi a coeficients reals de grau senar, aleshores $f(x)$ té almenys una arrel real.*

Demostració. Referència [6], pàgina 29. □

Teorema 1.66. (Principi de Prolongació Analítica.) *Siguin $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i f holomorfa a Ω . Si existeix un obert $\emptyset \neq U \subset \Omega$ tal que $f|_U \equiv 0$, aleshores $f \equiv 0$ a Ω .*

Demostració. Referència [7], pàgines 124 i 125. □

Teorema 1.67. (Teorema de la Funció Implícita.) *Siguin A un obert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació de classe C^k , $k \geq 1$ i $(a, b) \in A$ tal que $f(a, b) = 0 \in \mathbb{R}^m$.*

Si

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a, b) = \det \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(a, b) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0,$$

aleshores:

i) *Existeixen dos entorns oberts, $U \subset \mathbb{R}^n$ de a i $V \subset \mathbb{R}^m$ de b , tals que $U \times V \subset A$.*

ii) *Existeix una aplicació $g: U \rightarrow V$, de classe C^k , tal que per a cada $x \in U$, $y = g(x)$ és l'únic punt de V que compleix $f(x, y) = 0$.*

És a dir, l'equació $f(x, y) = 0$ defineix implícitament una aplicació $y = g(x)$ de classe C^k en un entorn U de a que compleix $g(a) = b$.

Demostració. Referència [8], pàgines 190-192. □

Capítol 2

Compactificació de Poincaré a \mathbb{R}^2

En aquest segon capítol analitzarem un camp vectorial polinomial sobre la varietat diferenciable \mathbb{R}^2 estenent-lo a la varietat compacta sense vora \mathbb{S}^2 , fet que ens permetrà entendre el seu comportament en regions no acotades del pla euclidià. És a dir, compactificarem \mathbb{R}^2 per estudiar el comportament del camp a l'infinit. Malgrat que ens agradaria treballar amb un camp vectorial qualsevol, requerim d'un camp polinomial per obtenir el comportament desitjat a l'infinit. Separarem el capítol en dues parts, la primera dedicada a la deducció i definició de la compactificació de Poincaré; després, a l'altra part insistirem més en l'estudi de les singularitats no acotades del pla euclidià i com podem identificar-les.

2.1 Càlcul i definició de $P(X)$

Sigui durant tot aquest capítol $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial de classe \mathcal{C}^r , amb $r \geq 1$. El nostre objectiu és obtenir un camp equivalent a X sobre \mathbb{S}^2 , definint-lo primer per $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ i després comprovant que la definició es pot estendre també sobre \mathbb{S}^1 .

Considerem doncs $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ i el pla $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$, tangent a \mathbb{S}^2 en el punt $(0, 0, 1)$. Sigui r una recta tal que no està continguda al pla $\{x_3 = 0\}$ i que passa per l'origen, aleshores r talla \mathbb{S}^2 en dos punts P_+ i P_- : un a l'hemisferi nord $H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 > 0\}$ i l'altre a l'hemisferi sud $H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 < 0\}$, respectivament. Aquest fet ens indueix dos difeomorfismes f_+ i f_- definits de la següent manera:

$$\begin{aligned} f_+ : \Pi &\longrightarrow H_+ & f_- : \Pi &\longrightarrow H_- \\ (x_1, x_2, 1) &\longmapsto \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, 1) & (x_1, x_2, 1) &\longmapsto \frac{-1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, 1), \end{aligned}$$

on $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

Podem, doncs, definir el camp induït \tilde{X} per X sobre $H_+ \cup H_-$ de la forma següent:

$$\tilde{X}(y) = \begin{cases} Df_+(x)X(x) & \text{si } y = f_+(x) \in H_+ \\ Df_-(x)X(x) & \text{si } y = f_-(x) \in H_- \end{cases} \quad (2.1)$$

Observació 2.1. Com f_+ i f_- son difeomorfismes, \tilde{X} és un camp equivalent a X i podem estudiar el retrat de fase del camp X estudiant el de \tilde{X} (veure definició 1.20).

Per estudiar el comportament asimptòtic de les òrbites no acotades associades al camp X , voldríem estendre \tilde{X} a l'equador de l'esfera \mathbb{S}^2 . És a dir, a $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 = 0\}$, obtenint així un camp definit a tota l'esfera. L'estudi del camp en un entorn de l'equador ens donaria la informació desitjada. No obstant, això no sempre és possible. La proposició 2.3 ens dona la forma de fer-ho per camps polinomials.

Definició 2.2. *Direm que un camp $X = (P, Q)$ de \mathbb{R}^2 és **polinomial** si les aplicacions $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ són polinomis en les variables x i y . Definim el grau d'un camp X , denotat per $\text{grau}(X)$, com el màxim dels graus de les seves components.*

Proposició 2.3. *Sigui X un camp polinomial sobre \mathbb{R}^2 de grau n . Sigui $\rho: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $\rho(y_1, y_2, y_3) = y_3^{n-1}$ i sigui \tilde{X} el camp induït per X sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ definit per (2.1). Aleshores $\rho\tilde{X}$ defineix un camp analític a \mathbb{S}^2 que deixa \mathbb{S}^1 invariant.*

Observació 2.4. El camp $\rho\tilde{X}$ segueix sent equivalent a X . No obstant, haurem de prendre precaucions a l'hora de traslladar càlculs precisos, com valors propis o períodes d'òrbites periòdiques.

Per demostrar la proposició anterior, escollim cartes coordenades sobre \mathbb{S}^2 . Sigui $y = (y_1, y_2, y_3)$, definim les aplicacions $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, com:

$$\begin{aligned} U_i &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 \mid y_i > 0\}, \\ V_i &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 \mid y_i < 0\}, \\ \phi_i(y) &:= \frac{1}{y_i}(y_j, y_k) \quad \forall y \in U_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j < k, \quad i \neq j, k, \\ \psi_i(y) &:= \frac{1}{y_i}(y_j, y_k) \quad \forall y \in V_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j < k, \quad i \neq j, k. \end{aligned}$$

Anem a calcular l'expressió de $\rho\tilde{X}$ sobre U_1 . Sigui $y \in U_1 \cap H_+$, aleshores $y = f_+(x)$ i

$$(\phi_1 \circ f_+)(x) = \frac{1}{\frac{x_1}{\Delta(x)}} \left(\frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1} \right).$$

Aquesta aplicació indueix el canvi de coordenades següent:

$$(\phi_1 \circ f_+)(x) = \begin{cases} z_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \\ z_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{y_3}{y_1} \end{cases}, \text{ amb inversa } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{z_2} \\ x_2 = \frac{z_1}{z_2} \end{cases}, \quad (2.2)$$

que té per matriu jacobiana

$$D(\phi_1 \circ f_+)(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Podem ara escriure el camp \tilde{X} induït per X sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ en les coordenades locals. Així, l'expressió en coordenades locals de $\tilde{X}(y)$ per $y \in U_1 \cap H_+$ és:

$$\begin{aligned} \tilde{X}|_{U_1 \cap H_+}(y) &= D\phi_1(y)\tilde{X}(y) = D\phi_1(y)Df_+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f_+)(x)X(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2} (-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usant (2.2), expressem (2.3) en funció de (z_1, z_2) per facilitar el nostre anàlisi:

$$\begin{aligned}\tilde{X}|_{U_1 \cap H_+} &= z_2^2 \left(-\frac{z_1}{z_2} P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + \frac{1}{z_2} Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right) = \\ &= z_2 \left(-z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right).\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\rho(f_+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{n-1}} = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z_2^2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} + \frac{z_2^2}{z_2^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{z_2^{n-1}}{\Delta(z)^{n-1}},$$

i podem expressar $\rho\tilde{X}$ a $U_1 \cap H_+$ com:

$$\rho\tilde{X}|_{U_1 \cap H_+} = \frac{z_2^n}{\Delta(z)^{n-1}} \left(-z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right).$$

Per l'observació 2.4, podem prescindir del factor $\frac{1}{\Delta(z)^{n-1}}$ efectuant un reescalament del temps. Obtenim finalment l'expressió:

$$\rho\tilde{X}|_{U_1 \cap H_+} = z_2^n \left(-z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right). \quad (2.4)$$

A més, com

$$(\psi_1 \circ f_-)(x) = \frac{1}{\frac{-x_1}{\Delta(x)}} \left(\frac{-x_2}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (z_1, z_2),$$

obtenim la mateixa expressió (2.4) a $U_1 \cap H_-$. Aleshores (2.4) és l'expressió d'un camp analític a U_1 , ja que $\text{grau}(P), \text{grau}(Q) \leq n$ i el camp està ben definit quan $z_2 = 0$.

Sigui ara $y \in U_2 \cap H_+$, aleshores $y = f_+(x)$ i

$$(\phi_2 \circ f_+)(x) = \frac{1}{\frac{x_2}{\Delta(x)}} \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{y_3}{y_2} \right) = (z_1, z_2),$$

obtenint el canvi de coordenades:

$$(\phi_2 \circ f_+)(x) = \begin{cases} z_1 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \\ z_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{y_3}{y_2} \end{cases}, \text{ amb inversa } \begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{z_2} \\ x_2 = \frac{1}{z_2} \end{cases}. \quad (2.5)$$

La seva matriu jacobiana és

$$D(\phi_2 \circ f_+)(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & \frac{-x_1}{x_2^2} \\ 0 & \frac{-1}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Seguint el mateix procés que amb l'obert U_1 , obtenim la següent expressió de $\tilde{X}(y)$ per $y \in U_2 \cap H_+$:

$$\tilde{X}|_{U_2 \cap H_+}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & \frac{-x_1}{x_2^2} \\ 0 & \frac{-1}{x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2^2} (x_2 P(x_1, x_2) - x_1 Q(x_1, x_2), -Q(x_1, x_2)).$$

Si ho expressem en funció de les variables (z_1, z_2) usant (2.5), obtenim:

$$\begin{aligned}\tilde{X}|_{U_2 \cap H_+} &= z_2^2 \left(\frac{1}{z_2} P \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - \frac{z_1}{z_2} Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right) = \\ &= z_2 \left(P \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right).\end{aligned}$$

Multiplicant per

$$\rho(f_+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{n-1}} = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{z_1^2}{z_2^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{z_2^2}{z_2^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{z_2^{n-1}}{\Delta(z)^{n-1}}$$

i prescindint del factor $\frac{1}{\Delta(z)^{n-1}}$ per l'argument previ, arribem a l'expressió:

$$\rho\tilde{X}|_{U_2 \cap H_+} = z_2^n \left(P \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right). \quad (2.6)$$

Seguint un raonament anàleg al següent amb U_1 , (2.6) defineix un camp analític a U_2 .

Finalment, sigui $y \in U_3 \cap H_+$, aleshores $y = f_+(x)$ i

$$(\phi_3 \circ f_+)(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)} \right) = (x_1, x_2) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = (z_1, z_2). \quad (2.7)$$

La matriu jacobiana d'aquesta aplicació és

$$D(\phi_3 \circ f_+)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'expressió de $\tilde{X}(y)$ per $y \in U_3 \cap H_+$, usant (2.7), és:

$$\tilde{X}|_{U_3 \cap H_+}(y) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)) = (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)).$$

Si multipliquem per

$$\rho(f_+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{n-1}} = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{1}{(z_1^2 + z_2^2 + 1)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{1}{\Delta(z)^{n-1}}$$

i prescindim del factor $\frac{1}{\Delta(z)^{n-1}}$, obtenim la darrera expressió:

$$\rho\tilde{X}|_{U_3 \cap H_+} = (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)), \quad (2.8)$$

que està ben definida a tot \mathbb{R}^2 i defineix un camp analític a U_3 per ser P i Q polinomis.

D'altra banda, com $\psi_i = -\phi_i$ per $i = 1, 2, 3$, els factors ρ a les cartes ψ_i diferiran dels de ϕ_i en $(-1)^{n-1}$. Per tant, les expressions del camp $\rho\tilde{X}$ a V_1, V_2 i V_3 son les expressions (2.4), (2.6) i (2.8) multiplicades per $(-1)^{n-1}$, respectivament.

Una vegada calculades les expressions de $\rho\tilde{X}$ a totes les cartes coordenades, podem donar la definició següent:

Definició 2.5. Anomenem *compactificació de Poincaré* d'un camp vectorial polinomial X al camp $P(X) := \rho\tilde{X}$ obtingut a partir de les expressions (2.4), (2.6) i (2.8) seguint el procés anterior.

Ja podem, doncs, demostrar la proposició 2.3:

Demostració. Ja hem vist que les expressions de $P(X)$ son analítiques. Anem a veure que $P(X)$ està ben definit; és a dir, que totes les cartes on està definit son compatibles (veure definició 1.48).

Per fer-ho, comprovarem que per $1 \leq i, j \leq n$ les cartes ϕ_i i ϕ_j son compatibles i, com $\psi_i = -\phi_i$, $i = 1, 2, 3$, quedarà demostrat per les sis cartes de \mathbb{S}^2 . Durant aquest procés calcularem també les expressions de ϕ_2^{-1} i ϕ_3^{-1} , les quals requerim per estudiar la compatibilitat:

i) Cas ϕ_1, ϕ_2 : A ϕ_2 , per (2.5) i $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2$, tenim:

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{y_3}{y_2} \right) \implies z_1^2 + z_2^2 + 1 = \frac{y_1^2}{y_2^2} + \frac{y_3^2}{y_2^2} + \frac{y_2^2}{y_2^2} = \frac{1}{y_2^2} \implies y_2 = \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}}.$$

Per tant,

$$\phi_2^{-1}(z_1, z_2) = \left(z_1 \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}}, \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}}, z_2 \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}} \right)$$

i

$$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(z_1, z_2) = \phi_1(\phi_2^{-1}(z_1, z_2)) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1} \right),$$

on $z_1 > 0$ a $U_1 \cap U_2$. Aleshores $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ és de classe \mathcal{C}^∞ i ϕ_1, ϕ_2 son compatibles.

ii) Cas ϕ_1, ϕ_3 : Anàlogament, a ϕ_3 tenim el següent:

$$y_3 = \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}} \implies \phi_3^{-1}(z_1, z_2) = \left(z_1 \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}}, z_2 \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}}, \sqrt{\frac{1}{z_1^2 + z_2^2 + 1}} \right).$$

Per tant,

$$(\phi_1 \circ \phi_3^{-1})(z_1, z_2) = \phi_1(\phi_3^{-1}(z_1, z_2)) = (z_1, z_2).$$

Com $\phi_1 \circ \phi_3^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, clarament ϕ_1, ϕ_3 son compatibles.

iii) Cas ϕ_2, ϕ_3 : Usant el càlcul previ,

$$(\phi_2 \circ \phi_3^{-1})(z_1, z_2) = \phi_2(\phi_3^{-1}(z_1, z_2)) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right),$$

que és de classe \mathcal{C}^∞ per ser $z_2 > 0$ a $U_2 \cap U_3$.

Una vegada demostrada la compatibilitat, sabem que $P(X)$ està ben definit. Per tant, resta veure que deixa \mathbb{S}^1 invariant.

Sigui $y \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup U_2)$. Per (2.2) i (2.5), tenim que $y_3 = 0 \implies z_2 = 0$. Les expressions de $P(X)$ donades per (2.4) i (2.6) amb $z_2 = 0$ tenen la segona component nul·la. El mateix succeeix a $V_1 \cup V_2$, ja que les expressions de $P(X)$ en aquests oberts son les mateixes que sobre U_1 i U_2 multiplicades per $(-1)^{n-1}$. Se segueix, doncs, que l'equador \mathbb{S}^1 és invariant, fet que conclou la demostració. \square

Observació 2.6. El camp $P(X)$ està definit sobre la varietat compacta \mathbb{S}^2 . No obstant, podem restringir-nos a la meitat de la varietat. En particular, podem considerar la regió $M = H_+ \cup \mathbb{S}^1$, amb frontera \mathbb{S}^1 invariant per $P(X)$. Això és degut al fet que cada punt de Π és enviat a dos punts de l'esfera, un a cada hemisferi. Tenim, doncs, Π duplicat a \mathbb{S}^2 . Considerant Π com H_+ via f_+ i \mathbb{S}^1 com l'infinit, tota la informació rellevant pel nostre estudi queda condensada a la regió M . Finalment, podem considerar M com el disc unitat, que anomenarem disc de Poincaré, via projecció estereogràfica pel pol sud.

2.2 Singularitats de $P(X)$ a l'infinit

Com ja hem estudiat els camps vectorials sobre regions acotades als preliminars, acabarem aquesta secció donant condicions sobre els polinomis P i Q per què el camp $X = (P, Q)$ tingui singularitats hiperbòliques a l'infinit. És a dir, que les singularitats de $P(X)$ a \mathbb{S}^1 siguin hiperbòliques.

Sigui $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Descomposem P i Q en polinomis P_i i Q_i , $i = 0, \dots, n$, on P_i i Q_i denoten els termes de grau i de P i Q , respectivament. Podem expressar $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ com:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n P_i(x, y) \quad Q(x, y) = \sum_{i=0}^n Q_i(x, y).$$

Com $\text{grau}(X) = n$, la primera coordenada de l'expressió (2.4) s'anul·la si, i només si,

$$\begin{aligned} & \left(z_2^n \left(-z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right) \right) \Big|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left(\sum_{i=0}^n z_2^{n-i} (-z_1 P_i(1, z_1) + Q_i(1, z_1)) \right) \Big|_{(z_1, 0)} = 0, \end{aligned}$$

si, i només si,

$$F(z_1) := -z_1 P_n(1, z_1) + Q_n(1, z_1) = 0. \quad (2.9)$$

Per tant, $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ és una singularitat de $P(X)$ si, i només si, z_1 és una arrel real del polinomi $F(s) = -sP_n(1, s) + Q_n(1, s)$.

De la mateixa manera, la primera coordenada de (2.6) s'anul·la si, i només si,

$$G(z_1) := P_n(z_1, 1) - z_1 Q_n(z_1, 1) = 0, \quad (2.10)$$

i $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ és una singularitat de $P(X)$ si, i només si, z_1 és una arrel real del polinomi $G(s) = P_n(s, 1) - sQ_n(s, 1)$.

Observació 2.7. Observem que, com $\text{grau}(X) = n$, o bé $\text{grau}(P) = n$ o bé $\text{grau}(Q) = n$. En qualsevol cas, si n és parell, almenys un dels polinomis $F(s), G(s)$ és de grau $n + 1$ imparell. Per la proposició 1.65, sempre hi haurà almenys una singularitat a \mathbb{S}^1 .

Cal destacar que les singularitats de $P(X)$ a \mathbb{S}^1 ocorren en parelles, de forma simètrica respecte l'origen. Com V_1, V_2 estan parametrizats de la mateixa manera que U_1, U_2 , respectivament, però amb signe oposat, els punts $(z_1, 0) \in U_i$ i $(z_1, 0) \in V_i$ son simètrics. A més, com les expressions de $P(X)$ a U_i i V_i difereixen d'un factor multiplicatiu no nul, si $(z_1, 0) \in U_i$ és singularitat de $P(X)$, aleshores també ho serà $(z_1, 0) \in V_i$, per $i = 1, 2$.

És més, si $U_1 \cap \mathbb{S}^1$ està format per punts singulars, aleshores $F(s) \equiv 0$. Llavors, tots els punts de $V_1 \cap \mathbb{S}^1$ seran també singulars. Com els únics punts de l'equador que no pertanyen a U_1 o V_1 son els orígens de U_2 i V_2 i $G(s)$ és un polinomi i, en particular, és una funció conínua en tot el seu domini, obtenim també $G(s) \equiv 0$.

Per tant,

$$F(s) \equiv 0 \iff xQ(x, y) - yP(x, y) \equiv 0 \iff G(s) \equiv 0.$$

És a dir, si a \mathbb{S}^1 tots els punts de U_1 o U_2 son singulars, aleshores tots els punts ho son.

Observació 2.8. Com acabem de veure, per estudiar \mathbb{S}^1 estudiarem primer tots els punts de $\mathbb{S}^1 \cap U_1$, els seus simètrics a V_1 i, finalment, els orígens de U_2 i V_2 .

Volem veure quan aquests punts singulars son hiperbòlics. Seguint el teorema 1.41, anem a calcular les jacobianes de $P(X)$ a U_1 i U_2 .

Sigui $(z_1, 0)$ una singularitat de (2.4), aleshores $F(z_1) = 0$ i la matriu jacobiana en aquest punt és:

$$\begin{pmatrix} F'(z_1) & Q_{n-1}(1, z_1) - z_1 P_{n-1}(1, z_1) \\ 0 & -P_n(1, z_1) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

ja que:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial P(X)|_{U_1}}{\partial z_1} \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_1} \left(z_2^n \left(-z_1 \sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right), -z_2 \sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right) \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\sum_{i=0}^n z_2^{n-i} (-z_1 P_i(1, z_1) + Q_i(1, z_1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-i} P_i(1, z_1) \right) \right|_{(z_1, 0)} = (F'(z_1), 0), \end{aligned}$$

ja que a la primera coordenada s'anul·len tots els termes excepte els de grau n , que és exactament $F'(z_1)$ una vegada derivem respecte z_1 . La segona coordenada, en canvi, com el terme z_2 té grau $n + 1$, és nul·la.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial P(X)|_{U_1}}{\partial z_2} \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(z_2^n \left(-z_1 \sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right), -z_2 \sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right) \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\sum_{i=0}^n z_2^{n-i} (-z_1 P_i(1, z_1) + Q_i(1, z_1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-i} P_i(1, z_1) \right) \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(F(z_1) + \sum_{i=0}^{n-1} z_2^{n-i} (-z_1 P_i(1, z_1) + Q_i(1, z_1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-i} P_i(1, z_1) \right) \right|_{(z_1, 0)} = \\ & = (-z_1 P_{n-1}(1, z_1) + Q_{n-1}(1, z_1), -P_n(1, z_1)). \end{aligned}$$

Anàlogament, si $(z_1, 0)$ és una singularitat de (2.6), aleshores $G(z_1) = 0$ i la matriu jacobiana de $P(X)$ en aquest punt serà:

$$\begin{pmatrix} G'(z_1) & P_{n-1}(z_1, 1) - z_1 Q_{n-1}(z_1, 1) \\ 0 & -Q_n(z_1, 1) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

degut als càlculs següents:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial P(X)|_{U_2}}{\partial z_1} \right|_{(z_1,0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_1} \left(z_2^n \left(\sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right) \right) \right|_{(z_1,0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\sum_{i=0}^n z_2^{n-i} (P_i(z_1, 1) - z_1 Q_i(z_1, 1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-1} Q_i(z_1, 1) \right) \right|_{(z_1,0)} = (G'(z_1), 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial P(X)|_{U_2}}{\partial z_2} \right|_{(z_1,0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(z_2^n \left(\sum_{i=0}^n P_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 \sum_{i=0}^n Q_i \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right) \right) \right|_{(z_1,0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\sum_{i=0}^n z_2^{n-i} (P_i(z_1, 1) - z_1 Q_i(z_1, 1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-i} Q_i(z_1, 1) \right) \right|_{(z_1,0)} = \\ & = \left. \frac{\partial}{\partial z_2} \left(G(z_1) + \sum_{i=0}^{n-1} z_2^{n-i} (P_i(z_1, 1) - z_1 Q_i(z_1, 1)), -z_2 \sum_{i=0}^n z_2^{n-i} Q_i(z_1, 1) \right) \right|_{(z_1,0)} = \\ & = (P_{n-1}(z_1, 1) - z_1 Q_{n-1}(z_1, 1), -Q_n(z_1, 1)). \end{aligned}$$

Observació 2.9. Com $P(X)|_{V_i} = (-1)^{n-1} P(X)|_{U_i}$, $i = 1, 2$, les jacobianes del camp sobre V_i són les mateixes que sobre U_i multiplicades per $(-1)^{n-1}$.

Les matrius (2.11) i (2.12) són triangulars superiors i, per tant, els seus valors propis són els elements de les seves respectives diagonals principals. Així doncs, si $F'(z_1) \neq 0$ i $P_n(1, z_1) \neq 0$ (o $G'(z_1) \neq 0$ i $Q_n(z_1, 1) \neq 0$), aleshores la singularitat és hiperbòlica.

Finalitzem aquest capítol amb algunes observacions finals. Comencem veient que, si \mathbb{S}^1 no tingués singularitats, cas possible si n és senar (veure observació 2.7); aleshores \mathbb{S}^1 és una òrbita periòdica de $P(X)$. Si és isolada, aleshores l'òrbita periòdica és un cicle límit estable o inestable, ja que el camp a \mathbb{S}^1 és induït per la projecció estereogràfica per l'origen i pel factor y_3^{n-1} , que és sempre positiu per ser $n - 1$ parell i, per tant, la seva estabilitat no pot canviar. Un altre argument per justificar-ho és el fet que el camp $P(X)$ té exactament el mateix comportament a H_+ i H_- i, per tant, \mathbb{S}^1 no pot ser estable a un hemisferi i inestable a l'altre. Concloïm, doncs, que l'òrbita no pot ser semiestable.

D'altra banda, si \mathbb{S}^1 no és una òrbita periòdica isolada, aleshores està continguda en un feix d'òrbites periòdiques o en un feix d'òrbites periòdiques que termina en un cicle límit estable. Anem a veure que aquest darrer cas no és possible, degut al fet que $P(X)$ és analític a \mathbb{S}^1 .

Sigui Σ una secció transversal de $P(X)$ que talla l'equador, tot el feix d'òrbites periòdiques i les òrbites que acaben al cicle límit i sigui $\pi: \Sigma \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ l'aplicació de Poincaré corresponent. Per l'observació 1.36, $\pi(x)$ és analítica i, per tant, $f(x) := \pi(x) - x$ també ho és. Com tenim un feix d'òrbites periòdiques, existeix un obert $U \subset \mathbb{R}$ tal que $f(y) = 0 \forall y \in U$. Pel Principi de Prolongació Analítica (teorema 1.66), tenim que $f(y) = 0 \forall y \in \Sigma$, fet que contradia el segon cas.

Capítol 3

Estudi de camps vectorials polinomials al pla

En aquest tercer capítol aplicarem la compactificació de Poincaré a l'estudi del comportament de diferents camps vectorials polinomials quadràtics, extrets dels exercicis del capítol 5 de la referència [2]. No obstant, abans farem un estudi de les cartes triades per \mathbb{S}^2 , cosa que ens ajudarà a representar correctament els retrats de fase.

3.1 Anàlisi de les cartes coordenades de \mathbb{S}^2

Durant la definició de la compactificació de Poincaré a la secció 2.1 hem introduït les cartes ϕ_i, ψ_i , $i = 1, 2, 3$. No obstant, tot i que sabem que $\psi_i = -\phi_i$ i, per tant, que estan parametritzades de la mateixa manera però amb signes oposats, encara hem d'interpretar aquestes cartes a l'hora de donar el retrat de fase al disc de Poincaré.

Com $\phi_1(x) = \frac{1}{x_1}(x_2, 1) = (z_1, z_2)$ i $\phi_2(x) = \frac{1}{x_2}(x_1, 1) = (z_1, z_2)$, z_1 és positiu a U_1 quan x_2 ho és i, d'altra banda, és positiu a U_2 quan x_1 ho és. Per tant, z_1 està parametritzat en un sentit diferent a cada carta. A més, z_2 és positiu a ambdues cartes, apuntant sempre cap al pol nord de l'esfera. Ens trobem, doncs, a la situació mostrada a la figura 3.1.

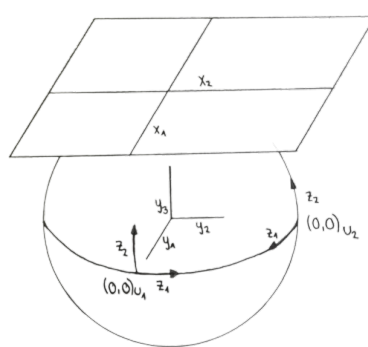


Figura 3.1: Cartes coordenades de \mathbb{S}^2

A més, com $\phi_3(x) = (x_1, x_2) = (z_1, z_2)$, la part finita del camp queda parametritzada de la mateixa manera a $P(X)$ i, per tant, mantindrà també la seva orientació. Concloïm, doncs, que els retrats de fase efectuats sobre el disc de Poincaré estan orientats de la

forma descrita a la figura 3.2.

Finalment, per simplificar la notació utilitzarem les variables (u, v) per referir-nos a les coordenades locals (z_1, z_2) de les cartes emprades.

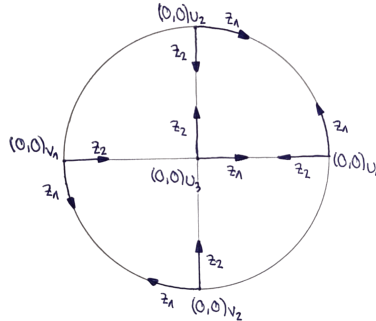


Figura 3.2: Orientació del disc de Poincaré

3.2 Resolució de sistemes al pla

De tots els exercicis realitzats a l'hora de practicar la compactificació de Poincaré, hem decidit triar-ne els tres que presenten un estudi més enriquidor: com el primer camp és conservatiu, calculem la seva integral primera de forma explícita; el segon és una petita variació del primer, i s'ha de trobar un factor integrant per poder estudiar-lo degudament. Finalment, el darrer camp és el més complex, en el seu estudi veurem com tractar una singularitat no hiperbòlica i, més concretament, com treballar amb una sella-node.

i) Sigui $X(x, y)$ el camp vectorial següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - y^2 + 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \quad (3.1)$$

Com $\dot{x} = 0 \iff (x, y) \in \mathbb{S}^1$ i $\dot{y} = 0 \iff (x = 0 \text{ o } y = 0)$, les úniques singularitats finites són $(\pm 1, 0)$ i $(0, \pm 1)$. A més, \dot{y} és positiu al 1r i 3r quadrant i és negatiu al 2n i 4t. D'altra banda, \dot{x} és positiu si $\|(x, y)\| < 1$ i és negatiu quan $\|(x, y)\| > 1$.

La matriu jacobiana del camp és

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

avaluant $DX(x, y)$ en cada singularitat obtenim la seva estabilitat:

$$DX(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \implies \text{Sella.}$$

$$DX(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \implies \text{Sella.}$$

$$DX(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda = \pm 2i \implies \text{Centre lineal.}$$

$$DX(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda = \pm 2i \implies \text{Centre lineal.}$$

Tenim, doncs, que $(1, 0)$ és una sella amb varietat estable tangent al vector $(1, 0)$ i varietat inestable tangent a $(0, 1)$ en el punt $(1, 0)$. A més, $(-1, 0)$ és també una sella amb varietats estable i inestable tangents als mateixos vectors sobre la singularitat, però amb l'estabilitat invertida.

D'altra banda, com els centres lineals poden ser centres o focus, mirem si el sistema és Hamiltonià (veure definició 1.44):

$$\begin{aligned} - \int -x^2 - y^2 + 1 \, dy &= x^2 y + \frac{y^3}{3} - y + C(x) \\ \int 2xy \, dx &= x^2 y + C(y) \end{aligned}$$

Per tant, el sistema és Hamiltonià amb:

$$H(x, y) = \frac{y^3}{3} + x^2 y - y.$$

Com el Hamiltonià és constant en totes les òrbites i no ho és en cap obert, necessàriament els dos centres lineals han de ser centres. A més, podem calcular les varietats de les selles usant aquest fet.

Avaluem primer $H(x, y)$ en les selles:

$$H(1, 0) = 0.$$

Com el camp és horitzontal en l'eix d'abscisses, el Hamiltonià també valdrà 0 en tota la recta $\{y = 0\}$. Suposem, doncs, que $y \neq 0$ i calculem les varietats de les selles:

$$H(x, y) = 0 \iff \frac{y^3}{3} + x^2 y - y = 0 \iff x = \pm \sqrt{\frac{y - \frac{y^3}{3}}{y}} = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{3}}.$$

Finalment, degut a l'estudi inicial del camp, sabem que les òrbites periòdiques giren en sentit antihorari. Anem ara a estudiar el comportament del camp a l'infinit.

L'expressió de $P(X)$ a U_1 és:

$$P(X)|_{U_1} = (u^3 + 3u - uv^2, u^2 v - v^3 + v),$$

restringint-nos sobre $\{v = 0\}$ per obtenir les singularitats infinites:

$$(u^3 + 3u, 0) = (0, 0) \iff u = 0.$$

Com $u \in \mathbb{R}$, obtenim un únic punt singular a U_1 . Estudiem la seva hiperbolicitat:

$$DP(X)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 + 3 - v^2 & -2uv \\ 2uv & u^2 + 1 - 3v^2 \end{pmatrix}$$

i, per tant,

$$DP(X)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \implies \text{Node inestable.}$$

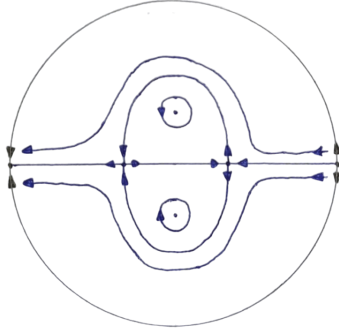


Figura 3.3: Retrat de fase de (3.1)

D'altra banda, l'expressió de $P(X)$ a U_2 és la següent:

$$P(X)|_{U_2} = (-3u^2 - 1 + v^2, -2uv).$$

Avaluant a l'origen, veiem que aquest no és una singularitat i, per tant, només tenim dos punts singulars infinits: el trobat a U_1 i el seu simètric a V_1 , que serà un node estable per ser X un camp quadràtic. Obtenim, doncs, el retrat de fase mostrat a la figura 3.3.

ii) Sigui ara $X(x, y)$ el camp:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - y^2 + 1 \\ \dot{y} = 2x \end{cases}, \quad (3.2)$$

veurem com pot afectar al retrat de fase i a l'anàlisi del camp la simple eliminació del factor y en la segona component.

Com $\dot{x} = 0 \iff (x, y) \in \mathbb{S}^1$ i $\dot{y} = 0 \iff x = 0$, les singularitats finites són $(0, 1)$ i $(0, -1)$. A més, per $x = 0$, \dot{x} és positiu quan $y \in (-1, 1)$ i és negatiu a $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. D'altra banda, \dot{y} té el mateix signe que x .

La matriu jacobiana $DX(x, y)$ és la següent:

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substituint a les singularitats:

$$DX(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda = \pm 2i \implies \text{Centre lineal.}$$

$$DX(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \implies \text{Sella.}$$

Abans de tractar el centre lineal, calculem primer els vectors propis associats als valors propis de la sella:

$$\text{Ker}(DX(0, -1) - 2 \text{Id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

$$\text{Ker}(DX(0, -1) + 2 \text{Id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}.$$

Per tant, en el punt $(0, -1)$ la varietat estable de la sella és tangent al vector $(1, -1)$ i la varietat inestable ho és al vector $(1, 1)$.

Per saber si $(0, 1)$ és un centre o un focus, com el sistema (3.1) era Hamiltonià, mirem si (3.2) admet un factor integrant que depengui només de y (el factor eliminat a \dot{y}). Estudiant aquest cas, obtenim que $\mu(y) = e^y$ és un factor integrant (veure definició 1.45).

Com

$$\operatorname{div}(X)(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = e^y \text{ i } g(x, y) = 2x,$$

tenim que

$$f(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) + g(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) + \operatorname{div}X(x, y)\mu(x, y) = 0.$$

Per tant, igual que amb (3.1), existeix una funció $H(x, y)$ definida a tot \mathbb{R}^2 , que és constant a totes les òrbites i no ho és a cap obert. Se segueix, doncs, que $(0, 1)$ és un centre. Seguint l'estudi inicial del camp, les òrbites periòdiques giren en sentit antihorari.

Passem a estudiar el camp a l'infinit, l'expressió de $P(X)$ a U_1 és:

$$P(X)|_{U_1} = (u^3 + u - uv^2 + 2v, u^2v - v^3 + v),$$

mirem si apareixen singularitats a $\{v = 0\}$:

$$(u^3 + u, 0) = (0, 0) \iff u = 0,$$

ja que $u \in \mathbb{R}$. La seva matriu jacobiana és

$$DP(X)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 + 1 - v^2 & 2 - 2uv \\ 2uv & u^2 + 1 - 3v^2 \end{pmatrix}$$

i tenim, doncs, que

$$DP(X)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \implies \text{Node inestable.}$$

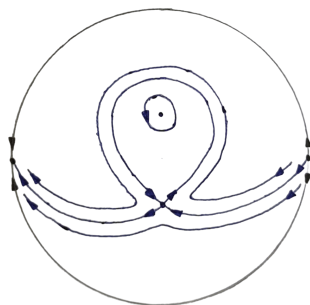


Figura 3.4: Retrat de fase de (3.2)

D'altra banda, l'expressió de $P(X)$ a U_2 és la següent:

$$P(X)|_{U_2} = (-u^2 - 1 + v^2 - 2u^2v, -2uv^2).$$

Com clarament l'origen no és un punt singular, les dues singularitats que apareixen a l'infinit són l'obtinguda a U_1 i el seu punt simètric, tot i que aquest serà un node estable

per ser X un camp quadràtic. Podem donar, doncs, el retrat de fase mostrat a la figura 3.4.

iii) Finalment, siguin $\alpha \in (0, 1)$ i $X(x, y)$ el camp:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) + \alpha x + (\alpha+1)x^2 \\ \dot{y} = x(1+x) \end{cases}. \quad (3.3)$$

Com per $x = -1$ tenim que $\dot{y} = 0$ i $\dot{x} = 1$, el camp és horitzontal i apunta cap a la dreta a la varietat $\{x = -1\}$. D'altra banda, \dot{y} és negatiu per $x \in (-1, 0)$ i és positiu quan $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. A més, com $\dot{y} = 0 \iff (x = 0 \text{ o } x = -1)$ i, per $x \neq -1$, $\dot{x} = 0 \iff y = \frac{\alpha x + (\alpha+1)x^2}{x+1}$, l'únic punt singular finit és l'origen.

Per estudiar la seva hiperbolicitat, calculem la matriu jacobiana

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 2(\alpha+1)x + \alpha - y & -(1+x) \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

i substituïm a l'origen:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \implies \text{Focus repulsor.}$$

A l'eix d'ordenades $\{x = 0\}$, $\dot{y} = 0$ i $\dot{x} = -y$. Per tant, el camp és horitzontal en aquesta varietat, apuntant cap a l'esquerra quan $y > 0$ i cap a la dreta si $y < 0$. Podem concloure, doncs, que les òrbites que s'allunyen de l'origen ho fan en sentit antihorari.

Passem a estudiar el comportament del camp a l'infinít, l'expressió de $P(X)$ a U_1 és:

$$P(X)|_{U_1} = (u^2(v+1) - \alpha uv - u(\alpha+1) + v+1, uv(v+1) - \alpha v^2 - v(\alpha+1)).$$

Restringint-nos a $\{v = 0\}$, obtenim que

$$(u^2 - u(\alpha+1) + 1, 0) \neq (0, 0) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

i deduïm, doncs, que no hi ha cap singularitat infinita a U_1 .

D'altra banda, l'expressió de $P(X)$ a U_2 és la següent:

$$P(X)|_{U_2} = (-u^3 - u^2v + u^2(\alpha+1) + \alpha uv - u - v, -u^2v - uv^2).$$

Per tant, l'origen de U_2 és una singularitat infinita.

La matriu jacobiana de $P(X)|_{U_2}$ és:

$$DP(X)|_{U_2}(u, v) = \begin{pmatrix} -3u^2 + 2(\alpha+1-v)u + \alpha v - 1 & -u^2 + \alpha u - 1 \\ -v^2 - 2uv & -u^2 - 2uv \end{pmatrix}.$$

Avaluant a l'origen, obtenim que

$$DP(X)|_{U_2}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amb valors propis $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 0$. Es tracta, doncs, d'una singularitat no hiperbòlica i, per aplicar el teorema 1.42, hem d'efectuar diversos canvis de coordenades per obtenir un sistema de la forma desitjada.

En primer lloc, efectuem el canvi

$$\begin{cases} u_1 = v \\ v_1 = u \end{cases}$$

i obtenim

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_1 v_1 (u_1 + v_1) \\ \dot{v}_1 = -(u_1 + v_1) + \alpha u_1 v_1 + (\alpha + 1)v_1^2 - v_1^2 (u_1 + v_1) \end{cases}$$

avaluant la seva matriu jacobiana a l'origen:

$$DP(X)|_{U_2}(0,0)_{(u_1,v_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El nostre següent pas consisteix en aconseguir una matriu de la forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com els valors propis de $DP(X)|_{U_2}(0,0)_{(u_1,v_1)}$ son $0, -1$, calculant els seus vectors propis obtenim una matriu P tal que $J = P^{-1}AP$.

$$\text{Ker}(DP(X)|_{U_2}(0,0)_{(u_1,v_1)}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\},$$

$$\text{Ker}(DP(X)|_{U_2}(0,0)_{(u_1,v_1)} + \text{Id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Conseqüentment,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i, amb el canvi

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

obtenim que

$$\begin{cases} u_2 = u_1 \\ v_2 = u_1 + v_1 \end{cases}.$$

Per tant,

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = -u_2 v_2 (v_1 - u_2) \\ \dot{v}_2 = -u_2 v_2 (v_2 - u_2) - v_2 + \alpha u_2 (v_2 - u_2) + (-v_2 + \alpha + 1)(u_2 - v_2)^2 \end{cases}$$

que té J per matriu jacobiana avaluada a l'origen.

Finalment, resta canviar el signe de v_2 , així que efectuem el darrer canvi

$$\begin{cases} u_3 = u_2 \\ v_3 = -v_2 \end{cases},$$

arribant a l'expressió:

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = -u_3 v_3 (u_3 + v_3) \\ \dot{v}_3 = -u_3 v_3 (u_3 + v_3) + v_3 - \alpha u_3 (u_3 + v_3) + (v_3 + \alpha + 1)(u_3 + v_3)^2, \end{cases}$$

amb el que

$$DP(X)|_{U_2(0,0)(u_3,v_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apliquem el teorema 1.42 mitjançant el Teorema de la Funció Implícita (teorema 1.67). Siguin $A(u_3, v_3) = -u_3 v_3 (u_3 + v_3)$ i $f(u_3) := v_3(u_3)$ la solució de l'equació $F(u_3, v_3) := v_3 = 0$ en un entorn del punt $(0, 0)$, volem trobar m, a_m tals que $g(u_3) := A(u_3, f(u_3)) = a_m u_3^m + o(u_3^m)$, amb $m \geq 2, a_m \neq 0$.

Sigui

$$f(u_3) = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + o(u_3^3).$$

Com $f(0) = 0$, tenim que $a_0 = 0$. A més, $f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} = a_1$. Per tant, com

$$F'(u_3, f(u_3))|_{\{u_3=0\}} = \frac{\partial F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3} \Big|_{\{u_3=0\}} + \frac{\partial F(u_3, f(u_3))}{\partial v_3} \Big|_{\{u_3=0\}} f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} = 0,$$

obtenim que

$$f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} = a_1 = \frac{-\frac{\partial F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3} \Big|_{\{u_3=0\}}}{\frac{\partial F(u_3, f(u_3))}{\partial v_3} \Big|_{\{u_3=0\}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Anem ara a calcular $a_2 = f''(u_3)|_{\{u_3=0\}}$. Seguint un procés anàleg al que acabem de fer:

$$\begin{aligned} F''(u_3, f(u_3))|_{\{u_3=0\}} &= \frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3^2} \Big|_{\{u_3=0\}} + \frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3 \partial v_3} \Big|_{\{u_3=0\}} f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} + \\ &+ \frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial v_3 \partial u_3} \Big|_{\{u_3=0\}} f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} + \frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial v_3^2} \Big|_{\{u_3=0\}} f''(u_3)|_{\{u_3=0\}} = 0. \end{aligned}$$

Com $f'(u_3)|_{\{u_3=0\}} = 0$ i

$$\frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3^2} \Big|_{\{u_3=0\}} = (-2f(u_3) - 2\alpha + 2(\alpha + 1) + 2f(u_3))|_{\{u_3=0\}} = 2,$$

obtenim que

$$f''(u_3)|_{\{u_3=0\}} = a_2 = \frac{-\frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial u_3^2} \Big|_{\{u_3=0\}}}{\frac{\partial^2 F(u_3, f(u_3))}{\partial v_3^2} \Big|_{\{u_3=0\}}} = \frac{-2}{1} = -2 \neq 0 \implies f(u_3) = -2u_3^2 + o(u_3^2).$$

Finalment,

$$g(u_3) = -u_3(-2u_3^2 + o(u_3^2))(u_3 - 2u_3^2 + o(u_3^2)) = 2u_3^4 + o(u_3^4).$$

Per tant, $m = 4$, $a_m = 2$ i conclouim, doncs, que $(0, 0)$ és una sella-node.

Tornant ara a les coordenades usuals (u, v) sobre U_2 , com el vector propi associat al valor propi -1 és $(1, 0)$ i $\{v = 0\}$ és invariant, $(0, 0)$ atrau les òrbites d'aquesta varietat.

D'altra banda, com

$$\text{Ker}(DP(X)|_{U_2}(0, 0)) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = -v\},$$

l'altra varietat invariant de la sella-node és tangent al vector $(1, -1)$ sobre la singularitat. Com en aquesta regió $\dot{y} < 0$, deduïm que a U_2 veiem la part de sella, mentre que a V_2 veiem la part de node. A més, com la part de node de l'origen de U_2 és estable i X és un camp quadràtic, la part de node que veiem a la sella-node de V_2 és inestable. Podem, doncs, tractar els orígens de U_2 i V_2 com una sella i un node inestable, respectivament.

Tornant a la part finita del camp, pel Teorema de Poincaré-Bendixson (teorema 1.32), les òrbites que surten del focus repulsor han de tenir com a ω -límit una òrbita periòdica, un punt singular o un conjunt finit d'òrbites que tendeixen a punts singulars quan $t \rightarrow \pm\infty$. No obstant, com l'origen de U_2 és una sella amb varietat invariant estable a l'infinit i V_2 és un node inestable, cap òrbita tindrà com a ω -límit aquestes singularitats i, per tant, podem afirmar l'existència d'una òrbita periòdica. Per un raonament similar al realitzat al final del capítol anterior per refutar l'existència d'un feix d'òrbites periòdiques (donat que X és un camp analític i també ho serà, doncs, l'aplicació de Poincaré en qualsevol secció transversal), podem afirmar que només existeixen un nombre finit d'òrbites periòdiques contingudes una dintre de l'altra i que tant l'exterior com la interior atrauen les òrbites no contingudes dins d'aquesta regió.

Com la determinació del nombre d'òrbites periòdiques d'un camp polinomial qualsevol és un problema encara obert, ens recolzem en el software de la referència [9] per veure que només existeix una òrbita periòdica, que és de fet un cicle límit estable. Finalment, obtenim el retrat de fase mostrat a la figura 3.5.

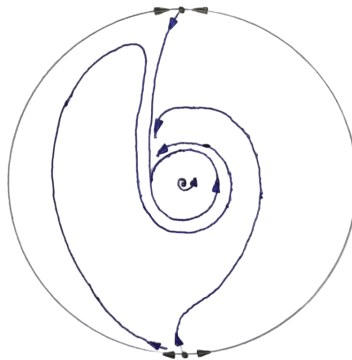


Figura 3.5: Retrat de fase de (3.3)

Capítol 4

Compactificació de Poincaré a \mathbb{R}^n

En aquest capítol estendrem la definició de compactificació de Poincaré donada al capítol 2 per a l'espai euclidià de dimensió n , amb $n \geq 2$. Anàlogament al procés seguit al pla euclidià, considerarem \mathbb{R}^n i $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a varietats diferenciables i $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com un camp vectorial polinomial. A més, direm que $\text{grau}(X) = m$ si $X = (P_1, \dots, P_n)$, on $P_i = P_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, i $m = \max_{1 \leq i \leq n} \text{grau}(P_i)$. El nostre objectiu serà donar l'expressió del camp $P(X)$ a les $2n + 2$ cartes coordenades que requerirem i demostrar l'anàleg de la proposició 2.3. No obstant, no s'inclourà un anàleg de la secció 2.2 degut a l'increment de la casuística de les singularitats infinites.

Considerem l'hiperpla $\Pi = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tangent en el punt $(0, \dots, 0, 1)$ a $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, l'esfera de dimensió n . Com l'origen de \mathbb{R}^{n+1} és el centre de \mathbb{S}^n , per cada $p = (x_1, \dots, x_n, 1) \in \Pi$, la recta que passa per l'origen i el punt p talla \mathbb{S}^n en dos punts: un a $H_+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > 0\}$ i l'altre a $H_- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} < 0\}$. Podem, doncs, definir els difeomorfismes:

$$\begin{aligned} f_+ : \Pi &\longrightarrow H_+ & f_- : \Pi &\longrightarrow H_- \\ (x_1, \dots, x_n, 1) &\longmapsto \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1) & (x_1, \dots, x_n, 1) &\longmapsto \frac{-1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1), \end{aligned}$$

on $\Delta(x) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$.

També podem definir a $H_+ \cup H_-$ el camp \tilde{X} induït per X de la mateixa manera que hem fet al pla euclidià:

$$\tilde{X}(y) = \begin{cases} Df_+(x)X(x) & \text{si } y = f_+(x) \in H_+ \\ Df_-(x)X(x) & \text{si } y = f_-(x) \in H_- \end{cases} \quad (4.1)$$

El nostre següent pas és estendre aquest camp no només a $H_+ \cup H_-$, sinó també sobre $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n \setminus (H_+ \cup H_-) = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid y_{n+1} = 0\}$. Sigui $\rho: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funció $\rho(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^{m-1}$, amb $m = \text{grau}(X)$. Volem demostrar que $\rho\tilde{X}$ defineix un camp analític sobre \mathbb{S}^n , que denotarem per $P(X)$.

Per demostrar-ho, primer prenem sobre \mathbb{S}^n unes cartes coordenades que ens facilitaran l'estudi del camp $\rho\tilde{X}$. Siguin $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\psi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, on:

$$U_i = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid y_i > 0\},$$

$$V_i = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid y_i < 0\},$$

$$\phi_i(y) := \frac{1}{y_i}(y_{j_1}, \dots, y_{j_n}) \quad \forall y \in U_i, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n+1, \quad j_k \neq i, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

$$\psi_i(y) := \frac{1}{y_i}(y_{j_1}, \dots, y_{j_n}) \quad \forall y \in V_i, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n+1, \quad j_k \neq i, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Segui $y \in U_1 \cap H_+$ i sigui $x = (x_1, \dots, x_n)$, aleshores $y = f_+(x)$ i

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f_+)(x) &= \frac{1}{\frac{x_1}{\Delta(x)}} \left(\frac{x_2}{\Delta(x)}, \dots, \frac{x_n}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = \\ &= \left(\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}, \frac{y_{n+1}}{y_1} \right) = (z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

d'on obtenim el canvi de coordenades següent:

$$(\phi_1 \circ f_+)(x) = \begin{cases} z_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \\ \vdots \\ z_{n-1} = \frac{x_n}{x_1} = \frac{y_n}{y_1} \\ z_n = \frac{1}{x_1} = \frac{y_{n+1}}{y_1} \end{cases}, \text{ amb inversa } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{z_n} \\ x_2 = \frac{z_1}{z_n} \\ \vdots \\ x_n = \frac{z_{n-1}}{z_n} \end{cases} \quad (4.2)$$

La matriu jacobiana és

$$D(\phi_1 \circ f_+)(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{-x_n}{x_1^2} & \vdots & & \ddots & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentment, l'expressió en coordenades locals de $\tilde{X}(y)$ per $y \in U_1 \cap H_+$ és:

$$\begin{aligned} \tilde{X}|_{U_1 \cap H_+}(y) &= D\phi_1(y)\tilde{X}(y) = D\phi_1(y)Df_+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f_+)(x)X(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{-x_n}{x_1^2} & \vdots & & \ddots & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x_1^2}(-x_2 P_1 + x_1 P_2, \dots, -x_n P_1 + x_1 P_n, -P_1), \quad (4.3)$$

on simplifiquem $P_i = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ per $1 \leq i \leq n$.

Usant (4.2) per expressar (4.3) en funció de les variables (z_1, \dots, z_n) , tenim que:

$$\begin{aligned} \tilde{X}|_{U_1 \cap H_+}(y) &= z_n^2 \left(-\frac{z_1}{z_n} P_1 + \frac{1}{z_n} P_2, \dots, -\frac{z_{n-1}}{z_n} P_1 + \frac{1}{z_n} P_n, -P_1 \right) = \\ &= z_n (-z_1 P_1 + P_2, \dots, -z_{n-1} P_1 + P_n, -z_n P_1), \end{aligned}$$

on $P_i = P_i\left(\frac{1}{z_n}, \frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}\right) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ per $1 \leq i \leq n$. A més, com

$$\rho(f_+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)^{m-1}} = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z_n^2} \left(1 + \sum_{i=1}^n z_i^2\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{z_n^{m-1}}{\Delta(z)^{m-1}},$$

podem expressar $\rho\tilde{X}$ a $U_1 \cap H_+$ com:

$$\rho\tilde{X}|_{U_1 \cap H_+} = \frac{z_n^m}{\Delta(z)^{m-1}} (-z_1 P_1 + P_2, \dots, -z_{n-1} P_1 + P_n, -z_n P_1).$$

Reescalant el temps, podem prescindir del factor $\frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}$ i obtenim l'expressió:

$$\rho\tilde{X}|_{U_1 \cap H_+} = z_n^m (-z_1 P_1 + P_2, \dots, -z_{n-1} P_1 + P_n, -z_n P_1). \quad (4.4)$$

D'altra banda, com

$$(\psi_1 \circ f_-)(x) = \frac{1}{\frac{-x_1}{\Delta(x)}} \left(\frac{-x_2}{\Delta(x)}, \dots, \frac{-x_n}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_n} \right) = (z_1, \dots, z_n),$$

obtenim la mateixa expressió (4.4) a $U_1 \cap H_-$. Per tant, (4.4) és l'expressió del camp analític $\rho\tilde{X}$ a U_1 , ja que $\text{grau}(P_1), \dots, \text{grau}(P_n) \leq m$ i està, doncs, ben definit per $z_n = 0$.

Anàlogament al procés seguit per a U_1 , obtenim les expressions de $\rho\tilde{X}$ a U_2, \dots, U_{n-1} :

$$\rho\tilde{X}|_{U_i} = z_n^m (-z_1 P_i + P_1, \dots, -z_{i-1} P_i + P_{i-1}, -z_i P_i + P_{i+1}, \dots, -z_{n-1} P_i + P_n, -z_n P_i), \quad (4.5)$$

per $2 \leq i \leq n-1$. Finalment, les expressions a U_n i U_{n+1} son:

$$\begin{aligned} \rho\tilde{X}|_{U_n} &= z_n^m (-z_1 P_n + P_1, \dots, -z_{n-1} P_n + P_{n-1}, -z_n P_n), \\ \rho\tilde{X}|_{U_{n+1}} &= z_n^{m+1} (P_1, \dots, P_n). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si bé no explicitem els càlculs de les expressions (4.5) i (4.6), deixem constància dels canvis de coordenades emprats a cadascuna d'elles:

$$\begin{aligned} U_2: (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n) &= \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \dots, \frac{x_n}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{y_3}{y_2}, \dots, \frac{y_n}{y_2}, \frac{y_{n+1}}{y_2} \right) \\ &\vdots \\ U_n: (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) &= \left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{1}{x_n} \right) = \left(\frac{y_1}{y_n}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n}, \frac{y_{n+1}}{y_n} \right) \\ U_{n+1}: (z_1, \dots, z_n) &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

I les seves inverses:

$$\begin{aligned} U_2: (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= \left(\frac{z_1}{z_n}, \frac{1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n} \right) \\ &\vdots \\ U_n: (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \left(\frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, \frac{1}{z_n} \right) \\ U_{n+1}: (x_1, \dots, x_n) &= (z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

D'altra banda, com a V_i

$$y_{n+1}^{m-1} = \left(\frac{-z_n}{\Delta(z)} \right)^{m-1} = (-1)^{m-1} \left(\frac{z_n}{\Delta(z)} \right)^{m-1},$$

les expressions de $\rho\tilde{X}$ a V_i son les de U_i multiplicades per $(-1)^{m-1}$.

Una vegada calculades les expressions per totes les cartes coordenades, podem donar la definició següent:

Definició 4.1. Anomenem *compactificació de Poincaré del camp X* (definit a \mathbb{R}^n) al camp $P(X) := \rho\tilde{X}$ definit per les expressions (4.4), (4.5) i (4.6).

El camp $P(X)$ està ben definit a \mathbb{S}^n perquè $\text{grau}(X) = m$. D'altra banda, com que per $y_{n+1} = 0$ tenim que $z_n = \frac{y_{n+1}}{y_i} = 0$ a U_i , $1 \leq i \leq n$; sumat al fet que la darrera component de les expressions de $P(X)$ a U_1, \dots, U_n conté el factor z_n , aquesta és nul·la en cadascuna d'elles. Finalment, com a $U_{n+1} \cap \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$, obtenim que \mathbb{S}^{n-1} és invariant per $P(X)$.

Per demostrar l'anàleg de la proposició 2.3 a l'espai euclidià n -dimensional, resta veure que les cartes donades per \mathbb{S}^n son compatibles (definició 1.48). Per fer-ho, demostrarem la compatibilitat entre ϕ_1 i ϕ_n (entre dues cartes ϕ_i, ϕ_j , $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, es fa de manera anàloga), entre ϕ_1 i ϕ_{n+1} i, finalment, entre ϕ_1 i ψ_1 (anàlogament entre ϕ_i i ψ_i , $2 \leq i \leq n+1$):

i) Cas ϕ_1, ϕ_n : A ϕ_n , com

$$(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = \left(\frac{y_1}{y_n}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n}, \frac{y_{n+1}}{y_n} \right),$$

amb $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$; tenim que

$$1 + \sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{y_n^2} \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = \frac{1}{y_n^2} \implies y_n = \sqrt{\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n z_i^2}} =: \sigma(z).$$

Per tant,

$$\phi_n^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = (z_1\sigma(z), \dots, z_{n-1}\sigma(z), \sigma(z), z_n\sigma(z)).$$

Finalment,

$$(\phi_1 \circ \phi_n^{-1})(z_1, \dots, z_n) = \phi_1(\phi_n^{-1}(z_1, \dots, z_n)) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_1}, \frac{1}{z_1}, \frac{z_n}{z_1} \right).$$

Com $z_1 > 0$ a $U_1 \cap U_n$, $\phi_1 \circ \phi_n^{-1}$ és de classe C^∞ i ϕ_1, ϕ_n son compatibles.

ii) Cas ϕ_1, ϕ_{n+1} : A ϕ_{n+1} , com

$$(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

tenim que

$$\phi_{n+1}^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 1).$$

Obtenim, doncs, que

$$(\phi_1 \circ \phi_{n+1}^{-1})(z_1, \dots, z_n) = \phi_1(\phi_{n+1}^{-1}(z_1, \dots, z_n)) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}, \frac{1}{z_1} \right).$$

Per un raonament anàleg al cas anterior, ϕ_1, ϕ_{n+1} son compatibles.

iii) Cas ϕ_1, ψ_1 : Com les cartes son difeomorfismes, sumat al fet que $\psi_1 = -\phi_1$, tenim que $(\phi_1 \circ \psi_1^{-1})(z_1, \dots, z_n) = (-z_1, \dots, -z_n)$. Per tant, $\phi_1 \circ \psi_1^{-1} = -\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ i ϕ_1, ψ_1 son compatibles.

Com els altres casos son conseqüència dels tres anteriors (mitjançant l'ús de la composició entre cartes), totes elles son compatibles entre sí. Hem provat, doncs:

Proposició 4.2. *Sigui X un camp vectorial polinomial sobre \mathbb{R}^n de grau m i sigui $P(X)$ la seva compactificació de Poincaré, aleshores $P(X)$ defineix un camp analític sobre \mathbb{S}^n que deixa \mathbb{S}^{n-1} invariant.* \square

Podem estudiar un camp vectorial polinomial arbitrari X en un entorn de l'infinit a partir de $P(X)$ de la mateixa manera que ho fem en el capítol 2 sobre el pla euclidià. A més, usem la mateixa nomenclatura de punts singulars finits i infinits, referint-nos a les singularitats que apareixen a $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ i \mathbb{S}^{n-1} , respectivament.

Observació 4.3. Com les expressions a U_i i V_i varien per una constant no nul·la, si $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ és un punt singular infinit, aleshores també ho serà $-y$. A més, compartiran estabilitat si m és senar i s'invertirà en cas contrari. Com a observació final, notem que X està duplicat a $P(X)$ a H_+ i H_- . Per aquest motiu, a la pràctica, ens restringirem a la regió $M = H_+ \cup \mathbb{S}^{n-1}$, tal i com fem en el cas 2-dimensional.

Capítol 5

Estudi de camps vectorials polinomials a l'espai

La idea d'aquest darrer capítol és estudiar camps vectorials polinomials a l'espai euclidià tridimensional de la mateixa manera que hem fet al pla euclidià. No obstant, degut a l'increment de dificultat a l'hora d'estudiar-los quan incrementem la dimensió, hem restringit el nostre estudi a aquells que tenen el pla $\{z = 0\}$ invariant. D'aquesta manera, no només podrem fer un estudi del pla al disc de Poincaré per entendre la seva dinàmica, sinó que també ens permetrà dividir l'infinit en dues meitats, ja que \mathbb{S}^2 (que anomenarem esfera de Poincaré) és invariant i, com \mathbb{S}^1 també ho serà per ser l'infinit del pla invariant, podrem estudiar el dos hemisferis per separat. Per tant, el nostre objectiu consistirà en l'estudi de tres punts clau: el retrat de fase del pla invariant $\{z = 0\}$, el comportament local de les singularitats finites (ja que donar un retrat global a \mathbb{R}^3 no és la finalitat d'aquest treball i, en la majoria d'ocasions, comporta un estudi molt més extens que el que estem realitzant) i, finalment, donarem el retrat de fase a l'esfera de Poincaré. Si bé no estem estudiant els camps en la seva totalitat, amb els tres punts esmentats hom pot fer-se una idea del retrat de fase global d'aquests. Seguint la metodologia del capítol 3, farem primer un estudi més profund de les cartes coordenades de \mathbb{S}^3 , per millorar la nostra comprensió sobre aquestes i saber com representar-les.

5.1 Anàlisi de les cartes coordenades de \mathbb{S}^3

Al capítol anterior hem vist que $\psi_i = -\phi_i$, per a $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Per tant, ens podem restringir a la regió $M = H_+ \cup \mathbb{S}^2$. A més, com considerem \mathbb{S}^2 l'infinit que separa les dues còpies de \mathbb{R}^3 , podem considerar la regió M com $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Tenim, doncs, que l'espai euclidià tridimensional correspon a l'obert $A \setminus \mathbb{S}^2$. D'altra banda, per estudiar les singularitats de l'esfera de Poincaré seguirem un procés anàleg al del pla euclidià: primer calcularem les singularitats que apareixen a U_1 ; a continuació, buscarem les que apareixen a $U_2 \cap \{u = 0\}$ (i, per tant, no pertanyen a U_1); finalment, l'únic punt que restarà estudiar serà l'origen de U_3 .

Continuem amb l'estudi de les cartes coordenades. En primer lloc, explicitem l'expressió de $P(X)$ als oberts U_1, \dots, U_4 per facilitar els càlculs realitzats a la següent secció.

Sigui $m = \text{grau}(X)$:

$$P(X)|_{U_1} = z_3^m (-z_1 P_1 + P_2, -z_2 P_1 + P_3, -z_3 P_1), \text{ on } P_i = P_i \left(\frac{1}{z_3}, \frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right), i = 1, 2, 3.$$

$$P(X)|_{U_2} = z_3^m (-z_1 P_2 + P_1, -z_2 P_2 + P_3, -z_3 P_2), \text{ on } P_i = P_i \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right), i = 1, 2, 3.$$

$$P(X)|_{U_3} = z_3^m (-z_1 P_3 + P_1, -z_2 P_3 + P_2, -z_3 P_3), \text{ on } P_i = P_i \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}, \frac{1}{z_3} \right), i = 1, 2, 3.$$

$$P(X)|_{U_4} = z_3^{m+1} (P_1(z_1, z_2, z_3), P_2(z_1, z_2, z_3), P_3(z_1, z_2, z_3)).$$

Sabem, doncs, que sobre l'obert U_4 (la part finita), el camp $P(X)$ té el mateix comportament que el camp original X . Donem ara els canvis de coordenades corresponents als oberts U_1, U_2, U_3 , els quals seran útils pel nostre estudi:

$$U_1: (z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right),$$

$$U_2: (z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right),$$

$$U_3: (z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{1}{x_3} \right).$$

Com a U_1 $z_1 > 0 \iff x_2 > 0$ i a U_2 $z_1 > 0 \iff x_1 > 0$, tenim que l'eix z_1 va en sentits diferents en aquests oberts. Tanmateix, com a ambdós oberts $z_2 > 0 \iff x_3 > 0$, el sentit de l'eix z_2 és el mateix. D'altra banda, com a U_3 $z_1 > 0 \iff x_1 > 0$, $z_2 > 0 \iff x_2 > 0$ i a tots tres oberts l'eix z_3 va cap al centre de l'esfera, les cartes de la regió M estan parametritzades com es mostra a la figura 5.1a, mentre que la forma del retrat de fase a l'esfera de Poincaré queda reflectida a la figura 5.1b. Notem que les parametritzacions dels oberts V_1, \dots, V_4 son idèntiques a les de U_1, \dots, U_4 , però amb signe oposat.

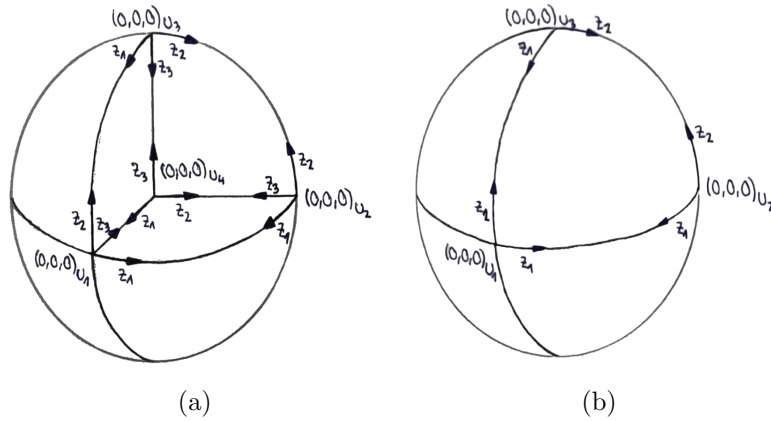
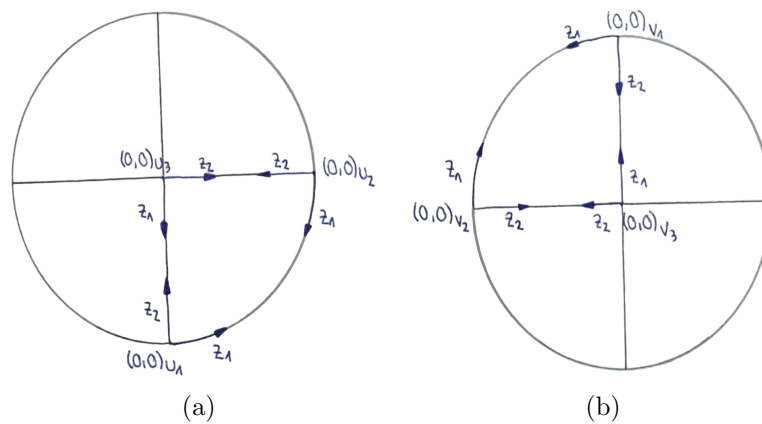


Figura 5.1: Coordenades locals a la regió M i a l'esfera de Poincaré

Com hem esmentat a l'inici d'aquest capítol, dividirem el retrat de fase de l'esfera de Poincaré en els retrats de fase dels dos hemisferis. Sigui $M_+ = (U_3 \cap \mathbb{S}^2) \cup \mathbb{S}^1$ i $M_- = (V_3 \cap \mathbb{S}^2) \cup \mathbb{S}^1$, els retrats de fase sobre M_+ i M_- estan orientats de la forma mostrada a les figures 5.2a i 5.2b, respectivament.

Finalment, de la mateixa manera que hem fet al capítol 3, simplificarem la notació utilitzant les variables (u, v, w) per referir-nos a (z_1, z_2, z_3) .

Figura 5.2: Orientació de les regions M_+ i M_-

5.2 Resolució de sistemes a l'espai

En aquesta darrera secció estudiarem dos camps polinomials a l'espai euclidià tridimensional. El primer és un sistema lineal que ens servirà per familiaritzar-nos amb les noves cartes i l'increment de dimensió. Finalitzarem aquest darrer capítol amb l'estudi d'un camp quadràtic que tindrà el primer octant $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}$ invariant. Recordem que, com hem esmentat anteriorment, tots dos camps tindran el pla $\{z = 0\}$ invariant.

i) Sigui $X(x, y, z)$ el camp lineal següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -z \end{cases} \quad (5.1)$$

Com $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ i $\dot{z} = 0$ si, i només si, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$, obtenim que l'origen és l'únic punt singular finit. A més, com la seva matriu jacobiana $DX(x, y, z)$ és la següent:

$$DX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

concloïm que $(0, 0, 0)$ és una sella amb varietat estable $\{x = y = 0\}$ i varietat inestable $\{z = 0\}$.

Notem que no només el pla $\{z = 0\}$ és invariant, sinó que també ho són els plans $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$. Aquesta informació, sumada a l'estudi del pla $\{z = 0\}$, és suficient per donar la dinàmica local de (5.1) prop de les singularitats, representada a la figura 5.3.

Anem ara a estudiar la dinàmica de (5.1) al pla $\{z = 0\}$. Sigui Y la restricció de (5.1) sobre $\{z = 0\}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad (5.2)$$

Com sabem que l'origen és l'única singularitat finita i és un node estable, passem a estudiar la dinàmica de Y sobre l'infinit.

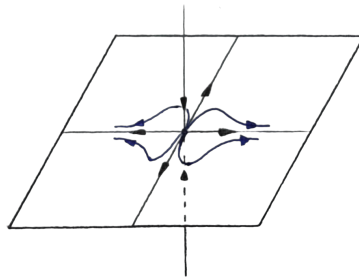


Figura 5.3: Comportament local de (5.1) sobre l'origen

Sobre U_1 , l'expressió de $P(Y)$ és la següent:

$$P(Y)|_{U_1} = (u, -v).$$

Per tant, l'única singularitat infinita que hi trobem és l'origen. Com la matriu jacobiana de $P(Y)$ en aquest obert és:

$$DP(Y)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tenim que $DP(Y)|_{U_1}(u, v) = DP(Y)|_{U_1}(0, 0)$ i l'origen és una sella hiperbòlica, amb varietat inestable $\{u = 0\}$ i varietat estable $\{v = 0\}$ (per ser $\{y = 0\}$ invariant).

Veiem si l'origen de U_2 és un punt singular. L'expressió de $P(Y)$ en aquest obert és:

$$P(Y)|_{U_2} = (-u, -2v).$$

Tenim, doncs, que l'origen de U_2 és també una singularitat. A més, com

$$DP(Y)|_{U_2}(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

i $DP(Y)|_{U_2}(u, v) = DP(Y)|_{U_2}(0, 0)$, es tracta d'un node estable. Com els plans $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$ son invariants, podem donar el retrat de fase de $P(Y)$ sobre el disc de Poincaré, representat a la figura 5.4.

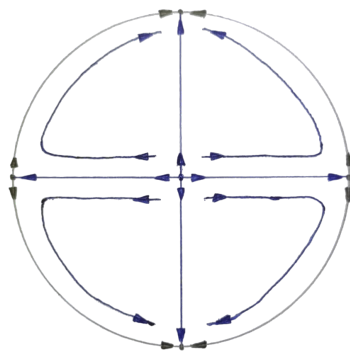


Figura 5.4: Retrat de fase de (5.2) al disc de Poincaré

Passem ara a representar (5.1) sobre l'esfera de Poincaré. L'expressió de $P(X)$ a l'obert U_1 és:

$$P(X)|_{U_1} = (u, -2v, -w).$$

Restringint-nos sobre $\{w = 0\}$ per obtenir les singularitats infinites:

$$(u, -2v, 0) = (0, 0, 0) \iff (u, v, w) = (0, 0, 0).$$

La matriu jacobiana de $P(X)$ sobre l'obert U_1 és:

$$DP(X)|_{U_1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i tenim, doncs:

$$DP(X)|_{U_1}(u, v, w) = DP(X)|_{U_1}(0, 0, 0) \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1 \implies \text{Sella.}$$

A més, per ser $DP(X)|_{U_1}(0, 0, 0)$ diagonal i el pla $\{y = 0\}$ invariant, podem concloure que $\{u = 0\}$ és la varietat estable de la sella i $\{v = w = 0\}$ és la varietat inestable.

Com l'única singularitat infinita a U_1 és l'origen, resta veure si n'hi ha d'altres a $U_2 \cap \{u = 0\} \cap \{w = 0\}$ i a l'origen de U_3 . Sobre U_2 , l'expressió de $P(X)$ és la següent:

$$P(X)|_{U_2} = (-u, -3v, -2w).$$

Restringint-nos a la varietat $\{u = w = 0\}$, obtenim que:

$$(0, -3v, 0) = (0, 0, 0) \iff v = 0.$$

Estudiem l'estabilitat mitjançant la seva matriu jacobiana:

$$DP(X)|_{U_2}(u, v, w) = DP(X)|_{U_2}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, els seus valors propis son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$ i es tracta d'un node estable.

Per acabar, mirem si l'origen de U_3 és una singularitat, l'expressió de $P(X)$ en aquest obert és:

$$P(X)|_{U_3} = (2u, 3v, w).$$

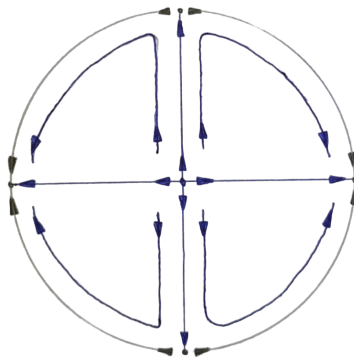


Figura 5.5: Retrat de fase de $P(X)$, on X ve donat per (5.1), sobre M_+ i M_-

L'origen és clarament una singularitat, i la matriu jacobiana de $P(X)|_{U_3}$ en aquest punt és:

$$DP(X)|_{U_3}(u, v, w) = DP(X)|_{U_3}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentment, l'origen de U_3 és un node inestable.

Com el camp X és lineal, les singularitats als orígens de V_1, V_2, V_3 (simètriques a les de U_1, U_2, U_3 , respectivament) tindran la mateixa estabilitat que els seus simètrics. Tenim, doncs, que els retrats de fase de $P(X)$ a M_+ i M_- coincideixen i son el mostrat a la figura 5.5.

ii) Sigui ara $X(x, y, z)$ el camp quadràtic:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = y + x^2 \\ \dot{z} = z^2 \end{cases} \quad (5.3)$$

El primer que cal observar és que no només és invariant el pla $\{z = 0\}$, sinó que també ho seran les rectes $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 = y + x^2 = 0\}$, on el camp apuntarà cap amunt per ser $\dot{z} \geq 0$. A més, com $\dot{z} = 0 \iff z = 0$, totes les singularitats finites pertanyen al pla invariant.

Passem a calcular aquestes singularitats, com $\dot{x} = 0 \iff x + y^2 = 0 \iff x = -y^2$, substituïm a la segona equació per obtenir:

$$\dot{y} = 0 \iff y + x^2 = y + (-y^2)^2 = y(1 + y^3) = 0 \iff (y = 0 \text{ o } y = -1),$$

ja que $y \in \mathbb{R}$. Així, els únics punts singulars finits son $(0, 0, 0)$ i $(-1, -1, 0)$. Tenim, doncs, que les rectes $\{x = y = 0\}$ i $\{x = y = -1\}$ son invariants.

Una vegada calculades les singularitats, anem a estudiar la dinàmica de (5.3) a $\{z = 0\}$. Sigui $Y := X|_{\{z=0\}}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

comencem fent un estudi del comportament del camp als eixos. Si $x = 0$, aleshores $\dot{x} = y^2$ i és sempre positiu. De la mateixa manera, \dot{y} és positiu en la recta $\{y = 0\}$. D'altra banda, les singularitats finites son $(0, 0)$ i $(-1, -1)$, anem a estudiar la seva estabilitat:

$$DY(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituïnt a les singularitats:

$$DY(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \implies \text{Node inestable.}$$

$$DY(-1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1 \implies \text{Sella.}$$

Per tant, l'origen és un node repulsor i $(-1, -1)$ és una sella amb subespais propis:

$$\text{Ker}(DY(-1, -1) - 3 \text{ Id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\},$$

$$\text{Ker}(DY(-1, -1) + \text{Id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

Tenim, doncs, que les varietats estable i inestable de la sella son tangents als vectors $(1, 1)$, $(1, -1)$ en la singularitat, respectivament.

Passem a estudiar el camp Y a l'infinit. L'expressió de $P(Y)$ sobre U_1 és:

$$P(Y)|_{U_1} = (-u^3 + 1, -u^2v - v^2),$$

restringint-nos sobre $\{v = 0\}$ per obtenir les singularitats a l'infinit:

$$(-u^3 + 1, 0) = (0, 0) \iff u = 1,$$

ja que $u \in \mathbb{R}$. La matriu jacobiana del camp en aquest obert és la següent:

$$DP(Y)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} -3u^2 & 0 \\ -2uv & -u^2 - 2v \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$DP(Y)|_{U_1}(1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{VAPs: } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1 \implies \text{Node estable.}$$

Resta veure si l'origen de U_2 és un punt singular. L'expressió de $P(Y)$ en l'obert U_2 és:

$$P(Y)|_{U_2} = (-u^3 + 1, -u^2v - v^2).$$

Com l'origen clarament no és una singularitat, les úniques dues singularitats son la trobada a U_1 i el seu punt simètric, que tindrà l'estabilitat invertida per ser Y un camp quadràtic.

Per poder donar el retrat de fase al disc de Poincaré, resta veure l' α -límit i l' ω -límit de les varietats estable i inestable de la sella $(-1, -1)$, respectivament. Pel Teorema de Poincaré-Bendixson (teorema 1.32) i per l'estudi fet sobre els eixos de coordenades, la varietat inestable de la sella ha de tenir com a ω -límit la singularitat infinita de U_1 , ja que les altres dues son nodes inestables. D'altra banda, com la varietat estable només pot tenir com a α -límit els dos nodes repulsors i la varietat inestable separa les dues branques, una d'elles prové de la singularitat infinita de V_1 i l'altre de l'origen del pla $\{z = 0\}$. Així doncs, el retrat de fase de (5.4) és el mostrat a la figura 5.6.

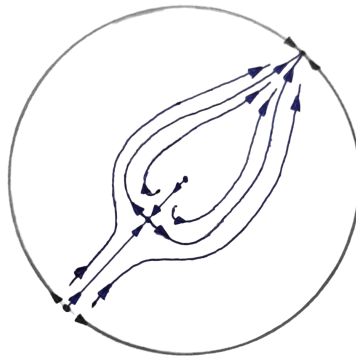


Figura 5.6: Retrat de fase de (5.4) al disc de Poincaré

Tornant ara a l'espai euclidià tridimensional, anem a estudiar l'estabilitat de les singularitats trobades. La matriu jacobiana de (5.3) és la següent:

$$DX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Tenim, doncs, que

$$DX(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$DX(-1,-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'on obtenim que en tots dos casos la tercera component és no hiperbòlica. No obstant, ja sabem la dinàmica del camp en aquesta component per l'estudi inicial realitzat: les rectes $\{x = y = 0\}$ i $\{x = y = -1\}$ són invariants, amb el camp apuntant sempre cap amunt a totes dues. A la figura 5.7 es mostra el comportament local del camp prop de les singularitats.

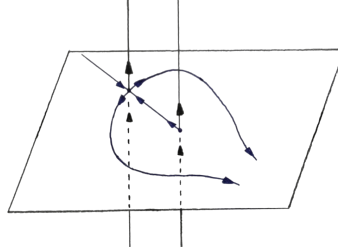


Figura 5.7: Dinàmica local de (5.3) a les singularitats finites

Finalitzem amb l'estudi del camp a l'esfera de Poincaré. L'expressió de $P(X)$ sobre U_1 és:

$$DP(X)|_{U_1} = (-u^3 + 1, -u^2v + v^2 - vw, -u^2w - w^2),$$

amb singularitats sobre $\{w = 0\}$:

$$(-u^3 + 1, -u^2v + v^2, 0) = (0, 0, 0) \iff (u, v, w) = (1, 0, 0), (1, 1, 0).$$

Calculem la matriu jacobiana sobre U_1 i estudiem la seva estabilitat:

$$DP(X)|_{U_1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -3u^2 & 0 & 0 \\ -2uv & -u^2 + 2v - w & -v \\ -2uw & 0 & -u^2 - 2w \end{pmatrix}.$$

Tenim, doncs, que

$$DP(X)|_{U_1}(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$DP(X)|_{U_1}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $(1, 0, 0)$ és un node estable i, com els valors propis de $DP(X)|_{U_1}(1, 1, 0)$ són $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, $(1, 1, 0)$ atrau les òrbites que provenen de l'espai euclidià

tridimensional i és una sella hiperbòlica a l'infinit. Passem a calcular els seus subespais propis:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(DP(X)|_{U_1}(1, 1, 0) + 3 \text{ Id}) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u = 2v, w = 0\}, \\ \text{Ker}(DP(X)|_{U_1}(1, 1, 0) - \text{Id}) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u = w = 0\}. \end{aligned}$$

Obtenim, doncs, que les varietats estable i inestable de la sella son tangents als vectors $(2, 1, 0)$ i $(0, 1, 0)$ en la singularitat, respectivament.

Resta veure si tenim singularitats addicionals a U_2 sobre la varietat $\{u = w = 0\}$ i a l'origen de U_3 . Sobre U_2 , l'expressió de $P(X)$ és la següent:

$$P(X)|_{U_2} = (-u^3 + 1, -u^2v + v^2 - vw, -u^2w - w^2).$$

Com la primera component no s'anul·la mai sobre la varietat $\{u = 0\}$, no existeixen més singularitats sobre U_2 .

Finalment, com l'expressió de $P(X)$ sobre U_3 és:

$$P(X)|_{U_3} = (-u + uw + v^2, u^2 - v + vw, -w),$$

l'origen és clarament un punt singular. La matriu jacobiana de $P(X)$ en aquest obert és:

$$DP(X)|_{U_3}(u, v, w) = \begin{pmatrix} w - 1 & 2v & u \\ 2u & w - 1 & v \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$DP(X)|_{U_3}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{Node estable.}$$

Obtenim, doncs, que les singularitats infinites son les dues trobades a U_1 , l'origen de U_3 i els seus punts simètrics, que tindran la seva estabilitat invertida per ser X un camp quadràtic.

Per donar els retrats de fase a les regions M_+ i M_- , primer necessitem estudiar la dinàmica del camp sobre els eixos dels oberts U_3 i V_3 i després aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson (teorema 1.32). De l'expressió de $P(X)$ sobre U_3 podem extreure que el camp apunta cap a la dreta sobre $\{v = 0\}$, ja que la segona component val $u^2 - v$ i és sempre positiu sobre aquesta varietat. D'altra banda, del fet que la primera component val v^2 sobre $\{u = 0\}$, podem deduir que el camp apunta cap abaix sobre aquesta varietat.

D'altra banda, l'expressió del camp sobre V_3 és la mateixa que a U_3 multiplicada per $(-1)^{2-1} = -1$. Per tant, no només els eixos tenen sentits oposats, sinó que també la parametrització del camp inverteix el seu signe. Per aquest motiu, el sentit al que apuntarà el camp sobre els eixos serà el mateix que a U_3 .

Resta veure l'origen i el final de les selles trobades. Comencem amb la que es troba a M_+ . Com només tenim un node repulsor, la varietat estable de la sella ha de venir o bé d'aquest node, o bé d'una de les branques de la varietat inestable de la mateixa. No obstant,

aquest darrer cas no és possible, ja que, degut a la dinàmica als eixos, estariem tancant sense envoltar cap singularitat, fet que contradiu el Teorema de Poincare-Bendixson. Així doncs, com les varietats estables provenen del node repulsor situat a \mathbb{S}^1 , una de les branques de la varietat inestable de la sella ha d'acabar a l'origen de U_3 , mentre que l'altre anirà al node estable de \mathbb{S}^1 .

Passem a estudiar la sella de M_- . Per un raonament anàleg al següent per l'altra sella, les dues branques de la varietat inestable han de tenir com a ω -límit l'únic node estable de M_- . Tanmateix, les branques de la varietat estable provenen una del node inestable de \mathbb{S}^1 i l'altra de l'origen de V_3 . Tenim, doncs, que els retrats de fase de $P(X)$ sobre M_+ i M_- són els mostrats a les figures 5.8a i 5.8b, respectivament.

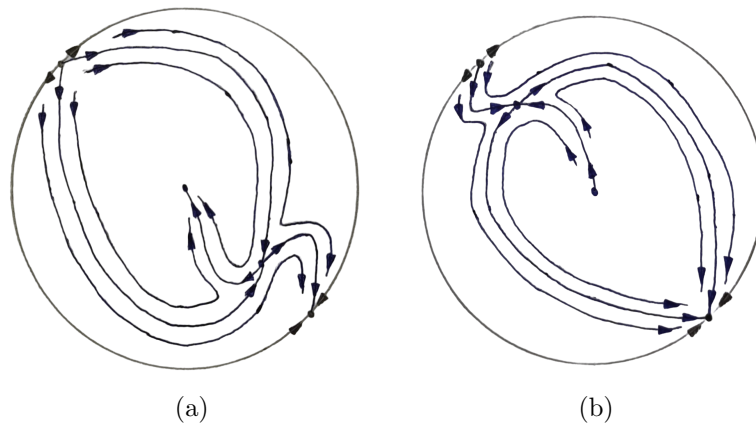


Figura 5.8: Retrat de fase de $P(X)$, on X ve donat per (5.3), sobre M_+ i M_-

Conclusions

Durant la lectura d'aquest text hem deduït les expressions de la compactificació de Poincaré per les diferents cartes coordenades emprades per parametritzar \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^n . A continuació hem vist com interpretar-les i estan orientats els retrats de fase realitzats sobre elles. Hem acabat aplicant aquesta teoria en casos pràctics, relacionant l'après amb la teoria elemental d'Equacions Diferencials.

A nivell personal m'ha servit per introduir-me en l'ús de \LaTeX , així com enfrontar-me per primera vegada a una cerca d'informació tan específica. A més, crec que la lectura en altres idiomes ha estat força enriquidora, tot i que ha endarrerit i dificultat la comprensió d'algun dels procediments seguits a les diferents referències consultades.

Per concloure aquest treball de final de grau, vull afegir que la realització d'un treball d'aquestes característiques (on es requereix una recerca prèvia que moltes vegades acaba sent en va) per primera vegada ha estat una experiència inestimable, la qual m'ha permès veure les matemàtiques des d'una altra perspectiva i per la qual estaré sempre agraït.

Bibliografia

- [1] Jorge Sotomayor. *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [2] Freddy Dumortier; Jaume Llibre; Joan C. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer, 2006.
- [3] Anna Cima; Jaume Llibre. *Bounded Polynomial Vector Fields*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 318, No. 2, (Apr., 1990), pp. 557-579.
- [4] Alejandro Haro. *Teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales*. Universitat de Barcelona (comunicació personal).
- [5] Carlos Currás Bosch. *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*. Edicions Universitat de Barcelona, 2003.
- [6] Benjamin Fine; Gerhard Rosenberger. *The Fundamental Theorem of Algebra*. Springer, 1997.
- [7] Eberhard Freitag; Rolf Busam. *Complex Analysis. Second Edition*. Springer, 2009.
- [8] C. H. Edwards, Jr. *Advanced Calculus of Several Variables*. Academic Press, New York, 1973.
- [9] *Phase plane plotter*. (n.d.). <https://aeb019.hosted.uark.edu/ppplane.html>.