Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

JUEGOS EN FORMA ESTRATÉGICA

Autora: Victoria Llull Machí

Directores: Dr. Josep Vives y Dra. María Carmen Florit
Realizado en: Departamento de Matemáticas e Informática

Barcelona, 13 de junio de 2023

Abstract

This thesis consists on an analysis of the decision-making problems, focusing on strategic games. We will start by looking at the basic concepts of Game Theory and some classifications. Next, we will focus on simultaneous games and will take a deep look into strategies, Nash Equilibrium and dominance in order to solve this type of games. Moreover, by looking at the Theory of the focal point we will be able to remark some solutions. Also, we will demonstrate the existence of an equilibrium by looking at the Fixed Point Theorem of Kakutani and the Nash Theorem, then mixed strategies are used to prove it in finite games. By using all the concepts viewed through the thesis, we will end up with an analysis of sequential games. Along the thesis we will give a wide variety of examples to get a better understanding of the concepts and see their scope and utility in Game Theory. Among them, we will find typical examples such as the prisoner dilemma, the auctions or oligopolies.

Resumen

Este trabajo consiste en un análisis de los problemas de decisión, y nos centraremos en los juegos en forma estratégica. Empezaremos viendo los conceptos básicos de la Teoría de Juegos y algunas clasificaciones de los problemas de decisión. Continuaremos centrándonos en los juegos en forma estratégica y veremos los conceptos necesarios para su resolución, desde ver las estrategias y los equilibrios de Nash hasta ver la dominancia. Además veremos cómo en algunos casos podemos destacar algunas soluciones a través de la Teoría del punto focal. También demostraremos la existencia de una solución, para ello veremos el Teorema del punto fijo de Kakutani, el Teorema de Nash y un ingenio teórico para poder demostrar la existencia en juegos finitos. Terminaremos con un análisis de los juegos secuenciales a partir de todos los conceptos vistos a lo largo del trabajo. Durante todo el trabajo veremos una diversidad de ejemplos para obtener una mayor compresión de los conceptos y para ver su alcance y utilidad en la Teoría de Juegos. Entre ellos encontraremos ejemplos clásicos como el dilema del prisionero, las subastas o los oligopolios.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a Josep Vives y a Carmen Florit su dedicación y su tiempo aunque este carecía. Agradecer a Josep Vives que pudiera contar con él aunque su agenda no se lo permitía y a Carmen Florit haberse unido para poder hacerlo posible entre los tres.

Me gustaría también agradecer a Mikel Álvarez, profesor de la optativa de Teoría de Juegos, haberme hecho descubrir esta rama de las matemáticas y de la economía y haber iniciado en mi este nuevo interés.

Finalmente, agradecer a mis amigas y a mi familia por haberme apoyado durante todo el proceso y haberme ayudado a sacarlo adelante de la mejor manera posible. En especial a Aina Soler y a mi madre por el interés, la confianza y el apoyo incondicional.

Índice

1. Introducción **1**

1.1. Definiciones básicas 1

1.2. Clasificaciones 3

2. Introducción a los juegos en forma estratégica **5**

2.1. Juegos Bipersonales 5

2.2. Ejemplos 6

3. Equilibrio de Nash **10**

3.1. Teorema de Nash 13

3.2. Equilibrio de Nash en juegos bipersonales 15

4. Extensión Mixta **19**

4.1. Equilibrio de Nash en extensiones mixtas 20

4.2. Extension mixta de un juego bipersonal 21

5. Dominancia **27**

5.1. Dominancia estricta 27

5.2. Dominancia débil 32

6. Juegos de Mercado **35**

6.1. Oligopolio de Cournot 35

6.2. Oligopolio de Bertrand 37

7. Juegos con 3 jugadores **41**

8. Análisis estratégico de Juegos Secuenciales **44**

8.1. Juegos secuenciales bipersonales 47

9. Conclusiones **50**

1. Introducción

Es evidente que la toma de decisiones es un problema al que nos enfrentamos día sí y día también, por ello surgió una teoría matemática centrada en este tipo de problemas y matemáticos como Cournot, Nash, von Neumann o Borel dedicaron gran tiempo de su vida a estudiarlos. Así surgió una rama de dicha ciencia conocida como Teoría de Juegos, la cual se encarga de estudiar los modelos de conflicto entre seres racionales, donde hay varios agentes (conocidos como jugadores) que toman diferentes opciones (en función de las cuales se forma un resultado) y donde cada jugador tiene sus objetivos sobre el conjunto de resultados.

Cuando hablamos de juego hablamos de un problema de decisión entre los diferentes jugadores, donde los resultados dependen tanto de sus decisiones como de las de los otros jugadores. Las diversas opciones con las que cuenta cada agente en cada jugada se denominan acciones y las combinaciones de acciones que cada jugador puede llevar a cabo son las estrategias. Cuando se toma una determinada estrategia el resultado que se obtiene es la utilidad. Destacar que los jugadores disponen de un conjunto de información, el cual está formado por los conocimientos que cada agente dispone sobre las acciones y es dado antes de que se inicie el juego.

La Teoría de Juegos puede tener muchos enfoques de análisis como por ejemplo, predecir las estrategias que pueden tomar los otros jugadores, analizar las estrategias de todos los jugadores, estudiar qué estrategia pensaran nuestros contrincantes que tomaremos etc, todo ello para poder tomar la opción que más nos favorezca. Este tipo de análisis se utiliza en juegos no cooperativos, donde los jugadores no colaboran sino que compiten para maximizar sus resultados, así son utilizados para estudiar situaciones de conflicto como la competencia entre empresas. En este trabajo nos centraremos en este tipo de juegos y estudiaremos más profundamente los juegos en forma estratégica, donde los jugadores eligen de forma simultánea su jugada a diferencia de los de forma extensiva donde la eligen de forma alternativa.

Además de predecir e intentar anticiparnos a los otros agentes también podemos analizar el pasado, qué podría haber movido a diversos agentes a actuar como han actuado y así poder hacer análisis económicos.

Antes de empezar destacar que durante todo el trabajo me he basado en tres libros principalmente, *Introducción a la Teoría de Juegos* [2], *Game Theory. A Very Short Introduction* [3] y *Teoría de Juegos* [4] además de en todos los conceptos que adquirí al cursar la asignatura de Teoría de Juegos.

1.1. Definiciones básicas

Empezaremos tratando algunos conceptos básicos de la teoría de decisión de forma general para poder desarrollar los siguientes temas, conceptos que posteriormente los veremos de forma más concreta para los juegos en forma estratégica.

Hemos hablado ya de las estrategias, los diferentes caminos que un jugador puede tomar ante cualquier posible circunstancia en cada momento del juego. Es importante diferenciarlas de las acciones, las acciones son las opciones que tiene cada jugador en cada jugada mientras que una estrategia es la planificación que puede elegir un jugador de un conjunto de posibles acciones en cada situación. Así la estrategia de cada jugador determina el papel que tomará el jugador ante cualquier situación del juego. Diferenciamos dos tipos principales de estrategias:

- Las puras, las cuales no están influenciadas por el azar, la elección está en el jugador.
- Las mixtas, en las cuales sí que interviene la probabilidad, son una combinación de decisiones influenciadas por el azar.

Una combinación de estrategias formada por una posible estrategia de cada jugador, se denomina perfil de estrategias y determina la acción que llevarán a cabo cada jugador en cualquier posible desarrollo del juego. Destacar que las soluciones de nuestros juegos vendrán dadas por perfiles de estrategias, con lo que sabremos el camino que cada jugador llevará a cabo. Importante diferenciarlo de los conjuntos de estrategias de cada jugador, los cuales están formados por las posibles estrategias que tiene cada jugador, con lo que un conjunto de estrategias de un jugador X solo contendrá estrategias del jugador X y evidentemente no es una solución de nuestro juego, ni siquiera es la solución para el jugador X, si no que nos muestra los diferentes caminos que puede tomar el jugador X.

Para poder estudiar nuestros conflictos y obtener resultados, necesitamos poder hacer un análisis matemático del problema de decisión, necesitamos obtener un valor numérico. Así entra en juego la utilidad, concepto inventado por economistas para determinar cuantitativamente cada resultado del juego, el cual viene a ser una descripción numérica del comportamiento de los jugadores para así recoger sus preferencias. Más concretamente la función utilidad o función pago de un jugador X es una función que nos da el resultado que obtiene el jugador X para un determinado perfil de estrategias,

$$u : E \longmapsto \mathbb{R} \tag{1.1}$$

dónde E denota el conjunto formado por los diferentes perfiles de estrategias. Así que para un determinado perfil de estrategia $s \in E$, $u(s)$ es el pago que obtiene el jugador X si cada jugador juega la estrategia dada por el perfil de estrategias s. Destacar que el resultado de un jugador no depende únicamente de la estrategia que él va a llevar a cabo sino también de las que los otros jugadores eligen.

Como ya sabemos, en la Teoría de Juegos se presupone que los agente son racionales, es decir estamos ante jugadores que actúan coherentemente, hecho que se relaciona con querer maximizar sus resultados, o equivalentemente maximizar la utilidad. Pero en un juego no solo se presupone que los jugadores son racionales sino también que saben que los otros jugadores también lo son, con lo que ellos también van a querer maximizar su utilidad. Tener claro esta hipótesis junto a que la utilidad depende de un perfil de estrategias es lo que explica la importancia del equilibrio de Nash en la Teoría de Juegos sobretodo en los no cooperativos.

Un equilibrio de Nash se produce cuando todos los jugadores juegan a la vez su mejor estrategia en respuesta a las estrategias de los demás, es decir, cuando ningún jugador tiene incentivos a cambiar de estrategia si los otros jugadores mantienen las suyas. Así, el equilibrio de Nash es una solución del juego donde ningún jugador puede mejorar su resultado si los otros no cambian su jugada. Que un perfil de estrategias sea un equilibrio de Nash no significa que cada jugador juega la jugada que más pagos le da, si no que cada jugador juega aquella que le dará un mejor resultado deduciendo las estrategias que llevarán a cabo los otros jugadores.

1.2. Clasificaciones

Existen infinitos problemas de decisión, este hecho obliga a clasificar los juegos según diferentes criterios para obtener un mejor análisis. Algunas de estas clasificaciones son diferenciaciones que se pueden hacer dentro de los juegos en forma estratégica, por ello es importante ver algunos ejemplos y entender en qué se diferencian.

Juegos de información completa y incompleta

Hemos dicho que nuestros jugadores cuentan con un conjunto de información, muchas veces este contiene los conjuntos de estrategias y los pagos tanto suyos como de los otros jugadores, es decir, disponen de una información completa del juego. Este hecho en numerosos casos no acaba de ser del todo realista, muchas veces no se da esta situación ideal. Como por ejemplo en el caso de empresas en competición, es difícil creer que todas las empresas cuenten con los costes de producción de todas sus competidoras. Por ello cuando tenemos un juego donde no se dispone de toda esta información se le llama juego de información incompleta, como por ejemplo, si nuestros jugadores conocen todas las estrategias pero no todos los pagos.

Juegos simultáneos y secuenciales

A continuación veremos una diferenciación en función de si los jugadores conocen o no las decisiones de los otros jugadores. Cuando los jugadores no tienen conocimientos de las estrategias que han elegido los otros jugadores se le llama juego simultáneo, no porque elijan al mismo tiempo sus estrategias si no porque la información que disponen los jugadores es equivalente, tanto si eres el primero tomando un camino como si eres el último, hecho equivalente (desde el punto de vista de la información) a elegir de forma simultánea. También se les suele llamar estáticos, son resueltos mediante el equilibrio de Nash y representados mediante la forma normal o estratégica. En el caso en que los jugadores vayan teniendo información de las elecciones previas se les llama juegos secuenciales o dinámicos, lo que implica que haya agentes que tengan más información que otros, este hecho afecta a las decisiones de los jugadores con lo que son representados mediante la forma extensiva o diagrama de árbol y analizados de forma diferente, como por ejemplo mediante la inducción hacia atrás. Aunque en el último capítulo veremos cómo analizarlos a partir de toda la teoría de los juegos simultaneos.

Los juegos dinámicos pueden ser de información perfecta en el caso que los agentes dispongan de todas las acciones previas a ellos y es de información imperfecta si no se conoce toda esta información.

Juegos cooperativos y no cooperativos

Finalmente nos centramos en la clasificación de juegos cooperativos y juegos no cooperativos. En cuanto a los juegos no cooperativos entraría todo lo anterior que hemos visto, y lo que veremos más adelante. Como ya sabemos son aquellos juegos donde no se pueden formar coaliciones, así que cada jugador busca su propio beneficio. Es importante observar que, que los jugadores tomen las decisiones individualmente y queriendo maximizar sus resultados, no significa que tengan que perjudicar a los otros jugadores, es decir, en los juegos no cooperativos sus jugadores no se encuentran siempre en conflicto. Por otro lado los juegos cooperativos son aquellos en que los diferentes jugadores colaboran para maximizar la utilidad conjunta, así los diferentes jugadores pueden formar coaliciones y toman las decisiones como si fueran uno solo, con lo cual se coordinan para obtener un mismo objetivo. No compiten de forma individual sino entre las coaliciones que se han creado, por lo que la búsqueda de las mejores estrategias individuales deja de ser una prioridad y entra en su lugar la ganancia cooperativa. Esta rama de la Teoría de Juegos trata de predecir qué coaliciones se formarán, y cuáles serán sus estrategias y resultados conjuntos. Este tipo de situaciones se da por ejemplo en el reparto de los beneficios entre inversores de una misma empresa. Hemos visto que en los juegos cooperativos no tiene sentido maximizar la utilidad, con lo cual la función de utilidad deja de ser relevante en el estudio y entra la función característica, que nos permite decidir cómo repartir los beneficios de la cooperación.

Durante los próximos capítulos, a no ser que se especifique lo contrario, consideraremos juegos no cooperativos, simultáneos y de información completa.

Para el estudio de juegos cooperativos destacar el libro de Guillermo Owen, *Game Theory* [1], donde se tratan los juegos cooperativos a nivel teórico e incluye aplicaciones de los conceptos a diferentes campos.

2. Introducción a los juegos en forma estratégica

Como ya hemos dicho, de ahora en adelante nos centraremos en los juegos no cooperativos en forma estratégica. Así que nuestros jugadores elegirán sus opciones independientemente y de forma simultánea y obtendremos los resultados en función de los diferentes perfiles de estrategias. Consideramos que:

- N= {1,...,n} es el conjunto de jugadores, supondremos que es un conjunto finito.

Para todo $i \in N$,

- S_i denota el conjunto de estrategias del jugador i.
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ es el conjunto de los diferentes perfiles de estrategias. Así que todo $s \in S$ es un perfil de estrategias $s = (s_1, ..., s_n)$, donde s_i es una estrategia del jugador i.
- $u_i : S \longmapsto \mathbb{R}$ denota la función utilidad del jugador i, o equivalentemente $u_i(s)$ es el pago que obtiene el jugador i para un conjunto de estrategias $s \in S$.
- u=$(u_1, ..., u_n)$ es el vector formado por las diferentes funciones de utilidad .

Definición 2.1. *Un **juego en forma estratégica** es una terna (N,S,u)*

También se puede definir a este tipo de juegos como una 2n-tupla $(S_1, ..., S_n, u_1, ..., u_n)$ con un conjunto de jugadores N={1,...,n}. En definitiva, un juego en forma estratégica G, es un conjunto de jugadores N donde para cualquier $i \in N$, hay un jugador i con un conjunto de estrategias S_i y una función utilidad u_i. En numerosas ocasiones llamaremos juego a un juego en forma estratégica.

En los juegos en forma estratégica el objetivo de cada jugador es hacer una jugada que maximice su resultado, es decir, elegir una estrategia que maximice su utilidad. En esta elección puede ser que favorezca a los otros jugadores o puede ser que los perjudique. Por ejemplo en los **juegos de suma nula** siempre se va a perjudicar a los otros jugadores, puesto que este tipo de juegos se caracterizan porque los aumentos de la utilidad de un jugador se equilibran con que la utilidad de otro jugador disminuya, así las utilidades de todos los jugadores siempre suman cero.

2.1. Juegos Bipersonales

Para tener una mayor comprensión de todas las definiciones, teoremas y conceptos, todo lo que estudiemos y analicemos lo veremos también concretamente en un tipo de juegos en forma estratégica, los bipersonales finitos. En todos los capítulos relacionados con los juegos bipersonales me he basado sobretodo en el libro *Teoría de Juegos* [4] y en todos los conceptos adquiridos al cursar la asignatura de Teoría de Juegos.

Definición 2.2. *Un **juego finito** es un juego G=(N,S,u) donde cada conjunto S_i es finito, es decir, donde los agentes tienen conjuntos de estrategias finitos.*

Observamos que tenemos $\mid S_i \mid = n_i$, donde $n_i \in \mathbb{N}$.

Definición 2.3. *Siendo G=(N,S,u) un juego, decimos que es un* ***juego bipersonal*** *cuando N={1,2}.*

Tenemos que en los juegos bipersonales finitos podemos enumerar las estrategias y representarlos mediante una bimatriz (A,B), una matriz con doble entrada numérica, donde A corresponede a los pagos del jugador 1 y B a los pagos del jugador 2, o equivalentemente mediante una tabla:

J1|J2	B_1	B_2	...	B_n
A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1n}, b_{1n})
A_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2n}, b_{2n})
...	...	...	...	...
A_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Denotamos con J1 al jugador 1 y por J2 al jugador 2, los cuales disponen de conjuntos de estrategia $S_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ y $S_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ respectivamente, donde $n, m \in \mathbb{N}$ no son necesariamente iguales. $S = S_1 \times S_2$ es el conjunto de perfiles de estrategias, así cualquier $(A_i, B_j) \in S$ es un perfil de estrategias con pagos $u_1(A_i, B_j) = a_{ij}$ para J1 y $u_2(A_i, B_j) = b_{ij}$ para J2. Observamos que cada casilla (a_{ij}, b_{ij}) representa el resultado del juego si J1 juega su estrategia A_i y J2 juega su estrategia B_j.

2.2. Ejemplos

A lo largo del trabajo veremos diferentes ejemplos algunos de ellos o sus resoluciones no están sacados de ningún libro sino que son la aplicación de los conocimientos, mientras que otros más clásicos si que son ejemplos extraídos de libros teóricos debido a su relevancia.

- El primer ejemplo que veremos es un ejemplo muy famoso, tan famoso que hay gente que escucha hablar de la Teoría de Juegos a causa de él. Es el **Dilema del Prisionero** y ha sido aplicado en sociología, economía y en un gran número de ámbitos teóricos. La presencia de este ejemplo se encuentra prácticamente en cualquier libro que hable sobre Teoría de Juegos, pero debido a su importancia encontramos libros como *Prisoner's Dilemma* [9] de William Poundstone dedicados específicamente a este ejemplo, donde tratan su relevancia en la Teoría de Juegos y su repercusión en otros ámbitos.

  Suponemos que tenemos dos jugadores J1 y J2, culpables de cometer un crimen, pero la policía no tiene pruebas para demostrarlo, con lo que necesita que alguno de los dos confiese. Así que les ofrece el mismo trato a cada uno de ellos, el cual consiste en lo siguiente: Si confiesas pero tu compañero no lo hace, no tienes ninguna pena, en cambio si tu compañero también confiesa, los dos tendréis una pena de cárcel, sin embargo, no será la más larga que puedes tener. Porque si no confiesas y tu compañero si lo hace, se te condenará con la condena más larga. Finalmente si ninguno de los dos confesáis tendréis pena de prisión por evasión fiscal (inferior a las otras condenas). Para poder analizar este problema de decisión hay que asignar pagos a las diferentes estrategias. Contamos con que cada jugador tiene dos estrategias, C (confesar) y NC (no confesar), así que S_i={C,NC} para $i \in$ {1,2}.

  Ahora asignaremos una utilidad a cada uno de nuestros jugadores para los posibles perfiles de estrategias, un valor numérico siguiendo el trato que les ha ofrecido el policía y teniendo en cuenta que ninguno de los dos criminales quiere ir a la cárcel y en caso de ir prefieren un condena menor que una más larga. Con lo que si un jugador confiesa y el otro no, al que confiesa le asignaremos un pago de 0 y al que no confiesa un pago de -5, representando la pena máxima. Si los dos confiesan, le asignaremos a cada uno un pago de -4, puesto que tienen pena pero no la máxima. Finalmente, si ninguno confiesa, cada uno obtendrá un pago de -1, representando la pena por evasión fiscal. Así que tenemos $u_1(C,NC) = 0$, $u_1(C,C) = -4$, $u_1(NC,C) = -5$ y $u_1(NC,NC) = -1$ los pagos de J1 y para J2 solo varían los pagos de los perfiles de estrategias (C,NC) y (NC,C) con $u_2(C,NC) = -5$ y $u_2(NC,C) = 0$.

Es importante tener en cuenta que en este tipo de juegos no es relevante el número que le demos a cada utilidad, sino la relación que hay entre las utilidades, es decir, si asignamos pagos cumpliendo con, $u_1(C,NC) = u_2(NC,C) > u_1(NC,NC) = u_2(NC,NC) > u_1(C,C) = u_2(C,C) > u_1(NC,C) = u_2(C,NC)$ obtenemos el mismo análisis del juego pero con otros pagos.

Podemos representar nuestro juego mediante,

J1|J2	C	NC
C	(-4,-4)	(0,-5)
NC	(-5,0)	(-1,-1)

Observando los pagos parece que si los dos jugadores juegan a NC obtienen unos pagos razonables (-1,-1), sin embargo, si analizamos el problema y consideremos a los jugadores racionales vemos que no es lo que se deduce que harán. Si suponemos que J1 confiesa, es decir, elige jugar la estrategia C, J2 sale mejor parado si juega también C puesto que evidentemente prefiere tener una pena más corta que no la condena más larga. Y si suponemos que el J1 juega NC, J2 prefiere también jugar C para no tener cárcel, así que realmente haga lo que haga el J1, el J2 prefiere jugar C. Equivalentemente pasa con el J1. En otro capítulo veremos que esto significa que la estrategia C domina a la estrategia NC del J2 y igual para el J1.

La solución de nuestro juego es (C,C) puesto que es un equilibrio de Nash y aunque veremos más adelante este concepto, con lo que ya sabemos de este tipo de equilibrios podemos ver que (C,C) lo es. Sabemos que un equilibrio de Nash se da cuando ningún jugador tiene incentivos a cambiar de jugada si ninguno otro cambia la suya. Si J1 juega C, tenemos que $u_2(C,C) = -4$ y si J2 cambiara su jugada obtendría $u_2(C,NC) = -5$, así que J2 no tiene incentivos a cambiar su jugada puesto que se le alargaría la pena. De la misma manera $u_1(C,C) = -4$ y $u_1(NC,C) = -5$, con lo que J1 tampoco tiene incentivos para cambiarla.

La solución de este juego es lo que le hizo tan famoso puesto que, si los dos presos actúan racionalmente obtienen una pena mayor que si ninguno de los dos confiesa hecho que interesó a un gran número de economistas y sociólogos entre otros.

- Ahora vamos a ver el primer problema de decisión que se analizó, se trata de los **juegos de suma nula**, fueron analizados profundamente por matemáticos como von Neumann y Morgenstern en *Theory of Games and Economic Behavior* [5], libro que permitió el desarrollo de la Teoría de Juegos. Posteriormente fue Nash el que generalizó la solución para cualquier tipo de juegos. Son aquellos juegos donde la suma de las utilidades de los jugadores es nula. Aunque existen juegos de suma cero con n jugadores, normalmente cuando nos referimos a ellos se tienen dos jugadores (son un tipo de juego bipersonal), puesto que con dos jugadores se tiene,

$$u_1(A_i, B_j) + u_2(A_i, B_j) = 0 \Rightarrow a_{ij} = -b_{ij},$$

lo que refleja un problema de decisión con un conflicto donde siempre que gana un jugador el otro pierde, es decir, refleja un juego antagónico. Una generalización de este tipo de problemas son los de suma constante, son el tipo de problema donde la suma de los resultados da un valor c (constante), con lo que el analisis es igual a los de suma nula, puesto que veremos que no variaran nuestras soluciones si restamos a cada pago de cada jugador $c/2$.

- A continuación vamos a ver otro ejemplo de juego en forma estratégica, **Subasta al primer precio**. En la Teoría de Juegos encontramos libros dedicados a estudiar y hablar de toda la teoría de subastas. Una subasta es un tipo de mecanismo utilizado para la venta de objetos, el cual depende de las pujas que hacen un número finito de jugadores (compradores). En este trabajo hablaremos únicamente de subastas donde se vende un único objeto, a primer precio y a sobre cerrado, sin embargo podemos encontrar libros como *Auctions: Theory and Practice* [10] de Paul Klempere dedicados a estudiar toda la teoría de subastas. Destacamos a William Vickrey como el primer economísta en utilizar la Teoría de Juegos en las subastas, iniciando así toda la teoría de subastas.

  En este caso no consideraremos un juego bipersonal, sino que contamos con n jugadores, N={1,...,n}. El problema de decisión consiste en lo siguiente:

  - Se subasta un objeto.
  - Cada jugador $i \in N$ hace una valoración del objeto que denotaremos por v_i.
  - Suponemos que $v_1 > ... > v_n > 0$.
  - Cada jugador $i \in N$ puja independientemente y simultáneamente al resto de jugadores un valor p_i.
  - Se lleva el objeto aquel jugador que haya pujado más alto, pagando por el objeto su puja.
  - En caso de que la puja ganadora no sea única, es decir, que haya empate, se llevara el objeto aquel que haya hecho una valoración más alta.
  - Los jugadores conocen las reglas del juego y las valoraciones de los otros jugadores.

  Primero de todo destacar que tenemos $v_1 > ... > v_n > 0$, así que por ejemplo si para $i, j \in N$ diferentes, $p_i = p_j$, se lleva el objeto el jugador i si $i < j$ y se lo lleva el jugador j si $i > j$.

  Ahora vamos a representar nuestro problema de decisión en forma estratégica, tenemos que cada jugador cuenta con un conjunto de estrategias, $S_i = [0, \infty)$ puesto que es el conjunto donde puede elegir su puja (no tiene sentido pujar negativo), $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ es el conjunto de perfiles de estrategias y $p = (p_1, ..., p_n)$ es un perfil de estrategias, con p_i la puja del jugador i ($i \in N$), así que la utilidad para el jugador i y un perfil de estrategias $p \in S$ es,

$$u_i(p) = v_i - p_i \tag{2.1}$$

si $ind(p)$=mín$\{j \in N; p_j = max_{s\in N}(p_s)\} = i$, y es nula en caso contrario.

Consideramos que solo recibe un pago no nulo el que gana la puja, puesto que el resto ni paga nada ni se lleva nada. El pago que recibe el ganador es $v_i - p_i$, puesto que paga por el producto p_i pero él considera que tiene un valor de v_i.

Observamos que la selección del ganador va conforme con nuestro juego:

1. Si p_i es la puja más alta y no hay otra que la iguale $\Rightarrow i(p) = i$.

2. Si hay empate de mayores pujadores, entre los empatados ($p_j = max_{s\in N}(p_s)$) seleccionamos el menor $i \in N$ puesto que será el que tenga mayor valoración y con lo cual el que se lleve el objeto.

De esta manera en el próximo capítulo podremos analizar qué cantidad le convienen pujar a nuestros jugadores, teniendo en cuenta el sistema de selección del ganador y que quieren maximizar su utilidad.

3. Equilibrio de Nash

A continuación veremos la solución más importante para los juegos en forma estratégica. Un nombre que ya ha salido en los anteriores capítulos y que saldrá en los siguientes debido a que es una pieza fundamental en la Teoría de Juegos, es el equilibrio de Nash, concepto que fue primeramente tratado en juegos de suma nula por Von Neumann y por Oskar Morgenstern en *Theory of Games and Economic Behavior* [5], pero fue John F. Nash quien en su tesis doctoral *Non-cooperative Games* [7], formuló el concepto y quien demostró su existencia en juegos finitos mediante las estrategias mixtas, concepto que veremos en el próximo capítulo.

Como ya sabemos, se trata de una solución del juego donde ningún jugador puede aumentar sus pagos si las estrategias de los otros jugadores permanecen constantes, es decir, un equilibrio de Nash se da cuando ningún jugador tiene incentivos unilaterales a cambiar de estrategia . Primero de todo veremos este concepto, continuaremos viendo su existencia bajo ciertas hipótesis, que en el siguiente capítulo reduciremos y finalmente trataremos este concepto en juegos bipersonales. Durante el capítulo veremos algunos ejemplos de juegos donde buscaremos esta solución.

Definición 3.1. *Sea G=(N,S,u) un juego en forma estratégica. Decimos que un perfil de estrategias* $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ *es un* ***equilibrio de Nash*** *(EN) si,* $\forall \hat{s_i} \in S_i$ *y* $\forall i \in N$ *cumple*

$$u_i(s) \geq u_i(s_{-i}, \hat{s_i}) \tag{3.1}$$

donde $(s_{-i}, \hat{s_i}) = (s_1, ..., s_{i-1}, \hat{s_i}, s_{i+1}, ..., s_n)$.

Es decir, $(s_{-i}, \hat{s_i})$ es el perfil de estrategias s con la estrategia s_i cambiada por la estrategia $\hat{s_i}$ y puesto que $\hat{s_i}$ es una estrategia del jugador i, implica que $u_i(s_{-i}, \hat{s_i})$ esta bien definida. Destacar también que s_{-i} denota $(s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) \in S_{-i}$.

Observemos que la definición concuerda con el concepto que hemos visto en los anteriores capítulos. El equilibrio de Nash se da cuando ningún jugador tiene incentivos unilaterales a cambiar de jugada, con lo que mediante (3.1) comprobamos que efectivamente cuando hay un EN cambiando solo la estrategia del jugador i y dejando las otras constantes no se aumenta su utilidad y esto pasa para todos los $i \in N$, es decir, para todos los jugadores. Con lo que efectivamente concuerda con el concepto que hemos visto.

Importante destacar que no tiene porque ser único, puede ser que haya más de uno y con lo cual más de una posible solución del juego e incluso en las estrategias que conocemos hasta ahora (estrategias puras) puede no haber ninguno.

La importancia de este equilibrio, y por lo que lo consideramos una solución, viene por las hipótesis de este tipo de juegos. Puesto que nuestros jugadores son racionales y saben que los otros también lo son, el equilibrio de Nash permite dar una solución donde todos los jugadores “ganan” según las opciones que tienen, aunque algunos jugadores no jueguen la estrategia que más pagos les da o incluso puede ser que ningún jugador lo haga, juegan aquella con la que dentro de las opciones que tienen más les va a beneficiar.

Definición 3.2. *Considerando G=(N,S,u) un juego en forma estratégica definimos el* ***conjunto de mejores respuestas*** *de i a* s_{-i} *como el conjunto,*

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i;\ u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, \hat{s_i},), \forall \hat{s_i} \in S_i\}.$$

Observación: Un perfil de estrategias $(s_1, ...s_n)$ es un EN $\Leftrightarrow s_i \in B_i(s_{-i}), \forall i \in N$. Es inmediato verlo por las definiciones de EN y de los conjuntos mejores respuestas.

Observación: Si $S_i = [x_i, y_i]$ para todo $i \in N$, es decir, el conjunto de estrategias de cada jugador es un intervalo cerrado, podemos decir que el perfil de estrategias $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es un EN si para todo $i \in N$ se tiene,

$$u_i(s) = max_{\hat{s_i} \in S_i} u_i(s_{-i}, \hat{s_i}). \tag{3.2}$$

Si se cumple (3.2) para cada $i \in N$, s es un EN, puesto que para cada jugador i, s_i es la estrategia que más utilidad le da teniendo en cuenta que sus oponentes mantienen sus estrategias, con lo que ningún jugador tendrá incentivos a cambiar de estrategia.

En este trabajo no explicaremos ni demostraremos toda la teoría de analisis matemático, podemos encontrar toda esta teoría en el libro de Walter Rudin, *Principios de Análisis Matemático* [8]. Otro libro interesante es el libro de Tom M. Apostol, *Análisis Matemático* [11] puesto que trata detalladamente todos los temas relacionados con el análisis matemático, donde se estudian detalladamente las funciones y los conjuntos. En ambos libros encontramos la demostración de que para funciones con dominio un intervalo cerrado, podemos definir la función máximo y está bien definida, hecho que nos permite obtener la observación anterior. En el ejemplo que explicaremos a continuación utilizaremos,

- Una función $f(x)$ es cóncava respecto x, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0$.
- Una función $f(x)$ cóncava y diferenciable definida en un conjunto compacto, acotado y cerrado tiene un máximo en el conjunto que cumple $f'(c) = 0$.
- Denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x}$ la derivada de f en funció de x y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la segunda derivada de f en funció de x

Ejemplo 1: Supongamos que tenemos un juego en el que participan dos agentes que quieren llevar a cabo una campaña publicitaria, ambos pueden invertir máximo 100 euros, y sus utilidades vienen dadas por las funciones,

$$u_1(s_1, s_2) = (60 + s_2) \cdot s_1 - 2 \cdot s_1^2$$

y

$$u_2(s_1, s_2) = (105 + s_1) \cdot s_2 - 2 \cdot s_2^2,$$

donde $s_1 \in S_1 = [0, 100]$ y $s_2 \in S_2 = [0, 100]$.

Sabemos que el equilibrio de Nash ha de cumplir que $u_i(s) = max_{\hat{s_i} \in S_i} u_i(s_{-i}, \hat{s_i})$ para $i \in \{1, 2\}$. Empezaremos por el primer jugador, supongamos que el J2 a jugado $\hat{s_2}$ y queremos saber cuánto dinero ha de invertir J1 para maximizar sus ganancias, con lo que queremos encontrar el $\hat{s_1}$ que maximice $u_1(s_1, \hat{s_2}) = (60 + \hat{s_2}) \cdot s_1 - 2 \cdot s_1^2$. Observamos $u_1(s_1, \hat{s_2})$ és una función que depende de una única variable s_1 y es diferenciable, , si vemos que es una función cóncava, podremos calcular su máximo a partir de su derivada. Tenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1} = 60 + \hat{s_2} - 4 \cdot s_1$$

y

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial s_1^2} = -4 < 0,$$

es decir, u_1 es una función cóncava. Con lo que las estrategias que le otorga beneficios máximos a J1 en función de $\hat{s_2}$ han de cumplir

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1} = 0$$

con lo que,

$$B_1(\hat{s_2}) = \frac{60 + \hat{s_2}}{4}.$$

De la misma manera fijando $\hat{s_1}$, tenemos que $u_2(\hat{s_1}, s_2) = (105 + s_1) \cdot s_2 - 2 \cdot s_2^2$ es una función que depende de s_2 únicamente y es diferenciable. Como

$$\frac{\partial u_2}{\partial s_2} = 105 + \hat{s_1} - 4 \cdot s_2$$

y

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial s_2^2} = -4 < 0,$$

és una función cóncava, así tenemos

$$B_2(\hat{s_1}) = \frac{105 + s_1}{4}.$$

Sabemos que un equilibrio de Nash, es un perfil de estrategias (s_1, s_2) si $s_1 \in B_1(s_2)$ y $s_2 \in B_2(s_1)$. Así un equilibrio de Nash será una solución del sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{60+s_2}{4} & = & s_1 \\ \\ \frac{105+s_1}{4} & = & s_2 \end{array}\right\}$$

Así que $(\hat{s_1}, \hat{s_2}) = (23, 32)$ es un equilibrio de Nash de nuestro juego con pagos de 1058 para J1 y de 2048 para el J2.

Observación: Acabamos de ver una manera de calcular equilibrios de Nash en juegos donde dispongamos de funciones de utilidad diferenciables y cóncavas y nuestros jugadores tengan conjuntos de estrategias $S_i = [a, b]$: Supongamos que disponemos de un juego con dos jugadores, $S_1 = [a, b], S_2 = [c, d]$ y con funciones de utilidad $u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)$ diferenciables y cóncavas respecto a s_1 y s_2 respectivamente. Podemos determinar los EN $(\hat{s_1}, \hat{s_2}) \in S_1 \times S_2$ mediante:

1. $\frac{\partial u_1}{\partial s_1} = 0$ y despejando s_1 obtenemos el conjunto $B_1(s_2)$.
2. $\frac{\partial u_2}{\partial s_2} = 0$ y despejando s_2 obtenemos el conjunto $B_2(s_1)$.
3. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por los conjuntos mejores respuestas de J1 y J2 obtenemos la solución del juego.

Con más de dos jugadores sería equivalente pero llevando a cabo las derivadas parciales de cada función utilidad (fijando las estrategias de los otros jugadores), y el sistema constaría de tantas ecuaciones como jugadores. Aún no podemos asegurar la existencia de una solución, antes necesitamos ver el Teorema de Nash.

Ejemplo 2: Recogiendo el ejemplo del apartado anterior, **Subasta al primer precio** observamos que los EN son los perfiles de estrategias $p = (p_1, ..., p_n) \in S = [0, \infty)^n$ tal que $p_1 \in [v_2, v_1]$, $p_j \leq p_1$ para $\forall j \in N \setminus \{1\}$ y con $p_j = p_1$ para algún $j \in N \setminus \{1\}$. Con lo que siempre gana la subasta el primer jugador, es decir, el que ha hecho la valoración más alta.

Primero vamos a ver que ningún jugador $j \in \{2, ..., n\}$ tiene incentivos unilaterales a cambiar su estrategia, sabemos que $p_j < p_1$ o bien $pj = p_1$. Primero suponemos que

$p_j < p_1$ con lo que obtiene pago nulo puesto que no se lleva el objeto ni tiene que pagar nada. Si cambia su estrategia por $\hat{p_j} \in S_j$ y $\hat{p_j} < p_j$, obtiene los mismos pagos con lo cual no tiene incentivos a cambiar, si la cambia por $p_j < \hat{p_j} < p_1$, sigue obteniendo los mismos pagos, si la cambia por $\hat{p_j} = p_1$, puesto que $v_1 > v_j$ se lleva el objeto el jugador 1, así que sigue teniendo pagos nulos y finalmente si la cambia por $\hat{p_j} > p_1$, obtiene una utilidad $u_j(p_{-j}, \hat{p_j}) = v_j - \hat{p_j}$, que es un número negativo (puesto que $p_1 \in [v_2, v_1]$ y con lo cual $v_j \leq v_2 \leq p_1 < \hat{p_j}$), con lo que en ningún caso tiene incentivos para cambiar. Si suponemos ahora que $p_j = p_1$, el jugador j obtiene pagos nulos y para todo $\hat{p_j} \in S_j$ nos remontamos a alguno de los casos anteriores y con lo cual tampoco tiene incentivos unilaterales a cambiar su estrategia.

Finalmente vamos a ver que el jugador 1 no tiene incentivos a cambiar su puja si el resto no lo hacen. Sabemos que $p_1 \in [v_2, v_1]$, consideramos que cambia su estrategia por $\hat{p_1} \in S_1$, si $\hat{p_1} > v_1$ se lleva el objeto pero obtiene una utilidad negativa y si la cambia por $\hat{p_1} < v_2$, lo que implica $\hat{p_1} < p_1$ y como sabemos que para algún $j \in N \setminus \{1\}$, $p_j = p_1$ entonces se llevaría el objeto el jugador j, con lo que el jugador 1 obtendría una utilidad nula, que es una utilidad menor o igual a la que obtenía antes, así que tampoco tiene incentivos unilaterales a cambiar de estrategia. Así que los $p = (p_1, ..., p_n)$ definidos son los EN de la subasta al primer precio.

3.1. Teorema de Nash

A continuación vamos a ver las condiciones para asegurar la existencia de equilibrios de Nash en un juego en forma estratégica. Pero previamente necesitamos ver unas definiciones además del Teorema del punto fijo de Kakutani, una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer, teorema que utilizaremos para demostrar el Teorema de Nash. Nos basaremos en el libro *Introducción a la Teoría de Juegos* [2].

Definición 3.3. *Una **correspondencia** F **de** X **en** Y, es una aplicación $F : X \longmapsto 2^Y$, donde $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^n$, tal que para cualquier $p \in X, F(p) \subseteq Y$.*

Es decir, es una aplicación de X en la clase de los subconjuntos de Y.

Definición 3.4. *Siendo F una correspondencia de X en Y,*

- *F es **semicontinua superiormente** si para toda $\{p^k\} \subset X$ sucesión que converge a $p \in X$ y $\forall A \subset Y$ abierto tal que $F(p) \subset A \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0, F(p^k) \subset A$.*
- *F es **no vacía** si $F(p) \subset Y$ es un conjunto no vacío para todo $p \in X$.*
- *F es **cerrada** si $F(p) \subset Y$ es un conjunto cerrado para todo $p \in X$.*
- *F es **convexa** si $F(p) \subset Y$ es un conjunto convexo para todo $p \in X$.*

Definición 3.5. *Una aplicación $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}^m$ es **cuasi-cóncava** si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{p \in X; f(p) \geq \epsilon\}$ es convexo.*

Teorema 3.6. ***(Teorema del punto fijo de Kakutani)**: Siendo $X \subset \mathbb{R}^n$, subconjunto no vacío, convexo y compacto, si $F : X \longmapsto 2^X$ es una correspondencia no vacía, cerrada, convexa y semicontinua superiormente $\Rightarrow F$ tiene al menos un punto fijo ($\exists x \in X$ tal que $x \in F(x)$) .*

Demostración. No haremos la demostración de este teorema puesto que se sale de nuestro temario pero la podemos encontrar en el libro *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory* de Kim C. Border [6]. □

Con estas definiciones y este Teorema veremos que en un juego G=(N,S,u) considerando la correspondencia F de S en S con $F(s) = \prod_{i \in N} (B_i(s_{-i}))$, los EN del juego G coinciden con los puntos fijos de la correspondencia F, con lo que podremos asegurar la existencia de equilibrios de Nash si demostramos que F cumple las hipótesis del Teorema del punto fijo de Kakutani.

Vistos estos conceptos ya podemos enunciar y demostrar el Teorema de Nash.

Teorema 3.7. ***(Teorema de Nash)****: Sea G=(N,S,u) un juego en forma estratégica, donde para cualquier $i \in N$ se cumple:*

1. *S_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$, diferente al nulo, convexo y compacto.*
2. *u_i es una función continua*
3. *Para todo $\hat{s_{-i}}$, la función de s_i, $u_i(\hat{s_{-i}}, s_i)$ es cuasi-cóncava en S_i.*

$\Rightarrow$ G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Consideramos la correspondencia $F : S \longmapsto 2^S$ con

$$F(s) = \prod_{i \in N} (B_i(s_{-i}))$$

donde $B_i(s_{-i})$ es el conjunto mejores respuestas del jugador i a s_{-i}.

1. Primero vamos a demostrar que si F cumple las hipótesis del Teorema del punto fijo de Kakutani entonces nuestro juego tiene un Equilibrio de Nash: Si F cumple las hipótesis del Teorema del punto fijo de Kakutani entonces F tiene un punto fijo, es decir $\exists s \in S$ tal que $s \in F(s)$ lo que implica que hay un perfil de estrategias donde para todo $i \in N$, $s_i \in B_i(s_{-i})$ es decir que $u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, \hat{s}_i,)$, $\forall \hat{s}_i \in S_i$ con lo que tenemos que s es un equilibrio de Nash.

2. Vamos a demostrar que F cumple las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani: Primero de todo por la primera condición del teorema tenemos que los S_i son subconjuntos de $\mathbb{R}^{m_i}$, no vacíos, convexos y compactos. Ahora nos queda ver que la correspondencia F también cumple las hipótesis, es decir, que para cualquier $i \in N$, B_i es no vacía, cerrada, convexa y semicontinua superiormente, donde B_i denota la función que asigna a cada $s_{-i} \in S_{-i}$ el conjunto mejores respuestas del jugador i a s_{-i}, es decir la B_i es la correspondencia de S_{-i} en S_i.

   - B_i no vacía: por la primera hipótesis, los S_i son compactos $\Rightarrow$ los S_{-i} también lo son $\Rightarrow$ B_i es una correspondencia definida en un compacto $\Rightarrow$ alcanza su máximo $\Rightarrow$ es no vacía.
   - B_i cerrada: por la primera condición los conjuntos de estrategia son compactos y por la segunda las funciones de utilidad son continuas $\Rightarrow$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, $B_i(s_{-i}) \subset S_i$ es cerrado $\Rightarrow$ B_i es cerrada.

- B_i convexa: definiendo $\epsilon = u_i(s_{-i}, \hat{s_i})$ para cualquier $s_{-i} \in S_{-i}$ y $\hat{s_i} \in S_i$, tenemos que $B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i; u_i(s_{-i}, s_i) \geq \epsilon\} \Rightarrow$ siendo $u_i(s_{-i}, s_i)$ cuasicóncava por la tercera condición, tenemos que $B_i(s_{-i})$ es convexo para $\forall s_{-i} \in S_{-i} \Rightarrow B_i$ es convexa.
- B_i semicontinua superiormente: Supongamos que B_i no es semicontinua superiormente, es decir, que $\exists\{s_{-i}^k\} \subset S_{-i}$ sucesión y $A \subset S_i$ conjunto abierto, tal que la sucesión converge a $s_{-i} \in S_{-i}$ y $B_i(s_{-i}) \subset A$ y que cumple que para $\forall k_0 \in \mathbb{N}\ \exists k \geq k_0$ con $B_i(s_{-i}^k)$ no perteneciente al conjunto A $\Rightarrow \exists\{\hat{s}_i^n\}$ sucesión de S_i tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\hat{s}_i^n \in B_i(s_{-i}^n) \diagdown A$. Utilizando la compacidad de los conjuntos de estrategias por la primera condición de nuestro teorema tenemos que $\{\hat{s}_i^n\}$ tiene una sucesión convergente $\Rightarrow$ siendo $\{\hat{s}_i^n\}$ una sucesión convergente a $\hat{s}_i \in S_i$, tenemos que $\hat{s}_i \in S_i \diagdown$ A, puesto que es un conjunto cerrado (por hipótesis A es abierto) $\Rightarrow \hat{s}_i \notin B_i(s_{-i})$ ya que este pertenece a A. Por otra parte tenemos que $\hat{s}_i^n \in B_i(s_{-i}^n)$ y por definición de B_i implica que $u_i(s_{-i}^n, \hat{s}_i^n) \geq u_i(s_{-i}^n, s_i)$ para $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall s_i \in S_i \Rightarrow$ siendo las funciones de utilidad continuas por la tercera condición tenemos que los límites de la sucesión cumplen $u_i(s_{-i}, \hat{s}_i) \geq u_i(s_{-i}, s_i)\ \forall s_i \in S_i \Rightarrow \hat{s}_i \in B_i(s_{-i})$ pero hemos visto que $\hat{s}_i \notin B_i(s_{-i}) \Rightarrow$ hemos llegado a una contradición con lo que B_i es semicontinua superiormente.

  Hemos visto que F satisface las hipótesis del Teorema de Kakutani y con lo cual tiene un punto fijo, o equivalentemente, nuestro juego tiene un equilibrio de Nash.

$\square$

Observamos que estas hipótesis excluyen a un gran número de juegos, como los juegos finitos, puesto que los conjuntos S_i no son convexos. Así que de momento no podemos asegurar la existencia de equilibrios de Nash en juegos finitos. Sin embargo, en el próximo capítulo veremos la extensión mixta de los juegos y nos permitirá asegurar la existencia de equilibrios de Nash en juegos finitos puesto que aumentaremos las posibilidades estratégicas de nuestros jugadores.

Observación: Volviendo al **Ejemplo 1** del apartado anterior destacar que para un juego (N, S, u) donde $\forall i \in N$ se cumple,

- $S_i = [a, b]$,
- u_i es contínua, diferenciable y cóncava respecto la variable i-ésima,

existe al menos un equilibrio de Nash por el Teorema de Nash y además hemos visto como calcularlo mediante las derivadas parciales. Esto se debe a que un conjunto compacto, acotado y cerrado de $\mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}$, podemos encontrar esta demostración en el libro *Análisis matemático* de Tom M. Apostol [11] concretamente en los capítulos dedicados a conjuntos (capítulos 2 y 3). Así que un juego con estas características cumple las las hipótesis del Teorema de Nash.

3.2. Equilibrio de Nash en juegos bipersonales

Ahora consideraremos un juego bimatricial (A,B). Durante este apartado veremos que el concepto de EN en este tipo de juegos es un caso particular de la Definición 3.1. Además en este tipo de juegos mediante la tabla con la que podemos representarlos veremos como obtener EN (en caso de haberlos), porque puesto que vamos a considerar juegos bipersonales finitos el Teorema de Nash no nos asegura su existencia. En este tipo de juegos (igual que en el resto de juegos finitos) sin aumentar las posibilidades estratégicas de nuestros jugadores nos encontramos con infinitos juegos sin equilibrios de Nash.

Consideramos un juego bipersonal (N,S,u) finito,

Definición 3.8. *Diremos que un perfil de estrategias* $(A_{\hat{i}}, B_{\hat{j}}) \in S$ *es un equilibrio de Nash si:*

$$a_{\hat{i},\hat{j}} \geq a_{i,\hat{j}} \tag{3.3}$$

para todo $i \in \{1, ..., m\}$ *(J1 no tiene incentivos unilaterales para cambiar de estrategia) y*

$$b_{\hat{i},\hat{j}} \geq b_{\hat{i},j} \tag{3.4}$$

para todo $j \in \{1, ..., n\}$ *(J2 no tiene incentivos unilaterales a cambiar de estrategia).*

Mediante la tabla,

J1|J2	B_1	B_2	...	B_n
A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1n}, b_{1n})
A_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2n}, b_{2n})
...	...	...	...	...
A_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	...	(a_{mn}, b_{mn})

observamos que (A_i, B_j) con pagos (a_{ij}, b_{ij}) es un EN, si a_{ij} es un máximo (no necesariamente estricto) de la columna B_j mirando únicamente los pagos de J1 (puesto que supone, $a_{ij} \geq a_{kj}, \forall k \in \{1, ..., m\}$) y al mismo tiempo b_{ij} es un máximo (no necesariamente estricto) de la fila A_i mirando los pagos de J2 (puesto que implica, $b_{ij} \geq b_{ik}, \forall k \in \{1, ..., n\}$).

Habiendo observado esto podemos calcular con la tabla fácilmente los EN de nuestros juegos (en caso de haberlos). Primero marcamos los pagos del J1 más altos de cada columna, es decir, para cada posible estrategia de J2 marcamos los pagos máximos que puede obtener J1. De la misma manera para cada posible estrategia de J1 marcamos los pagos máximos de J2, es decir, los pagos más altos de J2 de cada fila (en caso de marcar más de un pago de J1 en una misma columna será únicamente porque hay pagos iguales y estos corresponden a los más altos e igual en el caso de más de un pago de J2 marcados en una misma fila). Así aquellas casillas en que ambos pagos estén marcados significa que ninguno de los dos tiene incentivos para cambiar de estrategia si el otro no lo hace, con lo cual, son nuestras soluciones.

Observamos también que en los juegos bimatriciales si sumamos a todos los pagos de todos los jugadores un mismo valor $k \in \mathbb{R}$ no cambia nuestra solución del juego, puesto que tendremos las mismas relaciones entre los pagos de las filas y las columnas, con lo que los EN en caso de haberlos seguirán siendo los mismos perfiles de estrategias.

Sabemos que en problemas de decisión finitos con estrategias puras se pueden dar 3 casos:

- <u>Puede haber un único EN</u>: Como en el caso del **Dilema del Prisionero**

J1|J2	C	NC
C	(-4,-4)	(0,-5)
NC	(-5,0)	(-1,-1)

Vamos a buscar nuestro EN como hemos explicado. Primero seleccionaremos los pagos que nos interesan de J1 y luego los de J2:

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,-4)	(**0**,-5)
NC	(-5,0)	(-1,-1)

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,**-4**)	(**0**,-5)
NC	(-5,**0**)	(-1,-1)

Así observamos que tenemos un único EN que es (C,C) con pagos (-4,-4).

- Puede haber más de un EN: Como por ejemplo en un juego con representación ,

J1|J2	C	D
A	(1,2)	(1,0)
B	(1,5)	(5,0)

Observamos que,

J1|J2	C	D
A	(**1**,2)	(1,0)
B	(**1**,5)	(**5**,0)

J1|J2	C	D
A	(**1**,**2**)	(1,0)
B	(**1**,**5**)	(**5**,0)

Con lo que tenemos dos soluciones (A,C) y (B,C) con pagos (1,2) y (1,5) respectivamente. Primero veamos que (A,C) es un EN, si J1 cambia a la estrategia B obtiene los mismos pagos y si J2 cambia a la estrategia D obtiene unos pagos inferiores (tenemos $a_{11} = a_{21}$ y $b_{11} < b_{12}$), así que (A,C) es un EN. De la misma manera con (B,C), si J1 cambia a A obtiene los mismo pagos y si J2 cambia a D obtiene unos pagos inferiores, así que (B,C) también es un EN.

Es importante observar que en este caso, cuando nos encontramos con más de un EN en un mismo juego, puede haber equilibrios que **dominen en pagos** a otros.

J1|J2	A	B	C
D	(1,0)	(3,5)	(6,**6**)
E	(**6**,**6**)	(**8**,2)	(3,2)
F	(4,0)	(**8**,1)	(**7**,**9**)

Con lo que tenemos dos EN, el primero (E,A) con pagos (6,6) y el segundo (F,C) con pagos (7,9), así observamos que (F,C) domina en pagos a (E,A) puesto que obtiene pagos estrictamente superiores. Así que es lógico pensar que es más probable que nuestros jugadores opten por jugar (F,C). Veremos esto de forma más detallada cuando veamos la Teoría del punto focal, y veremos que (F,C) es un punto focal.

También es importante observar que **los pagos no determinan los equilibrios**. Vemos en este ejemplo que (E,A) y (D,C) son dos perfiles de estrategias con los mismo pagos, (6,6), y sin embargo (E,A) es un equilibrio del juego y (D,C) no lo es, puesto que J1 tiene incentivos a cambiar a la estrategia F ya que $u_1(F, C) = 7 > 6 = u_1(D, C)$.

- Puede no haber ningún EN: Por ejemplo consideramos un juego bimatricial,

J1|J2	A	B	C
D	(1,0)	(3,5)	(2,4)
E	(0,0)	(8,0)	(1,1)

obtenemos que,

J1|J2	A	B	C
D	(**1**,0)	(3,5)	(**2**,4)
E	(0,0)	(**8**,0)	(1,1)

J1|J2	A	B	C
D	(**1**,0)	(3,**5**)	(**2**,4)
E	(0,0)	(**8**,0)	(1,**1**)

Así que en este ejemplo no tenemos ningún equilibrio de Nash en estrategias puras. Siempre que un jugador juega una estrategia con la que no tendría incentivos unilaterales para cambiar el otro jugador si que los tiene. Así que, con lo que hemos visto hasta ahora este juego no tendría solución.

Observación: Hemos visto varias propiedades de los equilibrios de Nash en estrategias puras:

1. Existen situaciones con un único EN, con ninguno y con multiplicidad de equilibrios.
2. Los pagos no determinan los EN.
3. Existen equilibrios que dominan en pagos a otros.

Juegos de suma nula

Antes de finalizar este capítulo vamos a estudiar los EN en juegos de suma cero, cuando nos refiramos a juegos de suma nula, nos referimos a juegos bipersonales de suma nula o constante. Primero recordemos que se trata de aquellos juegos con $u_1(A_i, B_j) + u_2(A_i, B_j) = 0$, así los pagos de nuestros jugadores siempre son $(a_{ij}, -a_{ij})$. Tenemos la representación,

J1|J2	B_1	...	B_n
A_1	$(a_{11}, -a_{11})$	...	$(a_{1n}, -a_{1n})$
...	...	...	...
A_m	$(a_{m1},-a_{m1})$	...	$(a_{mn},-a_{mn})$

Tenemos dos propiedades importantes de los EN de este tipo de juegos:

- Todos los equilibrios de Nash tienen los mismos pagos.
- Si (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son EN $\Rightarrow$ (A_1, B_2) y (A_2, B_1) también son EN. Se conoce como la **propiedad del intercambio de estrategias**.

Vamos a ver con lo que sabemos estas dos propiedades. Primero de todo supongamos que (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son EN, queremos ver que (A_2, B_1) y (A_1, B_2) son también solución y además que todos tienen los mismos pagos. Como (A_1, B_1) es un EN, J1 no tiene incentivos unilaterales a cambiar de estrategias, con lo que $a_{11} \geq a_{21}$ y como J2 tampoco los tiene $-a_{11} \geq -a_{12}$ así que $a_{12} \geq a_{11}$. Considerando ahora el EN (A_2, B_2), tenemos que $a_{22} \geq a_{12}$ y que $-a_{22} \geq -a_{21}$, así que $a_{11} \leq a_{12} \leq a_{22} \leq a_{21} \leq a_{11} \Rightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22}$. Así vemos que si suponemos que (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son EN, (A_2, B_1) y (A_1, B_2) también lo son y todos ellos tienen los mismos pagos.

4. Extensión Mixta

Hemos visto que los diferentes elementos del conjunto S_i son las estrategias del jugador i, en realidad son las estrategias puras. En este capítulo veremos un nuevo tipo de estrategias que son las estrategias mixtas donde entra en juego la probabilidad. Vamos a aumentar las posibilidades estratégicas de los agentes del juego considerando la extensión mixta de nuestro juego. En este capítulo también veremos cómo este concepto nos servirá para extender el Teorema de Nash a juegos finitos.

Consideraremos G=(N,S,u) un juego en forma estratégica finito con $|S_i| = n_i$.

Definición 4.1. *Denominamos **extensión mixta** de G al juego en forma estratégica M(G)=(N,X,U), donde para cada jugador $i \in N$ tenemos:*

- $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{S_i}; x_i(s_i) \geq 0$ *para todo* $s_i \in S_i$ *y* $\sum_{s_i \in S_i} x_i(s_i) = 1\}$,
- $U_i(x) = \sum_{s \in S} u_i(s) \cdot x(s)$, *para todo* $x \in X$,

donde $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ *y* $x(s) = (x_1(s_1), ..., x_n(s_n))$ *para cada perfil de estrategias puras* $s = (s_1, ..., s_n)$.

Observaciones:

- Tenemos que el conjunto X_i es el conjunto de estrategias mixtas del jugador i y U_i es la función utilidad del jugador i. Denotaremos por $u_i(x)$ al pago que recibe el jugador i si los jugadores juegan el perfil de estrategias mixtas x.
- El nombre de extensión mixta viene dado puesto que, por una parte $\forall s_i \in S_i$ pertenece a X_i , con lo que cualquier estrategia pura de cualquier jugador puede identificarse con una estrategia mixta, así tenemos $S_i \subset X_i$. Además también tenemos que las funciones utilidad de M(G) son extensiones de las funciones de pago del juego G.
- $x_i(s_i)$ es la probabilidad con la que el jugador i elige su estrategia $s_i \in S_i$, es decir, la probabilidad con la que el jugador i elige la estrategia pura s_i.
- Una estrategia mixta del jugador i es una distribución de probabilidad definida sobre S_i, es decir, sobre el conjunto de estrategias puras del jugador i. Así que el conjunto X_i es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i.
- Puesto que estamos en juegos finitos, siendo $|S_i| = n_i$, podemos identificar X_i también como el conjunto,

  $\{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}; \forall k \in \{1, ..., n_i\}\ x_i^k \geq 0, \sum_{1 \leq k \leq n_i} x_i^k = 1\}$.

  Como tenemos, $S_i = (s_1, ..., s_{n_i})$, si $k \in \{1, ..., n_i\}$ entonces $s_k \in S_i$, por ello denotamos x_i^k a $x_i(s_k)$.

Hemos visto que una estrategia mixta implica que los jugadores han elegido aleatoriamente una estrategia pura. Así tenemos que un juego en estrategias puras es un juego en extensión mixta con probabilidades 1 y 0, es decir, un juego con estrategias puras es un caso particular de un juego con estrategias mixtas.

Una forma de entender la extensión mixta de un juego, es entender la diferenciación con el juego en estrategias puras. Mientras hasta ahora nuestros jugadores tenían que elegir qué estrategia jugar, ahora vamos a determinar con qué probabilidad van a jugar cada estrategia. Es decir, como si consideramos el juego infinitas veces y queremos determinar con qué probabilidad se da cada estrategia (cosa que no significa que nuestros jugadores juegan infinitas veces, pueden jugar una sola vez).

4.1. Equilibrio de Nash en extensiones mixtas

Ahora veremos el concepto de Equilibrio de Nash en este tipo de juegos. Veremos que la extensión mixta de un juego finito G tiene siempre una solución. También definiremos unos nuevos conceptos que nos ayudarán a caracterizar los EN en la extensión mixta de un juego.

Proposición 4.2. *La extensión mixta de un juego finito tiene siempre, al menos un equilibrio de Nash.*

Demostración. Es un caso particular de la demostración que hizo John F. Nash en su tesis doctoral, *Non-cooperative Games* [7] donde demuestra que todo juego finito tiene un equilibrio de Nash utilizando las estrategias mixtas. □

Equivalentemente, todo juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Observación: Por una parte destacar que $u_i(x) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(x_{-i}, s_i) \cdot x_i(s_i)$. Lo que implica, que $x \in X$ es un equilibrio de Nash de M(G) si y solo si $u_i(x) \geq u_i(x_{-i}, s_i)$ $\forall s_i \in S_i$ y $\forall i \in N$. Con lo que si $s \in S$ es un equilibrio de Nash del juego G también lo es de su extensión mixta M(G). Además, obtienen los mismos pagos en el juego G como en su extensión mixta M(G).

Ahora vamos a ver otra manera de identificar Equilibrios de Nash en la extensión mixta de un juego, pero previamente necesitamos ver unas definiciones.

Definición 4.3. *Consideramos M(G)=(N,X,u) la extensión mixta de un juego finito G=(N,S,u),*

- *Denominamos* ***soporte*** *de x_i al conjunto,*

$$C(x_i) = \{s_i \in S_i; x_i(s_i) > 0\}.$$

- *Llamamos* ***soporte*** *de x al conjunto,*

$$C(x) = \{s \in S; x(s) > 0\} = \prod_{i \in N} (C(x_i)).$$

- *Definimos el* ***conjunto de mejores respuestas puras*** *del jugador i a x_{-i} como,*

$$R_i(x_{-i}) = \{s_i \in S_i; u_i(x_{-i}, s_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{s}_i), \forall \hat{s}_i \in S_i\}.$$

Denotamos $R(x) = \prod_{i \in N} (R_i(x_{-i}))$. Destacar que decimos que una estrategia mixta de un jugador i, x_i, es **completamente mixta** cuando $C(x_i) = S_i$ y que un perfil de estrategias mixtas ($x = (x_1, ..., x_n)$) es **completamente mixto** si x_i es completamente mixta para todo $i \in N$, es decir, si $C(x_i) = S_i$ para todo $i \in N$, o equivalentemente si $C(x) = S$.

Retomando la definición vista en el capítulo anterior de conjunto mejores respuestas del jugador i a s_{-i}, $B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i; u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, \hat{s_i}), \forall \hat{s_i} \in S_i\}$, para un juego en forma estrategica G=(N,S,u). Observamos que puesto que la extensión mixta de un juego en forma estratégica es también un juego en forma estratégica, siendo M(G)=(N,X,u) nuestro juego, $B_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i; u_i(x_{-i}, x_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{x_i}), \forall \hat{x_i} \in X_i\}$ es el conjunto de mejores respuestas del jugador i a x_{-i}.

Con lo que ya podemos ver diferentes formas de identificar equilibrios de Nash en nuestro juego M(G).

Sea M(G)=(N,X,u) la extensión mixta de un juego finito, $x = (x_1, .., x_n) \in X$ es un EN si y solo si $x_i \in B(x_{-i})$ para todo $i \in N$. Puesto que $x = (x_1, ..., x_n)$ es un EN si para todo $i \in N$ $u_i(x_{-i}, x_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{x_i})$ $\forall \hat{x_i} \in X_i$ por definición.

Proposición 4.4. *Siendo G un juego finito, en su extensión mixta se cumple:*

1. $x_i \in B_i(x_{-i}) \Leftrightarrow C(x_i) \subset R_i(x_{-i})$, $\forall i \in N$, *donde* x_i *es una estrategia mixta del jugador* i.

2. *Para* $x \in X$, x *es un EN de M(G)* $\Leftrightarrow C(x) \subset R(x)$.

Demostración. Tenemos que

$$u_i(x) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(x_{-i}, s_i) \cdot x_i(s_i) \tag{4.1}$$

entonces:

- Si $x_i \in B_i(x_{-i}) \Rightarrow u_i(x_{-i}, x_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{x_i})$ $\forall \hat{x_i} \in X_i$ por definición $\Rightarrow$ por (4.1) $u_i(x_{-i}, s_i) \cdot x_i(s_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{s_i}) \cdot x_i(\hat{s_i})$ para todo $\hat{s_i} \in S_i$. Entonces, si $s_i \in C(x_i) \Rightarrow x_i(s_i) > 0 \Rightarrow u_i(x_{-i}, s_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{s_i})$ $\forall \hat{s_i} \in S_i \Rightarrow s_i \in R_i(x_{-i}) \Rightarrow C(x_i) \subset R_i(x_{-i})$.

- Si $C(x_i) \subset R_i(x_{-i}) \Rightarrow$ si $x_i(s_i) > 0 \Rightarrow u_i(x_{-i}, s_i) \geq u_i(x_{-i}, \hat{s_i}) \Rightarrow$ por (4.1) y por definición de $B_i(x_{-i})$, $x_i \in B_i(x_{-i})$.

- Hemos visto que $x = (x_1, .., x_n) \in X$ es un EN si y solo si $x_i \in B(x_{-i})$ para cualquier $i \in N \Rightarrow$ por (1) de la Proposición 4.4, x es un EN $\Leftrightarrow C(x_i) \subset R_i(x_{-i})$ $\forall i \in N \Rightarrow$ por definición de $C(x)$ y de $R(x)$, x es un EN $\Leftrightarrow C(x) \subset R(x)$.

□

4.2. Extension mixta de un juego bipersonal

Ahora consideramos un juego finito G=(N,S,u) con N={1,2}. Como ya sabemos esto corresponde a un juego bipersonal, que sabemos que también lo denominamos juego bimatricial (A,B). De ahora en adelante denominaremos juego bimatricial a la extensión mixta de un juego bipersonal finito. Recordemos que consideramos $S_1 = \{A_1, ..., A_m\}$ y $S_2 = \{B_1, ..., B_n\}$ los conjuntos de estrategia de los jugadores 1 y 2 respectivamente. Con lo que tenemos,

Definición 4.5. *Siendo G=(N,S,u) un juego bipersonal finito con* $|S_1| = m$ *y* $|S_2| = n$, *denominamos* ***juego bimatricial*** *a la extensión mixta del juego G, donde*

- $X = \{x \in \mathbb{R}^m; x_i \geq 0$ *para* $\forall i \in \{1,...,m\}, \sum_{i\in\{1,...,m\}} x_i = 1\}$ *corresponde al conjunto de estrategias mixtas del jugador 1.*
- $Y = \{y \in \mathbb{R}^n; y_j \geq 0$ *para* $\forall j \in \{1,...,n\}, \sum_{j\in\{1,...,n\}} y_j = 1\}$ *corresponde al conjunto de estrategias mixtas del jugador 2.*

Denotamos $M_1 = \{1,...,m\}$ *y* $M_2 = \{1,...,n\}$

- $\forall (x,y) \in X \times Y$,
$$U_1(x,y) = \sum_{i\in M_1}\sum_{j\in M_2} u_1(A_i,B_j)\cdot x_i \cdot y_j$$
  y
$$U_2(x,y) = \sum_{i\in M_1}\sum_{j\in M_2} u_2(A_i,B_j)\cdot x_i \cdot y_j$$
  son las funciones de pago del juego bimatricial de J1 y J2 respectivamente.

Con lo que un juego bimatricial es una terna $M(G) = (N, X \times Y, U)$ con $U = (U_1, U_2)$ o equivalentemente una 4-tupla (X, Y, U_1, U_2). Denotaremos por $u_1(x,y)$ y $u_2(x,y)$, los pagos para el perfil de estrategias (x,y) en la extensión mixta del juego bipersonal.

Denotamos por x_i a $x(A_i)$ y de la misma manera y_i denota $y(B_j)$.

Observaciones:

- Destacamos que si consideramos
$$A = (u_1(A_i,B_j))_{i\in M_1, j\in M_2} = (a_{ij})_{i\in M_1, j\in M_2}$$
  y
$$B = (u_2(A_i,B_j))_{i\in M_1, j\in M_2} = (b_{ij})_{i\in M_1, j\in M_2},$$
  es decir, las matrices $m \times n$ de los pagos del J1 y J2 respectivamente. Observamos que tenemos que para todo $(x,y) \in X \times Y$, las funciones de pago del juego bimatricial son $u_1(x,y) = xAy^t$ y $u_2(x,y) = xBy^t$. Con lo que conocer (A,B) es suficiente para caracterizar nuestro juego.
- Tenemos que los conjuntos mejor respuesta son,
$$B_1(y) = \{(x \in X; u_1(x,y) \geq u_1(\hat{x},y), \forall \hat{x} \in X\}$$
  de J1 a la estrategia mixta $y \in Y$ de J2 y
$$B_2(x) = \{y \in Y; u_1(x,y) \geq u_1(x,\hat{y}), \forall \hat{y} \in Y\}$$
  de J2 a la estrategia mixta $x \in X$ de J1.
- Tenemos que (x,y) es un EN si y solo si $x \in B_1(y)$ y $y \in B_2(x)$.
- Si consideramos,
$$B_1 = \{((x,y) \in X \times Y; u_1(x,y) \geq u_1(\hat{x},y), \forall \hat{x} \in X\}$$
$$B_2 = \{(x,y) \in X \times Y; u_2(x,y) \geq u_2(x,\hat{y}), \forall \hat{y} \in Y\}$$
  tenemos que los EN corresponden a los elementos del conjunto $B_1 \cap B_2$.

Existen diversos algoritmos y muchos resultados relacionados con los EN en este tipo de juegos, destacar el algoritmo de Lemke y Howson en *Equilibrium Points of Bimatrix Games* [15].

Especialmente cuando disponemos de un juego bimatricial 2×2 resulta sencillo determinarlos. Por ejemplo, para determinar los elemento del conjunto $B_1 \cap B_2$ en un juego bimatricial con dos estrategias cada jugador bastaría representarlos gráficamente y ver los puntos de intersección.

Supongamos que tenemos un juego bipersonal con $S_1 = \{A_1, A_2\}$ y $S_2 = \{B_1, B_2\}$,

J1|J2	B_1	B_2
A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
A_2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})

entonces en nuestro juego bimatricial tenemos:

- Una estrategia mixta de J1 es un vector $(x, 1-x)$ donde $0 \leq x \leq 1$, y una estrategia mixta de J2 es un vector $(y, 1-y)$ con $0 \leq y \leq 1$. Observamos que son distribuciones de probabilidad.
- Asociando la probabilidad de x a la estrategia A_1, la de $1-x$ a la estrategia A_2, la de y a B_1 y la de $y-1$ a B_2, cosa que denotaremos mediante,

		y	$1-y$
	J1|J2	B_1	B_2
x	A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
$1-x$	A_2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})

  obtenemos que:

  1. $u_1(x, y) = a_{11} \cdot x \cdot y + a_{12} \cdot x \cdot (1-y) + a_{21} \cdot (1-x) \cdot y + a_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y)$ es la función de pago de J1,
  2. $u_2(x, y) = b_{11} \cdot x \cdot y + b_{12} \cdot x \cdot (1-y) + b_{21} \cdot (1-x) \cdot y + b_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y)$ es la función de pago de J2,

puesto que, la probabilidad de acabar en la entrada (a_{11}, b_{11}) es $x \cdot y$, la de caer en (a_{12}, b_{12}) es de $x \cdot (1-y)$, la de obtener el resultado (a_{21}, b_{21}) es de $(1-x) \cdot y$ y finalmente la de obtener pagos (a_{22}, b_{22}) es de $(1-x) \cdot (1-y)$.

Calculo de EN

Nos situamos en un juego bimatricial con dos estrategias para cada jugador. Antes de todo es importante observar que, aunque estemos en estrategias mixtas el concepto de EN es el mismo, que ningún jugador tenga incentivos unilaterales a cambiar de estrategia. Nos basaremos en este concepto para determinar los EN en este tipo de juegos. Con lo que para calcularlos debemos seguir los siguientes pasos:

A. Calcular las funciones de pago, hemos visto que son:

$$u_1(x, y) = a_{11} \cdot x \cdot y + a_{12} \cdot x \cdot (1-y) + a_{21} \cdot (1-x) \cdot y + a_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$u_2(x, y) = b_{11} \cdot x \cdot y + b_{12} \cdot x \cdot (1-y) + b_{21} \cdot (1-x) \cdot y + b_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-y).$$

B. Simplificar $u_1(x, y)$ y manipularla para poder sacar factor común x, así obtener la función de pago de J1 de la forma:

$$u_1(x, y) = f_1(y) \cdot x + g_1(y)$$

donde $f_1(y), g_1(y)$ son funciones que dependen únicamente de y.

C. De la misma manera con $u_2(x, y)$, pero sacando factor común y, con lo cual obtenemos

$$u_2(x, y) = f_2(x) \cdot y + g_2(x)$$

donde $f_2(x), g_2(x)$ son funciones que dependen únicamente de x.

D. Determinar la probabilidad $\hat{y}$ que hace que se cumpla la igualdad $f_1(y) = 0$ y la probabilidad $\hat{x}$ que hace que se cumpla la igualdad $f_2(x) = 0$.

E. Así tenemos $(\hat{x}, \hat{y})$ un EN con pagos $u_1(\hat{x}, \hat{y}) = g_1(\hat{y})$ para el jugador 1 y pagos $u_1(\hat{x}, \hat{y}) = g_2(\hat{x})$ para el jugador 2.

Primero de todo, destacar que este algoritmo se puede llevar a cabo por la forma de las funciones de pago de los jugadores, puesto que desarrollando nuestras funciones obtenemos,

$$u_1(x, y) = a_{11} \cdot x \cdot y + a_{12} \cdot x - a_{12} \cdot x \cdot y + a_{21} \cdot y - a_{21} \cdot x \cdot y + a_{22} - a_{22} \cdot x - a_{22} \cdot y + a_{22} \cdot x \cdot y$$

y con lo cual sacando factor común x obtenemos la función de pago $u_1(x, y)$ en la forma que queremos.

$$u_1(x, y) = (a_{11} \cdot y + a_{12} - a_{12} \cdot y - a_{21} \cdot y + a_{22} \cdot y - a_{22}) \cdot x - a_{21} \cdot y + a_{22} - a_{22} \cdot y$$

De la misma manera podemos hacerlo con $u_2(x, y)$.

De esta forma cuando J2 escoge $\hat{y}$ siguiendo el algoritmo que acabamos de ver, anula el coeficiente que acompaña a la variable x en la función de pago de J1, así el J2 fija el pago de J1 y de la misma manera J1 fija el de J2. Lo que implica que ninguno tiene incentivos a cambiar de estrategia si el otro jugador no cambia la suya (no pueden mejorar sus pagos ya que la estrategia del otro anula cualquier posible maniobra).

Es importante observar que este algoritmo es equivalente a determinar la probabilidad y que cumpla,

$$\frac{du_1}{dx} = 0$$

y determinar la probabilidad x que cumpla,

$$\frac{du_2}{dy} = 0$$

puesto que la derivada parcial de $u_1(x, y)$ en función de x será exactamente la función $f_1(y)$ del algoritmo, equivalentemente la de $u_2(x, y)$ en función de y será $f_2(x)$. Observamos que tanto u_1 como u_2 son funciones diferenciables.

Ejemplo 1: Un ejemplo típico es el **juego de las monedas**, donde cada jugador escribe una palabra en un papel, cara o cruz, si dicha palabra coincide, gana el jugador 1 (es decir, si los dos han escrito cara o los dos han escrito cruz) y en caso contrario, gana el jugador 2. Suponemos que rebibe pagos de -1 el que pierde y pagos de 1 el que gana, tenemos

J1|J2	cara	cruz
cara	(1,-1)	(-1,1)
cruz	(-1,1)	(1,-1)

Con lo que observamos que no tenemos ningún EN en estrategias puras,

J1|J2	cara	cruz
cara	(**1**,-1)	(-1,**1**)
cruz	(-1,**1**)	(**1**,-1)

Añadiendo la probabilidad x a que el jugador 1 escriba cara y probabilidad y a que el jugador 2 escriba cara, tenemos,

		y	$1-y$
	J1|J2	cara	cruz
x	cara	(1,-1)	(-1,1)
$1-x$	cruz	(-1,1)	(1,-1)

y funciones de pago,

$u_1(x,y) = 1{\cdot}x{\cdot}y - 1{\cdot}x{\cdot}(1-y) - 1{\cdot}(1-x){\cdot}y + 1{\cdot}(1-x){\cdot}(1-y) \Rightarrow u_1(x,y) = 4{\cdot}x{\cdot}y - 2{\cdot}x - 2{\cdot}y + 1,$

$u_2(x,y) = -1{\cdot}x{\cdot}y + 1{\cdot}x{\cdot}(1-y) + 1{\cdot}(1-x){\cdot}y - 1{\cdot}(1-x){\cdot}(1-y) \Rightarrow u_2(x,y) = -4{\cdot}x{\cdot}y + 2{\cdot}x + 2{\cdot}y - 1.$

Siguiendo el algoritmo que acabamos de ver,

$$u_1(x,y) = (4 \cdot y - 2) \cdot x - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow f_1(y) = 4 \cdot y - 2, g_1(y) = -2 \cdot y + 1 \Rightarrow \hat{y} = 1/2$$

$$u_2(x,y) = (-4 \cdot x + 2) \cdot y + 2 \cdot x - 1 \Rightarrow f_2(x) = -4 \cdot x + 2, g_1(y) = 2 \cdot x - 1 \Rightarrow \hat{x} = 1/2$$

Con lo que el equilibrio de Nash en la extensión mixta del juego es $\hat{x} = 1/2$ y $\hat{y} = 1/2$, obteniendo unos pagos de $u_1(1/2, 1/2) = 0$ y $u_2 = (1/2, 1/2) = 0$.

Este juego es equivalente al juego de pares o nones, donde cada jugador elige un número y si la suma es par gana el jugador 1 y si la suma es impar gana el jugador 2.

Observamos que lo importante es si la suma es par o impar. Además sabemos que la suma de dos números pares es número par, la de un par y un impar es un número impar y la de dos impares es un número par. Esto nos permite reducir el número de estrategias a par e impar, puesto que es lo que realmente nos importa para saber qué jugador gana.

J1|J2	par	impar
par	(1,-1)	(-1,1)
impar	(-1,1)	(1,-1)

Con lo que se resolvería de forma equivalente al juego de las monedas, obteniendo el mismo equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Observamos que en este tipo de juego de suma nula, para cada uno de los jugadores es muy importante que el otro no sepa la jugada que va a llevar a cabo, puesto que si no perdería, con lo que lo mejor es que incluso ni él mismo lo sepa, ya que si él no lo sabe el otro no puede deducir lo que hará. Este hecho se ve reflejado en que cada estrategia de cada jugador tenga la misma probabilidad de ser elegida, por ello los EN son $(1/2, 1/2)$.

Ejemplo 2: Nuestro objetivo ahora es ver una ejemplificación de que si nuestro juego en estrategias puras tiene un EN, entonces si lo calculamos en estrategias mixtas obtenemos el equilibrio de Nash y con los mismos pagos. Retomando el ejemplo del **Dilema del prisionero**, recordemos que teníamos,

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,**-4**)	(**0**,-5)
NC	(-5,**0**)	(-1,-1)

Con lo que hay un único equilibrio de Nash en estrategias puras, donde los dos jugadores confesaban, (C,C) y obtenían pagos (-4,-4). Ahora considerando la extensión mixta del juego, obtenemos,

		y	$1-y$
	J1|J2	C	NC
x	C	(-4,-4)	(0,-5)
$1-x$	NC	(-5,0)	(-1,-1)

$$u_1(x, y) = -4 \cdot x \cdot y - 5 \cdot (1-x) \cdot y - (1-x) \cdot (1-y)$$

$$u_2(x, y) = -4 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x \cdot (1-y) - (1-x) \cdot (1-y)$$

simplificando, obtenemos

$$u_1(x, y) = x - 4 \cdot y - 1$$

$$u_2(x, y) = y - 4 \cdot x - 1$$

Con lo que nuestro EN en estrategias mixtas es $(\hat{x}, \hat{y}) = (1, 1)$ y con pagos (-4,-4). Con lo que observamos que ambos jugadores juegan la estrategia de C con una probabilidad de 1, es decir, ambos jugadores juegan C, así que nuestro equilibrio es (C,C) y se obtienen los mismos pagos que obtenemos en estrategias puras.

5. Dominancia

Hemos visto que en un juego nos podemos encontrar con jugadores con alguna estrategia que siempre les otorga un pago superior que resto de estrategias, o con una que siempre les da una utilidad inferior al que les da otra, etc. En este capítulo estudiaremos qué podemos hacer con este tipo de información. Es lógico pensar que si un jugador obtiene siempre pagos superiores con una estrategia A que con B, se puede prescindir de la estrategia B, ya que nunca será elegida por el jugador. Por ello veremos ahora el concepto de dominancia de estrategias. Es importante recordar que nuestros jugadores son racionales, y saben que los otros jugadores también lo son, con lo que todos los jugadores van a querer maximizar su utilidad. También veremos la relación de este nuevo concepto con el de equilibrio de Nash.

Retomando el ejemplo de la **Subasta a primer precio**, recordemos que el objeto se lo llevaba el jugador 1 que pujaba $p_1 \in [v_2, v_1]$, puesto que si pujaba un valor superior a v_1 obtiene una utilidad negativa, con lo cual es evidente pensar que no pujara por encima de v_1.

5.1. Dominancia estricta

Consideremos un juego en forma estratégica G=(N,S,u), con N={1,..,n}, el conjunto de jugadores, $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ y $u = (u_1, ..., u_n)$. Donde para cada $i \in N$, S_i denota el conjunto de estrategias del jugador i y u_i su función utilidad.

Definición 5.1. *Una estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i, es* ***estrictamente dominada*** *por $\hat{s}_i \in S_i$ si,*

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \tag{5.1}$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$

Observaciones:

- Decimos que la estrategia $\hat{s}_i$ **domina estrictamente** a la estrategia s_i del jugador i.
- Haga lo que haga el resto de jugadores, siempre va obtener una mayor utilidad el jugador i si juega la estrategia $\hat{s}_i$ que si opta por la estrategia s_i.

Notación: En el caso de que A, B sean estrategias del jugador i y A domine estrictamente a B, lo denotaremos por

$$A \succ_i B$$

.

Definición 5.2. *Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$, es una estrategia* ***estrictamente dominante*** *del jugador i, si y solo si para todo $s_i \in S_i$ y todo $s_{-i} \in S_{-i}$,*

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}).$$

Equivalentemente, si y solo si

$$\hat{s}_i \succ_i s_i, \forall s_i \in S_i.$$

Observación: Una estrategia de un jugador i es estrictamente dominante, cuando independientemente de lo que hagan los otros jugadores obtiene pagos estrictamente superiores cuando juega esa estrategia que cuando juega otra.

Destacar que cuando hablemos de dominancia nos referimos a dominancia estricta.

Proposición 5.3. *Si en un juego todos sus jugadores tienen una estrategia estrictamente dominante, el perfil de estrategias formado por las estrategias dominantes de cada jugador, es un EN del juego y es único.*

Demostración. Si $\hat{s} = (\hat{s_1}, ..., \hat{s_n}) \in S$ es el perfil de estrategias formado por las estrategias estrictamente dominantes de cada jugador, entonces para cada $\hat{s_i} \in S_i$ se cumple (5.1), con lo cual $\hat{s}$ es un EN por definición.

Además, es único puesto que para cualquier otro $s = (s_1, ..., s_n) \in S$, $u_i(\hat{s_i}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ para todo $i \in N$, con lo que cada jugador i tiene incentivos unilaterales a cambiar a la estrategia $\hat{s_i} \in S_i$, con lo que no puede existir ningún otro EN. □

Ejemplo: Recordemos el **Dilema del prisionero**, donde teníamos la representación,

J1|J2	C	NC
C	(-4,4)	(0,-5)
NC	(-5,0)	(-1,-1)

En cuanto a J1, vemos que

$$u_1(C, C) = -4 > -5 = u_1(NC, C)$$

y que

$$u_1(C, NC) = 0 > -1 = u_1(NC, NC).$$

Haga lo que haga J2, J1 obtiene un pago mayor si confiesa que si no confiesa. Así que, la estrategia C del jugador 1 domina estrictamente a NC, es decir, $C \succ_1 NC$. Puesto que en ningún caso J1 escogería NC podemos considerar simplemente la estrategia C de J1,

J1|J2	C	NC
C	(-4,4)	(0,-5)

a este paso se le llama la **eliminación de estrategias estrictamente dominadas**. Además podemos observar que, $C \succ_2 NC$, con lo que eliminando NC obtenemos,

J1|J2	C
C	(-4,4)

observamos que es el EN que habíamos calculado anteriormente. Observamos que en este juego C es una estrategia estrictamente dominante de ambos jugadores, veremos a continuación que a (C,C) se le denomina perfil de estrategias racionalizable.

Definición 5.4. *Llamamos* ***proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas****, al proceso de ir prescindiendo de forma sucesiva de aquellas estrategias que son dominadas estrictamente por otras, hasta el punto que ya no se pueda prescindir de ninguna estrategia más de ningún jugador.*

Cuando después de llevar a cabo la eliminación iterada de estrategias dominadas nos queda un único perfil de estrategias, se denomina ***perfil de estrategias racionalizable****.*

Propiedades:

- Los equilibrios de Nash sobreviven a la eliminación sucesiva de estrategias dominadas.
- El resultado no depende del orden de eliminación de las estrategias dominadas.
- Un perfil racionalizable es un EN y es el único del juego.
- Un equilibrio de Nash no tiene porque ser un perfil de estrategias racionalizable.
- Si en un juego todos los jugadores tienen una estrategia estrictamente dominante, el perfil de estrategias formado por dichas estrategias es un perfil de estrategias racionalizable.
- Que exista un perfil de estrategias racionalizable no implica que nuestros jugadores tengan estrategias estrictamente dominantes.

Todas las propiedades son consecuencia de las definiciones de dominancia y de equilibrio de Nash. Veamos estos conceptos y propiedades mediante un ejemplo,

Ejemplo: Consideremos el juego,

J1|J2	E	F	G	H
A	(5,4)	(4,4)	(4,5)	(12,2)
B	(3,7)	(8,7)	(5,8)	(10,6)
C	(2,10)	(7,6)	(4,6)	(9,5)
D	(4,4)	(5,9)	(4,10)	(10,9)

Empecemos mirando las estrategias de J1, observamos que $B \succ_1 C$ ya que $u_1(B,E) = 3 > 2 = u_1(C,E)$, $u_1(B,F) = 8 > 7 = u_1(C,F)$, $u_1(B,G) = 5 > 4 = u_1(C,G)$ y $u_1(B,H) = 10 > 9 = u_1(C,H)$. Con lo que podemos prescindir de la estrategia C de J1, sabemos que siendo nuestro jugador racional nunca será una opción para él (siempre que escoja B obtendrá unos pagos superiores que si escoge C, independientemente de lo que haga J2).

J1|J2	E	F	G	H
A	(5,4)	(4,4)	(4,5)	(12,2)
B	(3,7)	(8,7)	(5,8)	(10,6)
D	(4,4)	(5,9)	(4,10)	(10,9)

Ahora observamos que en este momento no hay ninguna estrategia dominada de J1, con lo que vamos a fijarnos en las de J2. Observamos que $G \succ_2 E$, y a su vez $G \succ_2 F$ y $G \succ_2 H$, con lo que estando la estrategia G entre las estrategias de J2, sabemos que nunca optaría por otra estrategia ya que obtendría un peor pago. Así procedemos a la eliminación de las estrategias dominadas de J2, E, F y H,

J1|J2	G
A	(4,5)
B	(5,8)
D	(4,10)

Es importante observar que, volviéndonos a fijar en la primera tabla observamos que en este caso G no domina ni a E ni a F puesto que $u_2(C, G) = 6 < 10 = u_2(C, G)$ y $u_2(C, G) = 6 = 6 = u_2(C, F)$. Por esto, es importante después de producir una eliminación de una estrategia dominada revisar si hay nuevas dominancias, lo que llamamos eliminación iterada de estrategia dominadas.

Así que, por mucho que habíamos visto que J1 no tenía más estrategias dominadas, miramos si en la nueva representación del juego encontramos alguna y observamos que, $B \succ_1 A$ y que $B \succ_1 D$, asi que obtenemos,

J1|J2	G
B	(5,8)

Así hemos obtenido un perfil de estrategias racionalizable (B,G) con pagos (5,8), con lo que nuestro juego tiene un único EN, (B,G). Destacar que en un principio ni J1 ni J2 tenían ninguna estrategia dominante, sin embargo, obtenemos un perfil de estrategias racionalizable mediante la eliminación sucesiva de estrategias dominadas.

Vamos a ver que si lo buscamos como lo hacíamos anteriormente obtenemos el mismo resultado,

J1|J2	E	F	G	H
A	(**5**,4)	(4,4)	(4,**5**)	(**12**,2)
B	(3,7)	(**8**,7)	(**5**,**8**)	(10,6)
C	(2,**10**)	(7,6)	(4,6)	(9,5)
D	(4,4)	(5,9)	(4,**10**)	(10,9)

Efectivamente obtenemos un único EN, (B,G).

Observación: Es importante entender que cuando se produce la eliminación de una estrategia dominada, el jugador de la estrategia eliminada sabe que nunca optará por esta opción y además los otros jugadores también saben que no es una opción para su contrincante utilizar dicha estrategia. Por ello, se puede prescindir y seguir analizando el juego ya que esta estrategia a niveles prácticos es como si no estuviera. Es decir, al producir la eliminación de estrategias estrictamente dominadas no se ve alterada la solución de nuestros juegos. Puesto que, siendo nuestros jugadores racionales, estamos quitando las opciones que sabemos que no son opciones para nuestros jugadores. Además, se produce esta eliminación de estrategias dominadas de forma sucesiva puesto que al no contemplar como opción a una estrategia de un jugador y los otros jugadores tener este conocimiento, puede ser que otras estrategias dejen de ser opción y entren nuevas dominancias en juego.

Por ejemplo, si yo puedo hacer 3 cosas y mi contrincante también pero se que hay una que mi contrincante nunca escogería, entonces yo elegiré cual de las tres prefiero pero sin tener en cuenta la estrategia que se que mi contrincante no escogerá. Al no ser una opción para él, deja de tener sentido que yo la tenga en cuenta ya que mis pagos van también en relación a lo que mi contrincante elija.

Visto la dominancia estricta vamos a ver un concepto importante para el análisis de juegos donde obtenemos soluciones que nos pueden sorprender. Como pasaba en el Dilema del prisionero, recordemos que si ambos jugadores actuaban racionalmente obtenían una pena mayor que si ninguno de los dos confesaba.

Definición 5.5. *Decimos que un resultado del juego es* ***eficiente en el sentido de Pareto*** *cuando no existe ningún jugador que pierda y al menos un jugador sale estrictamente* *ganando.*

Definición 5.6. *Decimos que en un juego se da el* ***Dilema del prisionero*** *si:*

1. *Cada jugador tiene una estrategia dominante.*
2. *Cuando cada jugador juega su estrategia dominante, el resultado del juego no es eficiente en el sentido de Pareto.*

Lo que implica que hay un único EN del juego en el que ningún jugador juega la estrategia que más pagos le da.

Ejemplos:

- Observemos que efectivamente en el **Dilema del prisionero** se da el Dilema del prisionero , tenemos que C es una estrategia dominante para ambos jugadores, con lo que la primera condición se cumple. Además si ambos jugadores juegan C , obtienen ambos pagos de -4, pero si juegan ambos NC obtendrían pagos de -1, con lo que el resultado del juego no es eficiente en el sentido de Pareto, es decir, se cumple la segunda condición. Efectivamente como era de esperar en el Dilema del prisionero se da el Dilema del prisionero.

- En cambio en el juego que hemos analizado anteriormente,

J1|J2	E	F	G	H
A	(5,4)	(4,4)	(4,5)	(12,2)
B	(3,7)	(8,7)	(5,8)	(10,6)
C	(2,10)	(7,6)	(4,6)	(9,5)
D	(4,4)	(5,9)	(4,10)	(10,9)

  vemos que no se da el Dilema del prisionero, puesto que ningún jugador tiene una estrategia estrictamente dominante. Aunque en el análisis hemos visto que el perfil de estrategias (B,G) es un perfil de estrategias racionalizable, pero sabemos que esto no implica que existan estrategias estrictamente dominantes.

- En el juego,

J1|J2	D	E
A	(1,5)	(4,4)
B	(3,7)	(1,1)
C	(10,10)	(5,4)

  observamos que ambos jugadores tienen estrategias estrictamente dominantes, C para J1 y D para J2 , pero si ambos jugadores juegan su estrategia dominante obtienen pagos de (10,10), que para ambos son estrictamente superiores al resto de pagos que pueden obtener. Así que es un resultado eficiente en el sentido de Pareto, con lo que no se da el Dilema del Prisionero.

Observar que hablamos de situaciones del Dilema del prisionero, puesto que son juegos donde destaca la solución del juego, ya que aunque son soluciones estrictamente dominantes, ambos jugadores podrían obtener pagos superiores jugando otras estrategias.

Este tipo de situaciones se dan en numerosas ocasiones en la vida real, por ejemplo en la competencia de empresas. Supongamos dos empresas que compiten y que tienen dos opciones, disminuir los precios o dejarlos igual. Disminuir los precios domina estrictamente a dejarlos igual, puesto que si el competidor baja los precios y tu no, te quedas fuera del mercado y si tu competidor mantiene los precios, bajarlos aumenta tus beneficios. Sin embargo, si ambos jugadores bajan los precios obtienen menos beneficios que los que hubieran obtenido si los mantenían.

Por ello el Dilema del Prisionero llamó la atención de un gran número de sociólogos y economistas. Encontramos obras dedicadas a este ejemplo, como el libro de William Poundstone, *Prisoner's Dilemma* [9].

5.2. Dominancia débil

Hasta ahora hemos hablado de estrategias con pagos estrictamente superiores, pero nos podríamos preguntar que pasa si los pagos de una estrategia son siempre mayores o iguales a otra con algún pago estrictamente superior, aquí entra el concepto de dominancia débil.

Definición 5.7. *Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ del jugador i,* ***domina débilmente*** *a otra estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i, si,*

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}),$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$ *y para algún* $s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}).$$

Es decir, si un jugador tiene una estrategia x donde hagan lo que hagan los otros jugadores los pagos son siempre iguales o superiores a otra estrategia y del mismo jugador y al menos algún pago es estrictamente superior, la estrategia y es **débilmente dominada** por la estrategia x.

Podríamos pensar en llevar a cabo la eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadas para conseguir los mismos resultados que con la eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas, pero vamos a ver mediante un ejemplo que surgen diversos problemas.

Ejemplo: Consideremos el juego,

J1|J2	C	D
A	(**5**,2)	(0,**3**)
B	(**5**,**4**)	(**3**,**4**)

Vemos que tiene dos EN, (B,C) con pagos (5,4) y (B,D) con pagos (3,4).

Fijándonos en las estrategias de J1 vemos que B domina débilmente a A, puesto que $u_1(B, C) = 5 = u_1(A, C)$ y $u_1(B, D) = 3 > 0 = u_1(A, D)$ con lo que si procedemos a eliminar la estrategia débilmente dominada de J1 obtenemos,

J1|J2	C	D
B	(**5**,**4**)	(**3**,**4**)

y obtenemos los dos EN de nuestro juego.

Pero sin embargo, volviendo a nuestro juego inicial,

J1|J2	C	D
A	(**5**,2)	(0,**3**)
B	(**5**,**4**)	(**3**,**4**)

si ahora nos fijamos en las estrategias de J2 vemos que D domina débilmente a C, con lo que si procemos a eliminar la estrategia dominada de J2 obtenemos,

J1|J2	D
A	(0,**3**)
B	(**3**,**4**)

ahora vemos que B de J1 domina estrictamente a A, con lo que eliminamos A y obtenemos,

J1|J2	D
B	(**3**,**4**)

Obtenemos un EN, (B,D) con pagos (3,4). Observamos que hemos perdido un EN por el camino, (B,C), que además tenía pagos superiores para J1 e iguales para J2 que el que ha sobrevivido.

Observaciones: Acabamos de ver que, cuando se produce la eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadass,

1. El orden de llevarla a cabo cambia el resultado.
2. Los EN pueden no sobrevivir.
3. Los EN que sobreviven no tienen por qué ser los que mayores pagos proporcionan a los jugadores.

Con lo que mientras una estrategia estrictamente dominada nunca podía ser una estrategia de un EN, con la dominancia débil no ocurre lo mismo, una estrategia débilmente dominada si que puede formar parte de un perfil de estrategias que es un EN.

Teoría del punto focal

Acabamos de ver que la dominancia débil no nos sirve para determinar EN ni para descartar estrategias. Sin embargo, esto no significa que no la vayamos a utilizar para nada. En otros capítulos nos hemos encontrado con juegos con varias soluciones donde hay algunas que nos llaman más la atención que otras, utilizaremos la dominancia débil como uno de los criterios para destacarlas.

Ejemplo:

J1|J2	C	D
A	(2,2)	(**4**,**3**)
B	(**3**,**2**)	(2,**2**)

Observamos que tenemos dos EN, (B,C) con pagos (3,2) y (A,D) con pagos (4,3), donde ambos jugadores obtienen pagos superiores si juegan (A,D) que si optan por (B,C).

Aquí entra en juego la **Teoría del punto focal**, la cual se basa en elegir aquellos equilibrios que son más "atractivos", aquellos que consideramos más probables que opten por jugar nuestros jugadores. Necesitamos juegos con varios EN y diremos que un equilibrio de Nash es un **punto focal** si destaca entre los demás por ser el más "natural", "atractivo" o "especial".

Podemos encontrar libros que tratan la Teoría de puntos focales y el cómo influye en la elección de las estrategias, destacamos, *A Theory of Focal Points* de Robert Sugden [12], donde además podemos encontrar esta teoría aplicada a la política, sociología y economía. En este trabajo veremos dos criterios de selección de puntos focales.

Criterio 1 (Dominancia débil): Si tenemos un juego con diversos EN y hay uno que contiene alguna estrategia de algún jugador que domina débilmente a las otras, entonces, el que contiene la estrategia que domina débilmente es un punto focal. Además, si uno de los equilibrios contiene una estrategia de un jugador débilmente dominada por otra estrategia presente en otro EN, entonces, lo descartamos de ser un posible punto focal.

Volviendo al ejemplo anterior podemos determinar (A,D) como punto focal, puesto que la estrategia D de J2 domina débilmente a su estrategia C. Además, observando los pagos tiene sentido pensar que es más probable que opten por (A,D) que no por (B,C), puesto que obtienen ambos jugadores pagos superiores.

Criterio 2 (Eficiencia en el sentido de Pareto): Tiene sentido pensar que si un equilibrio tiene pagos más eficientes en el sentido de Pareto que el resto este sea un punto focal, puesto que como sabemos nuestros jugadores quieren maximizar sus pagos. Es decir, si hay un EN donde al menos un jugador obtiene pagos estrictamente superiores y ningún jugador obtiene inferiores que con otro de los EN, entonces descartamos el segundo como punto focal.

Ejemplo:

J1|J2	D	E	F
A	(2,3)	(1,**4**)	(1,2)
B	(1,**1**)	(**2**,**1**)	(**2**,**1**)
C	(**3**, **2**)	(0,0)	(0,1)

Tenemos tres equilibrios: (C,D) con pagos (3,2), (B,E) con pagos (2,1) y (B,F) con pagos (2,1). Vamos a determinar si hay algún punto focal.

Por una parte vemos que la estrategia D de J2 domina a la estrategia F débilmente, con lo que el equilibrio (B,F) lo podemos descartar como punto focal. Sin embargo, no existen dominancias débiles entre C y B de J1 ni de J2 entre D y E. Con lo que mediante el criterio de dominancia débil no podemos obtener ningún punto focal. Pero hemos visto otro criterio, la eficiencia de Pareto y observamos que los pagos del EN (C,D) son más eficientes en el sentido de Pareto que los pagos del EN (B,E). Con lo que (C,D) es un punto focal.

Observación: Para determinar puntos focales, primero buscamos dominancias débiles, y descartamos aquellos equilibrios con estrategias débilmente dominadas. A continuación, analizamos si alguno de los equilibrios restantes tiene pagos más eficientes en el sentido de Pareto. Finalmente, destacamos los equilibrios que hayan sobrevivido a los dos criterios. Y en caso de no poder descartar ninguna solución, concluimos que no destacamos ningún punto focal. Hay más criterios para determinar puntos focales pero son más subjetivos y en este trabajo no los trataremos.

6. Juegos de Mercado

Como ya hemos dicho en más de una ocasión los conceptos de la Teoría de Juegos se pueden aplicar para el análisis de conflictos económicos. En este capítulo vamos a ver dos modelos de mercado que se basan en el análisis estratégico de empresas que compiten por un mismo producto. Destacar el libro de Robert Gibbons, *Game Theory for Applied Economists* [13], dónde además de incluir de forma más amplia los ejemplos que veremos, contiene otros ejemplos de aplicaciones de la Teoría de Juegos en la economía.

6.1. Oligopolio de Cournot

Tenemos n empresas que compiten por un mismo producto, supongamos que han de fijar de forma simultánea e independiente la cantidad que quieren producir. Una decisión que afecta a todas las empresas, puesto que por ejemplo, un aumento de la producción de una empresa del producto provoca que la cantidad total del producto en el mercado también aumente, lo que puede causar una bajada del precio del producto. Vamos a verlo,

- n empresas productoras $\Rightarrow$ las empresas son los jugadores de nuestro juego y $N = \{1, ..., n\}$.
- Compiten por un bien homogéneo, es decir, todas las empresas de nuestro modelo producen un mismo bien.
- Compiten en cantidades $\Rightarrow$ S_i es el conjunto de cantidades que la empresa $i \in N$ puede producir.
- Al coste de producción de la empresa $i \in N$ lo denotamos por C_i. Consideraremos que no hay costes fijos y los costes marginales son constantes. Así que considerando CM_i el coste marginal de la empresa i tenemos que,

  $$C_i(q_i) = CM_i \cdot q_i$$

- Denotamos por $q_i \in S_i$ a la cantidad que produce la empresa i, es decir, una estrategia de la empresa i. Tenemos que $Q = \sum_{i \in N} q_i$ es la producción total.
- Toda la producción es absorbida por el mercado a un precio único, el cual únicamente depende de la producción total. Así que,

  $$\rho = D^{-1}(Q),$$

  donde D es la función demanda. Nos indica el precio ρ al que el mercado absorbe la producción, es decir, ρ es el precio de una unidad del producto en el mercado.
- Los pagos son los beneficios

  $$\Rightarrow u_i(q_1, ..., q_n) = B_i(q_1, ..., q_n) = \rho \cdot q_i - C_i(q_i).$$

Observamos que la relación entre las diferentes empresas se encuentra en la función ρ, es decir, en la inversa de la demanda. Puesto que ρ depende de la producción total y con lo cual depende de la cantidad que decide producir cada empresa.

Denotaremos $R_i(q_{-i})$ al conjunto de mejores respuestas de la empresa i a q_{-i} para no confundirlo con los beneficios.

Ejemplo 1: Supongamos que tenemos dos empresas, $N = \{1, 2\}$, es decir, un duopolio, con $q_1, q_2 \in [0, a]$, $C_i(q_i) = CM \cdot q_i$, para cada $i \in N$ (mismos costes marginales para ambas empresas). Tenemos que la función precio (donde $a > CM$) es,

$$\left.\begin{array}{rl} a-(q_1+q_2), & a > q_1+q_2 \\ 0, & a \leq q_1+q_2 \end{array}\right\} = \rho$$

Así tenemos, $\rho = a - (q_1 + q_2)$ si $a > Q = q_1 + q_2$. Con lo que los beneficios para $a > Q$ son,

$$B_1(q_1, q_2) = (a - (q_1 + q_2)) \cdot q_1 - CM \cdot q_1$$

$$B_2(q_1, q_2) = (a - (q_1 + q_2)) \cdot q_2 - CM \cdot q_2$$

En caso contrario, serían $B_i(q_1, q_2) = -CM \cdot q_i, i \in N$.

Queremos determinar qué cantidad debe producir cada empresa para obtener el beneficio máximo. Con lo que vamos a buscar los conjuntos de mejores respuestas. Como tenemos funciones diferenciables, vamos a ver si son cóncavas. Tenemos que para $a > Q$,

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_1} = a - CM - 2 \cdot q_1 - q_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 B_1}{\partial q_1^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial q_2} = a - CM - 2 \cdot q_2 - q_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 B_2}{\partial q_2} = -2 < 0$$

Con lo que son cóncavas y sabemos que los conjuntos mejores respuesta serán,

$$R_1(q_2) = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{a-CM-q_2}{2} & si \quad q_2 < a - CM \\ . & \\ 0 & si \quad q_2 \geq a - CM \end{array} \right\}$$

$$R_2(q_1) = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{a-CM-q_1}{2} & si \quad q_1 < a - CM \\ . & \\ 0 & si \quad q_1 \geq a - CM \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema dado por los conjuntos y obtenemos una solución, $q_1 = q_2 = \frac{a-CM}{3}$ cuando $q_i < a - CM$ para cada $i \in N$, así que tenemos un único EN,

$$(\frac{a - CM}{3}, \frac{a - CM}{3})$$

con pagos para ambos jugadores de,

$$B_i(\frac{a - CM}{3}, \frac{a - CM}{3}) = \frac{(a - CM)^2}{9}.$$

Observación: Nos podríamos preguntar qué pasa si en vez de competir cooperan, es decir, si consideramos una función de beneficios globales,

$$B(q_1, q_2) = B_1(q_1, q_2) + B_2(q_1, q_2).$$

En el caso del ejemplo anterior, tendríamos

$$B(q_1, q_2) = (a - (q_1 + q_2)) \cdot (q_1 + q_2) - CM \cdot (q_1 + q_2) = (a - CM - Q) \cdot Q$$

donde $Q = q_1 + q_2$. Con lo que para $a > Q$,

$$\frac{\partial B}{\partial Q} = a - CM - 2 \cdot Q \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial Q^2} = -2 < 0.$$

Así que la producción que maximizará los costes es, $Q = \frac{a-CM}{2}$, es decir,

$$q_1 = q_2 = \frac{a - CM}{4}$$

con beneficios,

$$B_1(q_1, q_2) = B_2(q_1, q_2) = \frac{(a - CM)^2}{8},$$

que son unos beneficios superiores que los que obtenían sin cooperar. Así que, si dos empresas tienen los mismos costes marginales saldrán más beneficiados si cooperan que si actúan por separado.

Esto no ocurre siempre, veamos qué pasa si por ejemplo los costes marginales son diferentes. Supongamos el ejemplo anterior pero con $CM_1 = 10$ y $CM_2 = 25$ y supongamos también que $a = 130$ entonces tenemos,

$$B_1(q_1, q_2) = (120 - (q_1 + q_2)) \cdot q_1 \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial q_1} = 120 - 2 \cdot q_1 - q_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 B_1}{\partial q_1^2} = -2 < 0$$

$$B_1(q_1, q_2) = (105 - (q_1 + q_2)) \cdot q_2 \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial q_1} = 105 - 2 \cdot q_1 - q_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 B_1}{\partial q_1^2} = -2 < 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{120-q_2}{2} & = & q_1 \\ . & & \\ \frac{105-q_1}{2} & = & q_2 \end{array} \right\}$$

Tiene una única solución $(q_1, q_2) = (45, 30)$ con beneficios de 2025 para la empresa 1 y de 900 para la empresa 2.

En cambio, con el beneficio global no encontramos ninguna solución estable. Observamos que si lo produce todo la primera empresa se aumentan los beneficios conjuntos puesto que la primera empresa tiene costes marginales inferiores, tendríamos,

$$B_1(q_1) = (120 - q_1) \cdot q_1$$

y obtiene el máximo en $q_1 = 60$ con beneficios de 3600. No obstante la solución no es estable puesto que la segunda empresa siempre va a tener incentivos de producir algo. Para llegar a un acuerdo, por ejemplo se podría compensar con que la empresa 1 le diese una parte de los beneficios, que sea superiores a 900 (que es lo que ganaría compitiendo la empresa 2) pero inferior a la diferencia entre 3600 y 2025, puesto que si le paga más aumentaría los beneficios si no coopera.

6.2. Oligopolio de Bertrand

A diferencia de Cournot que se basaba en que las empresa eligieran la cantidad del producto independiente y simultáneamente, ahora tendremos empresas que también compiten por un producto, sin embargo, lo que elegirán ahora es el precio de producto, también de forma simultánea e independiente. Con lo que tendremos,

- n empresas productoras, $N = \{1, ..., n\}$
- Bien homogéneo, las empresas no distinguen si lo produce una empresa u otra.
- Compiten en precios, con lo que $\forall i \in N, S_i$ son los diferentes precios que la empresa i puede fijar.
- Las estrategias de cada empresa $i \in N$ (es decir, los diferentes precios que puede poner al producto), las denotamos por p_i.
- C_i denota el coste de producción de la empresa $i \in N$. Supondremos que los costes marginales de cada empresa son CM_i y que no hay costes fijos.
- Los consumidores eligen la empresa que ofrece un precio inferior, es decir, si una empresa fija un precio superior a otra queda fuera del mercado. Con lo que, toda la cantidad de producto que los consumidores quieren obtener será producida por la empresa o empresas que menor precio hayan fijado. En caso de haber mas de una se dividen la producción a partes iguales.
- La demanda depende del precio fijado por cada una de las empresas,

  $$q_i = q_i(p_1, ..., p_n),$$

  es la cantidad de producto que producirá cada empresa.
- Los beneficios que obtiene la empresa $i \in N$ vienen dados por la función,

  $$B_i(q_1, ..., q_n) = (p_i - CM_i) \cdot q_i(p_1, ..., p_n).$$

Supondremos que $S_i = [0, a], \forall i \in N$ (en caso contrario $q_i = 0$ para todo i). Observamos que para cada empresa $i \in N$, q_i y B_i pueden ser:

1. Nulas en el caso de que haya alguna empresa con un precio inferior.
2. $q_i = a - p_i$ y $B_i = (p_i - CM_i) \cdot q_i$ en el caso de que la empresa ofrezca un precio estrictamente inferior al resto.
3. $q_i = \frac{a-p_i}{m}$ y $B_i = \frac{(p_i - CM_i)\cdot q_i}{m}$ en el caso de que ofrezca el menor precio pero junto a otras m empresas con $m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n$.

Ejemplo: Supongamos que tenemos dos empresas que compiten por un mismo producto, con costes marginales c_1 para la empresa 1 y c_2 para la empresa 2. Supongamos también que $S_1 = S_2 = [0, a]$, donde $a > c_1$ y $a > c_2$. Así tendremos, $C_i(p_i) = c_i \cdot p_i$. Sabemos que producirá el producto aquel que ponga un precio inferior. Así que en cuanto a la producción tenemos,

$$q_1(p_1, p_2) = \left\{ . \begin{array}{rcc} a - p_1 & si & p_1 < p_2 \\ \\ \frac{a-p_1}{2} & si & p_1 = p_2 \\ \\ 0 & si & p_1 > p_2 \end{array} \right\}$$

es la cantidad de producto que producirá la empresa 1, y en cuanto a la cantidad de producto que producirá la empresa 2 tenemos,

$$q_2(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{rl} a - p_2 & si \quad p_2 < p_1 \\ \\ . \quad \frac{a-p_2}{2} & si \quad p_2 = p_1 \\ \\ 0 & si \quad p_2 > p_1 \end{array} \right\}$$

Así obtenemos las funciones de beneficios,

$$B_1(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{rl} (p_1 - c_1) \cdot (a - p_1) & si \quad p_1 < p_2 \\ \\ . \quad (p_1 - c_1) \cdot \frac{(a-p_1)}{2} & si \quad p_1 = p_2 \\ \\ 0 & si \quad p_1 > p_2 \end{array} \right\}$$

$$B_2(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{rl} (p_2 - c_2) \cdot (a - p_2) & si \quad p_2 < p_1 \\ \\ . \quad (p_2 - c_2) \cdot \frac{(a-p_2)}{2} & si \quad p_2 = p_1 \\ \\ 0 & si \quad p_2 > p_1 \end{array} \right\}$$

Observamos que no tenemos funciones diferenciables, así que, se tiene que estudiar por casos.

Supongamos que tenemos, $a = 130$, $S_1 = S_2 = [0, 130], c_1 = c_2 = 10$, entonces,

$$B_1(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{rl} (p_1 - 10) \cdot (130 - p_1) & si \quad p_1 < p_2 \\ \\ . \quad (p_1 - 10) \cdot \frac{(130-p_1)}{2} & si \quad p_1 = p_2 \\ \\ 0 & si \quad p_1 > p_2 \end{array} \right\}$$

$$B_2(p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{rl} (p_2 - 10) \cdot (a - p_2) & si \quad p_2 < p_1 \\ \\ . \quad (p_2 - 10) \cdot \frac{(130-p_2)}{2} & si \quad p_2 = p_1 \\ \\ 0 & si \quad p_2 > p_1 \end{array} \right\}$$

Con lo que vamos a estudiar por casos, cual es R_1 (el conjunto mejor respuesta de la empresa 1). Antes observamos que, $p = 70$ es el precio del monopolio de ambas empresas, es decir, el precio que otorgaría a la empresa 1 o a la empresa 2 los beneficios máximos en el caso de que no hubiera ninguna empresa con la que compitiera.

- **Caso 1** ($p_2 < 10$)**:** La empresa 1 tiene dos opciones o bien poner precio $p_1 \leq p_2$ y obtener beneficios negativos o bien $p_1 > p_2$ y obtener beneficios nulos.

- **Caso 2** ($p_2 = 10$)**:** La empresa 1 tiene dos opciones o poner precio $p_1 < p_2$ y obtener beneficios negativos o poner $p_1 \geq p_2$ y obtener beneficios nulos.

- **Caso 3** ($10 < p_2 \leq 70$)**:** La empresa 1 tiene tres opciones, la primera poner precios $0 \leq p_1 < p_2$ con lo que obtendría beneficios negativos, la segunda $p_1 > p_2$ y obtener beneficios nulos y por último $p_1 = p_2$ y obtener beneficios de $\frac{1}{2} \cdot (p_1 - 10)(130 - p_1) > 0$. Observamos que obtendría el máximo beneficio si pusiera, $p_1 = p_2 - \epsilon$ con $\epsilon > 0$, pero si no hay unidad monetaria mínima siempre habrá una respuesta mejor (con un epsilon menor).

- **Caso 4 ($p_2 > 70$):** Aquí la empresa 1 tiene dos opciones o bien poner un precio $p_1 \geq p_2$ y obtener beneficios nulos o poner precio $p_1 \leq 70$ y obtener beneficios $(p_1 - 10) \cdot (130 - p_1)$, sabemos que $p_1 = 70$ es el precio del monopolio, con lo cual con el que la empresa 1 obtendría un mayor beneficio.

Así tenemos,

$$R_1(p_2) = \left\{ \begin{array}{rcl} p_1 \in (p_2, 130] & si & p_2 < 10 \\ \\ p_1 \in [p_2, 130] & si & p_2 = 10 \\ \\ \emptyset & si & p_1 > p_2 \\ \\ p_1 = 70 & si & p_2 > 70 \end{array} \right\}.$$

y por simetría tenemos,

$$R_2(p_1) = \left\{ \begin{array}{rcl} p_2 \in (p_1, 130] & si & p_1 < 10 \\ \\ p_2 \in [p_1, 130] & si & p_1 = 10 \\ \\ \emptyset & si & p_2 > p_1 \\ \\ p_2 = 70 & si & p_1 > 70 \end{array} \right\}.$$

Con lo que existe un único equilibrio de Nash en $(p_1, p_2) = (10, 10)$ donde ambas empresas obtienen beneficios nulos.

Observación: Si suponemos que hay unidad monetaria mínima, por ejemplo de 1 euro, entonces tendríamos, para $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$,

$$R_i(p_j) = \left\{ \begin{array}{rcl} p_i \in \{p_j + 1, p_j + 2, ..., 130\} & si & p_j < 10 \\ \\ p_i \in \{10, 11, ..., 130\} & si & p_j = 10 \\ \\ p_i = 11 & si & p_j = 11 \\ \\ p_i = p_j - 1 & si & 12 \leq p_j \leq 70 \\ \\ p_i = 70 & si & p_j > 70 \end{array} \right\}.$$

Con lo que obtenemos dos equilibrios de Nash, $(10, 10)$ con pagos nulos y el $(11, 11)$ con pagos de $\frac{119}{2}$ para ambas empresas. Observamos que el EN $(11, 11)$ es un punto focal.

7. Juegos con 3 jugadores

En este capítulo aplicaremos todo lo visto en los anteriores capítulos para resolver juegos con tres jugadores.

Cuando se tienen juegos con tres jugadores y cada jugador tiene un conjunto de estrategias finito, se puede llevar a cabo una representación en tablas que nos simplificará el análisis.

Suponagamos que tenemos $N = \{1, 2, 3\}$ y $S_1 = \{A_1, ..., A_{n_1}\}, S_2 = \{B_1, ..., B_{n_2}\}, S_3 = \{C_1, ..., C_{n_3}\}$ los conjuntos de estrategias de los jugadores 1,2,3 respectivamente. Para cada $i \in \{1, ..., n_1\}, j \in \{1, ..., n_2\}$ y $k \in \{1, ..., n_3\}$, $u_1(A_i, B_j, C_k) = a_{ijk}$ son los pagos de J1, $u_2(A_i, B_j, C_k) = b_{ijk}$ son los de J2 y $u_3(A_i, B_j, C_k) = c_{ijk}$ son los de J3. Entonces podemos representar nuestro juego mediante,

J3: C_k

J1|J2	B_1	B_2	...	B_{n_2}
A_1	$(a_{11k}, b_{11k}, c_{11k})$	$(a_{12k}, b_{12k}, c_{12k})$	...	$(a_{1n_2k}, b_{1n_2k}, c_{1n_2k})$
A_2	$(a_{21k}, b_{21k}, c_{21k})$	$(a_{22k}, b_{22k}, c_{22k})$	...	$(a_{2n_2k}, b_{2n_2k}, c_{2n_2k})$
...	...	...	...	...
A_{n_1}	$(a_{n_11k}, b_{n_11k}, c_{n_11k})$	$(a_{n_12k}, b_{n_12k}, c_{n_12k})$	...	$(a_{n_1n_2k}, b_{n_1n_2k}, c_{n_1n_2k})$

Para cada $C_k \in S_3$. Con lo que obtenemos n_3 tablas.

En cuanto al análisis, nos centraremos en encontrar, en el caso de que haya la o las soluciones en estrategias puras. Sabemos que A_i pertenece al perfil de estrategias que es solución si, $\forall B_j \in S_2$ y $\forall C_k \in S_3$

$$u_1(A_i, B_j, C_k) \geq u_1(A_l, B_j, C_k), \forall A_l \in S_1.$$

Con lo que para cada B_j de J2 y C_k de J3, seleccionamos los pagos más altos de J1 (es decir con los que J1 no tiene incentivos a cambiar de estrategia si los otros jugadores no lo hacen) y similarmente para J2 y para J3. Así aquellos perfiles de estrategias que tengan todos los pagos seleccionados, supondrá que ningún jugador tiene incentivos unilaterales a cambiar de estrategias y con lo cual, será un equilibrio de Nash. A continuación lo veremos más detalladamente.

Selección de los pagos de las mejores respuestas:

- Para J1: queremos seleccionar aquellos pagos que fijando la estrategia de J2 y J3 maximizan los pagos de J1, es decir, si suponemos que J2 juega B_j y J3 juega C_k, el o los máximos (no estrictos) pagos del conjunto $\{a_{1jk}, ..., a_{n_1jk}\}$. Lo que corresponde a buscar los máximos no estrictos de cada columna y hacerlo en cada una de las tablas.

- Para J2: en este caso buscamos los máximos (no estrictos) para cada A_i de J1 y cada C_k, lo que corresponde a los máximos no estrictos de cada fila y hacerlo en cada una de las tablas.

- Para J3: igual que en los otros casos, queremos seleccionar los pagos máximos de J3 para cada posibilidad de estrategias de J1 y J2. Con lo que debemos seleccionar para cada A_i y B_j la estrategia de J3 que le hace maximizar sus pagos, es decir, el máximo (no estricto) del conjunto $\{c_{ij1}, ..., c_{ijn_3}\}$. Observamos para cada $i \in \{1, ..., n_1\}$ y cada $j \in \{1, ..., n_2\}$, tenemos que seleccionar el máximo no estricto comparando la casilla de intersección de la fila de la estrategia A_i y la columna de la estrategia B_j de cada una de las tablas.

Ejemplo: Recuperando el ejemplo del **Dilema del prisionero**, supongamos que ahora tenemos un tercer jugador en la misma posición que los otros jugadores: Si ninguno de los tres confiesan todos reciben pagos de -1 puesto que reciben años de cárcel por evasión fiscal. Si dos confiesan y uno no entonces los que confiesan se libran de la cárcel y el que no confiesa recibe la pena máxima, con lo reciben los que confiesan 0 y el que no -5. Similarmente si dos no confiesan y uno si, los que no han confesado reciben -5 y el que sí 0. Finalmente si todos confiesan reciben una pena, pero inferior a la máxima con lo que cada jugador recibe pagos de -4. Así tenemos,

J3: C

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,**-4**,-4)	(**0**,-5,0)
NC	(-5,**0**,0)	(-5,-5, 0)

J3: NC

J1|J2	C	NC
C	(**0**,**0**,-5)	(**0**,-5,-5)
NC	(-5,**0**,-5)	(-1,-1, -1)

Observamos que ya hemos seleccionado los pagos que queríamos destacar de J1 y de J2. En cuanto a J3 fijándonos en la primera casilla de ambas tablas, $u_3(C, C, C) = -4 > -5 = u_3(C, C, NC)$, lo que nos indica que si J1 y J2 confiesan J3 obtiene mejor resultado si también confiesa, con lo que, seleccionamos el pago de -4, haciendo esto para cada una de las casillas obtenemos,

J3: C

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,**-4**,**-4**)	(**0**,-5,**0**)
NC	(-5,**0**,**0**)	(-5,-5, **0**)

J3: NC

J1|J2	C	NC
C	(**0**,**0**,-5)	(**0**,-5,-5)
NC	(-5,**0**,-5)	(-1,-1, -1)

Obtenemos un único EN, (C, C, C) con pagos $(-4, -4, -4)$. Nos podemos preguntar a ver si la estrategia C es estrictamente dominante para todos los jugadores (igual que pasaba cuando teníamos dos jugadores).

Recordemos el concepto de dominancia, un estrategia A de un jugador domina estrictamente si, hagan lo que hagan el resto de los jugadores el obtiene pagos estrictamente superiores si juega A que si juega cualquier otra estrategia. Recordemos también que eliminamos de forma sucesiva aquellas estrategias que sabemos que nuestros jugadores nunca escogerán puesto que están estrictamente dominadas por otras.

Nos fijamos primero en las estrategias de J3, para ver si alguna estrategia domina estrictamente a otra, tenemos que mirar si los pagos de J3 de una tabla son estrictamente superiores siempre. Observamos que la estrategia C de J3 domina estrictamente a la estrategia NC, puesto que,

$$u_3(C,C,C) = -4 > -5 = u_3(C,C,NC)$$

$$u_3(C,NC,C) = 0 > -5 = u_3(C,NC,NC)$$

$$u_3(NC,C,C) = 0 > -5 = u_3(NC,C,NC)$$

$$u_3(NC,NC,C) = 0 > -1 = u_3(NC,NC,NC).$$

Con lo que, podemos prescindir de la segunda tabla, así nuestro juego quedaría,

J3: C

J1|J2	C	NC
C	(**-4**,**-4**,**-4**)	(**0**,-5,**0**)
NC	(-5,**0**,**0**)	(-5,-5, **0**)

Donde igual que pasaba con dos jugadores, la estrategia C domina estrictamente a la estrategia NC de los dos jugadores. Y fijándonos en las tablas anteriores, observamos que la estrategia C es una estrategia estrictamente dominante para los jugadores J1 y J2, así que igual que pasaba con dos jugadores, la estrategia C es una estrategia estrictamente dominante para todos los jugadores.

8. Análisis estratégico de Juegos Secuenciales

Para finalizar este trabajo veremos cómo analizar juegos secuenciales mediante la representación estratégica. Recordemos que cuando vimos algunas clasificaciones de los juegos, vimos que según si los jugadores elegian sus estrategias de forma secuencial o simultánea teniamos los juegos estáticos y los juegos dinámicos. Hasta ahora hemos supuesto que los jugadores elegían sus estrategias independientemente y simultaneamente, ahora en este capítulo nuestros jugadores elegirán las estrategias de forma secuencial e independiente, así que representaremos el juego mediante un diagrama de árbol.

En este trabajo no nos centraremos en el estudio de los juegos secuenciales, pero podemos encontrar libros como, *Dynamic Games: Theory and Applications* de Alain Haurie y Georges Zaccour [14], con los aspectos teóricos y algunas aplicaciones en diferentes áreas de este tipo de juegos.

Forma extensiva: es la representación de juegos secuenciales la cual consta de,

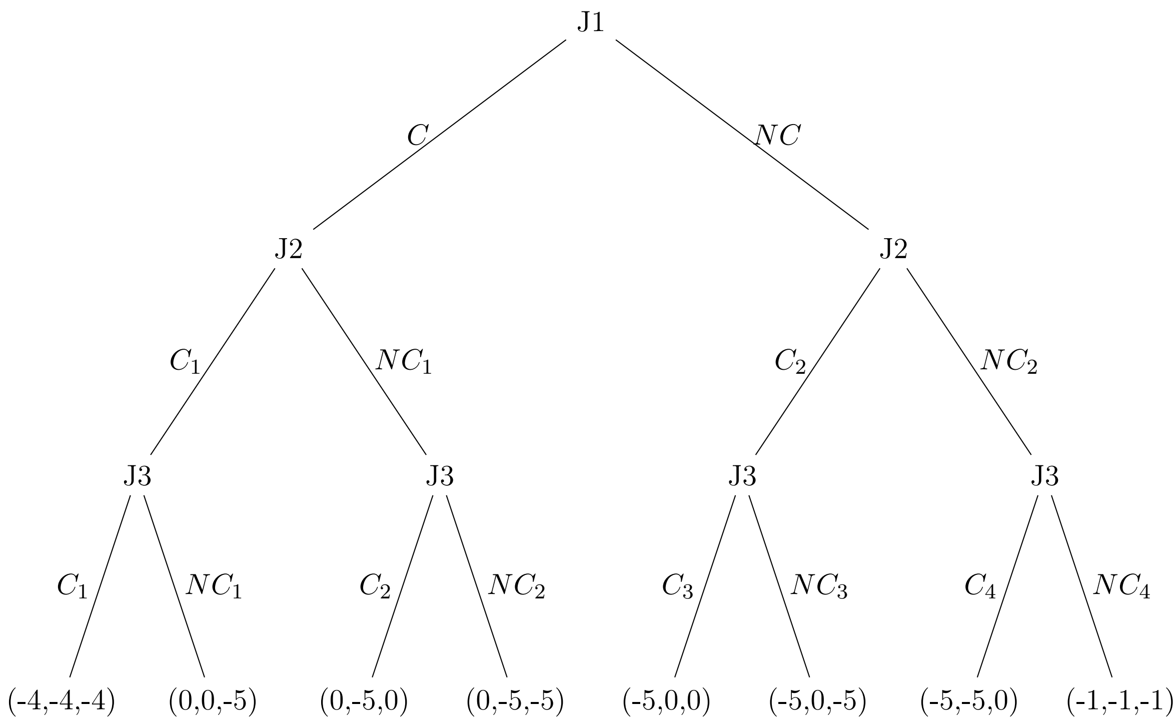
- **Nodos de decisión:** Indican que jugador está tomando la decisión.
- **Acciones:** Las opciones que tiene para elegir cada jugador en cada nodo de decisión. Se representan mediante ramas (aristas).
- **Nodos terminales:** Indican los pagos que se obtiene en los diferentes posibles desarrollos del juego.

Así que la forma extensiva de un juego secuencial, consiste en un diagrama de árbol el cual consta de nodos donde se encuentran los jugadores, a diferentes niveles en función del orden de elección y que se ramifican en diferentes ramas, según las diferentes acciones del jugador del nodo y de nodos terminales, que se encuentran al final de cada ramas, donde aparecen los pagos que se obtienen si los jugadores juegan las acciones que indica dicha rama. Es importante incluir en el árbol todas las opciones de los jugadores, aunque sea evidente que un jugador no vaya a escoger alguna acción, ya que se ha de hacer un análisis de las conductas hipotéticas y no solo realizamos nosotros este análisis, sino que también todos los jugadores deben hacerlo para anticiparse a las posibles estrategias de los jugadores.

Inducción hacia atrás: Los juegos secuenciales se pueden resolver mediante una inducción, donde empezamos obteniendo las mejores respuestas del último jugador en elegir y acabamos eligiendo las mejores respuestas del primer jugador en elegir.

Sin embargo, se pueden resolver también obteniendo una representación en forma estratégica, será como lo haremos en este trabajo puesto que queremos aplicar todos los conocimientos aprendidos en los capítulos anteriores.

Ejemplo: Supongamos que tenemos tres jugadores, y el ejemplo del **Dilema del prisionero**, pero esta vez primero elige J1 si decide confesar o no confesar, después J2 y finalmente J3. Con lo que J1 elige sin saber lo que hará J2 ni lo que hará J3, J2 elige sabiendo lo que ha hecho J1 pero sin saber que elegirá J3 y finalmente J3 sabe que han elegido J1 y J2, así que tenemos,



Conjuntos de información: Cada jugador dispone de un conjunto de información, que indica la información que tiene el jugador cuando ha de llevar acabo una decisión en un nodo.

Tenemos dos tipos de juegos secuenciales:

- De **información perfecta:** donde todos los jugadores tienen conocimientos de las estrategias que han llevado a cabo los jugadores previos. En este caso, cada jugador cuenta con un conjunto de información con un único elemento. Cada jugador tiene conocimientos del nodo en el que se encuentra.
- De **información imperfecta:** donde puede haber jugadores que no saben lo que ha hecho algún jugador o algunos jugadores previos a él. En este caso, el conjunto de información de estos jugadores contiene más de un elemento. Así que nos encontraremos con jugadores que no diferencian entre algunos de sus nodos.

Observación:

1. Un juego secuencial donde ningún jugador tiene conocimiento de lo que han hecho los jugadores previos a él, es en realidad un juego simultáneo, puesto que ningún jugador tiene conocimiento de en qué nodo se encuentra.
2. Cuando un jugador tiene un conjunto de nodos donde no sabe donde se encuentra, se considera el mismo nodo de decisión. Puesto que no los diferencia, así que a efectos de decisión ha de elegir sin saber en nodo donde se encuentra. Con lo que, las estrategias de estos nodos han de ser las mismas. Para indicarlo, uniremos dichos nodos con una línea discontínua.
3. Un mismo jugador puede aparecer en diferentes momentos de elección. Es decir, puede ser que, por ejemplo, elija primero un jugador luego otros y luego el vuelva a elegir.

Las estrategias: Las estrategias en los juegos secuenciales són un plan de acción completo, que permite al jugador actuar en cualquier caso. Es decir, una estrategia de un jugador indica la acción que tomará el jugador en cada momento del juego y para cualquier posible desarollo.

Es importante destacar que cada estrategia tendrá tantas componentes como nodos de decisión tenga el jugador, puesto que le ha de ofrecer una alternativa para cualquier situación del juego. Hay que tener en cuenta que, en caso de juegos con información imperfecta si un jugador no sabe en que nodo se encuentra, entonces, se considera el mismo nodo de decisión y con lo cual cual cada estrategia tendrán una misma componente para ambos nodos.

Conjuntos de estrategias: Cada jugador tendrá tantas estrategias como el producto del nº de acciones de cada nodo de decisión, es decir, si un jugador i tiene n nodos de decisión,

$$\text{nº de estrategias} = \prod_{j=1}^{n} \text{nº de acciones del nodo } j.$$

Esto se debe a que cada estrategia es un plan de acción y con lo cual contiene una componente de cada nodo, es decir, una acción de cada nodo y además el conjunto de estrategias de un jugador ha de contener todas las posibles estrategias que el jugador puede llevar a cabo, con lo cual, todas las posibles combinaciones de estas componentes.

Ejemplo: Volviendo al ejemplo anterior, vamos a ver los conjunto de estrategias de nuestros jugadores suponiendo que es un juego de información perfecta.

- Para J1: Tenemos que puesto que solo dispone de un nodo tiene conjunto de estrategias $S_1 = \{C, NC\}$.
- Para J2: Como tiene dos nodos, las estrategias han de contener un elemento de cada nodo y además, el conjunto de estrategias ha de contener todas las posibles combinaciones entre las acciones de los dos nodos, para que el jugador pueda actuar en cualquier posible desarrollo del juego. Así que tenemos, $S_2 = \{C_1 - C_2, C_1 - NC_2, NC_1 - C_2, NC_1 - NC_2\}$. Donde por ejemplo $C_1 - C_2$, significa que si J1 juega C, J2 jugará C_1 y si J1 juega NC, J2 jugará C_2.
- Para J3: Como tiene 4 nodos, sus estrategias han de contener un elemento de cada nodo y el conjunto de estrategias todas las combinaciones, así que es un conjunto de 16 elementos,

  $S_3 = \{C_1-C_2-C_3-C_4, C_1-C_2-C_3-NC_4, C_1-C_2-NC_3-C_4, C_1-C_2-NC_3-NC_4, C_1-NC_2-C_3-C_4, C_1-NC_2-C_3-NC_4, C_1-NC_2-NC_3-C_4, C_1-NC_4-NC_3-NC_4, NC_1-C_2-C_3-C_4, NC_1-C_2-C_3-NC_4, NC_1-C_2-NC_3-C_4, NC_1-C_2-NC_3-NC_4, NC_1-NC_2-C_3-C_4, NC_1-NC_2-C_3-NC_4, NC_1-NC_2-NC_3-C_4, NC_1-NC_2-NC_3-NC_4\}$.

  Con lo que, por ejemplo la estrategia $NC_1 - C_2 - NC_3 - C_4$, es un plan de acción de J3 para cualquier posible desarrollo del juego: si J1 juega C y J2 juega C_1, entonces J3 juega NC_1; si en cambio J2 juega NC_1, entonces J3 juega C_2; si J1 juega NC y J2 C_2, entonces J3 juega NC_3 y si J2 juega NC_2, entonces J3 juega C_4. Se podría resolver el juego mediante la representación de juegos en forma estratégica con tres jugadores, obtendríamos 16 tablas con dos filas y cuatro columnas cada una.

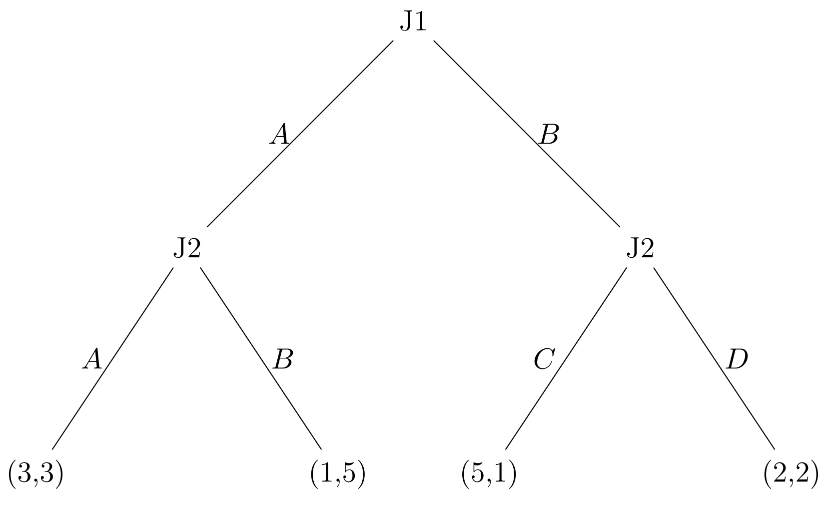
Observación: Si por ejemplo, J3 no tuviera conocimiento de lo que sea hecho previo a él, entonces, $C = C_i, NC = NC_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces, $S_3 = \{C, NC\}$, puesto que no diferencia en que nodo se encuentra. Ahora si por ejemplo J3 sabe la decisión de J1 pero no la de J2 entonces $C_1 = C_2, NC_1 = NC_2$ pero diferentes de $C_3 = C_4$ y $NC_3 = NC_4$, entonces, $S_3 = \{C_1 - C_3, C_1 - NC_3, NC_1 - C_3, NC_1 - NC_3\}$.

Paso de forma extensiva a forma estratégica: Nuestro objetivo ahora es pasar del diagrama del árbol, a un forma estratégica del juego para poder analizarlo como hemos visto en los capítulos anteriores. Una vez descritos los conjuntos de estrategias, $S_1, ..., S_n$ podemos considerar, $N = \{1, ..., n\}$ el conjunto de jugadores, donde cada jugador $i \in N$ elegirá estrategias de S_i, cada rama del árbol nos lleva un vector de pagos $(u_1, ..., u_n)$, donde u_i corresponde a los pagos que recibirá el jugador i si se llevan a cabo las acciones de esa rama. Así que ya podemos resolver los juegos simultáneos con los conceptos visto durante todo el trabajo.

8.1. Juegos secuenciales bipersonales

En el caso de disponer de un juego secuencial con dos jugadores y cada uno con un número finito de estrategias, entonces, tenemos un juego bipersonal finito. Ya sabemos cuáles son los conjuntos de estrategias de cada jugador, los pagos que reciben para cada perfil de estrategias, ahora queda representarlo y resolverlo como hemos visto durante los anteriores capítulos.

Ejemplo 1: Supongamos que tenemos el siguiente juego secuencial de información completa,



Entonces tenemos $S_1 = \{A, B\}$ y $S_2 = \{A - C, A - D, B - C, B - D\}$, lo representamos y obtenemos,

J1|J2	A-C	A-D	B-C	B-D
A	(3,3)	(3,3)	(1,5)	(1,5)
B	(5,1)	(2,2)	(5,1)	(2,2)

Destacar que si J1 elige A, entonces, nos fijamos en la primera componente de las estrategias de J2, puesto que corresponden al nodo de J2 si J1 juega A, y en caso contrario, nos fijamos en la segunda componente de las estrategias de J2.

Con lo que ya podemos analizarlo como hemos hecho hasta ahora, y obtenemos que el juego tiene un único EN $(B, B-D)$ con pagos (2,2).

Ejemplo 2: Retomemos el ejemplo de la **Subasta a primer precio**, en este caso con dos jugadores, donde tenemos que la valoración del objeto de J1 es v_1=0.5, pero la valoración que da J2 no es información pública, es decir, J1 no sabe el valor de v_2. Sin embargo, consideraremos que J1 sabe que o bien $v_2 = 0$ o bien $v_2 = 1$, ambas con probabilidad 1/2. Destacar que en este caso no tenemos la hipótesis de $v_1 > v_2$, es decir, no tenemos los jugadores ordenados en función de sus valoraciones.

Tanto si v_2 es 0 o 1 ambos jugadores tienen para elegir entre pujar 0, 0.5 o bien 1. Recordemos que se lleva el objeto el que puja más alto con utilidad $v_i - p_i$ donde p_i es lo que paga por el producto, lo que puja, y que en caso de empate, supondremos ahora que cada uno obtiene un pago de $\frac{v_i - p_i}{2}$. Con lo que tenemos,

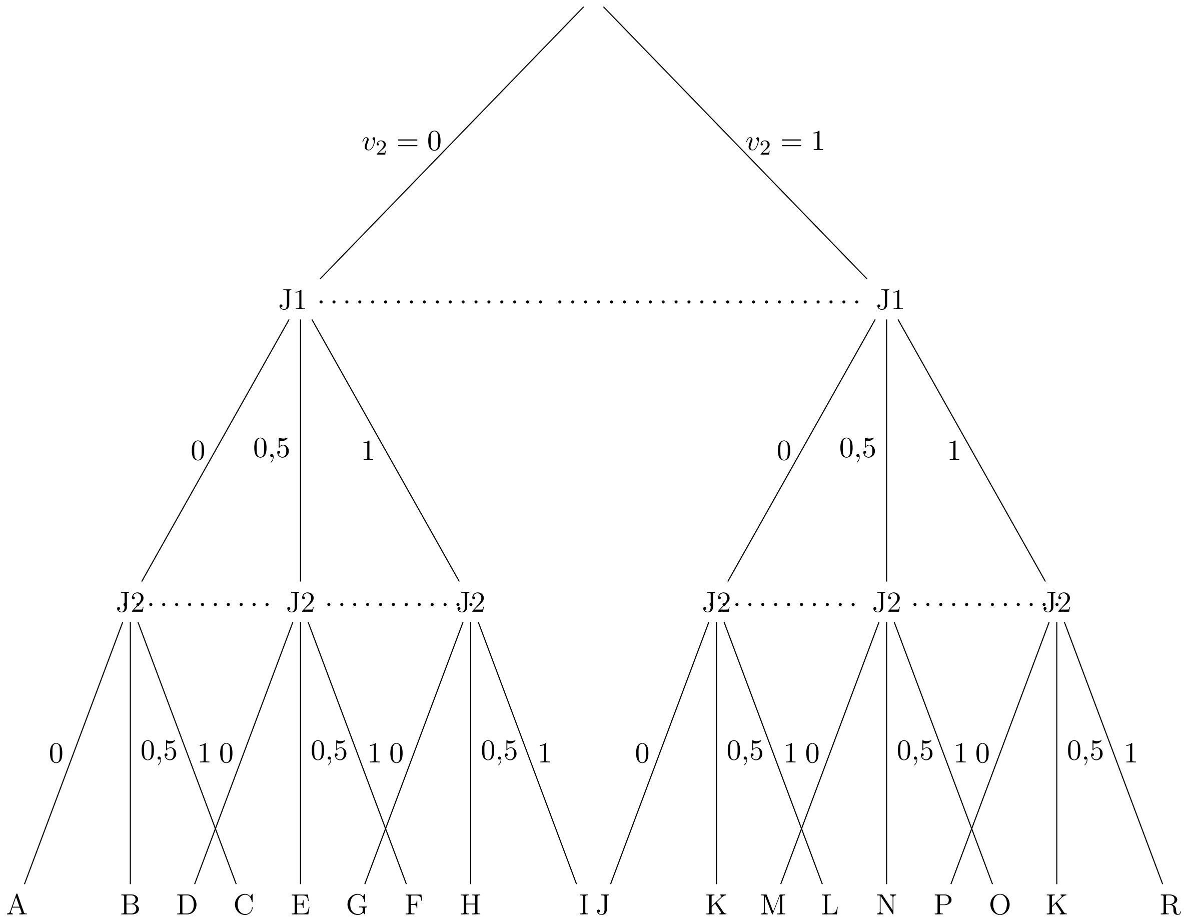
- Si $v_2 = 0$

J1|J2	0	0.5	1
0	A=(0.25,0)	B=(0,-0.5)	C=(0,-1)
0.5	D=(0,0)	E=(0,-0.25)	F=(0,-1)
1	G=(-0.5,0)	H=(-0.5,0)	I=(-0.25,-0.5)

- Si $v_2 = 1$

J1|J2	0	0.5	1
0	J=(0.25,0.5)	K=(0,0.5)	L=(0,0)
0.5	M=(0,0)	N=(0,0.25)	O=(0,0)
1	P=(-0.5,0)	Q=(-0.5,0)	R=(-0.25,-0.5)

Así que podríamos verlo como un juego secuencial, donde J1 no diferencia en que nodo se encuentra, y J2 no sabe lo que a elegido J1, sin embargo, sí que sabe qué valoración tiene. Es decir, J1 tiene un nodo de decisión, mientras que J2 tiene dos, con lo que tendríamos,



Y por lo tanto, tenemos que como J1 no diferencia en que nodo se encuentra $S_1 = \{0{,}0.5{,}1\}$, sin embargo, aunque J2 no sepa qué opción ha tomado J1, sí que sabe cuál es su valoración, con lo que $S_2 = \{$0-0,0-0.5,0-1,0.5-0,0.5-0.5,0.5-1,1-0,1-0.5,1-1$\}$. Tener en cuenta que consideramos que, v_2 tiene la misma probabilidad de que sea $v_2 = 0$, como de que sea $v_2 = 1$, con lo que los pagos de un perfil de estrategias será la suma de los pagos resultantes si $v_2 = 0$ y los resultantes si $v_2 = 1$ y divididos entre dos, es decir, la media. Con lo que tenemos (lo ponemos en dos tablas para que quepa en el documento no porque haya que diferenciar dos tablas),

J1|J2	0-0	0-0.5	0-1	0.5-0	0.5-0.5
0	(**0.25**,**0.25**)	(**0.125**,**0.25**)	(**0.125**,0)	(**0.125**,0)	(0,0)
0.5	(0,0)	(0,**0.125**)	(0,0)	(0,-0.125)	(0,0)
1	(-0.5,**0**)	(-0.5,**0**)	(-0.375,**0**)	(-0.5,**0**)	(-0.5,**0**)

J1|J2	0.5-1	1-0	1-0.5	1-1
0	(**0**,-0.25)	(**0.125**,-0.25)	(**0**,-0.25)	(**0**,-0.5)
0.5	(**0**,-0.125)	(**0**,-0.5)	(**0**,-0.375)	(**0**,-0.5)
1	(-0.375,**0**	(-0.375,**0**)	(-0.375,-0.25)	(-0.25,-0.25)

Observamos que tenemos dos EN (0,0-0) con pagos (0.25,0.25) y (0,0-0.5) con pagos (0.125,0.25).

9. Conclusiones

Empezando por el ámbito teórico, hemos estudiado las diferentes clasificaciones de los problemas de decisión, y hemos profundizado en algunos de ellos dando las bases teóricas necesarias para su resolución.

Hemos visto la existencia de una solución a través del Teorema de Nash, y la problemática que esto da cuando se trata de estrategias puras, sin embargo, a través de las estratégias mixtas hemos podido resolverla. También hemos estudiado la dominancia, concepto que nos ayuda a predecir los resultados y a descartar aquellas opciones que no se van a dar. Además de la dominancia débil, que nos ha permitido tratar la Teoría del punto focal.

Durante todo el trabajo hemos aplicado los conceptos teóricos para la resolución de diversos problemas de decisión: problemas sociales, como el Dilema del prisionero; problemas económicos, como los Juegos de Mercado; problemas con diversos jugadores, como las subasta, etc. Todo ello para obtener una mayor comprensión de todos los conceptos.

Finalmente, en cuanto al ámbito teórico, también hemos visto como podemos aplicar la teoría de juegos simultáneos para la resolución de juegos secuenciales.

Entrando en el ámbito didáctico, a través de este trabajo hemos podido ver la cantidad de aplicaciones de la Teoría de Juegos, y no solo en las matemáticas, sino en muchos otros ámbitos como en la economía, la política o la sociología.

Hemos visto a través de las estrategias y los equilibrios la importancia de tomar decisiones racionalmente, y cómo esto puede hacerte aumentar las posibilidades de conseguir tus objetivos o al menos de conseguir la opción que más se acerque a ellos.

Pero no solo nos permite tomar las mejores decisiones, si no que también hemos visto cómo utilizando los conceptos de equilibrio y dominancia podemos predecir qué situaciones son más probables que se den y así obtener una mayor comprensión de las situaciones que se dan a nuestro alrededor.

Con lo que hemos visto que los conceptos de la Teoría de Juegos pueden ayudarnos a comprender mejor las situaciones de conflicto, a llevar a cabo una mejor negociación, a predecir situaciones que no queremos que ocurran, y mucho más.

En definitiva, un buen uso de los conceptos de la Teoría de Juegos puede darte una gran ventaja en la toma de decisiones en cualquier ámbito y te puede ayudar a comprender mejor las situaciones que se dan.

Finalmente, en el ámbito personal, este trabajo me ha hecho reflexionar sobre la toma de decisiones, no solo lo que te puede beneficiar tomarlas racionalmente, y la cantidad de situaciones que te puedes ahorrar prediciendo lo que va a pasar. Sino el hecho de que siempre haya una solución, que aunque en el caso teórico había un momento en el que en algunos juegos no podíamos asegurar la existencia, aumentando las posibilidades estratégicas hemos dado un giro y hemos acabado viendo que siempre hay una solución. Así que en los conflictos personales igual, aunque hayas estudiado tus opciones y parezca que no haya salida siempre vas a poder aumentar tus opciones y dar un giro a la situación.

Referencias

[1] Owen, Guillermo :*Game Theory*, 3rd Edición, FisicalBook, 2005.

[2] Casas Méndez, Balbina; Fiestras Janeiro, M.Gloria; Gracía Jurado, Ignacio; González, Díaz, Julio: *Introducción a la Teoría de Juegos*, Universidad de Santigado de Compostela, 2012. ISBN: 978-84-9887-913 .

[3] Binmore, George Kenneth: *Game Theory. A Very Short Introduction* , 2007. Traducción Pepe Ventura López, 2009. ISBN: 978-84-206-6219-0.

[4] Alvarez, Mikel; Calleja, Pedro; Izquierdo, Josep Maria; Martinez, F.Javier; Nuñez, María: *Teoría de Juegos*, Fundació per la Universitat Oberta de Catalunya, 2021. ISNB 978-84-9180-836-7.

[5] Von Neumann, John ; Oskar Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Estados Unidos, 1944.

[6] C. Border, Kim: *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[7] Nash, John : tesis doctoral en Matemáticas en la Universidad de Princeton *Noncooperative Games*, 1950.

[8] Rudin, Walter: *Principios de Análisis Matemático*, tercera edición, traducción Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V, 1980. ISBN 968-6046-82-8.

[9] Poundstone, William: *Prisoner's Dilemma*, Oxford University Press, 1993.

[10] Klemperer, Paul ; *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, 2004.

[11] Apostol, Tom M.; *Análisis Matemático.*, Editorial Reverté, 1976.

[12] Sugden, Robert: *A Theory of Focal Points*, The Economic Journal Vol. 105, No. 430 (May, 1995), pp. 533-550, Oxford University Press, 1995.

[13] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economists*,Princeton University Press, 1992.

[14] Haurie, Alain; Zaccour, Georges: *Dynamic Games: Theory and Applications*, 2005. ISBN 9780387246017.

[15] C. E. Lemke; J. T. Howson:*Equilibrium Points of Bimatrix Games*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 12, No. 2, 1964.