



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

DOBLE GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

Treball final de grau

ROBOADVISORS

Autora: Ariadna Luque Plaza

Director: Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia

**Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i estadística**

Director: Dra. Yuliya Kasperskaya Riabenko

Realitzat a: Departament d'empresa

Barcelona, 10 de juny de 2023

Abstract

One of the main objectives of this study is to describe and understand how roboadvisors work. Roboadvisors emerged with the fintech disruption. Providing user-friendly and automated process for creating and managing portfolios. We are going to examine all the steps required to create these portfolios, from investor profile creation to portfolio creation using algorithms like Modern Portfolio Theory. We are also going to go through rebalancing process to maintain the portfolio in time. Additionally, we will replicate some of these methods using real data from Yahoo Finance combined with tools like R, Excel and Portfolio Visualizer.

Resumen

Uno de los principales objetivos de este trabajo es describir y comprender el funcionamiento de los roboadvisors. Los roboadvisors surgieron con la disrupción de las fintech proporcionando un proceso amigable y automatizado de creación y gestión de carteras. Vamos a examinar todos los pasos necesarios para crear y gestionar estas carteras, desde la creación del perfil del inversor hasta la creación de la cartera con algoritmos como la Teoría Moderna de Carteras. También vamos a pasar por un proceso de rebalanceo para mantener la cartera en el tiempo. Además, replicaremos algunos de estos métodos utilizando datos reales de Yahoo Finance combinados con herramientas como R, Excel y Portfolio Visualizer.

Resum

Un dels principals objectius d'aquest treball és descriure i comprendre el funcionament dels roboadvisors. Els roboadvisors van sorgir amb la disrupció de les fintech proporcionant un procés amigable i automatitzat de creació i gestió de carteres. Anem a examinar tots els passos necessaris per crear aquestes carteres, des de la creació del perfil de l'inversor fins la creació de la cartera amb algoritmes com ara la Teoria Moderna de Carteres. També passarem per un procés de rebalancejament per mantenir la cartera en el temps. A més a més, replicarem alguns d'aquests mètodes amb dades reals de Yahoo Finance combinades amb eines com ara R, Excel i Portfolio Visualizer.

Agraïments

Vull agrair als meus tutors Yuliya Kasperskaya i Josep Vives que m'han guiat i aconsellat en aquest treball. També vull aprofitar l'ocasió per agrair a la meva família pel seu suport durant tots aquests anys en la universitat. Han estat uns anys inoblidables.

“La realidad es infinitamente diversa, escapa a las deducciones ingeniosas del pensamiento abstracto, no soporta la clasificación estrecha y exacta, la realidad tiende al fraccionamiento perpetuo, a la variedad infinita.” Fiódor Dostoyevski

Taula de continguts

1.- Introducció.....	2
2.- Endinsant-nos en els roboadvisors.....	3
2.1.- Orígens i concepte.....	3
2.2.- Anàlisi de mercat.....	4
2.2.1.- Públic objectiu dels roboadvisor.....	4
2.2.2.- Roboadvisors a nivell global.....	5
2.3.- Aventatges i inconvenients dels roboadvisor.....	7
2.3.1.- Costos roboadvisors.....	7
3.- Funcionament dels roboadvisors.....	9
3.1.- Creació del perfil de l'inversor.....	9
3.1.2.- Escala de perfils.....	13
3.2.- Formació de la cartera: Actius que la constitueixen.....	14
3.2.1.- Classes d'actius.....	14
3.2.2.- Instruments d'inversió.....	15
3.3.- Construcció d'una cartera.....	19
3.2.1.- Models matemàtics per a la creació de carteres òptimes.....	19
3.2.1.1.- Teoria Moderna de Carteres.....	19
3.2.1.2.- Black-Litterman.....	27
3.2.1.3.- Models multifactors: Model de 5 factors de Fama i French.....	33
4.- Rebalancejament.....	38
4.1.- Rebalancejament amb metaheurística.....	39
4.2.- Rebalancejament clàssic.....	42
5.- Fiscalitat dels roboadvisors.....	45
5.1.- Tax loss harvesting.....	45
5.2.- Imposició sobre els roboadvisors.....	45
6.- Una cartera òptima i la cartera 60/40.....	46
7.- Conclusions.....	50
Bibliografia.....	iii
Glossari.....	vii

1.-Introducció

Les disruptors tecnològiques fan que el món canvi i evolucioni i l'àmbit de les inversions financeres no és una excepció. En els últims anys hem vist el sorgiment d'unes noves eines d'inversió que han aconseguit desafiar les solucions d'inversió tradicionals: els roboadvisors. Podem definir roboadvisor com una eina d'inversió automatitzada que busca a través d'algoritmes construir i gestionar una cartera d'actius.

I aquests han aconseguit endinsar-se dins de tots els mercats, arribant a gestionar 2.32 trilions d'euros en actius al 2022. S'espera que el creixement continuï en els propers anys podent arribar en 2027 a gestionar uns 4.45 trilions d'euros en actius financers¹. La clau del seu èxit recau principalment en la seva natura, l'automatització i la digitalització aconsegueix una reducció substancial dels costos i fins i tot fa també que siguin productes molt accessibles i senzills d'utilitzar.

Una de les principals problemàtiques dels roboadvisors és que molts els consideren una caixa negra, és a dir, no entenen el procés que duen a terme per oferir els serveis i creuen que tenen poca transparència. Així doncs, l'objectiu d'aquest treball és entendre el funcionament d'aquestes eines.

L'experiència d'inversió en un roboadvisor s'inicia amb el plantejant d'un test. Aquest test té com a objectiu conèixer l'inversor, els seus objectius financers i la seva aversió al risc. Amb les dades que es recullen en aquest procés el roboadvisor assigna de manera personalitzada una cartera al client.

Però, com es construeix aquesta cartera? El primer pas en la construcció de la cartera està en la determinació de la col·lecció d'actius que poden constituir la nostra cartera. Per la natura dels roboadvisors, es busquen actius que estiguin molt diversificats per reduir el risc i amb costos baixos. Finalment, s'exigeix també que segueixin una inversió passiva, doncs requereix menor control i seguiment que les inversions actives.

El següent pas és l'ús d'algoritmes matemàtics per determinar les carteres òptimes que es recomanaran als nostres clients. El principal algoritme que usen els roboadvisors per construir les seves carteres és la teoria moderna de carteres presentada per Harry Markowitz al 1952, i per la qual va obtenir un premi Nobel. Veurem també una millora d'aquesta teoria també usada per molts roboadvisors, el model de Black-Litterman, i finalment veurem un altre tipus de diversificació alhora d'assignar actius de la mà dels premis Nobel Fama i French.

Una vegada creada la nostra cartera òptima, adaptada a les preferències del client, sorgeix una nova problemàtica: el manteniment de la cartera en el temps.

Evidentment, amb els pas del temps el valor dels actius i, per tant de la cartera, fluctua i fa variar l'assignació inicial d'aquesta fent que l'inversor acabi assumint més risc del que està disposat a assumir i, per corregir aquesta situació i portar la cartera a la seva situació inicial, introduïm: el rebalancejament.

En aquest treball veurem una manera més clàssica de rebalancejar que busca, tenint en compte el perfil de l'inversor, tornar a la cartera inicial. L'altra tècnica que veurem, busca rebalancejar utilitzant estratègies evolutives per conservar en la cartera els millors actius i mantenir el nivell de risc i retorns inicials. Aquests algoritmes obren la porta també a una temàtica que no veurem aquí que és l'ús de AI en els roboadvisors.

Finalment, crearem una cartera i veurem el seu comportament en els últims anys tot comparant-la amb la cartera més popular i controversial dels roboadvisors: la cartera d'assignació 60/40.

1 Statista Robo-advisors: Worldwide

2.- Endinsant-nos en els roboadvisors

Per poder arribar a tenir una bona comprensió del que és un roboadvisor, el seu funcionament i quines són les matemàtiques que hi ha darrere d'aquestes eines d'inversió, comencem una incursió en el concepte de roboadvisor i el seu paper en el món de la inversió.

2.1.- Orígens i concepte

Roboadvisor està composta per dues paraules robo (per robot) i advisor (assessor). Robo es refereix al procés completament automatitzat en què a través d'algoritmes matemàtiques pren decisions d'inversió sense intervenció humana. Advisor és referència als serveis de gestió de patrimonis a través de canals digitals com ara ordinadors o mòbils. Ajuntant els termes anteriors obtenim que un roboadvisor és una plataforma digital de gestió de carteres que té com a objectiu la creació i gestió d'una cartera de manera automatitzada.

Abans d'entrar en més profunditat en el seu funcionament, primer passarem a explicar quins són els seus orígens. El primer roboadvisor va aparèixer al 2008 de la mà de Betterment, originalment pretenia el rebalanceig actiu intentant complir objectius d'inversió en una determinada data². Així, buscava de manera automatitzada i senzilla ser capaç de gestionar passivament les carteres. De fet, els algoritmes matemàtics que usen no són res nou. Aquestes metodologies porten anys sent usades pels professionals financers. La innovació que Betterment proposa era apropar i facilitar l'ús d'aquests algoritmes a clients particulars a través d'una eina senzilla d'usar.

Amb els anys els roboadvisors van anar guanyant popularitat i es van començar a estendre en el món financer. Al principi les empreses que oferien roboadvisor estaven exclusivament dedicades a ,això. Però, amb el pas del temps s'han anat afegint bancs, gestores financeres i empreses tecnològiques. A finals de 2015, prop de 100 companyies disposaven d'aquests sistemes gestionant en total uns \$60 mil milions. Des de llavors el creixement ha estat exponencial. Referint-nos a dades del 2022, els roboadvisors gestionaven prop d'un 2.32€ trilions, i s'espera que creixi fins al 4.45€ trilions al 2027³.

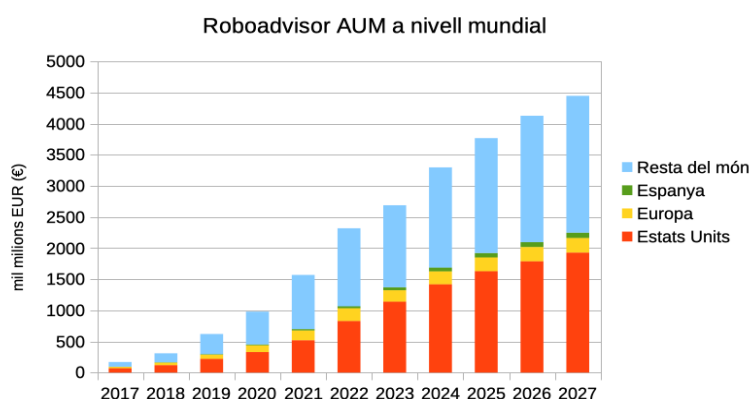


Figura 1: Adaptació gràfic Roboadvisor AUM a nivell mundial especificant AUM en els següents mercats: Estats Units, Europa i Espanya. Font: Statista

² Stein Jon (Juliol 2016). The history of Betterment: Changing an industry.

³ Sun Kevin (June 2018). Robo-Advisor: Future to financial management?

No podem avançar en aquest treball sense definir primer la mètrica que serà clau en el nostre anàlisi: AUM, assets under management, es refereix al valor de mercat dels actius gestionats per una companyia en nom dels seus clients. De fet, ens serveix com a indicador de mesura de l'èxit de la companyia en atraure clients i incrementar la seva quota de mercat. Pels roboadvisors, aquesta és la mètrica que ens ajuda a determinar els seus ingressos i la seva magnitud.

2.2.- Anàlisi de mercat

2.2.1.- Públic objectiu dels roboadvisor

Per a qui són aquests roboadvisors? Inicialment, un podria pensar que el públic objectiu seria gent que just comença en el món de la inversió i per a inversions petites.

Basant-nos en les dades d'un estudi del Deutsche Bank, en un inici, prop de la meitat dels usuaris, eren milennials d'entre 24-35 anys degut a la seva fàcil adaptació a les noves tecnologies. Tot i això, ha anat canviant amb els anys i actualment, segons dades de la indústria en Estats Units, l'edat mitjana s'enfila als 40 anys amb comptes que escalen fins als 6 dígit⁴.

Aquest fenomen vist en la indústria americana s'explica principalment per la comoditat que ofereixen els roboadvisors alhora de crear carteres per a la jubilació de manera automatitzada.

L'escassa informació del mercat europeu, seguint el mateix estudi amb dades d'Itàlia i Alemanya principalment, indica que de nou la mitjana edat al voltant dels 40 anys i són principalment usats per homes. Entrant en més detall, els clients solen tenir una mitjana de guanys de 4000€/mes i la majoria tenen estudis universitaris. També sabem que, per la majoria dels inversors, els roboadvisors només són una part de la seva cartera total d'inversió.

Per una altra banda, hi ha entitats que permeten comptes a menors i, segons dades d'Indexa Capital, hi ha un percentatge entorn al 4-5% de comptes d'aquestes característiques⁵ essent una bona opció per rendibilitzar els diners dels més petits i alhora iniciar la seva educació financera.

Resumint així en dues categories:

- Baby-boomers (1946-1964) tenen un perfil amb estudis universitaris relacionats amb enginyeria, medicina o economia, coneixements financers i experiència, solen estar casats i tenir fills grans, i el seu objectiu financer és la jubilació.
- Milennials(1981-1996) tenen un perfil amb estudis universitaris relacionats amb economia, menor grau de coneixements financers i poca experiència, solen estar solters i tenir un perfil d'inversió més agressiu i més a curt termini.

4 Kaya Orçun (Agost 2017) *Robo-advice – a true innovation in asset management*, Deutsch Bank Research.

5 Cotza Patrizia (Octubre 2022). *Cuentas para menores y educación financiera*. Indexa Capital

2.2.2.- Roboadvisors a nivell global

Els roboadvisors s’engloben dins de les fintech dins de la categoria d’inversions digital és el segment de mercat que conté els neobrokers i els roboadvisors.

El mercat dels roboadvisors espera registrar en el període de 2023 a 2026 un CAGR, de 13,4%⁶ impulsat principalment per la digitalització de l’industria BFSI, Banking Financial Services and Insurance. Especifiquem els factors que han contribuït a impulsar-los:

- La ràpida automatització i eliminació de l’acció humana d’aquests serveis promou costos més baixos que serveis similars i la possibilitat d’usar-los 24/7 sempre que disposem de connexió a internet.
- Les economies emergents. Aquestes estan permetent i estimulant l’ús i la recerca en l’àmbit dels roboadvisors. Per exemple, l’autoritat del mercat d’Aràbia Saudita ha autoritzat a algunes companyies a introduir els seus roboadvisors allà⁷. L’objectiu segueix l’estratègia d’introduir les fintech en l’economia àrab.
- La pandèmia també ha tingut un paper clau en l’extensió d’aquestes eines d’inversió. No tan sols a nivell B2C (Business to consumer), és a dir, cap als consumidors sinó que també en el B2B (Business to business). En els resultats des de 2019 a 2020 d’algunes companyies s’ha reflectit un increment en inversions digitals, entre les quals es troben els roboadvisors. En global, segons dades de Wealthfront, des del confinament ha incrementat prop del 68%⁸.

Les dades a nivell global, en termes d’AUM, evidencien un clar domini dels Estats Units com podem veure en la figura 2 tant a nivell de consumidors com a nivells de companyies que ofereixen aquest serveis posseint les firmes amb major quota de mercat com ara Betterment, Charles Schwab, Vanguard, Fidelity i Wealthfront entre altres.

Actualment, els roboadvisors són presents arreu del món. Els països en què tenen més presència, segons Statistica, són en funció d’AUM:

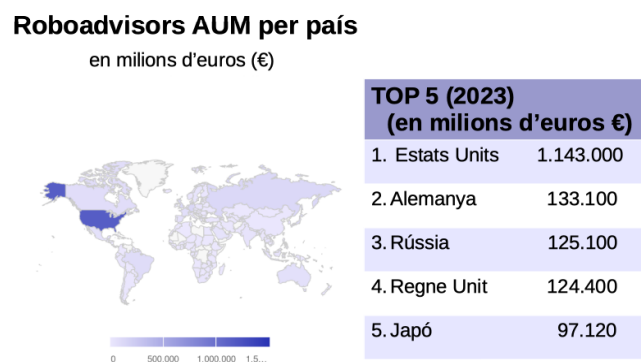


Figura 2: Adaptació gràfic Roboadvisor AUM per país, on està acolorit el país de menor AUM de color lila clar i els de major AUM de color lila fosc. Destacant en una taula el top 5 de països amb major Font: Statista

6 Statista Robo-advisors: Worldwide

7 Sophia Mary (Juliol 2019). Saudi Arabia Has Approved Two Robo Advisors As Automated Investing Picks Up. Forbes

8 Tearsheet (2021).The space between:The growing convergence between traditional asset managers and robo-advisors

Com ja hem comentat anteriorment el país on tenen més presència és els Estats Units. Un dels factors clau en la seva expansió és la regulació. La regulació no és tan rígida com en altres llocs fet que permet una major facilitat alhora d'oferir els seus productes. Un altre factor són els costos d'aquests serveis, que són més baixos que en altres països. A més els Estats Units, per la seva història, tenen més cultura d'inversió que altres països.

Parlem ara del mercat asiàtic on els roboadvisor estan experimentant un major creixement en els últims anys destacant els mercats de Japó, Xina, Singapur i Austràlia. El Japó és un dels mercats amb un gran creixement en els últims anys gràcies a l'impuls del govern japonès en gran mesura. Tradicionalment, els japonesos opten per l'efectiu i la renda fixa. Però, en els últims anys, els tipus d'interès negatius en la renda fixa han fet necessària la transformació del mercat. Així doncs, el govern japonès ha facilitat la implementació de roboadvisors amb l'objectiu d'ampliar les possibilitats d'inversió i alhora ampliar la cultura financera. Altres governs també és sumen a aquesta iniciativa com ara Rússia o Aràbia Saudita.

Un cas a destacar és la Xina, segons dades de Statista, Xina tenia prop de 370 mil milions d'euros d'AUM al 2022, en canvi al 2023 la xifra s'ha reduït fins al 8 mil milions d'AUM. Per què ha succeït aquest fet?

Al desembre de 2016 el China Merchant Bank va llançar Machine Gene Investment primer roboadvisor xinès i el més gran de Xina amb 200.000 usuaris i gestionant prop 2 mil milions d'euros en actius. Però, al desembre de 2021 va suspendre la creació i ampliació de carteres. Finalment, al juliol de 2022 va tancar.

Els roboadvisors xinesos inverteixen principalment en fons d'inversió. Però, per operar allà amb fons d'inversió és necessària una llicència. Al 2019, aquesta llicència va ser concedida en un programa pilot a China Merchant Bank en altres. El problema radica en què per operar un roboadvisor també es necessita una llicència d'assessoria que la majoria no tenien. Així doncs, les noves regulacions, ara més estrictes, han acabat amb quasi tot el mercat xinès de roboadvisor. La reticència en la concessió de llicències s'explica perquè la gent gran i amb grans patrimonis veu això com una caixa negra veient els roboadvisor poc transparents, clars i especialment confús el procés de creació de carteres.

Veiem a la figura 2 que el mercat Europeu és relativament petit. El mercat europeu es caracteritza perquè els inversors tenen una gran aversió al risc i una forta dependència dels sistemes de pensions. Segons dades del Deutsche bank una gran part de l'actiu financer de les famílies està repartit principalment entre dipòsits bancaris (41%), assegurances i plans de pensions (39%).

Això fa que sigui un mercat amb molt de potencial. En particular, una gran part de la població desconeix els serveis que ofereixen els roboadvisors. Un factor que segur contribuirà a la seva expansió és que la banca tradicional, molt estesa en Europa, ofereix actius amb costos majors que el cost que ofereix un roboadvisor.

2.3.- Avantatges i inconvenients dels roboadvisor

El primer avantatge que presenten els roboadvisors respecte la banca tradicional és l'automatització i digitalització del procés d'onboarding, la facilitat que donen a l'obrir comptes des del qualsevol dispositiu electrònic en pocs minuts, responent un senzill qüestionari i obrint un compte en l'entitat, oferint uns costos molt baixos i demanant una inversió inicial molt baixa fent-los accessibles per la majoria. Un altre avantatge relacionada és l'accés 24 hores al dia els 7 dies de la setmana sense estar subjecte a un horari concret.

Un altre avantatge són les metodologies que usen per crear les carteres, que són més objectives que els serveis tradicionals. Doncs, és el resultat de l'aplicació d'algoritmes matemàtics, molt d'ells guanyadors de premis Nobel. Destaquem també la comoditat que ofereixen els algoritmes de rebalanceig automàtics que s'ocupen de mantenir la cartera segons els objectius del client.

Parlem ara dels desavantatges, el primer és la limitació alhora d'invertir, doncs si un client vol fer inversions en productes com ara futurs o bé estratègies complexes d'inversió, això no ho trobarà en un roboadvisor.

Una altre problemàtica, són precisament els algoritmes que moltes vegades no són capaços d'adaptar-se completament a les especificacions de cada client i la poca predicció de les caigudes del mercat en molts algoritmes.

Un últim tema, és la confiança i la transparència, mentre que per alguns això és un avantatge doncs no estan influïts per les manies que pugui tenir un gestor humà. I molts consideren que l'ús d'automatització i els algoritmes fan més clars el seu funcionament que els serveis tradicionals. Altres creuen que precisament això els fa ser caixes negres, doncs molta gent no acaba de comprendre el funcionament d'aquests.

2.3.1.- Costos roboadvisors

Segons un estudi de Deloitte, s'ha comprovat que la majoria cobren una taxa de gestió anual de 0,2% a 1% dels AUM⁹. En comparació els gestors tradicionals tenen taxa entorn al 2-3%. Els serveis financers tradicionals i els roboadvisors ofereixen serveis equivalents. Llavors, d'on ve la diferència de costos?

Comencem doncs, analitzant els costos que tenen els serveis financers tradicionals. El cost principal va destinat a pagar despeses de personal com ara sous. Això és natural, doncs serveis financers tradicionals estan orientats al servei del consumidor essent l'atenció personalitzada el centre del seu model de negoci, però aquesta atenció personalitza consumeix molt de temps i fa que cada gestor només pugui atendre un nombre limitat de clients. Això fa disparar els costos dels serveis tradicionals. Segons dades de Deloitte, un gestor porta com a màxim 60-150 clients. Per poder comparar els costos entre els serveis tradicionals i els roboadvisors, usem la següent fórmula, proposada per Deloitte:

$$x = (\alpha + \beta) \frac{\mu}{\pi},$$

α , salari mitjà d'un assessor que inclou tots els costos directes associats als salaris

β , recull les despeses general mitjanes de l'assessor

μ , és el resultat d'explotació

⁹ Moulliet Dominik (Desembre 2016). Cost-Income Ratios and Robo-Advisory, Deloitte.

π , és la mitjana d'AUM

x , és la mitjana d'AUM que hem de destinar per cobrir els costos de l'assessor

La fórmula anterior ens diu que cada gestor ha de gestionar mínim 100 milions d'euros d'AUM per generar els ingressos necessaris per cobrir els costos.

Per entendre com es poden oferir taxes més baixes entrem a analitzar l'estructura de costos:

- **Personal:** Els roboadvisors no tenen tant personal com els serveis tradicionals perquè el procés està automatitzat. En termes de comunicació s'utilitzen xats automatitzats per donar suport al servei. Tot i això, hi ha personal que supervisa el correcte funcionament del procés d'inversió. Notem que el rol del personal és de suport tècnic i no d'assessoria. L'automatització permet a un gestor portar entorn a uns 20.000 clients. Els roboadvisors més nous parteixen d'un equip de tres a cinc empleats, i altres que estan ja més establerts com ara Betterment tenen uns 130 empleats una xifra molt més baixa que els serveis tradicionals que tenen milers d'empleats. El pertanyer a la indústria de les fintech fa que els salaris siguin més baixos i que moltes vegades es complementin amb participacions en l'empresa.
- **Despeses d'explotació:** inclouen lloguers, equipaments, costos d'inventaris, màrqueting,... Els roboadvisors, gràcies al seu model de negoci, tenen major flexibilitat amb les seves instal·lacions respecte a models tradicionals. Se sol usar el teletreball o espais de co-working amb altres empreses atès que els clients no visiten les instal·lacions. Per tant, només requerim d'un escriptori i un ordinador per dur a terme les activitats laborals. En termes de màrqueting, que és la principal partida en els serveis tradicionals, en els roboadvisor no ho és, doncs les promocions online solen ser més econòmiques i efectives. Per una altra banda, la majoria de processos administratius estan digitalitzats implicant una reducció de costos i estalvi de temps.
- **Digitalització:** La digitalització dels roboadvisors busca la màxima comoditat i facilitat d'ús per l'usuari, amb possibilitat de proveir servei 24 hores amb un xat bot o bé missatges directes a molt baix cost. Per una altra banda, tant l'app com la web tenen una secció de preguntes freqüents que resolen la majoria de dubtes dels clients. Un exemple de digitalització en el servei, és Wealthify, un roboadvisor anglès, que envia recurrentment correus electrònics personalitzats segons les característiques de la cartera de cada client amb l'objectiu oferir un tracte més personalitzat.

Totes les reduccions de costos que tenen els roboadvisor respecte els serveis tradicionals fan que, per cobrir costos, cada gestor hagi de gestionar una mitjana de 48,8 milions d'euros, quantitat que és un 50% menys que els serveis tradicionals. Veiem el comentat anteriorment en el següent gràfic:

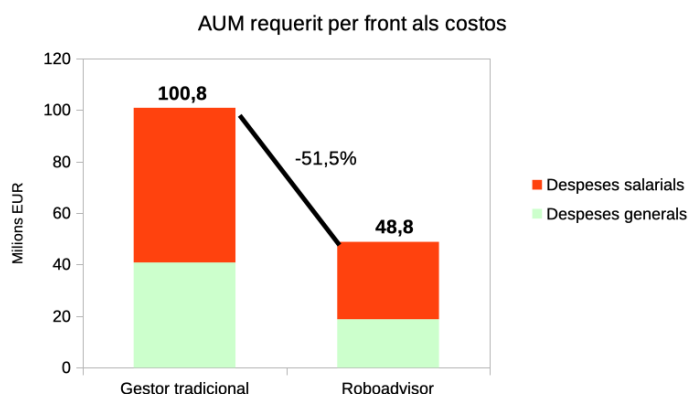


Figura 3: Adaptació gràfic AUM necessari per front als costos. Font: Deloitte

3.- Funcionament dels roboadvisors

El procés que solen seguir els roboadvisors consisteix en 3 passos:

- Primer ens demana fer un test d'idoneïtat, creant un perfil d'inversió del client, determinat pels objectius financers, situació i coneixements financers.
- Una vegada establert aquest perfil, el roboadvisor procedeix a crear una cartera d'inversió a través de les eines matemàtiques que detallarem més endavant.
- Finalment, s'ha de crear un compte en l'entitat financera en qüestió i fer la transferència inicial.

3.1.- Creació del perfil de l'inversor

El procés de creació d'aquestes carteres òptimes i eficients ve marcat pel perfil de cada client. Habitualment, alhora de contractar aquest servei és planteja un qüestionari. El qüestionari té preguntes simples i curtes de manera que és pugui completar en pocs minuts i amb poques preguntes i obtenir un resultat consistent. Les preguntes s'engloben en 4 àmbits:

1. Objectius d'inversió, són molt importants quan es construeix una cartera. Evidentment, no és el mateix tenir una cartera per a la jubilació o un fons d'emergència.

Les preguntes que trobem fan referència a l'objectiu i l'horitzó temporal de la inversió. Veiem un exemple:

Si us plau, indiqui el seu objectiu per aquest compte:

- Preparar-se per a la jubilació
- Estalviar per a properes despeses significatives (compra habitatge,...)
- Estalviar per a alguna cosa especial (vacances, cotxe,...)
- Construir un fons per a emergències.
- Inversió general
- Generar ingressos per a cobrir les despeses

Figura 4. Adaptació pregunta test Charles Schwab Intelligent Portfolios(Font: Charles Schwab)

Notem ,en aquesta pregunta d'exemple, no es contempla un horitzó temporal però si ens fixem cada objectiu d'inversió està delimitat per un horitzó diferent.

2. Situació financera, són preguntes en relació a la posició financera del client. És important saber l'edat, distància a la jubilació, si treballa o no, ingressos i ràtio d'estalvi. Com ara:

Quina és la teva inversió inicial ?

Quan aportaràs mensualment en aquesta cartera?

En quin any vas néixer? Quins són els teus ingressos anuals?

Figura 5. Adaptació pregunta test Fidelity Go (Font: Fidelity Go)

3. Experiència i coneixements financers, és fonamental saber si el client coneix els riscos derivats dels actius que poden arribar a conformar la seva cartera. Encara que la resta de preguntes ens portin a un perfil de risc elevat la pregunta al respecte de coneixements i/o experiència ens farà limitar el perfil de risc de l'inversor.

En el passat, has invertit en accions o fons d'inversió?

1. Si
2. No, però conec els riscos associats
3. No, i desconec els riscos associats

Figura 6. Adaptació pregunta test Indexa Capital (Font: Indexa capital)

4. Perfil de risc, ja s'ha anat perfilant amb les preguntes anteriors. Els objectius són clau en el perfil de risc que tindrà inversor, si només ens queden 5 anys per la jubilació tindrem un menor perfil de risc que si ens queden 30 anys. Per poder acabar de crear aquest perfil es dediquen unes preguntes que aborden específicament aquest tema. Les dividim en dues categories: tolerància i capacitat.
- Tolerància al risc és el nivell de risc que pot assumir un inversor. Això s'avalua amb preguntes del tipus:

El mercat de valors global és volàtil. Imagina que la teva cartera d'inversions perd un 10% del seu valor en un sol mes, què faries?

- Vendre tot
- Vendre alguna cosa
- Mantenir
- Comprar més

Figura 7. Adaptació pregunta d'Indexa Capital (Font: Indexa Capital)

Si penses en la paraula "risc", amb quina de les següents paraules ho identifiques?

- Pèrdua
- Incertesa
- Oportunitat
- Emoció

Figura 8. Adaptació pregunta d'Indexa Capital (Font: Indexa Capital)

- La capacitat de fer front al risc és una funció d'un factor que depèn de l'edat del client i de la seva solvència. Aquest concepte ens relaciona les dades que hem obtingut en la situació financera i el risc.

Com d'estables són els teus ingressos?

- Molt estables
- Estables
- Inestables
- Molt inestables

Figura 9. Adaptació pregunta d'Indexa Capital (Font: Indexa Capital)

Quin percentatge dels teus ingressos van dirigits a la despesa?

- Menys del 25%
- Entre el 25% i el 50%
- Entre el 50% i el 75%
- Més del 75%

Figura 10. Adaptació pregunta d'Indexa Capital (Font: Indexa Capital)

Ara amb les dades que hem recollit cal crear un perfil de risc, la manera de crear-lo varia segons l'entitat. Per il·lustrar-lo veurem l'exemple concret d'Indexa Capital:

La capacitat de fer front al risc relaciona les dades que hem obtingut amb situació financera i el risc. Suposem que els 25 anys tenim la capacitat màxima, independentment de la solvència, i el factor edat el definim com:

$$\text{Factor edat} = \begin{cases} 1 - \frac{\text{edat}-25}{65-25}, & \text{si edat} \geq 25 \\ 1, & \text{si edat} \leq 25 \end{cases}$$

Calculem el patrimoni anual en el moment de jubilació:

$$Renda = Renda\ anual_{t-1}(1 + inflació + estabilitat)^{-T}$$

Suposem que la inflació és el 2%, i l'estabilitat és un paràmetre que podem estimar a través del qüestionari o li podem donar un valor en funció d'altres criteris, el més adequat és que el valor estigui entre -5% i 5%. El paràmetre T és l'edat que resta fins a la jubilació.

Continuem calculant els costos en el moment de jubilació. Es calculen com:

$$Cost\ anual = 80\% \cdot \max(30000, cost\ actual)(1 + inflació)^T$$

Delimitarem el cost a l'interval (6000€, 240000€), els costos actuals els sabem a través de preguntes del qüestionari, en cas de no tenir dades assumim un nivell de 30000€. Finalment, el 80% fa referència a l'observació de que les persones solen gastar un 80% dels seus ingressos.

Estimem el patrimoni del client:

$$Patrimoni = Patrimoni_{t-1}(1 + rendibilitat) + renda\ anual \cdot estalvi$$

Rendibilitat = 8%. Per què un 8%? La rendibilitat mitjana del SP500 en els últims 30 anys és de 9,89%, i si l'ajustem a la inflació és del 7,31%. L'estalvi de nou l'obtenim a través del qüestionari, si no tenim dades prenem un 20%.

Ara podem construir la solvència al moment de la jubilació:

$$Solvència = \frac{2}{1 + \exp(patrimoni/cost\ anual)} \in [0, 1]$$

A continuació calculem la capacitat de risc de l'inversor:

$$Capacitat = 1 * factor\ edat + (1 - factor\ edat) \cdot solvència$$

Per una altra banda, avaluem la tolerància al risc ponderant les respostes amb 0, 1/3, 2/3, 1. Calculem la tolerància com:

$$Tolerància = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n resposta_i, n\ \text{número de preguntes envers la tolerància,}$$

La tolerància és clau per saber els actius que han de conformar la cartera. Així doncs considerem que el resultat ha de ser consistent. Per això, aplicarem un ajust si $\max_i(resposta_i) - \min_i(resposta_i) = 1$.

Perquè en una de les preguntes tenim nivell màxim de risc i en altre som completament adversos al risc, fet que no és consistent. En aquest cas, ajustem la tolerància:

$$Tolerància_{ajustada} = \frac{1}{2} \cdot Tolerància$$

Finalment, calculem el perfil de risc com:

$$Perfil\ de\ risc = \begin{cases} 20\% \cdot Tolerància + 80\% \cdot Capacitat, & \text{si } Tolerància > Capacitat \\ 80\% \cdot Tolerància + 20\% \cdot Capacitat, & \text{si } Tolerància < Capacitat \end{cases}$$

Per acabar calculem el perfil de l'inversor:

$$\text{Perfil d'inversor} = \frac{1}{4} \cdot (\text{Objectius} + \text{Situació Financera} + \text{Experiència} + \text{Perfil de risc})$$

$(\text{Objectius}, \text{Situació financera}, \text{Perfil de risc}) \in [0, 10]$, en els valors que no tenim un valor l'obtenim ponderant les respostes de les preguntes que hi fan referència amb un valor entre $[0, 10]$. Posteriorment, calculem la seva mitjana.

$\text{Experiència} \in \{-10, 10\}$, un 10 en cas de tenir experiència i en cas de no tenir-ne assignem un -10.

3.1.2.- Escala de perfils

El procés anterior ens porta un resultat numèric entre $[0, 10]$ que anomenem el perfil de l'inversor. Cal recalcar que aquest perfil pot anar variant amb el temps en funció de factors com ara l'edat. A partir d'això, els roboadvisors creen un escala de perfils de risc.

L'escala de risc és molt important perquè també ens permet proposar un retorn i un risc esperat de la cartera. Aquest retorn-risc inicial és el punt de partida per la construcció de la cartera. Aquesta primera estimació es pot fer seguint moltes tècniques com per exemple fer una simulació d'escenaris amb Monte-Carlo o bé AI, entre altres. La versió que nosaltres proposem és la més senzilla tracta de relacionar cada nivell de risc amb un ETF de referència.

L'escala de risc que proposem és la que usen la majoria de roboadvisors:

- 1 Conservatiu, és un perfil més cautelós que no busca el creixement sinó que persegueix els rendiments constants i una cartera estable. Són el perfil més advers al risc acceptant molt poca fluctuació.

ETF: iShares Investment Grade Corporate Bond ETF, és un ETF de renda fixa no estatal sinó de bons corporatius principalment dels Estats Units.

Retorn mitjà (15 anys): 5,2%

Risc (Desviació estàndard): 6,4%

- 2 Moderadament conservatiu, és un perfil que continua sent molt conservador però comença a buscar un potencial increment en les seves inversions mantenint l'estabilitat. Encara molt advers al risc però més obert al risc que l'anterior.

ETF: iShares Russell 1000 ETF, és un ETF molt diversificat amb empreses americanes de gran capitalització i de creixement a llarg termini.

Retorn mitjà (15 anys): 8,3%

Risc (Desviació estàndard): 14,7%

- 3** Moderat, recull un perfil de risc molt més elevat que els anteriors. Està destinat a inversors que a curt termini no necessiten el capital i que busquen un creixement a llarg termini.

ETF: iShares Russell 2000 ETF, és un ETF de renda variable però que en aquest cas recull empreses de petita capitalització americanes.

Retorn mitjà (15 anys): 8,6%

Risc (Desviació estàndard): 18,3%

- 4** Agressiu, és molt similar a l'anterior però en aquest cas hi ha una major disposició a fer front al riscs necessaris per obtenir els resultats desitjats.

ETF: Shares Cohen & Steers REIT ETF, és un ETF que concentra tot el seu capital en un únic sector els REITs.

Retorn (15 anys): 9,3%

Risc (Desviació estàndard): 20,4%

- 5** Especulatiu o molt agressiu, és el perfil que accepta més risc que el mercat global de renda variable. L'inversor està disposat acceptar els riscos necessaris per obtenir un gran creixement a llarg termini, inclòs deixant de costat la diversificació i fent una inversió molt concentrada en un sector concret o bé una inversió en mercat molt risc.

ETF: iShares Latin America 40 ETF, és un ETF que replica els valors més importants de renda variable de Amèrica Llatina, sent un ETF molt volàtil.

Retorn (15 anys): 9,4%

Risc (Desviació estàndard): 23,4%

3.2.- Formació de la cartera: Actius que la constitueixen

En aquest apartat parlem dels actius que conformaran la cartera. Veurem les diferents inversions que podem dur a terme i els instruments d'inversió per accedir a aquests.

3.2.1.- Classes d'actius

Determinar quins són els actius que podem usar per la cartera és clau i els agrupem en les següents categories:

- Accions, són uns actius força volàtils però que ofereixen la possibilitat d'aprofitar èpoques de creixement econòmic. Moltes accions ofereixen dividends, part dels beneficis de l'empresa que es distribueixen als accionistes, que suposen una rendibilitat extra. Les accions i dividends gaudeixen d'avantatges fiscals.
- Bons, tenen uns rendiments més baixos que altres actius però tenen una volatilitat molt baixa. Aquests actius són perfectes per diversificar una cartera i protegir-la de les fluctuacions econòmiques que poden patir altres actius disposant d'avantatges fiscals.

- Actius d'inflació, actius que protegeixen els inversos en entorns amb alts nivells d'inflació gràcies a que els seus preus estan molt correlacionats amb aquesta. Per exemple, les commodities o béns immobles.

Per una millor comprensió dels actius fem la distinció següent:

- Mercats desenvolupats, engloben actius d'Europa, Estats Units, Japó, Canada i Austràlia. Es consideren mercats desenvolupats perquè tot i haver patit diverses crisis econòmiques en els últims anys segueixen sent les principals economies a nivell mundial. La combinació d'actius d'aquests mercats porten a carteres diversificades i permeten invertir en les principals economies.
- Mercats emergents, recullen la inversió en països en vies de desenvolupament com ara Brasil, Xina, Índia,..Les seves economies suposen la meitat del PIB mundial, però són més volàtils que els mercats desenvolupats i tenen majors retorns esperats que aquests.
- Accions amb creixement de dividendes, representen un grup conformat per empreses de països desenvolupats que han incrementat els seus dividendes durant 10 anys o més. Engloben empreses d'alta capitalització, empreses on la capitalització de mercat és igual o superior als 10 mil milions, molt ben gestionades i en indústries ja consolidades. Per tant, són menys volàtils que altres accions.
- Bons, farem dos distincions entre:
 - Bons de països desenvolupats, és deute de qualitat que està expedit pels estats d'aquests països. Són actius amb menys rendibilitat, menys volatilitat i a més de baixa correlació amb altres actius. En particular, es consideren actius lliures de risc i ho veurem més en detall més endavant.
 - Bons de països emergents, són bons que provenen de països emergents. Es diferencien dels anteriors perquè tenen major nivells de rendibilitat i més risc.
- Béns immobles, està representat pels REITs, Real Estate Investment trusts, són empreses que tenen en propietat edificacions comercials, residencials entre altres. Notem que no necessàriament han de ser béns físics. Per exemple Digital Realty Trust gestiona centres de dades. REITs ens proporcionen protecció a la inflació doncs estan recolzats per actius reals i s'ha demostrat que històricament han tingut major resiliència a la inflació que altres actius.
- Commodities, reflecteixen el preu dels béns bàsics com ara petroli, blat, or, dòlars entre altres. Aquests són dels pocs actius que es beneficien d'alts nivells de inflació.

3.2.2.- Instruments d'inversió

Una vegada vist els tipus d'actius que podem incloure a la nostre cartera cal buscar el vehicle d'inversió més adequat per invertir en aquests actius.

El principal instrument que s'usa en els roboadvisors arreu del món són els ETFs, exchange traded funds, que són un tipus de fons d'inversió, però que es negocien a la borsa. Com poden veure en el següent gràfic:

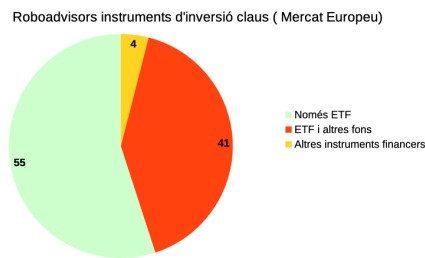


Figura 11: Adaptació gràfic d'instruments de inversió clau pels roboadvisors. Font: Deutsche Bank Research.

Els roboadvisors busquen instruments d'inversió que ofereixin diversificació i costos baixos. La diversificació és fonamental per minvar el risc de la cartera. Statman (1987)¹⁰ va veure que una cartera diversificada ha de tenir com a mínim 30-40 accions. Precisament, els fons d'inversió o els ETFs inverteixen en molts actius a la vegada. Per exemple, el Vanguard Total Stock inverteix en 3958 accions.

Definim els conceptes anteriors:

Un fons d'inversió és un vehicle d'inversió col·lectiva gestionada per un gestor professional, on el patrimoni del fons pertany a un gran número d'inversors i s'utilitza col·lectivament per comprar diferents actius financers. Un fons ens proporciona una ampla col·lecció d'oportunitats d'inversió, gran experiència i professionalitat del gestor i costos més baixos que els que poden obtenir els inversors individuals.

Un ETF és un actiu d'inversió agregada que opera com un fons d'inversió. Els ETF repliquen un índex particular, un sector, una commodity o altres actius. Per això, els ETFs tenen uns costos molt baixos respecte altres actius. Per una altra banda, l'avantatge respecte un fons d'inversió és que es comercialitzen a la borsa. Això fa que siguin molt líquids i ofereixin molta flexibilitat. Com a referència tenim el SPDR S&P500 ETF, que segueix el S&P500 que va ser el primer ETF i és un dels actius financers més cotitzats en el món.

Notem que l'elecció d'actius respon a la filosofia d'inversió que tenen els roboadvisors seguint les idees de John C. Bogle, fundador de la gestora Vanguard i creador del primer fons indexat,

«Els fons indexats eliminen el risc de les accions individuals, el dels sectors del mercat i dels gestor de fons d'inversió. Només roman el risc del mercat.» John.C.Bogle.El pequeño libro para invertir con sentido común

Bogle va observar que la majoria d'actius de gestió activa no aconseguen batre al mercat, especialment si ens fixem en el llarg termini. Veiem-ho en el següent gràfic:

10 Statman Meir (Setembre 1987).How Many Stocks Make a Diversified Portfolio? The Journal of Financial and Quantitative Analysis.

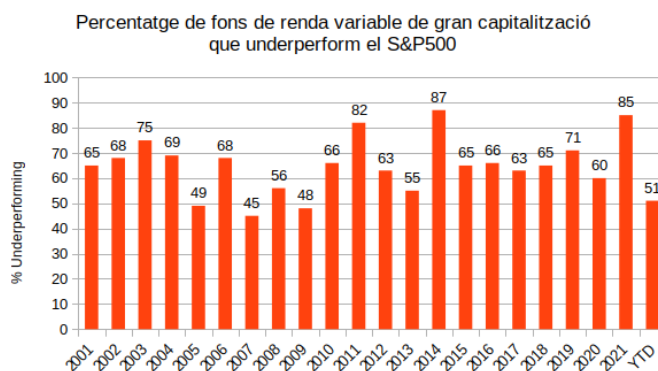


Figura 12: Adaptació gràfic de l'informe semestral de 2022 sobre fons de gestió activa publicada per S&P Dow Jones Indices. Font: S&P Global

Al 2021 un 85% dels fons de gestió activa sobre empreses americanes de gran capitalització no van ser capaces de batre el S&P500¹¹. Notem que la majoria d'anys hi ha més d'un 60% que no baten el mercat, indicant que hauríem obtingut un millor resultat seguint l'índex, és a dir, amb gestió passiva.

Una vegada determinats els vehicles d'inversió hem de seleccionar els que usarem. El diagrama següent descarta tots els ETFs que no segueixen la filosofia d'inversió dels roboadvisors. Descartem tots els ETFs que requereixin molt seguiment i els ETFs que donin problemes quan apliquem els algorismes matemàtics. Considerem també el tracking error, que és la divergència entre el comportament del preu del ETF i el de l'índex que segueix, buscant que sigui el més proper possible a 0.

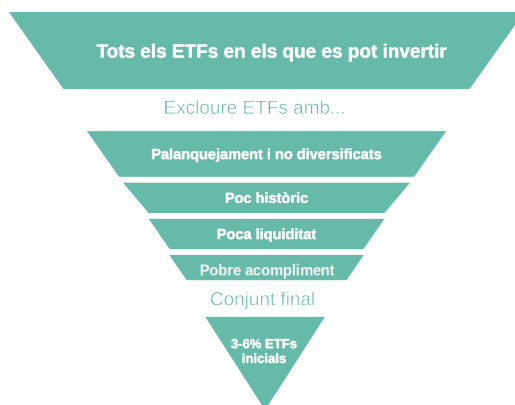


Figura 13: Diagrama de selecció d'ETF. (Font: Elaboració pròpia)

Entrem ara a parlar sobre els tipus de ETFs que trobarem dins dels roboadvisors:

- Estil d'inversió: pot ser value, centrat en accions de companyies madures amb creixement lent que ofereixen un dividend més elevat i estable, o growth invertint en companyies que tenen el nivell de creixement per sobre de la mitjana dels seus nivells de guanys i el seu potencial a futur però ofereixen menys dividends que les anteriors.

11 Edwards Tim, Ganti Anu R, Craig Lazzara J (2022).Spiva US Scorecard

- Capitalització: escollim els actius basant-nos en la mida de la empresa, podent ser petita, mitjana o gran capitalització.
- Sector: es centren en una determina indústria o sector, com ara Healthcarens, REITs, Energy, Tecnologia, Consumer discretionary, Consumer Staples o Utilities.
- Zona geogràfica de la inversió: pot ser internacional o només d'un mercat en particular.
- Non-equity fund/ETF: centren la inversió en bons, commodities o divises.
- Smart Beta ETF/ factor ETF: utilitzen la inversió en factors que és una inversió que té com objectiu la selecció d'actius segons atributs associats a la maximització del rendiment. Hi ha dos tipus de orientació:
 - Macroeconòmic, captura els riscos lligats esdeveniments econòmics:
 - Creixement econòmic, lligat al cicle econòmic.
 - Interessos real, lligats al moviments del tipus d'interès
 - Inflació, lligat a canvis en els preus
 - Crèdit, lligat al risc de fallida de les companyies que presten diners
 - Mercats emergents, situacions econòmiques i polítiques dels mercat en qüestió.
 - Liquiditat, mantenir actius que són fàcils de convertir en efectiu.
 - Factors d'estil, reflexa el risc i el rendiment dins de cada classe d'actius.
 - Valor, els actius estan en descompte en relació al seu preu objectiu, que és el preu que es determina que ha de valer un actiu en funció a l'anàlisi fonamental.
 - Volatilitat mínima, són actius estables amb poca volatilitat.
 - Momentum, actius amb tendències creixents en el preu.
 - Qualitat, empreses financerament sanes.
 - Portar, «Carry», es refereix a empreses que, tot i tenir més risc, tenen incentius en termes de rendiment per incorporar-les a la cartera.

Com a conclusió, els roboadvisors inverteixen en ETFs i fons d'inversió. Resta comentar que algunes gestores permeten la inversió en actius individuals com ara en accions. Les gestores Wealthfront i Charles Schwab proposen als seus clients l'opció de crear un índex personalitzat. Bàsicament, consisteix en la replica modificada d'un índex segons les preferències del client dquirint directament les accions, en lloc del ETF, podent aprofitar els seus avantatges fiscals i factors com ara el factor momentum. El principal desavantatge d'aquest mètode d'inversió és que la inversió inicial mínima és de \$100000 perquè, per crear un índex, és necessària l'adquisició d'entre 100-600 accions.

3.3.- Construcció d'una cartera

Després de determinar la bossa d'actius a partir de la qual determinarem la nostra cartera i tenint el perfil d'inversor del nostre client, podem passar a la construcció de la nostra cartera.

La pregunta que ens fem ara és quin són els algorismes que segueixen els roboadvisors per crear aquestes carteres. Segons una enquesta feta per Raffaella Zenti, cofundador de Wealthype.AI i Virtual B, les dues fintech, tenim que els roboadvisors segueixen els models que podem veure en el gràfic següent:

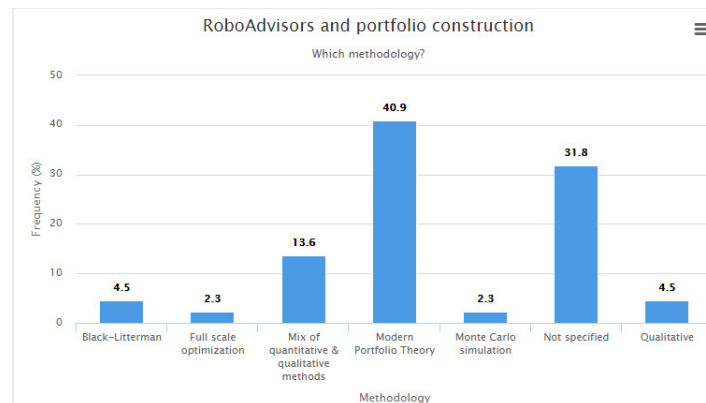


Figura 14: Algorismes usats pels roboadvisors. Font: Enquesta feta per Raffaella Zenti

Podem veure en el gràfic que, en general, s'usa la teoria moderna de carteres, un altre mètode destacat en la creació de carteres és Black-Litterman¹² que és una millora de la teoria moderna de carteres. Un altre mètode molt utilitzat és la creació de carteres usant una combinació de mètodes quantitius i qualitius per determinar la cartera.

3.2.1.- Models matemàtics per a la creació de carteres òptimes

Iniciem aquest apartat amb l'algorisme més usat pels roboadvisors la teoria moderna de carteres. Primer definirem el model, veurem els efectes que té en el model la diversificació de la cartera posteriorment, veurem com s'usa aquesta teoria i finalment veurem un exemple de com l'apliquen els roboadvisors.

3.2.1.1.- Teoria Moderna de Carteres

La teoria moderna de carteres proposa la possibilitat de maximitzar els retorns d'una cartera, donat el nivell de risc que l'inversor estigui disposat a acceptar.

La teoria va ser proposada per Henry Markowitz al 1952¹³. La novetat que proposava Markowitz era usar la matemàtica i l'estadística per descriure la diversificació i el procés de creació de carteres diversificades. En aquest capítol expliquem la definició i estudi d'aquest model.

¹²Black, F. and Litterman, R. (1991), 'Global asset allocation with equities, bonds, and currencies', Fixed Income Research.

¹³Markowitz Harry (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance. Vol7, No1.

Comencem doncs partint de les hipòtesis sobre les quals construïm aquest model:

- Els mercats són eficients, és a dir, els inversors tenen accés a tota la informació.
- Els inversors són adversos al risc, és a dir, entre dues inversions d'igual rendibilitat però diferent risc sempre escollirem la de menor risc.
- Els inversors mai estan satisfets, amb aquesta premissa ens referim a que si l'inversor ha d'escollir entre dues inversions amb mateix nivell de risc sempre escolliran la que té major rendibilitat.
- Fixem l'horitzó temporal.
- No hi ha impostos ni costos de transacció ni tenim limitacions alhora de demanar diners en préstec.

La idea bàsica ve de que les propietats d'una inversió les podem entendre com el valor esperat, i una mesura de la dispersió entorn al valor esperat, la variància. I es poden estendre a tota la cartera. Iniciem introduint els conceptes anteriorment esmentats.

Un concepte molt natural és el retorn que obtenim d'una inversió. Sent P_0 la quantitat invertida inicialment i P_1 la quantitat rebuda al final de la inversió, definim retorn d'un actiu com:

$$R = \frac{P_1}{P_0}.$$

Tot seguit i de manera natural, es defineix la taxa de retorn és $r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - 1 = R - 1$.

Ara podem considerar el retorn de la cartera, entenem cartera com a conjunt de n actius financers en diferents proporcions, que és simplement la mitjana ponderada de retorn dels actius que conformen aquesta cartera, on la ponderació és la proporció que hi ha de cada actiu en la cartera.

Així doncs, veiem els conceptes anteriors aplicats a una cartera amb n actius. Suposem que tenim un pressupost de B_0 u.m. Denotem la quantitat del pressupost assignada a cada actiu com:

$$x_i = \omega_i \cdot B_0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

on ω_i és el pes que té l'actiu en la cartera amb $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Ara definim el retorn d'una cartera com:

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i, \forall i \text{ on } R_i \text{ és el retorn de cada actiu}$$

Podem reescriure l'expressió anterior en funció de la taxa de retorn a partir de les relacions vistes anteriorment:

$$r_p = R_p - 1 = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot R_i \right) - \sum_{i=1}^n \omega_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot (R_i - 1) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot r_i, \forall i$$

on r_i és taxa de retorn de cada actiu.

En el món de les inversions hi ha un factor molt important que cal afegir als conceptes anteriors que és la incertesa. Un inversor mai sap quin és el rendiment exacte que obtindrà d'un actiu, precisament per això és pel que hem de considerar els retorns i les taxes de retorn com a variables aleatòries.

Definim r_i com la variable aleatòria associada a la taxa de retorn de l'actiu i aleshores en una cartera de n actius tenim n variables aleatòries r_i amb esperança $E(r_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores podem considerar la taxa de retorn de la cartera com:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(r_i)$$

Finalment, ens resta veure com presentarem el risc en el nostre model, i aquesta serà la variància de la cartera. Recordem el següent lema:

Lema 1. Donades x_1, \dots, x_n variables aleatòries amb esperança matemàtica, $E(r_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ aleshores la variància de la suma verifica que:

$$Var\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{i=1}^n Var(x_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(x_i, x_j)$$

I aplicant-lo al nostre cas ens resulta que la variància de la cartera, $\sigma_{r_p}^2$, és:

$$\sigma_{r_p}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j Cov(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{r_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{r_i} \sigma_{r_j} \rho_{ij}$$

on σ_{r_i} és la desviació estàndard de r_i , ρ_{ij} és el coeficient de correlació entre les rendibilitats dels actius i i j . Per simplificar notació, denotem Σ la matriu de covariàncies, aleshores l'expressió anterior resulta:

$$\sigma_{r_p}^2 = Var(r_p) = \omega^t \Sigma \omega$$

Notem que donats els n actius hi ha una gran varietat de carteres possibles cadascuna amb el seu retorn. Així doncs, podem plantejar-nos quin de tots aquests és el que té la mínima distància entre la taxa de retorn esperada i la taxa retorn. Arribem doncs al problema d'optimització:

$$\min_{\omega} \omega^t \Sigma \omega$$

Si $\Sigma \geq 0$, aleshores la solució òptima és $\omega^* = 0$. Això equival a una cartera amb una taxa de retorn 0. Si volem plantejar un problema més realista cal afegir una altra restricció, que seria imposar un nivell positiu de la taxa de retorn, aquest nivell l'anomenarem $\mu_{min} \geq 0$. Resulta la restricció $\mu^t \omega = \mu_{min}$ on $\mu_i = E(r_i)$.

Notar que usar per exemple $\mu^t \omega \geq \mu_{min}$ no varia la solució òptima. Equivalentment, plantejant $\mu^t \omega - \text{excedent} = \mu_{min}$ i de fet la solució òptima la tindrem quan $\text{excedent} = 0$ doncs es quan tots els recursos estan invertits i s'estan rendibilitzant.

Per una altra banda, el model plantejat no té cap restricció al pressupost. Així doncs afegirem la restricció $e^t \omega = 1$, on e és un vector format de 1's i tal com havíem vist abans ω_i és la fracció que invertim en cada actiu i la seva suma ha d'ésser 1. Aleshores el model final resulta:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega^t \Sigma \omega \\ \mu^t \omega = \mu_{min} \quad (\text{Model 1}) \\ e^t \omega = 1 \end{aligned}$$

Per entendre millor el model proposat passem a estudiar el cas d'una cartera amb només dos actius, $N=2$, i sense la restricció de retorn mínim. Aleshores, obtindrem:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$E(r_p) = \omega_1 E(r_1) + \omega_2 E(r_2)$$

$$Var(r_p) = \omega_1^2 Var(r_1) + \omega_2^2 Var(r_2) + 2\omega_1\omega_2 Cov(r_1, r_2)$$

Per fer una idea de com funciona el model hem fet una petita simulació en R:

```

1 library(plots)
2 #Primer definim les variables que són conegudes en el model en aquest cas:
3 #Taxes de retorn esperades per cadascun dels actius
4 mu1<-0.25
5 mu2<-0.125
6 #Desviació estàndard de cada actiu
7 sigma2_1<-0.1
8 sigma2_2<-0.05
9 # Correlació entre els dos actius
10 rho12<-0.25
11
12 #Calculem ara la taxa de retorn esperada de la cartera
13 esperança_cartera<-function(w){return(w*mu1+(1-w)*mu2)}
14 #Nota: w és el pes que té l'actiu 1 en la cartera, com només hi han dos actius (1-w)
és el pes del segon actiu.
15 # Calculem ara el risc de la cartera, i.e, la seva variància
16 variancia_cartera<-function(w){return(w^2*sigma2_1^2+(1-w)^2*sigma2_2^2+2*w*(1-
w)*rho12*sigma2_1*sigma2_2)}
17 # Cas 1. Els pesos de la cartera oscil·len entre 0 i 1 (No hi han posicions curtes)
18 pes<-seq(0, 1, by =0.01)
19 retorn_cartera<-NULL
20 risc_cartera<-NULL
21 for(w in pes){
22     retorn_cartera<-c(retorn_cartera,esperança_cartera(w))
23     risc_cartera<-c(risc_cartera,variancia_cartera(w))
24 }
25 #Ara passem a dibuixar el retorn i el risc de la cartera en funció del pes que donem
a cada actiu
26 plot(risc_cartera,retorn_cartera,type="p",
27     xlab="Risc de la cartera",
28     ylab="Taxa de retorn de la cartera",
29     main="Frontera eficient: Retorn-Risc segons el pes",)

```

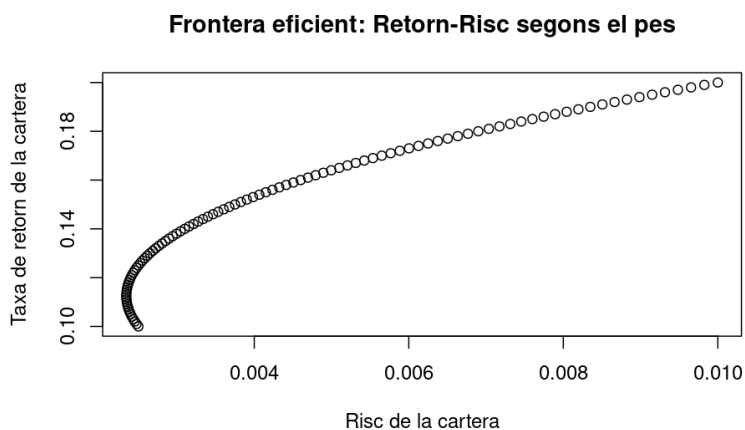


Figura 15: Frontera eficient del model teoria de carteres sense venda a curt. Font: Elaboració pròpia

La gràfica anterior que hem anomenat frontera eficient ens reflexa la relació que hi ha entre el risc i la taxa de retorn de la cartera, és a dir, a cada taxa de retorn possible de la cartera se li associa un únic nivell de risc. Així doncs, per a un determinat nivell de risc estarem disposats a assumir que volem el màxim retorn, és a dir, preferirem doncs les carteres que siguin més pròximes a la corba. Aquestes carteres que estan sobre la corba, la frontera eficient, les anomenarem carteres eficients.

Mirant de nou el gràfic anterior notem que hi ha un factor clau que és el que ens fa disminuir el risc de la cartera: la diversificació.

Intuïtivament, sabem que si posem tots els diners en un únic actiu, aleshores depenem només del rendiment d'aquest. És doncs, l'aversion a les pèrdues la que ens fa tendir a una minimització del risc a través de la inclusió de més actius en la cartera, és a dir, diversificar la cartera.

Sabem que el retorn d'una cartera depèn del pes de cada actiu i el retorn d'aquest. Però el risc de la cartera no depèn solament del pes dels actius i el risc que té cadascun sinó que també intervé la correlació que hi ha entre els actius. Veiem ho:

Suposem que tenim una cartera amb dos actius amb taxes de retorn r_1 i r_2 respectivament i suposem, a fi de simplificar, que $\mu = E(r_1) = E(r_2)$ i $\sigma^2 = Var(r_1) = Var(r_2)$ i que els dos actius no estan correlacionats amb $\rho_{12} = 0$. Suposem que li assignem un pes $\omega \neq 1$ a l'actiu 1 i $(1 - \omega)$ a l'actiu 2.

$$E(r_p) = \omega E(r_1) + (1 - \omega)E(r_2) = \omega\mu + (1 - \omega)\mu = \mu$$

el retorn esperat no depèn de ω , per tant, passem a mirar la variància.

$$Var(r_p) = \omega^2\sigma^2 + (1 - \omega)^2\sigma^2 + 2Cov(r_1, r_2) = (\omega^2 + (1 - \omega)^2)\sigma^2, \quad Cov(r_1, r_2) = 0.$$

Per $\omega = 0; 1$ tenim que $Var(r_p) = \sigma^2$, però per $\omega \in (0, 1)$ tenim que el risc disminueix: $Var(r_p) < \sigma^2$.

Ara suposem el mateix escenari però ara amb $Cov(r_1, r_2) \neq 0$, aleshores $|\rho_{12}| < 1$. De nou, tenim que $E(r_p) = \mu$, veiem que passa amb la variància:

$$Var(r_p) = \omega^2\sigma^2 + (1 - \omega)^2\sigma^2 + 2\omega(1 - \omega)\rho_{12}\sigma^2 = (1 + (2\omega - 2\omega^2)\rho_{12})\sigma^2$$

on $2\omega - 2\omega^2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ i $|\rho_{12}| < 1$

Per tant, de nou obtenim que $Var(r_p) < \sigma^2$.

Dins dels actius que podem usar per diversificar una cartera hi ha uns actius especials que són els actius lliures de risc. El primer a determinar és què considerem com una actiu lliure de risc. Un actiu lliure de risc és un inversió amb un valor futur garantit que està lliure del risc d'insolvència del seu emissor i el seu risc és 0. La seva relació amb altres actius, la covariància, és nul·la. A la pràctica entenem que aquests actius són efectius o bons i lletres, sota el supòsit que el país d'emissió no fa fallida.

Per veure l'efecte d'aquests actius, considerem de nou la cartera de dos actius en aquest cas un dels actius lliure de risc. Tenim que l'actiu 1 té $E(r_1) = \mu_1$ i $Var(r_1) = \sigma^2$ i l'actiu 2, lliure de risc, que té $E(r_2) = \mu_2$, $Var(r_2) = 0$ i $Cov(r_1, r_2) = 0$.

$$E(r_p) = \omega\mu_1 + (1 - \omega)\mu_2$$

$$Var(r_p) = \sigma_p^2 = w^2\sigma^2 \Leftrightarrow w = \frac{\sigma_p}{\sigma}$$

Hem posat el pes de l'actiu 1 en funció de la desviació estàndard de la cartera i la seva, podem substituir aquesta relació en l'expressió anterior i obtenim:

$$E(r_p) = \mu_p = \frac{\sigma_p}{\sigma}\mu + (1 - \frac{\sigma_p}{\sigma})\mu_2 = \mu_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\sigma_p$$

Veiem doncs el seu efecte en la frontera eficient de nou usant una simulació del model en R:

```

1 #Primer definim les variables que són conegudes en el model en aquest cas:
2 #Taxes de retorn esperades per cadascun dels actius
3 mu1<-0.2 #Google 5 years CAGR
4 mu2<-0.0421 # 5 year US bond
5 #Variància de cada actiu
6 sigma<-0.1
7 #Calculem ara la taxa de retorn esperada de la cartera
8 esperança_cartera<-function(w){return(w*mu1+(1-w)*mu2)}
9 #Nota: w és el pes que té l'actiu 1 en la cartera, com només hi han dos actius (1-w)
és el pes del segon actiu.
10 # Calculem ara el risc de la cartera, i.e, desviació estàndard enlloc de variància
11 stdesv_cartera<-function(w){return(w*sigma)}
12 # Cas 1. Els pesos de la cartera oscil·len entre 0 i 1 (No hi han posicions curtes)
13 pes<-seq(0, 1, by =0.01)
14 retorn_cartera<-NULL
15 risc_cartera<-NULL
16 for(w in pes){
17   retorn_cartera<-c(retorn_cartera,esperança_cartera(w))
18   risc_cartera<-c(risc_cartera,stdesv_cartera(w))
19 }
20 #Ara pasem a dibuixar el retorn i el risc de la cartera en funció del pes que donem a
cada actiu
21 plot(risc_cartera,retorn_cartera,
22     xlab="Risc de la cartera",
23     ylab="Taxa de retorn de la cartera",
24     main="Frontera eficient: Retorn-Risc segons el pes")

```

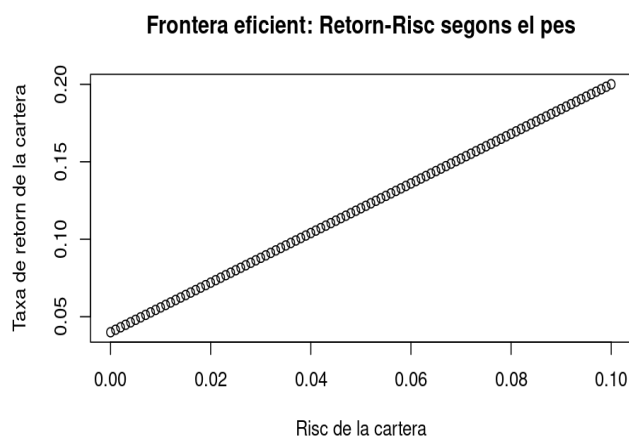


Figura 16: Frontera eficient de la teoria moderna de carteres amb un actiu lliure de risc. Font: Elaboració pròpia

Com podem veure en el cas de dos actius la frontera eficient esdevé lineal. Evidentment, al considerar més actius el problema no se simplifica d'aquesta manera, però està clar que usant actius lliures de risc obtenim una forta eina per disminuir el risc de la cartera independentment dels altres actius que incloguem.

Un altre element que afecta la frontera eficient és la venda en curt. La possibilitat de venda en curt crea un nou horitzó de possibilitats en la nostra cartera. Un actiu venut a curt produeix un retorn positiu quan el preu de l'actiu baixa, i un retorn negatiu quan el preu incrementa. Millora la frontera doncs doblem el nombre d'inversions possibles atès que cada actiu és pot tenir a curt o no.

Veiem com esdevé la frontera eficient amb el mateix codi R que el primer cas, canviant:

```
1 pes<-seq(-1, 1, by =0.01)
```

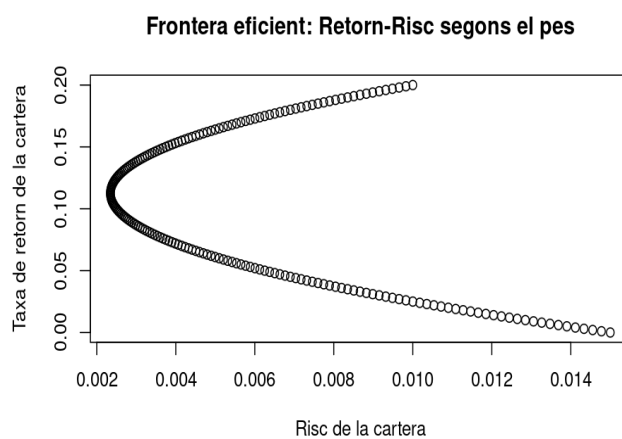


Figura 17: Frontera eficient de la teoria moderna de carteres amb venda a curt. Font: Elaboració pròpia

Entre aquestes carteres eficients hi ha una cartera especial, la cartera de variància mínima. Aquesta és la cartera que ens minimitza el risc, és a dir, no hi ha cap cartera que ens doni un menor risc. Veiem doncs com obtenir aquesta cartera de menor risc usant el següent model que és equivalent al (Model 1):

$$\min_{\omega} \frac{1}{2} \omega^t \Sigma \omega$$

$$\mu^t \omega = \mu_{min}$$

$$e^t \omega = 1$$

Una de les maneres clàssiques de resoldre aquest tipus de problemes d'optimització és usar els multiplicadors de Lagrange per arribar a una solució òptima. El primer que fem és incorporar la funció de Lagrange al model:

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \omega^t \Sigma \omega - \lambda_1 (\mu^t \omega - \mu_{min}) - \lambda_2 (e^t \omega - 1)$$

Prenem la derivada parcial de la funció respecte ω i els multiplicadors de Lagrange, els iguaem a 0:

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \Sigma \omega - \lambda_1 \mu^t - \lambda_2 e^t = 0 \Leftrightarrow \omega^* = \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu^t + \lambda_2 e^t)$$

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i E(r_i) - \mu_p = 0$$

Suposem que Σ té inversa i és definida positiva. Busquem ara el valor dels paràmetres λ_1 i λ_2 .

$$1 = e^t \Sigma^{-1} \Sigma \omega^* = \lambda_1 e^t \Sigma^{-1} e + \lambda_2 e^t \Sigma^{-1} \mu$$

$$\mu = \mu^t \Sigma^{-1} \Sigma \omega^* = \lambda_1 \mu^t \Sigma^{-1} e + \lambda_2 \mu^t \Sigma^{-1} \mu$$

Definim $a = e^t \Sigma^{-1} e$, $b = e^t \Sigma^{-1} \mu$, $c = \mu^t \Sigma^{-1} \mu$ i resulta:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 a + \lambda_2 b \\ \mu_p &= \lambda_1 c + \lambda_2 b \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c - b \mu_p}{a c - b^2} \\ \lambda_2 &= \frac{a \mu_p - b}{a c - b^2} \end{aligned}$$

Notem que els dos depenen de μ_p que és l'objectiu de retorns que hem establert en aquest model.

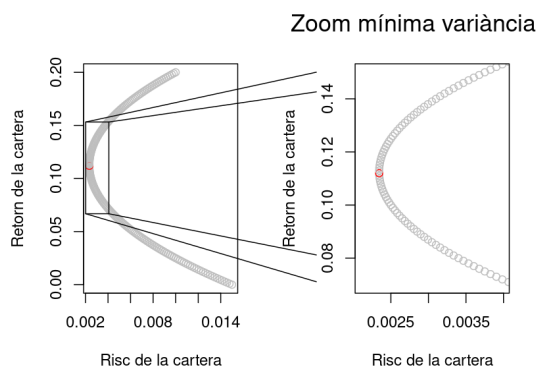


Figura 18: Zoom de la cartera de mínima variància en la teoria moderna de carteres. Font: Elaboració pròpia

Una vegada hem definit el nostre model hem de confrontar un nou problema, la simplificació de procediment computacional per calcular les carteres òptimes. La teoria moderna de carteres que hem definit anteriorment fa servir moltes estimacions però no dona cap eina per aconseguir-los.

3.2.1.2.-Black-Litterman

El model de Black-Litterman, creat per Fischer Black i Robert Litterman, és una evolució del model anterior. L'objectiu del nou model es resoldre les problemàtiques que presenta la teoria moderna de carteres. En particular, busca una major diversificació de les carteres doncs a la pràctica la teoria moderna de carteres crea carteres molt concentrades. Una altra problemàtica que s'aborda és la sensibilitat de les entrades del model. La novetat que presenta el model per corregir aquestes inconsistències és incorporar el punt de vista de l'inversor.

Posem un exemple, la teoria moderna de carteres no hagués estat capaç d'anticipar la crisi econòmica del 2008 doncs només comptava amb les entrades de retorns i de risc dels actius que no donarien cap senyal d'alerta ni crearien una cartera més defensiva. Mentre que Black-Litterman al incorporar la visió de l'inversor si que pot arribar a preveure aquestes situacions.

Definim la notació necessària:

n és el número d'actius

k són les visions de l'inversor.

d són mostres de retorns dels actius.

U és la funció d'utilitat ajustada al risc

ω_M és el vector, $n \times 1$ de pesos del mercat, s'obté dividint la capitalització de l'actiu dividit entre la suma de les capitalitzacions de tots els actius.

λ és coeficient d'aversion al risc

Π és un vector $n \times 1$ retorns esperats implícits del mercat

Σ és la matriu de covariàncies de dimensió $n \times n$, s'obté a partir de les dades històriques dels actius.

$E(r_i)$ és el retorn esperat de l'actiu i

r_f és el retorn de l'actiu lliure de risc

$E(r_M)$ és el retorn esperat del mercat

β_i és fins a quin punt l'actiu i es mou conjuntament amb el retorn esperat del mercat

σ_M^2 és la variància del mercat

Q és el vector, $k \times 1$, dels retorns esperats de les visions de l'inversor.

P , matriu de dimensió $k \times n$ que relaciona els actius amb les visions de l'inversor.

ε és el vector $k \times 1$ que representa l'error en l'estimació dels retorns esperats de les visions.

Ω , és la matriu diagonal de covariàncies dels errors de les visions, representant la incertesa de cada visió.

ω_i , és el nivell de confiança associat a la visió i .

μ_{BL} és el retorn esperat dels actius que dona el model.

Σ_{BL} és la nova matriu de covariàncies que et dona el model.

ω_{BL} és el vector de pesos òptim que obtenim amb el model.

μ és el vector $n \times 1$ del retorn esperat dels actius, s'obté amb les dades històriques dels actius.

τ és un escalar

s_i observacions de cartera amb $s_i = (r_1^i \dots r_n^i)^t$, on r_i és el retorn de l'actiu i .

Rendibilitats esperades implícites de mercat

Per arribar al comentat anteriorment partim de la funció utilitat ajustada al risc:

$$U = \omega_M^t \Pi - \frac{1}{2} \lambda \omega_M^t \Sigma \omega_M,$$

Volem ara maximitzar la funció d'utilitat així que prenem la derivada parcial i la igulem a 0.

$$\frac{\partial U}{\partial \omega_M} = 0 \Leftrightarrow \Pi - \lambda \Sigma \omega_M = 0 \Leftrightarrow \Pi = \lambda \Sigma \omega_M$$

El valor del coeficient d'aversion al risc pot prendre qualsevol valor que li volem però una manera de trobar un valor és usar el model CAPM. Definim el model CAPM com:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i (E(r_M) - r_f)$$

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

Introduïm ara al model la variable π_i que és l'excés de retorn de l'actiu i respecte al mercat, usant el model CAPM per obtenir π_i :

$$\pi_i = E(r_i) - r_f = \beta_i (E(r_M) - r_f) = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} (E(r_M) - r_f) = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \sum_{j=1}^n \text{cov}(r_i, r_j) \omega_j$$

on ω_j és el pes de l'actiu j en la cartera del mercat. Definim el coeficient aversion al risc com

$$\lambda = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

Visions de l'inversor

Fins ara hem vist com reflectir els retorns esperats del mercat. Però, el model també ens permet incorporar la perspectiva de l'inversor. A continuació veurem com podem incloure aquestes visions al model:

Suposem que un inversor ha observat k mostres de retorns, que serà el que constitueixi les visions de l'inversor. Aquestes visions poden ser absolutes o relatives:

1. EFA tindrà un retorn del 9% (Visió absoluta)
2. IVV tindrà un retorn del 20% (Visió absoluta)
3. IVV i DIA tindran un retorn superior en 7.5% a EEM (Visió relativa)
4. EEM tindrà un retorn del 5.5% (Visió absoluta)
5. DIA tindrà un retorn superior en 10% al AGG (Visió relativa)

Traduïm aquestes condicions a matrius i vectors per tal d'incorporar-les al nostre model:

$$Q = (0.09 \quad 0.2 \quad 0.075 \quad 0.055 \quad 0.1)^t$$

Q és vector $k \times 1$, on incloem els retorns esperats de cadascuna de les visions. Per indicar a quins actius és refereix cada component de Q plantegem la matriu P com el nexa entre les visions i els actius:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cada visió correspon a una fila de la matriu. Les visions absolutes tenen un 1 assignat a la columna de l'actiu al que fan referència. En canvi, les relatives tenen un número positiu si tenen major retorn que les altres i un número negatiu en cas contrari, i cada fila ens ha de sumar 0.

Falta incloure un últim factor a les visions de l'inversor: la incertesa. Evidentment, les prediccions que fa l'inversor estan subjectes a factor aleatori, doncs podem arribar a complir-se o no, i es poden complir fins a cert punt. Així doncs, incloem un terme d'error al vector $Q + \varepsilon$, on $\varepsilon_i \sim N(0, \Omega)$.

L'error es distribueix segons una normal d'esperança 0 i de variància Ω . Aquesta Ω és una matriu de covariàncies dels errors, i representa la incertesa de les visions de l'inversor. Sent la confiança de les visions de l'inversor Ω^{-1} . Definim la matriu com:

$$\Omega = \text{diag}(\tau P \Sigma P^t)$$

Notem que entra un altre paràmetre al joc: τ . Controla la ponderació relativa de les visions, hi ha molt debat sobre els valors a donar aquest paràmetre i de fet hi ha un estudi complet¹⁴. Nosaltres per simplificar prendrem un valor per defecte de $\tau = 0.05$. Finalment, Ω és una matriu diagonal de dimensions $k \times k$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k \end{pmatrix}$$

Encara que aquí proposem una manera d'obtenir la cofinança de les visions també podrien ser donades per l'inversor.

Derivem model de Black-Litterman seguint de l'aproximació de la teoria de mostreig

Fins ara hem estat veient una aproximació bayesiana al model però per arribar derivar la fórmula del model usarem la teoria de mostreig que ens portarà a la mateixa fórmula que la bayesiana. La teoria de mostreig suposa que l'estudi de les dades de la mostra ens ajuda a conèixer un paràmetre desconegut. Per exemple, el valor esperat d'una variable aleatòria. L'estimació puntual és el concepte fonamental dins de la teoria del mostreig. Un dels mètodes més usats en l'estimació puntual és la maximització de la funció de versemblança. En el nostre cas, usarem l'estimació puntual per estimar l'excés del rendiment esperat de Black-Litterman.

Aproximem la cartera en equilibri amb la teoria del mostreig

Suposem que tenim un mercat compost de n actius i que de cada actiu tenim d mostres de retorn dels actius, anomenem $s_i, i \in \{1, \dots, d\}$ les observacions sent $s_i = (r_1^i \dots r_d^i)^t$ on r_i és el retorn de l'actiu i . Aleshores, els retorn esperats del mercat són:

$$\Pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \text{ usant la funció de màxima versemblança.}$$

14 Walters, Jay, The Factor Tau in the Black-Litterman Model (October 9, 2013)

Assumim que la mostra observada segueix una distribució normal on μ és el vector dels retorns esperats i Σ seva matriu de covariàncies. Aleshores,

$$s_i \sim N(\mu, \Sigma), \quad \Pi \sim N\left(\mu, \frac{\Sigma}{d}\right)$$

La funció de probabilitat dels retorns és:

$$P(s_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu)\right)$$

Com pel nostre model només ens interessa estimar μ aleshores obviem totes les altres constants.

$$\varphi(s_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}(s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu)\right)$$

Suposem que les variables s_i són iid, aleshores la funció de versemblança és:

$$L(s_1, \dots, s_d) = \prod_{i=1}^d \varphi(s_i),$$

Considerem log-versemblança:

$$\log L(s_1, \dots, s_d) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^d (s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu) \right)$$

Ara maximitzem la funció log-versemblança:

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (-e_i^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu) - (s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} e_i)$$

Notem que $(s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} e_i = ((s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} e_i)^t = e_i^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu)$, aplicant-ho:

$$0 = e_i^t \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^d (s_i - \mu) \Leftrightarrow d \cdot e_i^t \Sigma^{-1} (E(s_i) - \mu) = 0 \Leftrightarrow \Pi = \mu^*$$

on μ^* és l'excés de rendibilitat futura esperada pel mercat.

Aproximem les visions de l'inversor amb la teoria del mostreig

Suposem que l'inversor ha observats t mostres de retorns. Notem que aquestes observacions són observacions de cartera d'actius, i que l'inversor té perspectives de k carteres, $k \leq n$, on n és el total d'actius. Les visions de l'inversor les reflectim en una matriu P , $k \times n$ on cada fila representa una visió, l'inversor expressa el retorn esperat en un k -vector Q , i un nivell de confiança associat a cada visió que reflectim en la matriu diagonal, Ω de dimensions $k \times k$.

Seguint la notació anterior tenim que l'inversor té les següents informacions:

$$s_{d+1}, \dots, s_{d+t}, \text{ on } s_i = s_i = (r_1^i \quad \dots \quad r_n^i)^t$$

Aquestes observacions segueixen també una normal en aquest cas si $s_j \sim N(\mu, \Sigma)$ i sabem que $q_j = PS_j$, on $q_j \in Q$. Recordem que $\Omega = P\Sigma P^t$, aleshores $q_j \in N(P\mu, \Omega)$. L'estimador de màxima versemblança de l'excés de retorn de l'inversor deriva com hem vist anteriorment:

$$\mu^I = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t q_j = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t P s_j = P \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t s_j$$

Derivem el Model Black-Litterman

Combinant les visions de l'inversor i l'equilibri del mercat, i passant a maximitzant arribarem a obtenir la formula de Black-Litterman:

$$\max_{\mu} \sum_{i=1}^d -\frac{1}{2} (s_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu) + \sum_{j=d+1}^{d+t} -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)^t \Omega^{-1} (q_j - P\mu) = g(\mu)$$

Diferenciem respecte μ_j i igualem la derivada a 0. Notem e_k vector de dimensió $k + t$ de 0's amb un 1 a la posició k -ésima.

$$\frac{\partial}{\partial \mu^j} g(\mu) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (-e_k^t \Sigma^{-1} (s_i - \mu)^t - (s_i - \mu) \Sigma^{-1} e_k) + \frac{1}{2} \sum_{j=d+1}^{d+t} (-e_k^t P \Omega^{-1} (q_j - P\mu)^t - (q_j - P\mu) \Omega^{-1} P e_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow e_k^t \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^d (s_i - \mu) + e_k^t P \Omega^{-1} \sum_{j=d+1}^{d+t} (q_j - P\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow e_k^t (d \Sigma^{-1} (\Pi - \mu) + n P \Omega^{-1} (\bar{q} - P\mu)) = 0$$

Com això és cert per $\forall i = 1, \dots, d + t$, tenim que:

$$\frac{t}{d} \Sigma^{-1} (\Pi - \mu) + P \Omega^{-1} (\bar{q} - P\mu) = 0$$

Posem $\tau = \frac{t}{d}$ i aïllant μ obtenim:

$$\mu_{BL} = E(r_p) = ((\tau \Sigma)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau \Sigma^{-1}) \Pi + P^t \Omega^{-1} Q)^{-1}$$

També obtenim una nova matriu de covariàncies :

$$\Sigma_{BL} = ((\tau \Sigma)^{-1} + P^t \Omega^{-1} P)^{-1}$$

La solució òptima del problema s'obté amb:

$$\omega_{BL} = \mu_{BL} (\lambda \Sigma_{r_p})^{-1}$$

Veiem un exemple de l'aplicació del mètode fet en R que ens dona com a resultats:

```

1 library(timetk)
2 library(quantmod)
3 library(tidyverse)
4 library(dplyr)
5 symbols <- c("IVV", "EFA", "DIA", "EEM", "AGG", "URTH", "IEF")
6 # Data des del 12/2017 fins al 12/2022
7 prices <- quantmod::getSymbols(
8   symbols = symbols,
9   src = "yahoo",
10  from = "2017-12-31",
11  to = "2022-12-31",
12  auto.assign = TRUE,
13  warnings = FALSE) %>%

```

```

14 # Amb aquest part de codi seleccionem únicament els retorns ajustats dels ETF i
reduxe per ajuntar els diferents elements en un únic objecte
15 purrr::map(.f = ~ quantmod::Ad(get(x = .x))) %>%
16 purrr::reduce(.f = merge) %>%
17 `colnames<-`(value = symbols)
18 # Trèiem els objectes que no són els prues i el símbol de l'ETF i conservem només el
preu a final de mes
19 rm(list = setdiff(x = ls(), y = c("prices", "symbols")))
20 asset_returns_xts <- xts::to.monthly( x = prices,
21
22                               drop.time = TRUE,
23                               indexAt = "lastof",
24                               OHLC = FALSE) %>%
25 # Fem els log retorns i trèiem la primera observació
26 PerformanceAnalytics::Return.calculate(method = "log") %>%
27 stats::na.omit()
28
29 #Càlcul coeficient aversió al risc
30 mercat_mean<-mean(asset_returns_xts$URTH)
31 mercat_var<-var(asset_returns_xts$URTH)
32 free_mean<-mean(asset_returns_xts$IEF)
33 lambda<-as.numeric((mercat_mean-free_mean)/mercat_var)
34
35 #Calcular la matriu de covariàncies
36 assets<-as.matrix(asset_returns_xts)
37 assets<-assets[,colnames(assets)!="URTH"]
38 assets<-assets[,colnames(assets)!="IEF"]
39 sigma<-cov(assets)
40
41 #Especificar els detalls de la visions de mercat
42 #Arreglem les dades: les visions són anuals però els retorns mensuals
43 #Any hi ha 252 dies de trading
44 change<-1/252
45 P<-read_csv("data.csv")
46 Q<-c(0.09,0.2,0.075,0.055,0.1)
47 Q<- Q*change
48 tau<-0.05
49 p<-as.matrix(P)
50 pt<-t(p)
51 colnames(P)<-c("IVV", "EFA", "DIA", "EEM", "AGG")
52 colnames(Q)<-c("Visió retorn")
53 omega<-(p%%sigma%%pt)* tau
54 omega[outer(1:5, 1:5, function(i,j) i!=j)] <- 0
55 # Incertesa C
56 C<-tau*sigma
57 #Market Implied Return
58 w<-read_csv("MARK CAP1.csv")
59 w<-as.matrix(w)
60 rownames(w)<-c("IVV", "EFA", "DIA", "EEM", "AGG")
61 aux<-w[rownames(w)!="URTH",colnames(w)=="ponderacions"]
62 aux<-as.matrix(as.numeric(aux))
63
64 implied_return = lambda*sigma%%aux[]+free_mean
65 colnames(implied_return)<-c("Implied return market")
66
67 #Calculem la mitjana esperada
68 omegainv<-solve(omega)
69 Cinv<-solve(C)
70 cov_mu<-solve(pt%%omegainv%%p+Cinv)
71 part2<-(Cinv%%implied_return)+(pt%%omegainv%%Q)
72 mu<-cov_mu%%part2
73 new_cov<-sigma+cov_mu
74 pes_bl<-solve(lambda*new_cov)%%mu
75 colnames(pes_bl)=c("Pes BL")

```

Pes BL		Retorn esperat BL		IVV	EFA	DIA	EEM	AGG
IVV	-0.04516804	IVV	0.0004743910	0.0030867593	0.0025938861	0.0028956240	0.0021919121	0.0003227921
EFA	-0.08465725	EFA	0.0003813342	0.0025938861	0.0027861669	0.0025973209	0.0024575935	0.0003284763
DIA	0.21040415	DIA	0.0004653514	0.0028956240	0.0025973209	0.0030000123	0.0020754190	0.0002061424
EEM	-0.02189509	EEM	0.0002632432	0.0021919121	0.0024575935	0.0020754190	0.0031564716	0.0003347948
AGG	0.33222600	AGG	0.0001240804	0.0003227921	0.0003284763	0.0002061424	0.0003347948	0.0002627518

Figura 19: Resultats del Model Black-Litterman aplicat sobre 5 ETF amb benchmark MSCI World. Dades mensuals. Font: Elaboració pròpia

3.2.1.3.- Models multifactors: Model de 5 factors de Fama i French

Introduïm un model multifactorial. En els darrers anys, firmes com Goldman Sachs, Wealthfront i Betterment, busquen allunyar-se de models tradicionals, i en el model dels 5 factors, proposats pels premi Nobel Fama i French, trobem una millor comprensió de la procedència dels retorns. Això també ho podem entendre com una manera nova de diversificar, no sobre actiu sinó amb els factors.

El primer model de factors, vist anteriorment, és el model CAPM (1964)¹⁵ amb el factor β , que ens indica com varia la cartera en relació al mercat. Al 1992, Fama i French¹⁶ van introduir dos factors més.

El model de tres factors és un model empíric, mirem el comportament passat i amb això busquem trobar els motius que han provocat un comportament diferent en els actius. El punt de partida del model és el model de descompte de dividends. La justificació ve de la creença que fins i tot les accions que no paguen dividends actualment esperem que en un futur els paguin, doncs si els guanys de l'empresa mai tornen a l'accionista, l'acció no tindria cap valor.

El model de tres factors està dissenyat per capturar la relació entre el retorn esperat, la mida (capitalització) i la relació entre el retorn esperat i les ràtios de preu com ara la ràtio book to market:

$$B/M = \frac{\text{Valor comptable per acció}}{\text{Valor mercat per acció}}$$

Així doncs, el model gira en torn la següent sèrie temporal:

$$R_{it} - R_{Ft} = b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + e_{it}$$

R_{it} és el retorn de la cartera i en el període t

R_{Ft} és el retorn de l'actiu lliure de risc

15Sharpe William F (1964) CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK. Journal of finance vol 19, issue 3

16 Fama Eugene F, French Kenneth R.(1992). The cross section of expected stock returns. Journal of Financial Economics Volume 67

R_{Mt} és el retorn del mercat

e_{it} és residu de la regressió lineal

Factor 1 (Risc de mercat): $R_{Mt} - R_{Ft}$, excés de rendibilitat del mercat respecte a l'actiu lliure de risc.

Factor 2 (Mida): SMB_t , Small minus Big, és el retorn d'una cartera diversificada d'accions petites menys el retorn d'una cartera diversificada de grans accions. En general les accions petites solen tenir millor resultats que les grans, però també tenen major risc que les accions grans.

Factor 3 (Value): HML_t , High minus Low, és el retorn de la diferència entre carteres diversificades una amb un B/M baix i l'altre amb B/M alt. La idea és que les carteres amb accions d'elevat B/M tendeixen a donar millor resultats que les accions de creixement amb un baix B/M.

Tractem els factors anteriors com a valors reals i per tant, b_i , s_i i h_i capturen tota la variació en els retorns esperats.

Una vegada proposat el model dels tres factors de Fama i French notem, basant-nos en estudis posteriors de Novy-Marx (2013), que és un model incomplet perquè els factors anteriors no aconsegueixen explicar retorns esperats relacionats amb rendibilitat i inversions.

El 2014 Fama i French¹⁷ van proposar una ampliació d'aquest model. La motivació d'un nou model ve donada per la modificació del model de descompte de dividendes i que interfereix en els tres factors que ens ajuden a explicar el valor dels actius actualment. Això provoca l'aparició de dos factors més.

El punt d'inici del model és el model de descompte de dividendes que proposa que el valor d'un actiu avui depèn del valor dels seus dividendes futurs. Usant aquest model de descompte de dividendes per obtenir dos factors, inversió i rendibilitat.

$$m_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+\tau})}{(1+r)^\tau}$$

m_t és el preu de l'acció en t

$E(d_{t+\tau})$ és el dividend esperat en el període $t + \tau$

r és retorn esperat de l'acció a llarg termini, i.e, taxa interna de retorn dels dividendes

Podem reescriure l'expressió per obtenir les relacions entre el retorn esperat, la rendibilitat esperada, la inversió esperada i B/M. Miller & Modigliani (1961):

$$M_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{E(Y_{t+\tau} - dB_{t+\tau})}{(1+r)^\tau}$$

$Y_{t+\tau}$ és el valor total del guanys de l'acció en $t + \tau$

$dB_{t+\tau} = B_{t+\tau} - B_{t+\tau-1}$ és el canvi total del valor comptable de l'acció

¹⁷Fama Eugene F, French Kenneth R.(Abril 2015). *A five-factor asset pricing model*. Journal of Financial Economics Volume 116

Dividint l'expressió anterior per valor comptable de l'acció en t , B_t , resulta:

$$\frac{M_t}{B_t} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{E(Y_{t+\tau} - dB_{t+\tau})B_t}{(1+r)^\tau}$$

Notem en particular que deixant fix M_t, B_t i els guanys esperats tenim que si esperem un creixement en el valor comptable, una inversió, aleshores el retorn de l'actiu és menor. Per una altra banda, deixant tot fix i tenim uns guanys esperats més elevats aleshores tindran un retorn més alt. Això motiva l'aparició dels factors que presentem a continuació.

El primer nou factor prové del fet que les companyies amb beneficis més alts en el futur tindran retorns més elevats. El problema es trobar un proxy que ens ajudi a predir el canvi en el beneficis. En els últims anys el proxy que s'usa és el factor de rendibilitat.

L'últim factor és la inversió, aquest factor és més abstracte que els anteriors. Imaginem que una companyia anuncia que començaran un nou projecte en el qual invertiran una important part de capital. Ens podríem preguntar si això és una bon o mal senyal. És moment d'invertir o de fer una desinversió?

Al 2004, Titman, Wie i Xie, van observar que les companyies que incrementen de manera significativa la inversió en capital obtenen posteriorment rendiments inferiors. La justificació és que els directius moltes vegades fan inversions per motius personals i no pensant en l'empresa en sí, cosa que provoca males inversions d'aquest capital. Per exemple, imaginem que una empresa, que produeix cotxes, té dues fàbriques amb les quals fa front a la demanda de cotxes. Però tot i això el director general decideix obrir una nova planta, que no resulta rendible per a l'empresa sinó per ampliar els «mèrits» del director.

Aquesta nova variable està molt relacionada amb els factors valor i rendibilitat. El factor en sí no és tant fort com els altres però suficientment rellevant com per a ser considerat.

Així doncs, el model de Fama i French ampliat a 5 factors resulta:

$$R_{it} - R_{Ft} = b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it}$$

Factor 4 (Rendibilitat): RMW_t és la diferència entre retorns de carteres diversificades, una amb rendibilitats dèbils i l'altre amb rendibilitats robustes.

Factor 5 (Inversió): CMA_t és la diferència entre retorns de carteres diversificades d'empreses d'inversió a l'alta o la baixa, a les que anomenarem conservatives o agressives.

```
1 library(timetk)
2 library(quantmod)
3 library(tidyverse)
4
5 symbols <- c("SPY", "EFA", "DIA", "QQQ", "AGG")
6 # Data des del 12/2017 fins al 12/2022
7 prices <- quantmod::getSymbols(
8   symbols = symbols,
9   src = "yahoo",
```

```
10   from = "2017-12-31",
11   to = "2022-12-31",
12   auto.assign = TRUE,
13   warnings = FALSE) %>%
14   # Amb aquest part de codi seleccionem únicament els retorns ajustats dels ETF i
  reduce per ajuntar els diferents elements en un únic objecte
15   purrr::map(.f = ~ quantmod::Ad(get(x = .x))) %>%
16   purrr::reduce(.f = merge) %>%
17   `colnames<-` (value = symbols)
18   # Trèiem els objectes que no són els prues i el símbol de l'ETF i conservem només el
  preu a final de mes
19   rm(list = setdiff(x = ls(), y = c("prices", "symbols")))
20   asset_returns_xts <- xts::to.monthly( x = prices,
21                                     drop.time = TRUE,
22                                     indexAt = "lastof",
23                                     OHLC = FALSE) %>%
24   # Fem els log retorns i trèiem la primera observació
25   PerformanceAnalytics::Return.calculate(method = "log") %>%
26   stats::na.omit()
27   # Donem pesos als ETF que hem escollit, vigilar que els pesos sumin en total 28
  w=c(0.15,0.25,0.3,0.1,0.2)
29   # Calculem el retorn de la cartera rebalancejat mensualment
30   portfolio_returns_xts_rebalanced_monthly <-
31   PerformanceAnalytics::Return.portfolio(
32     R = asset_returns_xts,
33     weights = w,
34     rebalance_on = "months",
35     # Usem encadenament aritmètic per agregar els retorns
36     geometric = FALSE
37   ) %>% `colnames<-` ("Monthly_portfolio_returns")
38   #Dades de factors (Fama i French) i convertim les dades a decimals
39   factor5ff <-read.csv.zoo("ffdata.csv")
40   m<-merge(portfolio_returns_xts_rebalanced_monthly,factor5ff)
41     MKT.RF = m$`Mkt.RF`/100
42     SMB = m$SMB/100
43     HML = m$HML/100
44     RMW = m$RMW/100
```

```

45     CMA = m$CMA/100
46     RF = m$RF/100
47     R_excess = round(m$Monthly_portfolio_returns - RF, 4)
48     m1<-
merge(portfolio_returns_xts_rebalanced_monthly,MKT.RF,SMB,HML,RMW,CMA,RF,R_excess)
      ### DATA END ###

50 #Fama i French regressió lineal
51 m2<-as.data.frame(m1)
52     summary(lm(R_excess ~ MKT.RF + SMB + HML + RMW + CMA))

```

```

Call:
lm(formula = R_excess ~ MKT.RF + SMB + HML + RMW + CMA)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0097670 -0.0026659  0.0004869  0.0026885  0.0089487

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.0018754  0.0006045  -3.102  0.003077 **
MKT.RF       0.8173615  0.0128348  63.683 < 2e-16 ***
SMB          -0.1521620  0.0386144  -3.941  0.000239 ***
HML          -0.0062918  0.0370627  -0.170  0.865844
RMW           0.1361638  0.0503730   2.703  0.009211 **
CMA           0.0653016  0.0545705   1.197  0.236770
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.004374 on 53 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9905,    Adjusted R-squared:  0.9896
F-statistic: 1100 on 5 and 53 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Figura 20: Resultat de la regressió lineal del model de 5 factors de fama i french. Font: Elaboració pròpia

El valor multiple R^2 és 0.9905, això vol dir que el 99% dels retorns de la cartera s'expliquen amb algun dels factors del model. El coeficient intercept ens indica l'alpha del model és del -1% per any, el qual vol dir, que la nostra cartera té un rendiment inferior a la referència, segons la regressió. Si ens fixem en el p-value aquest és un factor rellevant en el nostre model. En canvi, factors com ara HML i CMA amb p-value>0.05.

Altres factors significatius són SMB és -15% això ens indica que en la nostra cartera predominen els actius amb major capitalització i RMW és del 13% que vol dir que dominen els actius amb rendibilitats robustes. L'últim factor significatiu és la beta tradicional que ens indica que les desviacions del mercat s'esmoreixen un 20% sobre el mercat.

4.-Rebalancejament

Hem vist com escollir els actius de la nostra cartera i com obtenir la combinació òptima d'aquests actius. Tot i que, l'assignació dels actius és fonamental alhora de invertir, no és suficient amb dur a terme aquest procés quan creem la cartera sinó que és un procés dinàmic.

Suposem que tenim una cartera de 100€ amb la següent assignació d'actius: 65% accions i 35% bons. Durant l'any les accions ens donen uns retorns del 35% i els bons del 2%. Ara el pes dels actius de la cartera ha canviat com podem veure al gràfic:

Evolució d'una cartera al llarg d'un any

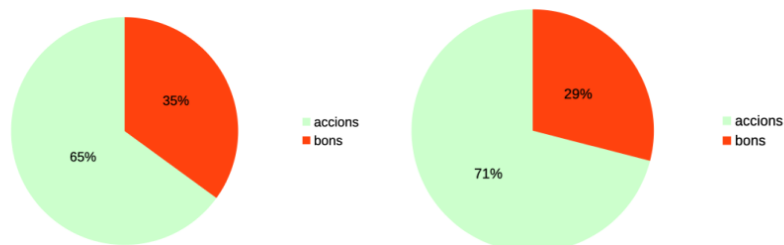


Figura 21: Evolució d'una cartera 65/35 al llarg d'un any, suposant retorn accions d'un 35% i retorn de bons d'un 2%. Font: Elaboració pròpia

Com podem veure al gràfic l'assignació inicial s'ha perdut completament, modificant el risc de la cartera. És això el que motiva el rebalancejament de les carteres.

Rebalancejar la cartera és un procés que implica la compra/venta de porcions de la nostra cartera o bé per retornar a les assignacions de pesos inicials o per corregir desviacions que ens fan allunyar-nos dels retorns esperats, incrementar el risc o bé disminuir la diversificació. En aquest cas, recalcularem els pesos que ha de tenir la nostra cartera per continuar alineada amb els nostres objectius.

Però, com sabem quan hem de rebalancejar una cartera? Hi ha tres criteris que s'usen alhora de determinar la necessitat de rebalancejar una cartera.

- Desviació percentual. Si la cartera s'ha desviat més d'un determinat llindar dels pesos inicials dels actius, aleshores rebalancejem.
- Temporal. Molt comú als roboadvisors és fer un rebalanceig periòdic, per exemple, podem rebalancejar cada semestre.
- Canvi d'actius. Pot donar-se el cas que els actius que prèviament hem seleccionat de la cartera deixin de verificar els nostres criteris de selecció. En aquest cas, es treu l'actiu de la cartera i és substituït per un altre o bé és distribuït als altres actius.

El primer pas alhora de rebalancejar la cartera és avaluar la cartera. Per avaluar la cartera primer hem de saber que és el que pot variar amb el pas del temps en la cartera. Seguint l'estudi de Stanley R. Pliska and Kiyoshi Suzuki (2004)¹⁸, el que influeix alhora de rebalancejar són les següents característiques:

- El retorn de la cartera és el primer que ens pot diferir del retorn objectiu de la cartera. Això pot fer que la cartera no aconsegueixi els objectius financers. Per un altra banda, un retorn molt alt en un actiu fa que la cartera es centri, disminuint la diversificació i a més que ens desviem de l'assignació òptima. Això també afecta el risc de la cartera.
- Volatilitat, l'alta volatilitat dels retorns augmenta la fluctuació de les assignacions dels actius. Per tant incrementa el risc de desviar-nos de l'objectiu afectant també el risc de la cartera.
- Correlació, l'alta correlació dels actius fa que els retorns es moguin conjuntament. Així doncs, si els retorns de tots els actius es mouen junts, l'assignació d'actius es manté reduint el risc de desviació dels objectius.
- Horitzó temporal, un llarg horitzó temporal fa més probable que la cartera es desvii de la seva assignació objectiva. Cal tenir també en compte que un gran horitzó temporal permet recuperar els costos del rebalancejament. Però quan ens apropem al final de l'horitzó temporal de la cartera, la freqüència de rebalancejament tendeix a disminuir doncs no es poden arribar a cobrir els costos.

Evidentment, existeixen moltes tècniques per rebalancejar una cartera. En aquest estudi, veurem dues maneres de rebalancejar. La primera és una manera de rebalanceig més complexa i que serveix de base per la construcció d'intel·ligències artificials: la metaheurística. La segona manera que veurem de rebalancejar és molt més senzilla basada en mantenir la cartera inicial en el temps.

4.1.- Rebalancejament amb metaheurística

Definim la ràtio de Sharpe com la ràtio que busca caracteritza com de bé el retorn d'un actiu compensa el risc assumit per l'inversor.

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

R_p és el retorn de la cartera

R_f és el retorn de l'actiu lliure de risc

$\sigma_p = \sqrt{\text{Var}(R_p - R_f)}$, és la desviació estàndard de l'excés de retorn de la cartera

L'estratègia que usarem busca maximitzar aquesta ràtio minimitzant els costos de transacció que genera el rebalancejament.

Considerem una cartera P amb actius A_1, \dots, A_n amb retorns μ_i i amb pesos $\omega_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ i $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

¹⁸Stanley R. Pliska and Kiyoshi Suzuki (2004). Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs. Taylor & Francis Journals, vol. 4.

Aleshores, maximitzem la ràtio de Sharpe de la cartera, $\max \left(\frac{R_p - R_f}{\sigma_P} \right)$, tenint en compte la definició dels retorns esperats de la cartera i la variància de la cartera, resulta que:

$$\max \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i - R_f}{\sqrt{\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij}}} \right)$$

subjecte a

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \omega_i \in [0, 1]$$

Suposem que un inversor té una cartera original $P_{original}$, amb actius A_1, \dots, A_n i pesos $\omega_i^{original}$ tal que $\omega_i^{original} \in [0, 1]$, amb volalivitat $\sigma_P^{original}$.

Suposem que aquesta cartera es rebalanceja de manera periòdica. Anomenem la cartera rebalancejada P_{rebal} i notem x_1, \dots, x_n els pesos desitjats dels actius. Siguin $x_i^+, x_i^-, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ són la proporció dels pesos que hem de vendre o comprar dels actius per arribar a la assignació de pesos òptima.

Definim el model de rebalancejament com:

$$\max \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i - R_f}{\sqrt{\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij}}} \right)$$

subjecte a

$$0 \leq x_i^+ \leq u_i \quad (1)$$

$$0 \leq x_i^- \leq \omega_i \quad (2)$$

$$x_i = \omega_i + x_i^+ - x_i^- \quad (3)$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i + \rho \sum_{i=1}^n (x_i^+ - x_i^-) = 1 \quad (5)$$

$$\sqrt{X^t \Sigma X} \leq \sigma_P^{original} \quad (6)$$

- (1) Límit del pes de la compra d'actius, especifiquem quant volem comprar com a màxim.
- (2) Límit del pes de la venda d'actius, especifiquem quant volem vendre com a màxim.
- (3) Calculem els nous pesos en funció dels anteriors i les compres i vendes
- (4) Límit de pes dels actius de la nova cartera
- (5) Exigint que la suma dels pesos de la nova cartera sigui 1, assegurem que tot el capital està invertit. A més en aquesta condició demanem que la cartera d'autofinançament, és a dir, que els costos de transacció és poden pagar amb els beneficis mantenint un bon nivell de rendibilitat.
- (6) Assegurem que la nova cartera no sobrepassi el nivell de risc de l'anterior.

Per poder aconseguir aquesta optimització prenen una estratègia metaheurística, Evolution Strategy with Hall of fame (ES HOF).

La metaheurística és capaç de construir una solució factible al problema d'optimització. Però, la gestió de les restriccions és un problema important en l'aplicació d'aquestes. Per abordar aquest problema, en el nostre model, usarem la Dynamic Penalty Function Strategy de Jones i Houck (1994)¹⁹ per la restricció (6) i per les restriccions (1) a (5) usem estratègies de reparació.

Les estratègies de reparació estan fetes per adaptar-se als requisits del problema i desenvolupar una estratègia d'aquest tipus que ajudi a satisfer una o més restriccions pot ser molt difícil. Una vegada desenvolupades ens ajuden a generar conjunts de possibles solucions en cada cicle de generació el que porta a una convergència més ràpida en les estratègies metaheurístiques.

Com el problema resulta un problema de programació quadràtica amb restriccions no convexes busquem resoldre amb la metaheurística. Per abordar les constants que fan referència al control del risc usarem les funcions dinàmiques de penalització. La transformació del model resulta:

$$\max \left(\frac{\mu X - R_f}{\sqrt{X^t \Sigma X}} - \psi(X, \Sigma, \sigma_P^{original}, t) \right) \quad (7)$$

on

$$\psi(X, \Sigma, \sigma_P^{original}, t) = (C, t)^\alpha (G, \phi(X, \Sigma, \sigma_P^{original}))^\beta,$$

$$\phi(X, \Sigma, \sigma_P^{original}) = |\sqrt{X^t \Sigma X} - \sigma_p^{original}| - \epsilon$$

$$G = \begin{cases} 0, & \text{si } \phi(X, \Sigma, \sigma_P^{original}) \leq 0 \\ 1, & \text{si altrament} \end{cases}$$

$\psi(X, \Sigma, \sigma_P^{original})$ és la funció de violació de la restricció,

(C, α, β) són constants de les que depèn la qualitat de la solució i t és el comptador de generacions,

$(C, t)^\alpha$ és el terme de penalització que incrementa constantment cada generació t

ϵ és el límit de la tolerància que permetem per verificar la desigualtat representada per ϕ

Finalment, el model de rebalanceig de la cartera transformat és (7) amb les restriccions de la (1) a la (5). A continuació tenim un flow chart de com funciona l'estratègia ES-HOF aplicada al nostre cas.

¹⁹Joines i Houck (1994) On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with GA's.

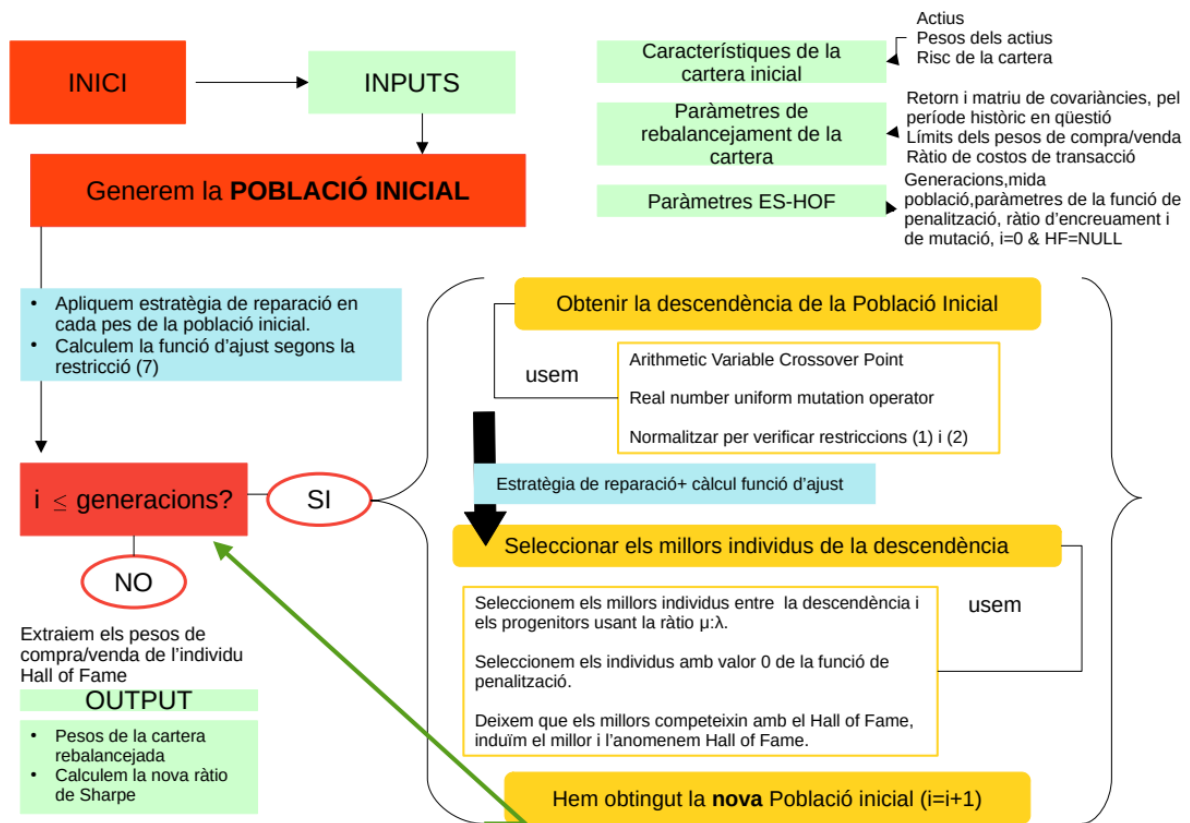


Figura 22: Flow Chart de rebalancejament d'una cartera usant ES-HOF. Font: Elaboració pròpia

4.2.-Rebalancejament clàssic

El mètode de rebalancejament que plantegem seguidament és molt clàssic i l'avantatge respecte l'anterior de ser molt més senzill i comprensible.

1. Determinar els nostres objectius. Evidentment cada inversor té diferents motivacions alhora de rebalancejar.
 1. Reducció del risc, busquem retallar la renda variable amb risc i traslladar-ho a bons o efectiu. Disminuïm el risc de la cartera, encara que els retorns que tindrem seran més baixos.
 2. Millora del retorn, busquem retirar capital dels actius que han tingut bons rendiments en un període i assignar-los en els actius que han tingut un rendiment inferior buscant potenciar una millora dels retorns de la cartera. També podem aplicar la mateixa idea en sentit geogràfic.
 3. Producció de fluxos d'efectiu, segueix la tècnica anterior però el capital que es retira part es reinverteix a la cartera i l'altre es retribueix a l'inversor com si fos una renda.
2. Determinar la situació actual de la cartera. Una vegada decidit el tipus de rebalancejament que aplicarem hem d'analitzar com està ara la nostra cartera.
3. Comparem la situació actual de la cartera amb les nostres benchmark, que en el nostre cas és l'assignació inicial.

4. Conseqüències fiscals i costos de transacció, de la mateixa manera que busquem minimitzar els costos de transacció alhora de fer les operacions de rebalancejament, també hem de tenir en compte que en cas dels ETFs o accions la compra/venda genera imposicions fiscals. En cas de beneficis hem de pagar els impostos corresponents i en cas de pèrdua aquestes les podem compensar amb els beneficis. En el cas d'Espanya, els fons d'inversió no té costos de transacció, doncs és el traspàs de fons és gratuït i lliure d'imposició.
5. Identificar els candidats a retallar i possibles addicions. Rebalancejant busquem arribar a una assignació molt similar a la inicial. En general, retallant els valors amb millors rendiments i assignant-los als valors amb rendiments inferiors, aquests valors els determinarem segons (1). Finalment, avaluem si hi ha candidats dins de la col·lecció disponible d'actius que puguin esdevenir interessants d'incloure a la cartera, i per tant dins del procés de rebalancejament.

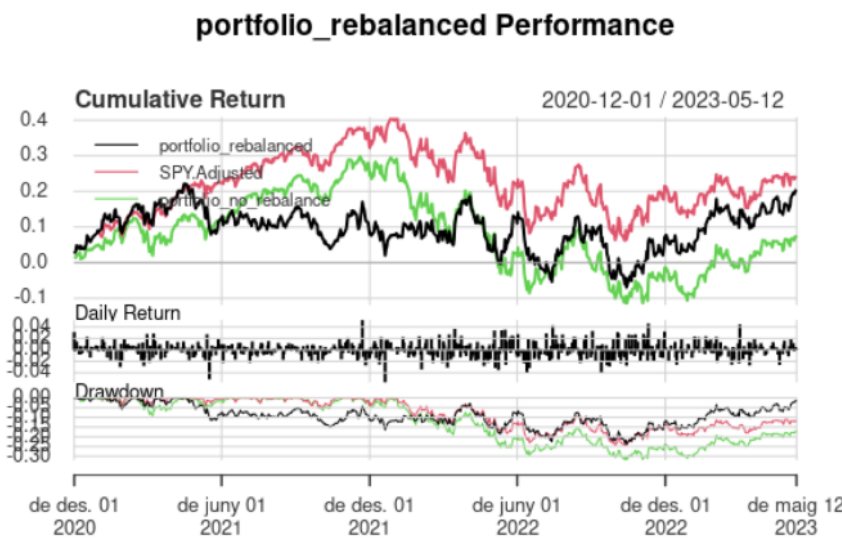
Passem a veure com actua en rebalancejament per això hem plantejat un codi en R on veiem una cartera rebalancejada i una sense rebalancejar comparades amb un benchmark en aquest cas el S&P500, que representem a el seu ETF per excel·lència el SPY.

```
1 library(PortfolioAnalytics)
2 library(quantmod)
3 library(ROI)
4 library(DEoptim)
5 library(PerformanceAnalytics)
6 #Donem una seleció d'ETF per construir la nostre cartera
7 simbols<-c("ONEQ", "QQQ", "GLD", "IVV", "EFA", "DIA", "AGG", "EEM", "SHY", "ECH", "ECNS", "USHY", "ANGL")
8 e<-new.env()
9 getSymbols(simbols, from="2019-12-31",env=e)
10 preus<-do.call(merge,eapply(e,Ad))
11 preus<-round(ROC(preus,type="discrete"),4)
12 preus[is.na(preus)]<-0
13 # Pasem a construir una cartera
14 R<-preus
15 actius <-colnames(R)
16 #Incloem les restriccions per buscar una cartera de variància mínima
17 portfolio1<-portfolio.spec(assets=actius)
18 portfolio1<-add.objective(portfolio = portfolio1, type="return", name="mean")
19 portfolio1<-add.objective(portfolio=portfolio1,type="risk", name="StdDev",multiplier=0)
20 portfolio1<-add.constraint(portfolio=portfolio1, type="risk", target=0)
21 portfolio1<-add.constraint(portfolio=portfolio1, type="weights_sum", min_sum=0.95, max_sum=1.01)
22 portfolio1<-add.constraint(portfolio = portfolio1, type="long_only")
23 c.min=rep(0,ncol(R))
24 c.max=rep(0.5,ncol(R))
25 portfolio1<-add.constraint(portfolio = portfolio1,type="box",enable=TRUE, min=c.min, max=c.max)
26 #Optimitzem la cartera i la rebalancejem
```

```

27 opt1<-optimize.portfolio(R=R, portfolio=portfoli1,optimize_method = "DEoptim",itermax=50)
28 opt2<-optimize.portfolio.rebalancing(R=R, portfolio=portfoli1, optimize_method =
"DEoptim",itermax=50, search_size = 2000, trace=TRUE,
29     rebalance_on = "quarters", training_period = 6,rolling_window =6)
30 wnreb<-opt1$weights
31 wfin2<-opt2$opt_rebalancing`2023-05-12`$weights[opt2$opt_rebalancing`2023-05-12`$weights>0]
32 #retorns de les carteres
33 portfolio_no_rebalance<-reclass(coredata(preus[,names(wnreb)]["202012/202305"])) %*%
as.numeric(wnreb),match.to = preus[,names(wnreb)]["202012/202305"])
34 portfolio_rebalanced<-reclass(coredata(preus[,names(wfin2)]["202012/202305"])) %*%
as.numeric(wfin2), match.to = preus[,names(wfin2)]["202012/202305"])
35 # Resultats
36 benchmark<-round(ROC(Ad(getSymbols("SPY",from="2020-12-31",auto.assign = FALSE)),type=
"discrete"),4) ["202012/202305"]
37 Portfolio_performance=merge(portfolio_rebalanced,benchmark,portfolio_no_rebalance)
38 charts.PerformanceSummary(Portfolio_performance)
39 extractObjectiveMeasures(opt1)
40 extractObjectiveMeasures(opt2)

```



Portfolio_no_rebalanced

> mean=0.0005480726
> StdDev=0.01581751

Portfolio_rebalanced

	mean	StdDev
2020-03-31	1.898511e-02	0.043754055
2020-06-30	2.016886e-03	0.008990215
2020-09-30	3.771914e-03	0.013624432
2020-12-31	3.826486e-03	0.003432885
2021-03-31	1.264457e-03	0.006516468
2021-06-30	4.034114e-03	0.004433099
2021-09-30	4.237143e-05	0.010993004
2021-12-31	5.902400e-03	0.007290406
2022-03-31	1.609343e-03	0.012042039
2022-06-30	3.588143e-03	0.009302388
2022-09-30	-2.082629e-03	0.008228236
2022-12-30	3.906829e-03	0.008793853
2023-03-31	5.784686e-03	0.005882515
2023-05-12	6.169029e-03	0.007211198

Figura 23. Gràfic que compara una cartera rebalancejada trimestralment, la mateixa cartera sense rebalancejar i el comparem amb un benchmark: SPY. La cartera està creada maximitzant el retorn i minimitzant risc. Font: Elaboració pròpia.

Com podem veure al gràfic la cartera rebalancejada té una tendència més estable que la cartera sense rebalancejar que pateix més les fluctuacions del mercat. Notem doncs, els beneficis de rebalancejar la cartera obtenim una disminució del risc de la cartera original i en aquest cas, un retorn esperat superior.

5.- Fiscalitat dels roboadvisors

En aquesta secció parlem de com la fiscalitat afecta als roboadvisors tant a nivell de declaració de la renda com en el propi funcionament del roboadvisor.

5.1.- Tax loss harvesting

Una casuística molt interessant que és fa servir en la fase de rebalanceig és el tax loss harvesting. Consisteix en vendre actius amb pèrdues quan tenim guanys per compensar-les quan tributem a Hisenda. Aquesta pràctica està subjecta a la fiscalitat de cada país, doncs cada país té normatives i casuístiques legals diferents.

Per a que una pèrdua es pugui compensar no es pot comprar l'actiu, que té la pèrdua, durant un període de temps determinat. En Espanya aquest període sol ser de dos mesos per mercats regulats i d'un any per mercats no regulats. Tot això tenint en compte que el criteri que s'aplica és el FIFO, first in first out, és a dir, les accions més antigues són les primeres que es venen. Un cas excepcional, és que els fons d'inversió no se'ls aplica cap imposició fins que no és venen, els traspessos entre fons d'inversió no estan gravats.

La venda d'un actiu en pèrdues pot desequilibrar la cartera. Per corregir aquesta situació es compra un actiu que estigui altament correlacionat amb el que acabem de vendre. Els ETFs o fons d'inversió indexats, que són els que usen els roboadvisors, faciliten molt la tasca doncs simplement busquem un ETF diferent que segueixi al mateix índex.

5.2.- Imposició sobre els roboadvisors

Farem una aproximació local de com tributa un roboadvisor alhora de que el client fa la declaració de la renda. Un roboadvisor tributa com un guany o pèrdua patrimonial alhora de fer la declaració de la renda. En el cas que només operi amb fons d'inversió i durant l'any fiscal no hagués fet cap liquidació sinó que només s'han efectuat traspessos entre fons, no tributaries doncs encara no s'ha obtingut cap plusvàlua.

La quantia de plusvàlua s'obté com: Valor de reemborsament-Valor de subscripció. Si s'han subscrit en moments diferents com ja hem comentat abans s'usa el criteri del FIFO. Per una altra banda, les comissions de subscripció, despeses de gestió o custòdia són deduïbles sobre el valor de subscripció. Veiem el gravamen que s'aplica sobre aquestes:

Base liquidable del ahorro	Cuota íntegra	Resto base liquidable del ahorro	Tipo aplicable
-	-	-	-
Hasta euros	Euros	Hasta euros	Porcentaje
0	0	6.000	19
6.000,00	1.140	44.000	21
50.000,00	10.380	150.000	23
200.000,00	44.880	100.000	27
300.000,00	71.880	En adelante	28

Figura 24: Tipus gravamen rendes de l'estalvi 2023. Font: Agencia Tributaria Espanyola

6.- Una cartera òptima i la cartera 60/40

Hem vist detalladament com un roboadvisor construeix i gestiona les carteres dels seus clients. En aquest apartat plantegem veure l'actuació d'aquests models en un exemple.

El primer pas és la creació d'una col·lecció d'actius. En aquest cas, hem escollit els ETFs com a vehicles d'inversió i seguint la regulació els ETF escollits pertanyen al mercat europeu. Però hem trobat una problemàtica doncs molt d'ells no tenen suficients dades històriques per aplicar els mètodes presentats anteriorment. Per solucionar aquesta problemàtica hem agafat l'ETF equivalent en USA que tenen més dades històriques, no ens preocupem de la diferència en les divises doncs l'efecte divisa a llarg termini és dilueix.

En particular, usarem 41 ETF que detallem seguidament:

Nombre fondo	TER	Ticker	Ticker US	Commodities			
Renda Variable				Invesco Bloomberg Commodity UCITS ETF Acc	0,19%	CMOD.MI	DJP
				L&G All Commodities UCITS ETF	0,15%	ETLF.F	GSG
Global				Consumer staples			
Vanguard ESG Global All Cap UCITS ETF	0,24%	V3AA.F	IXUS	Xtrackers MSCI World Consumer Staples UCITS ETF 1C	0,25%	XDWS.MI	XLP
iShares MSCI ACWI UCITS ETF USD (Acc)	0,20%	IUSQ.DE	ACWI	Amundi S&P Global Consumer Staples ESG UCITS ETF	0,18%	WELW.F	VDC
iShares MSCI World Small Cap UCITS ETF	0,35%	IUSN.DE	VB	iShares MSCI World Consumer Discretionary Sector UCITS	0,25%	38BB.F	XLY
				Amundi S&P Global Consumer Discretionary ESG UCITS ETF	0,18%	WELC.F	VCR
Nortamerica				Energy			
JPMorgan BetaBuilders US Equity UCITS ETF	0,05%	BBUS.DE	FPX	iShares Oil & Gas Exploration & Production UCITS ETF	0,55%	ISOD.DE	IEO
Amundi Prime USA UCITS ETF DR	0,05%	PRAU.F	ITOT	Amundi S&P Global Energy Carbon Reduced UCITS	0,18%	WELP.F	SMOG
Xtrackers Russell 2000 UCITS ETF	0,30%	XRS2.F	VTWO	SPDR MSCI World Energy UCITS ETF	0,30%	SS42.BE	IXC
VanEck Morningstar US Sustainable Wide Moat UCITS ETF	0,49%	MOAT.MI	MOAT	Industrials			
				HANetf U.S. Global Jets UCITS ETF	0,65%	JETS.MI	DIA
				Xtrackers MSCI World Industrials UCITS ETF	0,25%	XDWI.DE	VIS
Europa				Basic Materials			
iShares Core MSCI Europe UCITS ETF EUR (Acc)	0,12%	IMAE.AS		Xtrackers MSCI World Materials UCITS ETF 1C	0,25%	XDWM.DE	MXI
Amundi Prime Eurozone UCITS ETF DR	0,05%	PRAZ.DE	EZU	Amundi S&P Global Materials ESG UCITS ETF DR EUR (D)	0,18%	WELV.F	VAW
Lyxor STOXX Europe 600 (DR) UCITS ETF	0,07%	MEUD.PA	IEV	REITs			
SPDR MSCI Europe Small Cap UCITS ETF	0,30%	SMC.PA	IEUS	Invesco European Retail Sector UCITS ETF	0,20%	SC05.F	
				Amundi Index FTSE EPRA NAREIT Global UCITS ETF	0,24%	10AJ.DE	VNQ
Pacífic				Communication			
iShares Core MSCI Japan IMI UCITS ETF	0,15%	IJPA.AS	VPL	Xtrackers MSCI World Communication Services UCITS ETF 1C	0,25%	XWTS.DE	VOX
Vanguard FTSE Developed Asia Pacific ex Japan UCITS ETF	0,00%	VAPX.L		Information Technology			
				Invesco S&P World Information Technology ESG UCITS	0,18%	WDTE.DE	VGT
Emergentes				Financials			
Amundi Index MSCI Emerging Markets UCITS ETF DR	0,20%	AEME.PA	VWO	Xtrackers MSCI World Financials UCITS ETF 1C	0,25%	XDWF.DE	VFH
Amundi MSCI Emerging Markets Latin America UCITS ETF	0,20%	ALAT.PA	ILF	Healthcare			
				Xtrackers MSCI World Health Care UCITS ETF 1C	0,25%	XDWH.DE	VHT

Figura 25. Llista dels ETF de renda variable de la col·lecció, específicament el seu cost (TER) i el ETF equivalent en USA. En la primera meitat tenim ETF segons la zona geogràfica i en la segona meitat segons sectors. Font: Elaboració pròpia.

Renta Fija			
Corto plazo			
SPDR Bloomberg 1-3 Year Euro Government Bond UCITS ETF	0,15%	SYB3.DE	
Medio plazo			
iShares VII PLC - iShares € Govt Bond 7-10yr UCITS ETF EUR (Acc)	0,20%	SXRQ.DE	
iShares Core € Govt Bond UCITS ETF EUR (Dist)	0,12%	IEGA.AS	
iShares Core Global Aggregate Bond UCITS ETF	0,10%	EUNA.DE	AGG
Ligada inflación			
iShares € Inflation Linked Govt Bond UCITS ETF	0,09%	IBCI.L	
Largo Plazo			
Xtrackers Eurozone Government Bond 25+ UCITS ETF 1C	0,15%	DBXG.DE	

Figura 26. Llista dels ETF de renda fixa de la col·lecció, específicament el seu cost (TER). Font: Elaboració pròpia.

Una vegada definits els ETFs que usarem per construir la nostra cartera, usarem Black-Litterman per construir aquesta cartera òptima. Per Black-Litterman, a més de la col·lecció d'ETF, les seves dades històriques i la seva capitalització de mercat també requerim de les visions de l'inversor. Per donar una rigorositat a les visions de l'inversor he combinat les meves pròpies amb el Outlook 2023 de la gestora Fidelity. Resultant:

- Davant d'imminent pujada dels tipus d'interès per controlar la inflació, tenim perspectives que la renda fixa obtingui uns rendiments d'un 5% en 2023.

- Europa té molt bones perspectives de creixement havent-se vist com una economia resilient davant les fluctuacions econòmiques d'aquest últim any i amb empreses robustes esperem un creixement del 20%.
- REITS (béns immobles), tenen molt bones perspectives després de mostrar signes de recuperació a finals del 2022 gràcies al fi de les restriccions Covid, destacant els REITs d'hoteleria, healthcare o els centres de dades, amb retorns esperats del 50% aquest any.
- Sectors molt castigats al 2022 com ara Comunicació o Costumer Discretionary, tenen grans perspectives de creixement per aquest any, mostrant posseir empreses sòlides i consolidades. Els retorns esperats per 2023 són del 20%.
- Esperem baixades en sectors de commodities (matèries primes) i Energy (petroli i carbó) que van pujar molt al 2022 per la Guerra d'Ucraina. Com a contrapartida, la pujada de sectors com ara IT o Helathcare impulsats sobretot per les innovacions constants en aquests sectors.

Una vegada tenim tots els inputs apliquem Black-Litterman. Obtenim la següent cartera:

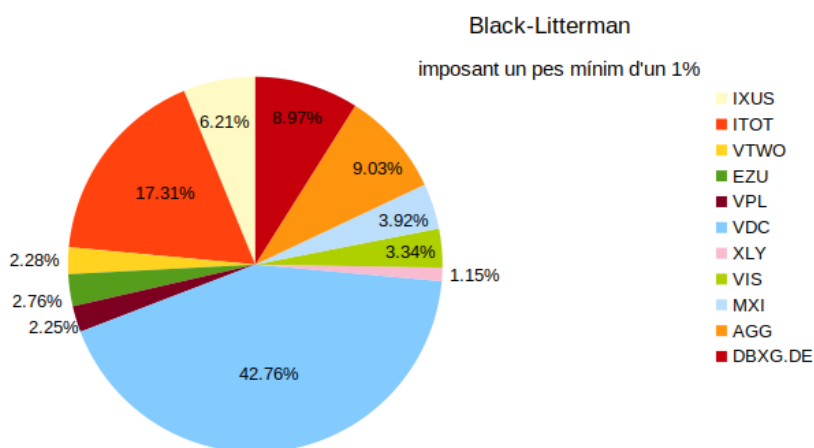


Figura 27. Assignació d'actius de la cartera generada mitjançant Black-Litterman, imposant la condició de no tenir venda a curt i tenir un pes mínim per actiu d'un 1%. En cas de tenir pesos inferiors s'han redistribuït en actius similars. Font: Elaboració pròpia.

El model ens ha donat una cartera amb 82% de renda variable i un 18% de renda fixa. En la nostra escala de perfils aquesta cartera estaria en l'últim nivell el perfil 5 el perfil que espera més rendiments i també més risc. Veiem si això és verifca doncs el model també ens dona el retorn esperat de la cartera.

$$\text{Retorn de la cartera anualitzat} = 11.78\%$$

$$\text{Risc de la cartera} = 1.19\%$$

Com podem veure el risc de la cartera és molt baix encara que tenim una gran part de la cartera assignada en renda variable. Però, els ETF tenen molt poc risc i això fa que el risc de la cartera disminueixi exponencialment.

Una altre dels serveis que ens ofereixen els roboadvisors és una predicció de l'actuació de la cartera en el temps. Nosaltres també farem aquesta predicció de la cartera que acabem de generar mitjançant Monte Carlo.

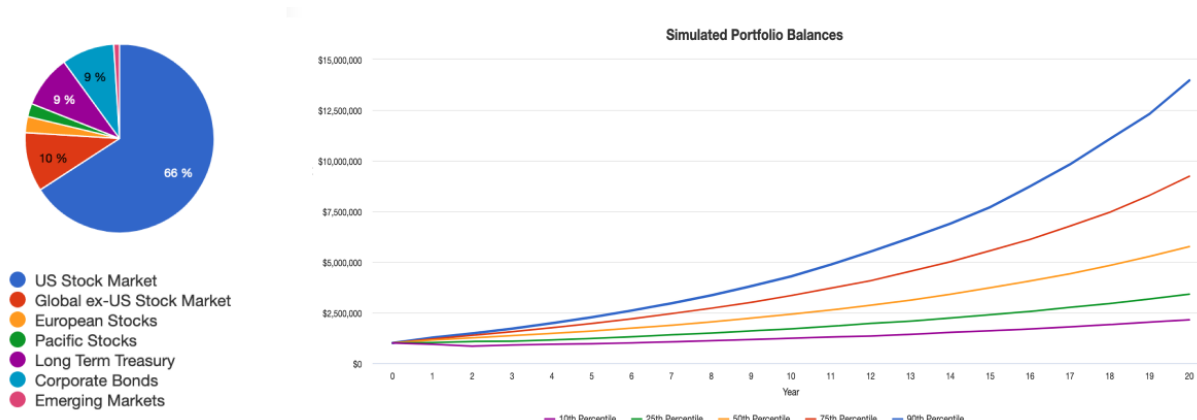


Figura 28. Simulació de Monte Carlo de la nostra cartera, amb un horitzó temporal de 20 anys, sense rebalancejar. Font: Portfolio visualizer.

Cada percentil ens dona una visió de la cartera, el percentil 10é ens indica la visió més pessimista de la nostra cartera. En canvi, la visió més optimista està reflectida en el percentil 90é. Veiem que encara que l'evolució de la cartera comparant el 10é i 90é percentil difereix molt a causa de que la cartera està conformada principalment per renda variable que és molt volàtil.

La cartera que acabem de plantejar és d'un perfil 5, però la cartera més normal i que utilitza és la cartera que s'associa al perfil 3, més coneguda, en termes d'assignació d'actius, com la cartera 60/40.

Aquesta cartera té un 60% de renda variable i un 40% de renda fixa buscant obtenir un 7% de rendiment a llarg termini. La idea darrere d'aquesta assignació és que els anys les accions estan alça aprofitar els seus rendiments i els anys que estan a la baixa compensar-les la renda fixa, aquest fenomen es deu perquè en general quan la renda variable cau, la renda fixa va a l'alça. De fet, les dades demostren l'efectivitat d'aquesta cartera, segons dades de Vanguard 1926 a 2021 aquest tipus de carteres presenten uns retorns del 8.8%. Aquesta dada és molt pròxima al que obtindríem en una cartera invertint en una cartera 100% renda variable, per exemple el retorn del S&P500 en aquestes mateixes dates és del 10.49%.

Al 2022 l'elevada inflació i tipus d'interès a baixos van provocar que la correlació entre la renda fixa i variable fos la més elevada dels últims 20 anys fent que la cartera patís el seu pitjor any amb retorns negatius del 28%, segons dades de Bank of America.

Per veure com actua aquesta cartera hem creat una usant Black-Litterman amb les mateixes suposicions d'abans però tenint en compte el caràcter més conservatiu d'aquesta cartera, per exemple buscant més diversificació i imposant el 60/40 en l'assignació de pesos òptima.

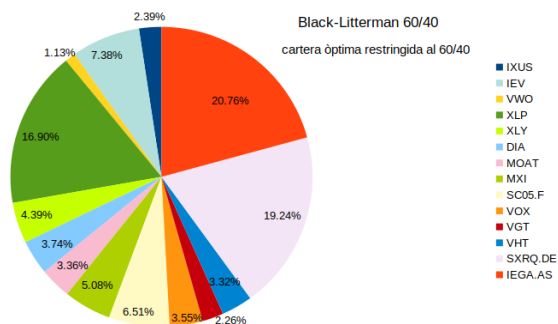


Figura 29. Cartera 60/40 feta amb Black-Litterman limitant la cartera òptima a l'assignació 60/40 amb una visió més conservadora i un pes mínim d'un 1%. Font: Elaboració pròpia.

Comparem ara els retorns d'aquesta cartera amb la primera cartera que hem construït.

Comparació retorns de la cartera Black-Litterman i la cartera 60/40

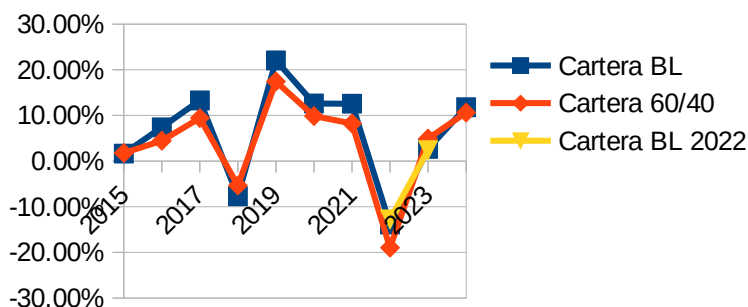


Figura 30. Comparació de la cartera de Black-Litterman amb la cartera 60/40 incloent una tercera cartera de Black-Litterman creada pel 2022. Font: elaboració pròpia.

Com podem veure al gràfic és verifica l’afirmació anterior la cartera 60/40 es mou juntament amb la nostra cartera 82/18 demostrant que tenint un risc 0.98% per sota de la nostra cartera de Black-Litterman i obtenint uns retorns molt similars. Ara si ens fixem al 2022 les dues carteres pateixen una forta baixada doncs 2022 va ser un any molt dolent per la majoria d’economies i sectors i també per la renda fixa obtenint uns retorns del -18.97%, la cartera 60/40 i la nostre cartera de Black-Litterman d’un -13.92%. Per una altra banda, hem construït un altra cartera de Black-Litterman amb visions del 2022, i encara que millora una mica les anteriors no aconsegueix tenir retorns positius al 2022 tot i ser la seva assignació d’actius diferent respecte les altres dues carteres com podem veure a continuació:

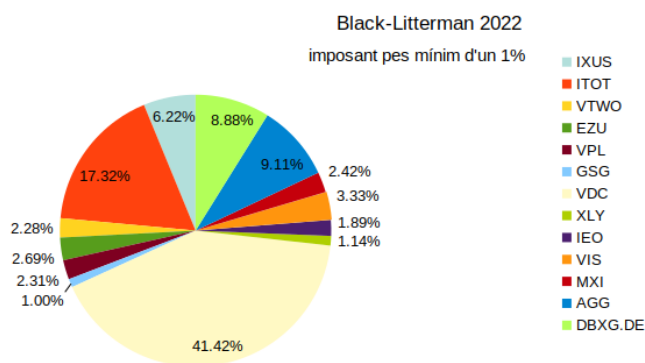


Figura 31. Cartera de Black-Litterman per l’any 2022 imposant un pes mínim d’un 1%. Font: Elaboració pròpia.

Com podem veure l’assignació d’aquesta cartera és molt similar a l’anterior encara que inclou alguns ETF que no teníem abans encara que els que tenen més pes segueixen la línia de la primera cartera. Per això no ens dona rendiments positius al 2022. Una possible solució per haver obtingut una millor cartera al 2022, hagués estat canviar la col·lecció inicial de ETF o haver eliminat abans d’aplicar el model ETF que sospitàvem que tindrien molt mala actuació al 2022.

7.- Conclusions

Al llarg de l'estudi trobem múltiples referències a gestores financeres que disposen del servei de roboadvisor i a través de la seva manera de fer hem pogut arribar a comprendre com funcionen els roboadvisors.

He intentat donar llum a la major problemàtica dels roboadvisor: la confiança. Durant aquest treball hem pogut comprovar com en general, els roboadvisors de les majors gestores sí que donen informació sobre els processos que segueixen en la creació de carteres tot explicant la seva filosofia d'inversió.

De fet encara que els roboadvisors utilitzin algoritmes complexos, la seva utilització des del punt de vista de l'usuari és molt senzilla sent un procés molt guiat. Això el fa ideal per les persones que busquen iniciar-se en el món de les inversions. Tot i que, hem vist en aquest estudi que el gruix de persones que fan servir aquest servei tenen coneixements financers, i per a molts només és un complement en la gestió dels seus estalvis. Un dels motius pels quals molta gent no els utilitza és el seu desconeixement juntament amb la desconfiança en les institucions financeres.

Hem començat veient com creen el perfil de l'inversor mitjançant uns qüestionaris amb preguntes directes i senzilles. Una vegada construïem el perfil de l'inversor l'assignàvem a un nivell de l'escala de perfils per donar una certa estandardització als processos i facilitar la creació de carteres. I és en aquest punt on contemplo dues problemàtiques. La primera és la poca personalització, encara que els roboadvisor es caracteritzen per fer carteres personalitzades aquestes només estan personalitzades fins un cert punt, i això obre un nou horitzó de possibilitats per als roboadvisors alhora d'ampliar la col·lecció de carteres a oferir.

Una altra problemàtica exposada al punt 6 d'aquest treball, és que molts roboadvisors opten relacionar els perfils i les carteres amb assignacions del tipus 60/40. El canvi de paradigma econòmic d'aquest any ha fet que es replantegin aquestes estratègies. Segons dades del Roboadvisor de MyInvestor, la cartera 60/40 ha baixat un -15.6% quatre punts més que l'índex de referència.

Suposem doncs que un inversor ha d'obtenir 2%/any per arribar al seu objectiu financer. El seu perfil de risc té associada aquesta cartera 60/40. Després dels resultats del 2022, i per perseguir els nostres objectius financers potser estaríem disposats a incloure en la nostra cartera actius amb més risc, per tal d'incrementar els retorns i arribar al nostre objectiu. Precisament, per això en aquest estudi alhora de plantejar l'escala de perfils per cada perfil hem donat retorn objectiu perquè en aquest cas primem que els inversors arribin al seu objectiu, adaptant el seu nivell de risc.

Per una altra banda, destacar la importància de les matemàtiques i la computació en el desenvolupament d'aquest servei fent una molt bona combinació, doncs usem algoritmes matemàticament molt potents com la Teoria Moderna de Carteres amb la computació que aconsegueix calcular el model amb més precisió que si es calculés amb intervenció humana. Generalment, s'usa la Teoria Moderna Carteres però les finances són un àmbit en constant evolució, i cada vegada es milloren més els algoritmes i es completen noves metodologies.

Finalment, remarcar com els roboadvisors busquen l'eficiència màxima fet que he pogut comprovar en la creació de les carteres amb models d'optimització, en el seu manteniment amb la incorporació del rebalancejament, on busquem aprofitar les oportunitats del mercat mantenint el nivell de risc, tot sumat a l'optimització fiscal.

Està clar que els roboadvisors no són una moda, i que han vingut per quedar-se amb desenvolupament de les matemàtiques i de la computació aniran evolucionant i perfeccionant els seus processos fins a nivells inimaginables.

Bibliografia

Agnew Julie, Mitchell, Olivia (2019). *The Disruptive Impact of FinTech on Retirement*, OUP Oxford. Consultat 1 de Març de 2023.

Benz Christine (May 2019) *5 Steps to a Refreshed, Rebalanced Portfolio*. Morningstar. <https://www.morningstar.com/portfolios/5-steps-refreshed-rebalanced-portfolio>. Consultat Maig de 2023.

BetterFinance (Desembre 2020). *Report Better Finance, Robo-advice. Can costumers trust robots?*, European Commission. Consultat 3 d'Abril de 2023.

Black, F. and Litterman, R. (1991), 'Global asset allocation with equities, bonds, and currencies', Fixed Income Research.

Bogle. John (2016). *El pequeño libro para invertir con sentido común*. Editorial Deusto. Introducció. pàgina 12

Burroughes, Tom (Novembre 2019). *Asian Robo-Advisor's High Hopes For Japan*, Wealth Briefing Asia. <https://wealthbriefingasia.com/article.php?id=185494>. Consultat 4 de Març de 2023.

Charles Schwab (2023). <https://www.schwab.com/>

Schwab Intelligent Portfolios (2023). <https://intelligent.schwab.com/>

Christodoulakis George (Novembre 2002). *Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach*. London University. http://www.globalriskguard.com/resources/assetman/bayes_0008.pdf. Consultat Març i Abril de 2023.

Curvo (2023). <https://curvo.eu/article/best-robo-advisor-belgium>

Edwards Tim, Ganti Anu R, Craig Lazzara J (2022). *Spiva US Scorecard*. S&P Global. <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/spiva/spiva-us-mid-year-2022.pdf>. Consultat Maig 2023.

Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley. Consultat Març de 2023.

Fama Eugene F, French Kenneth R.(1992). *The cross section of expected stock returns*.Journal of Financial Economics Volume 67, https://www.ivey.uwo.ca/media/3775518/the_cross-section_of_expected_stock_returns.pdf . Consultat Abril de 2023.

Fama Eugene F, French Kenneth R.(Abril 2015). *A five-factor asset pricing model*.Journal of Financial Economics Volume 116, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304405X14002323>. Consultat Abril de 2023.

Fidelity (2023). <https://www.fidelity.com/managed-accounts/fidelity-go/overview>

Fidelity Go (2023). <https://www.fidelity.com/managed-accounts/fidelity-go/overview>

Indexa Capital (2023). <https://indexacapital.com/es/esp/>

Cotza Patrizia (Octubre de 2022). *Cuentas para menores y educación financiera*.
<https://blog.indexacapital.com/2022/10/03/cuentas-para-menores-y-educacion-financiera/>

Nuestras carteras (2023). <https://indexacapital.com/es/esp/model>

Interactive Brokers (2023). <https://www.interactivebrokers.com/en/home.php>

IRPF 2023. Agència Tributaria Espanyola. <https://sede.agenciatributaria.gob.es/Sede/irpf/novedades-impuesto/novedades-normativa-2023/principales-novedades-ley-presupuestos-generales-2023.html>. Consultat Maig de 2023.

Joines i Houck (1994) *On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with GA's*. Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation.

Kaya Orçun (Agost 2017)*Robo-advice – a true innovation in asset management*, Deutsch Bank Research. https://www.dbresearch.com/PROD/RPS_EN-PROD/PROD0000000000449125/Robo-advice_%E2%80%93_a_true_innovation_in_asset_managemen.pdf. Consultat 10 de Març de 2023.

Mankert Charlotte (2006). *The Black-Litterman Model- mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice*. Royal institute of technology.

Markowitz Harry (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance. Vol7, No1, <https://www.jstor.org/stable/2975974>. Consultat Març de 2023.

Moulliet Dominik (Desembre 2016). *Cost-Income Ratios and Robo-Advisory*, Deloitte. <https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/de/Documents/financial-services/Robo-Advisory-in-Wealth-Management.pdf>, Consultat 20 de Març de 2023

Morningstar (2023). <https://www.morningstar.com/>

Pai Vijayalakshmi G.A (2018) *Metaheuristics for Portfolio Optimization: An Introduction using MATLAB*. Wiley. Consultat Maig de 2023.

Pu Busch (9 de Gener 2023). *Chinese banks end robo-advisory services amid increased scrutiny*, TAB Insights. <https://www.tabinsights.com/article/chinese-banks-end-robo-advisory-services-amid-increased-scrutiny>. Consultat 4 de Març de 2023.

Regenstein Jonathan (Abril 2018). *Introduction to Fama French*. Rview. <https://rviews.rstudio.com/2018/04/11/introduction-to-fama-french/>. Consultat Abril de 2023.

Sharpe William F (1964) *CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK*. Journal of finance vol 19, issue 3. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>. Consultat Març 2023.

Sophia Mary (Juliol 2019). *Saudi Arabia has approved two roboadvisors as automated investing picks up*. Forbes. <https://www.forbesmiddleeast.com/money/investing/saudi-arabia-has-just-approved-two-robo-advisors-as-automated-investing-picks-up>. Consultat Maig del 2023.

Stanley R. Pliska and Kiyoshi Suzuki (2004). *Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs*. Taylor & Francis Journals, vol. 4. <https://ideas.repec.org/a/taf/quantf/v4y2004i2p233-243.html>. Consultat Maig 2023.

Statman Meir (Setembre 1987). *How many Stocks make a diversified portfolio?*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis. <https://www.jstor.org/stable/2330969>. Consultat Abril 2023.

Statista *Robo-Advisors: Worldwide*. (2023). <https://es.statista.com/outlook/dmo/fintech/digital-investment/robo-advisors/worldwide>. Consultat Març i Abril de 2023.

Stein Jon (Juliol 2016). *The history of Betterment: Changing an industry*. <https://web.archive.org/web/20220405210702/betterment.com/resources/the-history-of-betterment>. Consultat Març de 2023.

Sun Kevin (June 2018). *Robo-advisors: Future to financial management?*, Algonest. <https://web.archive.org/web/20190106025105/https://www.algonest.com/site/robo-content>. Consultat Abril de 2023.

Tearsheet (2021). *The space between: The growing convergence between traditional asset managers and roboadvisors*. <https://go.plaid.com/rs/495-WRE-561/images/Q221%20Tearsheet%20White%20paper%20Final%20%281%29%20%281%29.pdf>. Consultat Maig 2023.

Vanguard Investor Resources & Education (2023). <https://investor.vanguard.com/investor-resources-education>

Wealthfy (2023). <https://www.wealthify.com/>

Wealthfront (2023). <https://www.wealthfront.com/>

White Paper: Wealthfront Tax-Loss Harvesting (2023).

<https://research.wealthfront.com/whitepapers/tax-loss-harvesting/>

Yahoo Finance (2023). <https://finance.yahoo.com/>

Zenti Raffaele. *Roboadvisors like a Commodore VIC20? Apparently, according to this quick survey*. <https://www.linkedin.com/pulse/roboadvisors-like-commodore-vic20-apparently-according-raffaele-zenti?trk=mp-reader-card>. Consultat Març de 2023.

Glossari

AGG, ETF iShares Core U.S. Aggregate Bond Market, replica l'índex del mercat de bons d'empreses americanes.

AI, intel·ligència artificial, és la simulació de processos d'intel·ligència humana per part de les màquines.

AUM, assets under management, valor dels actius gestionats per una empresa en nom dels seus clients.

Baby-Boomers, és una cohort demogràfic que compren la gent nascuda entre el 1946 i el 1964 caracteritzada per tenir estudis universitaris i amb família.

B2B, business to business, fa referència a les transaccions comercials entre empreses.

B2C, business to customer, fa referència a les transaccions comercials entre empresa i consumidors.

BFSI, Banking, financial services and insurance, són les indústries que comprenen empreses que proveïxen serveis financers.

Betterment, és una companyia americana d'assessoria financera sent pionera en oferir serveis de roboadvisor.

Book to Market, identifica actius sobrevalorats o infravalorats agafant el valor en llibres i divint-lo per el valor de mercat.

CAGR, Compound Annual Growth Rate, és la taxa mitjana de creixement dels ingressos, vendes o inversions al llarg del temps.

CAPM, Capital Asset Pricing Model, és un model matemàtic que estima els retorns esperats d'una inversió basat en el seu risc en relació a la resta del mercat.

Charles Schwab, empresa americana multinacional de serveis financers, incloent un servei de roboadvisors.

China Merchant Bank, és un dels principals bancs de xina sent el primer banc comercial amb accions que són propietat de persones jurídiques. Fins al 2022 oferia serveis de roboadvisor.

Commodities, és un material tangible que es pot comercialitzar, comprar o vendre.

Costumer Discretionary, es refereix a la indústria de productes no essencials.

Costumer Staples, es refereix a la indústria de productes de consum diari essencials.

DIA, SPDR Dow Jones Industrial Average ETF Trust, busca seguir el Dow Jones.

EEM, ETF iShares MSCI Emerging Markets, replicar l'índex de renda variable de gran i mitjana capitalització de mercats emergents.

EFA, ETF iShares MSCI EAFE, replicar el índex que compren els valors de renda variable de mercats desenvolupats menys USA i Canada.

Energy, compren empreses que relacionades a la producció o distribució d'energies, com ara el petroli.

ESG, Enviroment, Social and Governance, empreses encoratgen polítiques socials i mediambientalment sostenibles.

ETF, és un fons d'inversió que està cotitzat en el mercat de valors.

Evolutionary Strategy, és un mètode d'optimització computacional basat en conceptes relacionats amb l'evolució.

Fidelity, és una de les principals gestores d'actius financers del món. També ofereix un servei de roboadvisor.

FIFO, first in first out, mètode comptable per valorar inventaris on el primer que entra és el primer que surt.

Fons d'inversió, és un instrument financer que consisteix en un patrimoni format per actius adquirits col·lectivament i administrats per una gestora.

Goldman Sachs, és un dels grups de banca més gran del món que en els últims anys s'ha sumat a l'onada dels roboadvisors creant el seu propi.

Growth, busquen invertir en empreses que estan experimentant un creixement en el seu negoci.

Hall of Fame (evolució), consisteix en seleccionar els millors individus de cada generació.

Healthcare, inclou empreses que fabriquen medicaments, serveis mèdics o assegurances mèdiques.

Indexa Capital, és una empresa espanyola líder en proveïment de serveis de roboadvisor en Espanya.

Inputs, introducció de dades donades per l'usuari.

IVV, iShares Core S&P 500 ETF, busca seguir els resultats d'un índex de gran capitalització d'empreses americanes.

Metaheurística, mètode heurístic per resoldre problemes computacionals, usant els inputs donats sobre uns procediments genèrics i abstractes de manera eficient.

Milennials, és una cohort demogràfic que compren la gent nascuda entre el 1981 i el 1996, caracteritzada per ser la primera generació digitalitzada.

Monte Carlo, és un mètode no determinista usat per aproximar expressions matemàtiques complexes i costoses d'avaluar amb exactitud.

Onboarding, és procés d'incorporació a un servei o organització.

Output, resultat que ens dona un mètode computacional.

REIT, Real Estate Investment Trust, són empreses que tenen actius immobiliaris; hipoteques i propietats.

SPY, SPDR S&P 500 ETF Trust, buscar seguir l'índex S&P500, sent l'ETF més cotitzat del món.

Underperform, fallar en complir les expectatives.

Utilities, són empreses que ofereixen serveis públics com electricitat, gas, aigua o autopistes.

Value, busquen generar rendibilitats positives de manera consistent a llarg termini.

Vanguard, és major gestora de fons d'inversió del món i la segona en ETF després de BlackRock (iShares). També ofereix un servei de roboadvisor.

Wealthfront, empresa pionera en oferir serveis d'inversió automatitzada entre ells els roboadvisors.

Wealthify, és un roboadvisor anglès que inverteix principalment en ETF.