UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

LLEIS INFINITAMENT DIVISIBLES I PROCESSOS DE LÉVY

Autor: Marc Piquer i Méndez

Directors: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Dra. Carme Florit Selma

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

We study infinitely divisible distributions, which are the distributions of random variables which can be decomposed into n other i.i.d. variables for all $n \in \mathbb{N}$, as well as the particular case of stable laws, and we give their representation by the Lévy-Khintchine theorem. We also study Lévy processes, the stochastically continuous stochastic processes with independent and stationary increments, which have a one-to-one correspondence with infinitely divisible distributions, and give their decomposition into continuous part and jump part known as the Lévy-Itô decomposition.

Resum

S'estudia les lleis infinitament divisibles, és a dir, les lleis de variables que es poden descompondre en sumes de n altres variables i.i.d. per a tot $n \in \mathbb{N}$, així com el cas particular de les lleis estables, i se'n dóna la representació pel teorema de Lévy-Khintxin. S'estudia també els processos de Lévy, és a dir, aquells processos estocàstics que tenen increments independents i estacionaris i són estocàsticament continus, que tenen una correspondència un a un amb les lleis infinitament divisibles, i se'n dóna una descomposició en part contínua i part amb salts coneguda com a descomposició de Lévy-Itô.

2020 Mathematics Subject Classification. 60E07, 60G51

Agraïments

Primer de tot, vull donar les gràcies als meus tutors, el Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia i la Dra. Carme Florit Selma, per la orientació i la paciència que m'han brindat al llarg del treball.

També vull donar gràcies a la meva família pel suport que m'han donat durant el grau. En particular agraeixo al meu pare, Josep Piquer i Torres, la correcció lingüística d'aquesta memòria. Sens dubte no li ha estat la lectura més amena.

Per últim, vull agrair als amics i companys del grau la companyonia i l'ajut, sense el qual tot plegat hauria estat probablement més complicat i sens dubte més avorrit.

Índex

1 Introducció

Els processos de Lévy són aquells processos estocàstics a temps continu amb increments independents i estacionaris i que són estocàsticament continus. Aquests processos són els anàlegs a temps continu de la passejada aleatòria, i són tant processos de Markov com semimartingales. Per altra banda, els exemples més populars de processos estocàstics a temps continu, el moviment brownià i els processos de Poisson, són dins la classe dels procesoss de Lévy.

L'altre concepte principal que s'estudia al treball són les lleis infinitament divisibles, que són aquelles lleis de variables aleatòries que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, es poden descompondre en sumes de n altres v.a.i.i.d. També es dedicarà un capítol a l'estudi del cas particular de les lleis estables.

L'interès d'estudiar aquests dos temes junts recau en el fet que els processos de Lévy tenen llei infinitament divisible i que per cada llei infinitament divisible hi ha un procés de Lévy associat; és a dir, hi ha una correspondència un a un entre ambdues classes.

Els dos grans resultats del treball són el teorema de representació de Lévy-Khintxin, que permet escriure les lleis infinitament divisibles com a convolucions de lleis normals i lleis de Poisson compostes, i la descomposició de Lévy-Itô, que separa els processos de Lévy en sumes de part contínua (que és un moviment brownià) i part amb salts. En alguns textos, com ara [1], es demostra la descomposició de Lévy-Itô, que després s'usa per trobar la representació de Lévy-Khintxin. En aquest treball, però, es seguirà el procés contrari, com es fa a [5].

Tot i que tots els resultats són generalitzables a $\mathbb{R}^d$, per $d \in \mathbb{N}$, el treball es restringeix al cas a $\mathbb{R}$. Al llarg de l'escrit, es denotarà $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat, i es pren el conveni $0 \notin \mathbb{N}$.

Estructura de la Memòria

El capítol 2 de la memòria es centra a definir les lleis infinitament divisibles i donar-ne les primeres propietats, tot obtenint resultats i definint conceptes que permeten arribar a la demostració del resultat objectiu del capítol, el teorema de representació de Lévy-Khintxin.

El capítol 3 consta de la definició i primeres propietats de les lleis estables, així com la convergència cap a elles per mitjà de l'estudi dels dominis d'atracció.

Al capítol 4 es presenta els processos de Lévy i se'n dóna propietats bàsiques, amb l'objectiu d'establir la relació amb les lleis infinitament divisibles i justificar la seva qualitat de tenir camins càdlàg.

Per acabar, al capítol 5 s'enuncia i demostra la descomposició de Lévy-Itô, pel cas més general els processos additius, i es comenta la seva particularització als processos de Lévy.

2 Lleis infinitament divisibles

L'objectiu en aquest capítol és definir i donar propietats de les lleis infinitament divisibles; és a dir, aquelles que es poden descompondre en sumes de n altres variables i.i.d., per a tot $n \in \mathbb{N}$, i en particular donar la seva caracterització pel teorema de Lévy-Khintxin. Essencialment, es segueix [4, 6].

2.1 Lleis límit de sistemes triangulars

Sigui $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ tal que $p_n \searrow 0$ i $np_n \to \lambda \in (0,\infty)$. Si es pren mesures de probabilitat P_n amb llei $\mathrm{Bin}(n,p_n)$, es pot calcular

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(np_n)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{-\frac{n}{np_n}\frac{-np_n}{n}(n-k)}, \end{aligned}$$

i d'aquesta expressió, fent servir la convergència de la definició de $\{p_n\}_n$, es té

$$P_n(k) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.$$

A més, es pot veure, sumant aquesta expressió per a tot $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Per tant, $P_n(k) \to P(k)$, on P és mesura de probabilitat sobre $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Aquesta és la coneguda llei de Poisson. El mateix resultat es pot obtenir fent servir la funció característica de la binomial i el teorema de continuïtat de Lévy. D'aquí, sorgeix la convergència feble $\mathrm{Bin}(n,p_n) \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathrm{Pois}(\lambda)$.

El resultat de sobre es pot interpretar d'una altra manera. Si es posa $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ v.a.i.i.d. amb $\xi_i^{(n)} \sim \mathrm{Bernoulli}(p_n)$, es té per definició $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)} \sim \mathrm{Bin}(n,p_n)$. Llavors, el que s'ha vist és $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Pois}(\lambda)$.

Això es pot expressar dient que $\mathrm{Pois}(\lambda)$ és límit del sistema triangular

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xi_1^{(1)} & & & \\ & & \xi_1^{(2)} & & \xi_2^{(2)} & & \\ & \xi_1^{(3)} & & \xi_2^{(3)} & & \xi_3^{(3)} & \\ \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots \end{array}$$

A la pràctica, s'acabarà veient que les lleis infinitament divisibles són justament aquelles que són límit feble d'una successió de sumes parcials d'un sistema triangular. Un parell més d'exemples en són els que segueixen.

Exemple 2.1. Un cas previsible és la llei normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Sigui $X_1,\dots,X_n$ v.a.i.i.d. amb $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ i $\mathbb{V}(X_i)=\sigma^2$. Aleshores, si $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, es té

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

i, centrant-les i normalitzant-les, s'obté $Y_i^{(n)} = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1/\sqrt{n})$ amb $i \in \{1, \ldots, n\}$. Llavors, la suma és $\sum_{i=1}^n Y_i^{(n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. Ara, pel cas $X_i = \xi_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, això resulta en el sistema triangular

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{\xi_1^{(1)} - p}{\sqrt{p(1-p)}} & & & \\
 & & \frac{\xi_1^{(2)} - p}{\sqrt{2p(1-p)}} & & \frac{\xi_2^{(2)} - p}{\sqrt{2p(1-p)}} & & \\
 & \frac{\xi_1^{(3)} - p}{\sqrt{3p(1-p)}} & & \frac{\xi_2^{(3)} - p}{\sqrt{3p(1-p)}} & & \frac{\xi_3^{(3)} - p}{\sqrt{3p(1-p)}} & \\
\iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Així, pel teorema de De Moivre-Laplace, el límit del sistema és $\mathrm{N}(0, 1)$.

Exemple 2.2. Un altre exemple és la llei de Cauchy $\mathrm{Cau}(\alpha)$. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. de llei $\mathrm{Cau}(\alpha)$, és a dir, amb densitat

$$f_{X_i}(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}.$$

Si es posa $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, es té funció característica

$$\varphi_{S_n/n}(t) = (\varphi_{X_i}(t/n))^n = (e^{-\alpha|t|/n})^n = e^{-\alpha|t|} = \varphi_{X_i}(t)$$

i, per tant, la llei $\mathrm{Cau}(\alpha)$ és el límit del sistema triangular

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & X_1^{(1)} & & & \\
 & & \frac{X_1^{(2)}}{2} & & \frac{X_2^{(2)}}{2} & & \\
 & \frac{X_1^{(3)}}{3} & & \frac{X_2^{(3)}}{3} & & \frac{X_3^{(3)}}{3} & \\
\iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

2.2 Convolucions

A l'hora de donar una definició les lleis infinitament divisibles es troba que n'hi ha tres d'equivalents: fent servir les variables aleatòries que les segueixen, fent servir les pròpies lleis o bé fent servir les seves funcions característiques. Per poder-ho fer, caldrà donar prèviament la definició i una propietat útil de la convolució.

Definició 2.3. *Sigui $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'aplicació suma $s(x, y) = x+y$. Si P, Q són probabilitats a $\mathbb{R}$, es defineix la convolució de P i Q sobre B com $(P * Q)(B) := (P \otimes Q)(s^{-1}(B))$.*

Això és

$$
\begin{aligned}
(P * Q)(B) &= \iint_{\{(x,y):x+y \in B\}} P(dx)Q(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{y:y \in B-x\}} Q(dy) \right) P(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B-x)P(dx),
\end{aligned}
$$

amb $B - x = \{y \in \mathbb{R} : y + x \in B\}$, i noti's que aquesta operació és commutativa.

Proposició 2.4. *Si X, Y són v.a. sobre el mateix espai de probabilitat amb lleis P_X, P_Y, es té $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.*

Demostració. N'hi ha prou d'encadenar per fer el càlcul,

$$\mathbb{P}(\{X + Y \in B\}) = \mathbb{P}(\{(X, Y) \in s^{-1}(B)\}) = (P_X \otimes P_Y)(s^{-1}(B)) = (P * Y)(B).$$

□

A més, és clar que $(P * \delta_a)(B) = P(B - a)$, per a tot $a \in \mathbb{R}$. Per tant, δ_0 és element neutre per la commutativitat. Així, si $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ és el conjunt de les probabilitats sobre $\mathbb{R}$, $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), *)$ és un monoide abelià.[2]

2.3 Lleis infinitament divisibles

Després d'aquesta preparació prèvia, es pot donar les tres definicions equivalents que es farà servir per les lleis infinitament divisibles.

Definició 2.5. *Es diu que una mesura de probabilitat P sobre $\mathbb{R}$ és infinitament divisible si, per cada $n \in \mathbb{N}$, hi ha una mesura de probabilitat P_n tal que $P = P_n * \overset{n}{\ldots} * P_n$.*

Fent servir la propietat que acabem de donar de les convolucions, aquesta definició és equivalent a la següent, denotant P_X la llei d'una variable aleatòria X.

Definició 2.6. *Es diu que una v.a. X és infinitament divisible si, per cada $n \in \mathbb{N}$, hi ha una altra v.a. X_n tal que $P_X = P_{X_n + \overset{n}{\ldots} + X_n}$.*

Per últim, si denotem φ_P la funció característica d'una llei P, es pot donar una darrera definició equivalent.

Definició 2.7. *Es diu que una mesura de probabilitat P és infinitament divisible si, per cada $n \in \mathbb{N}$, hi ha una mesura de probabilitat P_n tal que $\varphi_P(t) = (\varphi_{P_n}(t))^n$.*

Exemple 2.8. Noti's que això es pot comprovar fàcilment pels tres exemples que s'ha vist anteriorment:

1. per la llei normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, es té $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) = \mathrm{N}(\mu/n, \sigma^2/n) * \overset{n}{\ldots} * \mathrm{N}(\mu/n, \sigma^2/n)$, ja que
$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2} = (e^{i\mu t/n - \sigma^2 t^2/2n})^n;$$
2. per la llei de Cauchy $\mathrm{Cau}(\alpha)$, es té $\mathrm{Cau}(\alpha) = \mathrm{Cau}(\alpha/n) * \overset{n}{\ldots} * \mathrm{Cau}(\alpha/n)$, ja que
$$\varphi(t) = e^{-\alpha|t|} = (e^{-\alpha|t|/n})^n;$$
3. per la llei de Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$, es té $\mathrm{Pois}(\lambda) = \mathrm{Pois}(\lambda/n) * \overset{n}{\ldots} * \mathrm{Pois}(\lambda/n)$, ja que
$$\varphi(t) = e^{(e^{it}-1)\lambda} = (e^{(e^{it}-1)\lambda/n})^n.$$

A més, la funció característica d'una llei infinitament divisible ha de complir una sèrie de propietats.

[2]És a dir, l'operació és associativa, té element neutre i és commutativa.

Proposició 2.9. *Sigui P mesura de probabilitat infinitament divisible. Llavors,*

1. *$\varphi(t) \neq 0$, per cap $t \in \mathbb{R}$, amb φ la seva funció característica,*
2. *per a tot $n \in \mathbb{N}$, hi ha una única P_n arrel n-èssima de P, en el sentit que és l'única probabilitat tal que $P = P_n * \overset{n}{\cdots} * P_n$,*
3. *per aquestes P_n, es compleix el límit $P_n \xrightarrow{n \nearrow \infty} \delta_0$.*

Per provar l'apartat 2, caldrà un lema de l'anàlisi complexa.

Lema 2.10. *Sigui una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua amb $f(0) = 1$ i $f(t) \neq 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Llavors, hi ha una única determinació λ del logaritme de f; és a dir, una funció $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f(t) = e^{\lambda(t)},$$

contínua i amb $\lambda(0) = 0$.

Demostració. Sigui $x \in \mathbb{R}$. Llavors, la funció en t definida per $f(tx)$, per $t \in [0, 1]$, traça una corba a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'anàlisi complexa dóna aquí, per cada punt, una única branca del logaritme contínua $\lambda_x : [0, 1] \to \mathbb{C}$, amb $\lambda_x(0) = 0$. Així, es defineix $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ per $\lambda(x) = \lambda_x(1)$. Llavors, es té, per a tot $x \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda(x)} = e^{\lambda_x(1)} f(x)$, i $f(0) = h_0(1) = 0$. Queda veure la continuïtat i la unicitat.

Pel què fa a la continuïtat, sigui $x_0, x \in \mathbb{R}$ i la corba $\gamma_{x_0,x}$ a $[0, 3]$ definida per

$$\gamma_{x_0,x}(t) = \begin{cases} tx_0, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-1)x + (2-t)x_0, & 1 \leq t \leq 2, \\ (3-t)x, & 2 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

ressegueix el circuit 0, x_0, x, 0. Sigui $\alpha_{x_0,x}$ la branca de l'argument de $f \circ \gamma_{x_0,x}$ contínua a $[0, 3]$ i que satisfà $\alpha_{x_0,x}(0) = 0$. En tot cas, es té $0 \notin \{f(t, x_0) : t \in [0, 1]\}$ i $\max_{t \in [0,1]} |f(tx) - f(tx_0)|$ decreix amb la distància $|x - x_0|$. Per tant, hi ha un entorn U de x_0 tal que, si $x \in U$, la corba $f \circ \gamma_{x_0,x}$ no fa cap volta al voltant de l'origen. Per tant, $\alpha_{x_0,x}(3) = 0$ si $x \in U$ i $\mathrm{Im} f(x) = \alpha_{x_0,x}(2)$. Per tant, $\mathrm{Im} f(x)$ i $\mathrm{Im} f(x_0)$ són a prop si x i x_0 ho són prou. Per tant, per a tot $\varepsilon \in (0, \infty)$ hi ha $\delta \in (0, \infty)$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, llavors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Per veure la unicitat, sigui λ' contínua, amb $\lambda'(0) = 0$ i $e^{\lambda(x)} = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Llavors, per la unicitat de λ_x es té $\lambda_x(t) = \lambda'(tx)$ i, per tant, $\lambda'(x) = \lambda_x(1) = \lambda(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. □

Demostració. (de la proposició 2.9)

1. La classe $\mathcal{C}_{\text{i.d.}}$ de les funcions característiques de les lleis infinitament divisibles és estable sota el producte: si X, Y tenen llei infinitament divisible, $X + Y$ també, i té $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

   Ara, si es pren X, Y i.i.d. i amb llei infinitament divisible, es té

   $$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \varphi_X(t)\varphi_X(t)^* = |\varphi_X(t)|^2 \geq 0.$$

   En general, doncs, si $\varphi_P \in \mathcal{C}_{\text{i.d.}}$, també $|\varphi_P|^2 \in \mathcal{C}_{\text{i.d.}}$. Llavors, tan sols cal veure que $|\varphi_P|^2 > 0$, i ja es tindrà $\varphi_P \neq 0$.

Per tant, sigui $\varphi \in \mathcal{C}_{\text{i.d.}}$ real amb $\varphi \geq 0$. Aleshores, hi ha $\varphi_n(t) = \varphi(t)^{1/n}$ per cada n i, fent anar $n \nearrow \infty$, es té

$$\lim_{n \nearrow \infty} \varphi_n(t) = \mathbb{1}_{\{\varphi(t)>0\}}(t).$$

Per altra banda, aquesta funció és contínua a 0 i val 1, ja que φ és contínua i $\varphi(0) = 1$, per propietats conegudes de les funcions característiques. Llavors, $\varphi(t) \neq 0$ per $t \in [-\delta, \delta]$, per cert $\delta > 0$.

Ara, com $\mathbb{1}_{\{\varphi>0\}}$ és contínua a 0, és funció característica d'alguna llei i, per tant, és contínua a tot arreu. Llavors, $\mathbb{1}_{\{\varphi>0\}}(t) = 1$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

2. Sigui φ la funció característica de P i φ_n la funció característica de P_n. Són contínues i no nul·les, pel què s'acaba de veure, i $\varphi(0) = \varphi_n(0) = 1$. Llavors, per lema 2.10, hi ha úniques $\lambda(t) \coloneqq \log \varphi(t)$ i $\lambda_n(t) \coloneqq \log \varphi_n(t)$ logaritmes continus, nul·les a l'origen i tals que $\varphi(t) = e^{\lambda(t)}$ i $\varphi_n(t) = e^{\lambda_n(t)}$. Per tant, $n\lambda_n(t) = \lambda(t)$.
3. $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\nearrow\infty} e^{\lambda(t)/n} = 1 = \varphi_{\delta_0}(t)$ per tot $t \in \mathbb{R}$.

□

Ara, una caracterització que porta als límits de sistemes triangulars ve donada pel teorema següent:

Teorema 2.11. *Una mesura de probabilitat P és infinitament divisible si, i només si, és límit feble d'una successió de sumes parcials d'un sistema triangular*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X_1^{(1)} & & & \\ & & X_1^{(2)} & & X_2^{(2)} & & \\ & X_1^{(3)} & & X_2^{(3)} & & X_3^{(3)} & \\ \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots \end{array}$$

Demostració. ($\Longrightarrow$) Per cada n, siguin $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ v.a.i.i.d. tals que la llei de la suma és $P_{X_1^{(n)}+\cdots+X_n^{(n)}} = P$. Existeixen perquè P és infinitament divisible i, per tant, la implicació és immediata.

($\Longleftarrow$) Sigui ara $r \in \mathbb{N}$. Es defineix llavors, per cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Z_n^{(1)} &= X_1^{(rn)} + \cdots + X_n^{(rn)}, \\ &\vdots \\ Z_n^{(i)} &= X_{(i-1)n+1}^{(rn)} + \cdots + X_{in}^{(rn)}, \\ &\vdots \\ Z_n^{(r)} &= X_{(r-1)n+1}^{(rn)} + \cdots + X_{rn}^{(rn)}; \end{aligned}$$

és a dir, les variables suma de n en n de la fila rn.

Com que les variables del sistema triangular són i.i.d., les variables $Z_n^{(1)}, \ldots, Z_n^{(r)}$ també ho són. Llavors, per a tot $\varepsilon \in \mathbb{R}$, es té

$$\mathbb{P}(\{Z_n^{(1)} > \varepsilon\})^r = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\{Z_n^{(k)} > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\{Z_n^{(1)} > \varepsilon, \ldots, Z_n^{(r)} > \varepsilon\}) \leq \mathbb{P}(\{S_{rn} > r\varepsilon\}),$$

on S_{rn} és la suma de la fila rn. Anàlogament, es troba

$$\mathbb{P}(\{Z_n^{(1)} < -\varepsilon\})^r \leq \mathbb{P}(\{S_{rn} < -r\varepsilon\}).$$

Ara, $S_{rn} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. Llavors, $\{P_{S_{rn}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió ajustada i, per tant, també ho és $\{P_{Z_n^{(1)}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Llavors, hi ha una successió parcial convergent $Z_{n_i}^1 \xrightarrow{\mathcal{L}} Y_1$.

Es pot fer el mateix per cada $Z_n^{(k)}$, $k \in \{1, \ldots, r\}$ de manera que hi ha Y_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, on convergeixen aquestes successions, totes independents. Llavors,

$$S_{rn_i} = Z_{n_i}^{(1)} + \cdots + Z_{n_i}^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y_1 + \cdots + Y_r,$$

i, per tant, $P_{Y_1} + \cdots + P_{Y_r} = P$. Com que això val per a tot $r \in \mathbb{N}$, P és infinitament divisible. □

2.4 Lleis de Poisson compostes de mesures finites

L'objectiu des d'aquí és donar la caracterítzació de les lleis infinitament divisibles pel teorema de Lévy-Khintxin. Per fer-ho, caldrà estudiar-ne un tipus concret: les lleis de Poisson compostes.

Definició 2.12. *Sigui μ mesura finita sobre $\mathbb{R}$. La probabilitat de Poisson composta de μ és la definida per*

$$(\operatorname{Pois}\mu)(B) \coloneqq e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mu * \overset{k}{\cdots} * \mu)(B).$$

Per veure que està ben definida, és a dir que aquesta expressió defineix una mesura de probabilitat, només cal veure que $(\operatorname{Pois}\mu)(\varnothing) = 0$, cosa que ve del fet que μ és una mesura; i que $(\operatorname{Pois}\mu)(B) = 1$, que ve de $(\mu * \nu)(\mathbb{R}) = (\mu \otimes \nu)(s^{-1}(\mathbb{R})) = (\mu \otimes \nu)(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})$ i, per tant, $(\mu * \overset{k}{\cdots} * \mu)(\mathbb{R}) = (\mu(\mathbb{R}))^k$. Que és σ-additiva prové del fet que és límit creixent de mesures σ-additives perquè μ és una mesura.

Proposició 2.13. *Per $n \in \mathbb{N}$, si $X_1, \ldots, X_n$ són v.a.i.i.d. amb llei $\mu/\mu(\mathbb{R})$ i N és una v.a.i. amb $N \sim \operatorname{Pois}(\mu(\mathbb{R}))$, es té $X_1 + \cdots + X_N \sim \operatorname{Pois}\mu$.*

Demostració. S'aplica el teorema de Bayes i s'encadena de la manera següent:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 + \cdots + X_N \in B\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n \in B | N = n) P_N(n) \\
&= e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mu * \overset{n}{\cdots} * \mu)(B) \\
&= (\operatorname{Pois}\mu)(B),
\end{aligned}$$

on també s'ha usat $(\lambda\mu) * \nu = \lambda(\mu * \nu)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Fent servir aquesta proposició, és fàcil calcular la funció característica de la llei Poisson composta de manera directa:

$$\varphi_{\operatorname{Pois}\mu}(t) = \mathbb{E}(e^{it(X_1 + \cdots + X_N)}) = e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}(e^{itX}))^n \frac{\mu(\mathbb{R})^n}{n!} = e^{\mu(\mathbb{R})\mathbb{E}(e^{itX} - 1)}.$$

2.5 Lleis de Poisson compostes de mesures de Lévy

S'ha definit les lleis de Poisson compostes de mesures finites, però cal definir-les per una classe més gran de mesures: les mesures de Lévy, que són el darrer concepte que cal donar abans del teorema objectiu d'aquest capítol.

Definició 2.14. *Es diu que una mesura μ sobre $\mathbb{R}$ és de Lévy si $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\mu(dx) < \infty$.*

És clar que tota mesura finita és de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\mu(dx) = \int_{(-1,1)} x^2\mu(dx) + \int_{\{x:|x|\geq 1\}} \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

L'interessant és que, com que tenen el factor x^2 prop de l'origen a la definició, les mesures de Lévy poden ser mesures que hi divergeixin, com ara la donada per $\mu(dx) = dx/x^2$.

Per una mesura de Lévy μ, el procés per definir la llei de Poisson composta consistirà a prendre la mesura finita que és μ treient-li el trosset $(-\varepsilon, \varepsilon)$, al voltant de l'origen. Com que aquesta és finita, s'hi pot associar una llei de Poisson composta, i el límit feble d'aquestes en fer $\varepsilon \searrow 0$ serà la llei de Poisson composta de μ.

Per fer aquest procés de manera més rigorosa, sigui μ una mesura de Lévy. Es té $\mu([-\varepsilon, \varepsilon]^c) < \infty$. Es considera les mesures finites $\mu_\varepsilon := \mu|_{[-\varepsilon,\varepsilon]^c}$. D'altra banda, es defineix

$$c_\varepsilon := \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} x\mu(dx) < \infty$$

i es pot definir $P_\varepsilon := \delta_{-c_\varepsilon} * \operatorname{Pois}\mu_\varepsilon$, que té funció característica

$$\begin{aligned}
\varphi_{P_\varepsilon}(t) &= \exp\left(-itc_\varepsilon + \int_{\{x:|x|>\varepsilon\}} (e^{itx} - 1)\mu(dx)\right) \\
&= \exp\left(\int_{\{x:|x|>\varepsilon\}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|\leq 1\}})\mu(dx)\right)
\end{aligned}$$

i, per tant, es pot fer el límit (que es demostrarà més avall)

$$\varphi_{P_\varepsilon}(t) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|<1\}})\mu(dx)\right). \tag{2.1}$$

És una funció contínua a 0 si μ és nul·la a l'origen. Ara, si μ és una mesura finita, es pot definir $\nu := \mu - \mu(\{0\})\delta_0$. Naturalment, $\operatorname{Pois}\mu = (\operatorname{Pois}\nu) * (\operatorname{Pois}\mu(\{0\})\delta_0)$, i es té

$$(\operatorname{Pois}\mu(\{0\})\delta_0)(B) = e^{-\mu(\{0\})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu(\{0\})^n \delta_0(B) = \delta_0(B),$$

i, per tant, es troba que $\operatorname{Pois}\mu = (\operatorname{Pois}\nu) * \delta_0 = \operatorname{Pois}\nu$. A més, és clar que, si μ és mesura de Lévy, ν també ho és. Llavors, construint una llei de Poisson composta amb una mesura de Lévy, sempre es pot suposar que és nul·la a l'origen.

Ara, cal demostrar la convergència (2.1). Es té la puntual

$$(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|\leq 1\}})\mathbb{1}_{\{x:|x|>\varepsilon\}} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|\leq 1\}},$$

suposant que $\mu(\{0\}) = 0$. Per altra banda,

$$|e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|\leq 1\}}| \leq \frac{1}{2}t^2x^2\mathbb{1}_{\{x:|x|\leq 1\}} + 2\mathbb{1}_{\{x:|x|>1\}} < \infty,$$

i, per tant, es pot aplicar el teorema del límit central. Per provar la continuïtat a l'origen, es pren $t_n \searrow 0$ i s'observa que els integrands van a 0.

Definició 2.15. *Amb la notació introduïda al procediment anterior, es denota* c-Pois μ *la llei associada a φ; és a dir, la llei límit de les P_ε.*

És clar que, si μ és finita, es pot posar $\varepsilon = 0$ i es té c-Pois μ = Pois μ.

Proposició 2.16. *Les lleis* c-Pois *són infinitament divisibles.*

Demostració. Sigui μ, ν mesures. Com que el producte de les funcions característiques de c-Pois μ i c-Pois ν és la funció característica de c-Pois$(\mu + \nu)$, es té c-Pois$(\mu + \nu)$ = c-Pois $\mu *$ c-Pois ν. □

S'enuncia ara, i es demostra, un teorema que es necessitarà en el futur.

Teorema 2.17. *Una mesura de probabilitat P en $\mathbb{R}$ és infinitament divisible si, i només si, hi ha una successió $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tals que* c-Pois $\nu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$.

Per demostrar-lo, caldrà prèviament el teorema següent:

Teorema 2.18. *Sigui $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions característiques. Llavors, són equivalents*

1. *per cada $t \in \mathbb{R}$, el límit $\varphi(t) = \lim_{n\nearrow\infty} {\varphi_n}^n(t)$ existeix i és continu a 0,*
2. *per cada $t \in \mathbb{R}$, el límit $\psi(t) = \lim_{n\nearrow\infty} n(\varphi_n(t) - 1)$ existeix i és continu a 0.*

Si això es compleix, llavors $\varphi = e^\psi$ i és una funció característica.

Demostració. Pel logaritme, amb $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - 1| < 1/2$, es té

$$|\log z - (z - 1)| \leq \frac{1}{2}|z - 1|^2.$$

Fent-ho servir, sigui una successió $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathbb{C}$. Es té $\limsup_{n\nearrow\infty} n|z_n - 1| < \infty$ si, i només si, $\limsup_{n\nearrow\infty} n|\log z_n| < \infty$, i els límits $\lim_{n\nearrow\infty} n(z_n - 1) = \lim_{n\nearrow\infty} n \log z_n$, si algun dels dos existeix.

($2 \implies 1$) Sorgeix directament d'aplicar aquesta propietat per $z_n = \varphi_n(t)$.

($1 \implies 2$) Cal veure que $\varphi(t) \neq 0$ per cap $t \in \mathbb{R}$. Com que φ és contínua a 0 i $\varphi(0) = 1$, hi ha $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(t)| > 1/2$ per $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. S'ha vist anteriorment que, si φ i φ_n són funcions característiques, $|\varphi|^2$ i $|\varphi_n|^2$ també ho són. Per tant, com que $|\varphi_n(t)|^{2n}$ convergeix puntualment a $|\varphi(t)|^2$, pel teorema de continuïtat de Lévy, convergeix uniformement en compactes.

Ara, doncs, s'aplica els límits que s'ha introduït amb $z_n = |\varphi_n(t)|^2$. Llavors, per $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $(n(1 - |\varphi_n(t)|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ és acotat. Així, també ho és $n(1 - |\varphi_n(2t)|^2 \leq 4n(1 - |\varphi_n(t)|^2)$ i

$$|\varphi(2t)|^2 \geq \liminf_{n\nearrow\infty} \exp(4n(|\varphi_n(t)|^2 - 1)) = (|\varphi(t)|^2)^4.$$

Seguint inductivament, s'obté $|\varphi(t)| \geq 2^{-4^k}$ per $|t| \leq 2^k\varepsilon$. Per tant, hi ha $\gamma > 0$ tal que $|\varphi(t)| > \frac{1}{2}e^{-\gamma t^2}$.

Ara, si ambdós es compleixen, $\log \varphi(t) = \lim_{n\nearrow\infty} n \log \varphi_n(t) = \lim_{n\nearrow\infty} n(\varphi_n(t) - 1) = \psi(t)$, i, pel teorema de continuïtat de Lévy, és una funció característica. $\square$

I d'aquest teorema també caldrà usar dos corol·laris.

Corol·lari 2.19. *Sigui $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua a 0. φ és una funció característica infinitament divisible si, i només si, hi ha una successió $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcions característiques tal que $(\varphi_n(t))^n \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

Demostració. ($\Longrightarrow$) Sigui φ la funció característica. Llavors, $\varphi_n = \varphi^{1/n}$ compleix la segona clàusula. Està ben definida com a conseqüència del lema 2.10.

($\Longleftarrow$) Si φ_n és funció característica d'una probabilitat μ_n, llavors $e^{\varphi_n - 1}$ és la funció característica de c-Pois μ_n. Aleshores, $\varphi := \lim_{n\nearrow\infty} e^{\varphi_n - 1}$ és un límit de funcions característiques continu a 0 i, per tant, pel teorema de continuïtat de Lévy és funció característica i ho és d'una llei infinitament divisible amb $\varphi = (\varphi^{1/n})^n$. $\square$

Corol·lari 2.20. *Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió feblement convergent de mesures de probabilitat infinitament divisibles a $\mathbb{R}$, llavors $\mu := \lim_{n\nearrow\infty} \mu_n$ és infinitament divisible.*

Demostració. Tan sols cal aplicar el teorema anterior amb φ_n la funció característica de l'arrel n-èssima per convolució de μ_n. $\square$

Amb aquests tres resultats a la mà, es passa a demostrar el teorema 2.17.

Demostració. (del teorema 2.17) ($\Longleftarrow$) Com que totes les c-Pois ν_n són infinitament divisibles, pel corol·lari 2.20, el límit feble μ és també infinitament divisible.

($\Longrightarrow$) Sigui φ la funció característica de μ. Es pren mesures de probabilitat $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ amb funció característica φ_n com les del corol·lari 2.19. Pel teorema que s'acaba de veure, $e^{n(\varphi_n - 1)} \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi$ i, per tant, c-Pois $\nu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$. $\square$

2.6 El teorema de Lévy-Khintxin

El teorema de Lévy-Khintxin és un resultat que permet caracteritzar les lleis infinitament divisibles. Es dóna l'enunciat, prova i propietats de [4].

Teorema 2.21 (de Lévy-Khintxin)**.** *Una mesura de probabilitat P a $\mathbb{R}$ és infinitament divisible si, i només si, hi ha únics $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in [0, \infty)$ i μ mesura de Lévy tals que es té $P \sim \mathrm{N}(a, \sigma^2) * \text{c-Pois}\,\mu$; és a dir, la seva funció característica és*

$$\varphi(t) = \exp\left(ita - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{[-1,1]}(x))\mu(dx)\right).$$

S'anomena (σ, a, μ) el triplet canònic de P. Es dirà que σ és el "coeficient gaussià" i μ és la "mesura de Lévy" (o "mesura canònica") de P. Com que la mesura de Lévy μ hi apareix en una llei de Poisson composta, es prendrà, sense pèrdua de generalitat, nul·la a l'origen.

Dins l'expressió, apareix una funció $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Aquesta és la tria més usual, i és a la que ens referirem llevat que s'especifiqui el contrari, però hi ha altres possibilitats. Aquesta tria tan sols afectarà, de fet, l'element a del triplet.

Demostració. ($\Longleftarrow$) Sigui (σ, a, μ), un triplet canònic corresponent a la probabilitat P. Llavors, $P = N(a, \sigma^2) * \text{c-Pois}\,\mu$, i és infinitament divisible ja que tant la normal com c-Pois ho són.

($\Longrightarrow$) Cal veure que per cada distribució infinitament divisible hi ha un triplet canònic i que és únic. Es comença veient la unicitat.

Sigui $g_t(x) = e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{x:|x|<1\}}$. Per cada $x \neq 0$, es té

$$2 \geq \left| \frac{g_t(x)}{t^2(1 \wedge x^2)} \right| \xrightarrow{t \nearrow \infty} 0.$$

Com que la mesura ν del triplet és de Lévy, es pot aplicar el teorema de la convergència dominada per obtenir

$$\lim_{t \nearrow \infty} \frac{\log \varphi(t)}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2} + \lim_{t \nearrow \infty} \frac{ib}{t} + \lim_{t \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_t(x)}{t^2(1 \wedge x^2)}(1 \wedge x^2)\nu(dx) = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Això comporta la unicitat de σ^2. Llavors, es pot assumir $\sigma^2 = 0$. Es defineix

$$\overline{\log \varphi}(t) = \log \varphi(t) - \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} \log \varphi(s) ds.$$

Llavors, es pot calcular

$$\overline{\log \varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \left(1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{isx} ds \right) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(x) \nu(dx),$$

amb $h(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$ per $x \neq 0$ i $h(0) = 0$. Ara, segons aquesta definició, $\overline{\log \varphi}$ és la funció característica de $\tilde{\nu}$ definida per $\tilde{\nu}(dx) = h(x)\nu(dx)$. Llavors, $\tilde{\nu}$ queda determinada per φ, i, per tant, també hi queda ν.

Pel què fa a a, queda determinat per ser la diferència dels termes restants, a la funció característica.

S'estudia ara l'existència. Es té $\operatorname{Im} \log \varphi$ funció senar i $\operatorname{Re} \log \varphi(t) \leq 0$, per a tot $t \in \mathbb{R}$. Llavors, $\overline{\log \varphi(0)} \geq 0$ i $\overline{\log \varphi}(0) = 0$ si $\operatorname{Re} \log \varphi(t) = 0$ per a tot $t \in [-1, 1]$. Això comporta $P = \delta_a$ per algun $a \in \mathbb{R}$, i llavors $(0, a, 0)$ és un triplet canònic.

S'assumeix, doncs, que $\overline{\log \varphi}(0) > 0$. S'ha vist que hi ha una successió $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures amb $\text{c-Pois}_{\nu_n} \xrightarrow{n \nearrow \infty} P$ i $\nu_n(\{0\}) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Es defineix

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{1}_{(-1,1)}(x) \nu_n(dx).$$

Ara, fent servir la funció característica de c-Pois, es té

$$\log \varphi_{\nu_n} = \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} g_t(x) \nu_n(dx) + i a_n t,$$

i llavors es defineix, anàlogament a $\overline{\log \varphi}$,

$$\overline{\log \varphi_{\nu_n}} := \log \varphi_{\nu_n}(t) - \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} \log \varphi_{\nu_n}(s) ds = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(x) \nu_n(dx).$$

Com que $\log\varphi_{\nu_n} \xrightarrow{n\nearrow\infty} \log\varphi$ uniformement en compactes i $\log\varphi$ és contínua, es té $\overline{\log\varphi_{\nu_n}} \xrightarrow{n\nearrow\infty} \overline{\log\varphi}$ puntualment. Llavors,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(x)\nu_n(dx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \overline{\log\varphi}(t).$$

Per tant, $\overline{\log\varphi_{\nu_n}}(0) > 0$ per n prou gran. Així, si es defineix

$$\tilde{\nu}_n(dx) = \frac{h(x)}{\overline{\log\varphi_{\nu_n}}(0)}\nu_n(dx),$$

una mesura de probabilitat, es té $\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\tilde{\nu}_n(dx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \overline{\log}\varphi(t)/\overline{\log}\varphi(0)$. Pel teorema de continuïtat de Lévy, hi ha una mesura de probabilitat $\tilde{\nu}$ amb $\tilde{\nu}_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \tilde{\nu}$ i

$$\overline{\log\varphi}(t) = \overline{\log\varphi}(0)\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\tilde{\nu}(dx).$$

Sigui ara $\sigma^2 := -6\overline{\log\varphi}(0)\tilde{\nu}(\{0\})$ i es defineix una mesura de Lévy ν com

$$\nu(dx) = \frac{\overline{\log\varphi}(0)}{h(x)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)\tilde{\nu}(dx).$$

Per altra banda, l'aplicació $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida per

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{g_t(x)}{h(x)}, & \text{si } x \neq 0, \\ -3t^2, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

és acotada i contínua. Per construcció,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_t(x)\nu_n(dx) &= \overline{\log\varphi_{\nu_n}}(0)\int_{\mathbb{R}} f_t(x)\tilde{\nu}_n(dx) \\ &\xrightarrow{n\nearrow\infty} \overline{\log\varphi_{\nu_n}}(0)\int_{\mathbb{R}} f_t(x)\tilde{\nu}(dx) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{\mathbb{R}} g_t(x)\nu(dx).\end{aligned}$$

Per això, existeix el límit

$$ita := \lim_{n\nearrow\infty} ita_n = \lim_{n\nearrow\infty}\left(\log\varphi_{\nu_n}(t) - \int_{\mathbb{R}} g_t(x)\nu_n(dx)\right) = \log\varphi(t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 - \int_{\mathbb{R}} g_t(x)\nu(dx),$$

i amb això s'ha arribat al resultat, tot trobant un triplet canònic. □

Es dóna, per últim, la propietat de les transformacions del triplet canònic sota la suma i sota transformacions lineals.

Proposició 2.22 (Reescalament del triplet canònic)**.** *Sigui μ infinitament divisible amb triplet canònic (σ, a, ν), és a dir, amb funció característica*

$$\varphi(t) = \exp\left(iat - \frac{1}{2}\sigma^2t^2 + \int_{\mathbb{R}}(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{(-1,1)}(x))\nu(dx)\right).$$

Ara, sigui $b \in (0,\infty)$, $d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $X, X_1, \ldots, X_n \sim \mu$ v.a.i. Llavors, *1. el triplet canònic de* $X_1 + \cdots + X_n$ *és* $(\sqrt{n}\sigma, na, n\nu)$ *i*

2. el triplet canònic de $bX + d$ *és* $(b\sigma, \tilde{a}, \nu \circ m_b^{-1})$*, on* $m_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $x \mapsto bx$ *i*

$$\tilde{a} := ba + d + b \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{(-1/b,1/b)}(x) - \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)) x\nu(dx).$$

Demostració. Per a la primera, n'hi ha prou de fer

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = (\varphi(t))^n = \exp\left(inat - \frac{1}{2}n\sigma^2t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{(-1,1)}(x))n\nu(dx)\right),$$

mentre que per a la segona es pot encadenar

$$\begin{aligned}
\varphi_{bX+d} &= e^{idt}\varphi(t) \\
&= \exp\left(i(d+ba)t - \frac{1}{2}b^2\sigma^2t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{ibtx} - 1 - ibtx\mathbb{1}_{(-1,1)}(x))\nu(dx)\right) \\
&= \exp\left(i\tilde{a}t - \frac{1}{2}b^2\sigma^2t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{ibtx} - 1 - ibtx\mathbb{1}_{(-1/b,1/b)}(x))\nu(dx)\right) \\
&= \exp\left(i\tilde{a}t - \frac{1}{2}b^2\sigma^2t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{(-1,1)}(x))(\nu \circ m_b^{-1})(dx)\right).
\end{aligned}$$

$\square$

3 Lleis estables

L'objectiu en aquest capítol és definir i donar propietats d'un tipus concret de lleis infinitament divisibles: les lleis estables, és a dir, aquelles que convolucionades amb si mateixes esdevenen una transformació lineal d'elles mateixes. Es seguirà [4], i s'usarà [3] per les proves de les darreres propietats.

3.1 Definició i primeres propietats

Com a introducció, és interessant estudiar el cas simètric. Es pren $\alpha \in (0,2)$, i sigui

$$\theta_\alpha := \int_{\mathbb{R}} (1-\cos x)|x|^{-\alpha-1}dx = \begin{cases} -2\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \pi, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Llavors, la mesura definida per $\nu_\alpha(dx) = {\theta_\alpha}^{-1}|x|^{-\alpha-1}dx$ és una mesura de Lévy, ja que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\nu_\alpha(dx) = 2{\theta_\alpha}^{-1}(\alpha^{-1} + (2-\alpha)^{-1}) < \infty.$$

Sigui φ_α la funció característica de la llei infinitament divisible μ_α de triplet canònic $(0,0,\nu_\alpha)$. Per la fórmula de Lévy-Khintxin, es té

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) &= \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{(-1,1)}(x))\theta_\alpha^{-1}|x|^{-\alpha-1}dx\right) \\ &= \exp\left(-{\theta_\alpha}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)|x|^{-\alpha-1}dx\right) \\ &= e^{-|t|^\alpha}. \end{aligned}$$

Així, μ_α és la llei estable simètrica d'índex α, que es diu així perquè, per $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. de distribució μ_α, es té $X_1 + \cdots + X_n \sim n^{1/\alpha}X_1$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Havent vist el cas simètric, es dóna la definició i algunes propietats del cas general.

Definició 3.1. *Sigui μ mesura de probabilitat als reals no concentrada en un sol punt. Si $X_1, \ldots, X_n \sim \mu$ són v.a.i.i.d., es diu que μ és estable (en el sentit ampli) si, per a tot $n \in \mathbb{N}$, hi ha $a_1, \ldots, a_n \in [0,\infty)$ i $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ (que es dirà que són els seus coeficients) tals que*

$$X_1 + \cdots + X_n \sim a_nX_1 + d_n$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. Es diu que és estable en el sentit estricte si $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En aquest cas, es diu que té índex $\alpha \in (0,2]$ si $a_n = n^{1/\alpha}$.

Proposició 3.2. *Si μ és estable, és infinitament divisible.*

Demostració. Si $X_1 + \cdots + X_n \sim a_nX_1 + d_n$, es té $\frac{nX_1-d_n}{na_n} + \cdots + \frac{nX_n-d_n}{na_n} \sim X_1$, sempre que $a_n \neq 0$. Si $a_n = 0$, es té $d_n - X_2 - \cdots - X_n \sim X_1$. □

Exemple 3.3. Es dóna alguns exemples de lleis estables:

1. la llei normal és estable: és ben sabut que, si $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma)$ són v.a.i.i.d. amb $n \in \mathbb{N}$, es té $X_1 + \cdots + X_n \sim \sqrt{n}X_1 + (n-\sqrt{n})\mu$; és a dir, $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ és estable amb coeficients $a_n = \sqrt{n}$ i $d_n = (n-\sqrt{n})\mu$;

2. la llei de Cauchy també és estable: sigui $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Cau}(\alpha)$ v.a.i.i.d. amb $n \in \mathbb{N}$, també es troba que $X_1 + \dots + X_n \sim nX_1$; és a dir, $\mathrm{Cau}(\alpha)$ és estable amb coeficients $a_n = n$ i $d_n = 0$.

Ara, s'enuncia un teorema que dóna diverses propietats fortes de les lleis estables generals:

Teorema 3.4. *Sigui μ llei estable de coeficients $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$ i $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ (per cada $n \in \mathbb{N}$). Llavors,*

1. *hi ha $\alpha \in (0, 2]$ tal que μ té índex α,*
2. *si $\alpha = 2$, μ és una distribució normal,*
3. *si $\alpha \in (0, 2)$, la mesura de Lévy ν de μ té densitat*

$$\frac{\nu(dx)}{dx} = \begin{cases} c_-(-x)^{-\alpha-1}, & si\ x < 0, \\ c_+ x^{-\alpha-1}, & si\ x > 0, \end{cases}$$

   per certs $c_-, c_+ \in [0, \infty)$ amb $c_- + c_+ > 0$,

4. *si $\alpha \neq 1$, hi ha $b \in \mathbb{R}$ tal que $\mu * \delta_{-b}$ és estable d'índex α, i*
5. *si $\alpha = 1$, llavors $d_n = (c_+ - c_-)n \log n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $c_- = c_+$, μ és una distribució de Cauchy.*

Noti's que, si μ és infinitament divisible amb mesura de Lévy donada per l'apartat 3 d'aquest teorema, la seva funció característica és

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(|t|^\alpha \Gamma(-\alpha) \left[(c_+ + c_-)\cos\frac{\pi\alpha}{2} + i(c_+ - c_-)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|t|(c_+ + c_-)\left[\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sgn}(t)(c_+ - c_-)\log|t|\right]\right), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Per demostrar el teorema, caldrà un lema.

Lema 3.5 (Reescalament del triplet canònic, versió estable)**.** *Sigui μ estable en sentit ampli de coeficients $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$ i $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ (per cada $n \in \mathbb{N}$), i (σ, b, ν) el seu triplet canònic. Llavors,*

1. *es té $({a_n}^2 - n)\sigma^2 = 0$ i $n\nu = \nu \circ m_{a_n}^{-1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $m_{a_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x$,*
2. *si $\nu = 0$, llavors $a_n = n^{1/2}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $d_n = b(n - n^{1/2})$,*
3. *si que $\alpha \in (0, 2)$, $a_n = n^{1/\alpha}$, i ν és la de l'apartat 3 del teorema anterior, es té*

$$d_n = \begin{cases} \left(b + \frac{c_+ - c_-}{\alpha - 1}\right)(n - n^{1/\alpha}), & si\ \alpha \neq 1, \\ (c_+ - c_-)n \ln n, & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Demostració.

1. Sigui $({a_n}^2\sigma^2, \tilde{b}_n, \nu\circ m_{a_n}^{-1})$ el triplet canònic de a_nX+d_n del lema anterior i $(\sqrt{n}\sigma, nb, \nu\circ m_{a_n}^{-1})$ el de $X_1+\cdots+X_n$. Per la definició de l'estabilitat en sentit ampli i el fet que el triplet canònic és únic, s'obté ${a_n}^2\sigma^2 = n\sigma^2$, $\tilde{b}_n = nb$ i $\nu\circ m_{a_n}^{-1} = n\nu$.

2. Si $\nu = 0$, llavors $\sigma^2 > 0$. Per la definició, μ no està concentrada en un punt. Pel primer apartat del lema, $a_n = n^{1/2}$ i per la propietat del triplet canònic sota transformacions lineals, $nb = \tilde{b}_n = bn^{1/2} + d_n$.

3. Altre cop sota les transformacions lineals, es pot ser més explícit i trobar

$$\begin{aligned}
nb = \tilde{b}_n &= bn^{1/\alpha} + d_n - n^{1/\alpha}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x:n^{-1/\alpha}\le|x|<1\}} x\nu(dx)\\
&= bn^{1/\alpha} + d_n - n^{1/\alpha}(c_+ - c_-)\int_{n^{-1/\alpha}}^1 x^{-\alpha}dx\\
&= \begin{cases} bn^{1/\alpha} + d_n - \dfrac{c_+ - c_-}{\alpha - 1}(n - n^{1/\alpha}), & \text{si } \alpha \neq 1,\\ bn^{1/\alpha} + d_n - (c_+ - c_-)n\ln n, & \text{si } \alpha = 1,\end{cases}
\end{aligned}$$

   i tan sols cal reordenar els termes.

□

Ara sí, es pot procedir a la prova del teorema.

Demostració. (del teorema 3.4) Els apartats 4 i 5 són immediats del lema que s'acaba de demostrar. Pel que fa a la resta, es distingirà els casos amb $\liminf_{n\nearrow\infty} a_n n^{-1/2}$ finit i no finit.

S'assumeix primer que $\liminf_{n\nearrow\infty} a_n n^{-1/2}$ és finit. Sigui ara $C \in [1,\infty)$ i sigui $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsuccessió amb $a_{n_k}{n_k}^{-1/2} \le C$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Llavors, per cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, es té

$$C^2 \ge {n_k}^{-1}(1\wedge {a_{n_k}}^2) \ge \frac{{n_k}^{-1}(1\wedge {a_{n_k}}^2x^2)}{1\wedge x^2} \xrightarrow{k\nearrow\infty} 0. \tag{3.2}$$

D'aquesta expressió, fent servir el teorema de la convergència dominada, es pot deduir

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1\wedge x^2)\nu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{{n_k}^{-1}(1\wedge {a_{n_k}}^2x^2)}{1\wedge x^2}(1\wedge x^2)\nu(dx) \xrightarrow{k\nearrow\infty} 0.$$

D'aquí, $\nu = 0$, i pel lema, $\mu * \delta_{-b}$ és estable amb índex 2. Amb això, s'ha vist el punt 2.

Es suposa ara que $\liminf_{n\nearrow\infty} a_n n^{-1/2} = \infty$. Es té, pel primer punt del lema, $\sigma^2 = 0$ i per tant $\nu \neq 0$. Es defineix

$$F(x) = \begin{cases} \nu([x,\infty)), & \text{si } x > 0,\\ \nu((-\infty, x]), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

Com que $\nu \neq 0$, hi ha $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ amb $F(x_0) > 0$. Per simetria, es pot prendre $x_0 > 0$. Fent anar el primer punt del lema, s'obté $nF(x) = F(x/a_n)$, per $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Per tant,

$$F\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^k x_0\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k F(x_0), \tag{3.3}$$

per qualsevol $k \in \mathbb{Z}$, expressió que es pot reescriure com a $F(x) = (x/x_0)^{-\alpha_n} F(x_0)$, per $x\{(a_{n+1}/a_n)^k x_0 : k \in \mathbb{Z}\}$, amb $\alpha_n \coloneqq \log((n+1)/n)/\log(a_{n+1}/a_n)$. Com que F és monòtona decreixent i s'anul·la per $x \nearrow \infty$, es té $\alpha_n > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha_m} \leq \frac{F(x)}{F(x_0)} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha_n}$$

amb $x > 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$. Fent $x \nearrow \infty$, s'obté $\alpha_m \geq \alpha_n$, però simètricament s'obté la desigualtat contrària. Per tant, totes les α són iguals i es defineix $\alpha = \alpha_1 > 0$, de manera que es té $a_n = n^{1/\alpha}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Com que $\liminf_{n \nearrow \infty} a_n n^{-1/2} = \infty$, es té $\alpha < 2$. Això demostra el punt 1.

Es té $F(1) = {x_0}^{\alpha} F(x_0) > 0$ i $F(x) = x^{-\alpha} F(1)$ per a tot $x > 0$. Per $x < 0$, per altra banda, $F(x) = (-x)^{-\alpha} F(-1)$. Si, ara, es posa $c^+ \coloneqq \alpha\nu([1, \infty))$ i $c^- \coloneqq \alpha\nu((-\infty, -1])$, s'obté, finalment, el punt 3. $\square$

3.2 Convergència a distribucions estables

Per acabar, es dóna uns quants teoremes obtinguts de [3, 4]. Aquests resultats indiquen que tan sols les lleis estables s'esdevenen com a límit de sumes centrades i reescalades de v.a.i.i.d.

Definició 3.6. *Sigui $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. i $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, amb $n \in \mathbb{N}$. Sigui μ distribució de probabilitat a $\mathbb{R}$. El domini d'atracció de μ, $\mathrm{Dom}(\mu)$, és el conjunt de les lleis P_{X_1} no concentrades en un sol punt tals que hi ha $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ amb*

$$\frac{S_n - d_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu.$$

Si μ és estable amb índex $\alpha \in (0, 2]$, llavors P_X és al domini d'atracció normal si es pot triar $a_n = n^{1/\alpha}$.

És a dir, el domini d'atracció el conformen les lleis aitals que les sumes (desplaçades i reescalades) de variables que les segueixen tendeixen a μ.

Exemple 3.7. Si $X_1, \cdots \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, es té $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, i pel teorema de De Moivre-Laplace,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{N}(0, 1),$$

de manera que $\mathrm{Bernoulli}(p) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{N}(0, 1))$.

Pels teoremes que vénen, cal alguna altra definició.

Definició 3.8. *Sigui una funció $H : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Es diu que és de variació lenta a ∞ si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(\gamma x)}{H(x)} = 1 \tag{3.4}$$

per a tot $\gamma \in (0, \infty)$. Es diu que varia regularment amb exponent $\rho \in \mathbb{R}$ si és de la forma $H(x) = x^{\rho} f(x)$, amb f de variació lenta a ∞.

A més, per una variable aleatòria X, es definirà la funció

$$U_X(x) \coloneqq \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X| \leq x\}}). \tag{3.5}$$

Teorema 3.9. *Sigui μ mesura de probabilitat no concentrada en un sol punt. Llavors,* $\mathrm{Dom}(\mu) \neq \varnothing$ *si, i només si, μ és estable. En aquest cas,* $\mu \in \mathrm{Dom}(\mu)$.

Demostració. La definició d'estabilitat que s'acaba de donar es pot traduir al llenguatge de les funcions característiques de la següent manera: una llei amb funció característica ψ pertany al domini d'atracció d'una llei de funció característica φ si $|\varphi|$ no és idènticament u i hi ha $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ amb

$$(\psi(t/a_n)e^{-ib_nt})^n \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi(t).$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. Això sorgeix directament de les propietats de la funció característica. Si es posa P_X la llei corresponent a ψ, es defineix, per a tot n,

$$P_{X,n}(B) = P_X(a_n(B + b_n)),$$
$$\psi_n(t) = \psi(t/a_n)e^{-ib_nt}$$

on $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i es posa $a_n(B+b_n) = \{x \in \mathbb{R} : (x/a_n) - b_n \in B\}$. S'ha vist (al teorema 2.18) que la condició que s'ha escrit per la pertinença al domini d'atracció equival a

$$n(\psi_n(t) - 1) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \lambda(t), \tag{3.6}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$, amb $\varphi = e^{\lambda}$.

Es considera primer el cas de F simètrica, és a dir, $b_n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. (3.6) comporta l'existència d'una mesura canònica ν tal que $nx^2P_{x,n}(dx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \nu(dx)$. Llavors, a tots els punts $x \in (0, \infty)$ de continuïtat es té

$$\frac{n}{{a_n}^2}U_X(a_nx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \nu(-x, x)$$

i també es té, si es posa $\nu^+(x) = \int_x^\infty y^{-2}\nu(dy)$,

$$n(1 - P_X(-\infty, a_nx)) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \nu^+(x).$$

El límit $\psi(t/a_n) \xrightarrow{n\nearrow\infty} 1$ comporta $a_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} \infty$, de manera que S_n/a_n i S_n/a_{n+1} tenen, al límit, la mateixa distribució. Llavors, $a_{n+1}/a_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} 1$ i U és de variació lenta a ∞. Així, s'obté

$$\nu(-x, x) = Cx^{2-\alpha},$$

$0 < \alpha \leq 2$, per cert $C \in (0, \infty)$. Així, per $\alpha \neq 2$, es té

$$\nu^+(x) = C\frac{2-\alpha}{\alpha}x^{-\alpha}.$$

Pel cas no simètric, els càlculs anàlegs comporten $b_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} 0$, i per tant aquesta relació també és vàlida. Es pot raonar de manera idèntica per l'altra cua, i es troba que l'exponent α ha de ser el mateix per ambdues.

Si totes dues cues l'esvaeixen idènticament, ν estarà concentrada a l'origen. Altrament (per $\alpha < 2$), la mesura ν està determinada per les seves densitats a ambdós semieixos, i ve donada, per $x, y \in (0, \infty)$, per

$$\nu(-y, x) = C(qy^{2-\alpha} + px^{2-\alpha}), \tag{3.7}$$

amb $p+q=1$. La funció característica que hi correspon ve donada per (3.1) i per tant la distribució és estable. Això comporta que cada distribució estable pertany al seu domini d'atracció, i per tant s'ha trobat totes les distribucions que tenen un domini d'atracció. $\square$

Teorema 3.10. *Sigui P_X la llei d'una variable aleatòria X.*

1. *Si $P_X \in \mathrm{Dom}(\mu)$ per alguna mesura de probabilitat μ, hi ha $\alpha \in (0,2]$ tal que la funció definida per $U_X(x)x^{\alpha-2}$ és de variació lenta a ∞.*
2. *Si P_X no està acumulada en un sol punt i $U_X(x)$ és de variació lenta a ∞, llavors P_X és al domini d'atracció d'alguna distribució (és a dir, la condició de l'apartat anterior també és suficient per $\alpha = 2$).*
3. *Si $\alpha \in (0,2)$, P_X és al domini d'atracció d'alguna distribució si, i només si, $U_X(x)x^{\alpha-2}$ és de variació lenta a ∞ i existeixen el límits*

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\{x : X \geq x\})}{\mathbb{P}(\{x : |X| \geq x\})},$$
$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\{x : X \leq -x\})}{\mathbb{P}(\{x : |X| \geq x\})}.$$

Si una llei compleix els apartats 2 o 3 d'aquest teorema, es diu que és α-estable. Certs resultats respecte la variació regular de funcions permeten enunciar el següent lema, la justificació del qual es pot trobar a [3].

Lema 3.11. *Sigui F_X funció de distribució d'una variable aleatòria X. Si U_X varia regularment amb exponent $2-\alpha$, per $\alpha \in (0,2]$, es té*

$$\frac{x^2(1 - F_X(x) + F_X(-x))}{U_X(x)} \xrightarrow{n\nearrow\infty} \frac{2-\alpha}{\alpha}. \tag{3.8}$$

Recíprocament, si es compleix aquesta condició per $\alpha < 2$, llavors U_X i $1 - F_X + F_X$ varien regularment amb exponents $2-\alpha$ i $-\alpha$, respectivament. Si $\alpha = 2$, llavors U_X és de variació lenta a ∞.

Demostració del teorema 3.10.

1. A la prova anterior, s'ha vist que perquè una distribució simètrica sigui a un domini d'atracció cal que $x^{\alpha-2}U_X(x)$ sigui de variació lenta a infinit. Ara, cal veure-ho pel cas no simètric.

   Suposi's que la mesura canònica de μ ve donada per (3.7). Al llarg de la demostració que hi porta, s'ha vist que una llei de $\mathrm{Dom}(\mu)$ també satisfà les condicions anteriors per les cues, de manera que es té

$$n\,(1 - P_X(-\infty, a_n x) + P_X(-\infty, -a_n x)) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \nu^+(x) + \nu^-(-x), \tag{3.9}$$

   on ν^- és la cua per l'esquerra, definida de manera anàloga a com s'ha definit la cua per la dreta ν^+. Pel cas $\alpha < 2$, la suma de les cues $1 - F(x) + F(-x)$ varia regularment amb exponent $-\alpha$, i U_X ho fa amb exponent $2-\alpha$, pel lema 3.11, i per tant $U_X(x)x^{\alpha-2}$ és de variació lenta a ∞.

Pel cas $\alpha = 2$, el costat esquerre de la relació anterior tendeix a anul·lar-se, de manera que la probabilitat que $|X_k| > a_n$ per $k \in 1, \ldots, n$ també hi tendeix. Llavors, perquè S_n/a_n no tendeixi a 0 en probabilitat, cal que la suma de $U_{X_{k/a_n}}$ estigui acotada lluny de zero, però

$$\frac{U_X(a_n)}{1 - P_X(-\infty, a_n) + P_X(-\infty, -a_n)} \xrightarrow{n \nearrow \infty} \infty,$$

i per tant (3.8) és vàlida amb $\alpha = 2$, cosa que implica la variació lenta de U_X.

Els apartats 2 i 3 es demostraran al llarg de la prova del següent teorema. □

Caldrà, per demostrar el proper teorema, un lema que donarà informació sobre les esperances de les distribucions en un domini d'atracció. Novament, la seva prova es pot trobar a [3].

Lema 3.12. *Una llei P_X que pertany a un domini d'atracció i té índex α té moments de tots els ordres $\beta \in (0, \alpha)$. Si $\alpha < 2$, no hi ha moments d'ordre superior. De manera més precisa, per $t \nearrow \infty$, es té*

$$\frac{t^{2-\beta}}{U_X(t)} \int_{|x|>t} |x|^\beta P_X(dx) \xrightarrow{t \nearrow \infty} \frac{2-\alpha}{\alpha-\beta},$$

mentre que per $\alpha < 2$ es té, per $\beta \in (\alpha, \infty)$,

$$\int_{|x|<t} |x|^\beta P_X(dx) \sim \frac{\alpha}{\beta - \alpha} t^\beta (1 - P_X(-\infty, t) + P_X(-\infty, -t)).$$

A la prova del teorema anterior, s'ha vist que les constants de normalització a_n han de satisfer

$$\frac{nU_X(a_n)}{{a_n}^2} \xrightarrow{n \nearrow \infty} C, \tag{3.10}$$

per cert $C \in \mathbb{R}$. Si U_X varia regularment, a_n es pot definir com la cota inferior de les x per tal que $nU_X(x)/x^2 \leq C$, i per tant, per la variació regular, per $x > 0$ es té

$$\frac{nU_X(a_n x)}{{a_n}^2} \xrightarrow{n \nearrow \infty} Cx^{2-\alpha}.$$

Això vol dir que la mesura de qualsevol interval simètric $(-x, x)$ per $nx^2 P_X(a_n dx)$ tendeix a $\nu(-x, x)$ (on ν és la mesura canònica de la llei de la qual es mira el domini d'atracció). Per (3.8), la darrera equació comporta (3.9). Quan $\alpha = 2$, el segon terme és nul. Quan $\alpha < 2$, es satisfà

$$n(1 - P_X(-\infty, a_n x)) \xrightarrow{n \nearrow \infty} Cp\frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha},$$

$$nF(-\infty, -a_n x) \xrightarrow{n \nearrow \infty} Cq\frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha}.$$

Això comporta, per les propietats de les mesures canòniques, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it\sin x}{x^2} nx^2 P_X(a_n dx) \xrightarrow{n \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it\sin x}{x^2} \nu(dx). \tag{3.11}$$

I amb això, ara ja es pot obtenir el teorema que queda.

Teorema 3.13. *Sigui μ distribució estable i $P_X \in \operatorname{Dom}\mu$ que satisfà les condicions del teorema 3.10 i amb coeficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ que satisfan* (3.10). *Aleshores, sigui φ la funció característica de μ i ψ la de P_X.*

1. *Si $0 < \alpha < 1$, llavors $\psi^n(t/a_n) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi(t)$.*
2. *Si $1 < \alpha \leq 2$, es compleix el mateix si P_X està centrada a esperança zero.*
3. *Si $\alpha = 1$, llavors*
$$(\varphi(t/a_n)e^{-ib_nt})^n \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi(t),$$
on es defineix, per a tot $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{x}{a_n} P_X(dx).$$

Demostració.

1. La integral que defineix φ a (3.1) difereix del costat dret de (3.11) en què falta el terme $it\sin x$. Aquests termes es poden ometre també a (3.11) de manera que es té el límit
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{x^2} nx^2 P_X(a_n dx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{x^2}\nu(dx). \tag{3.12}$$
L'integrant és continu llevat de l'origen, i com ν és una mesura de Poisson composta, es pot retallar un interval $|x| < \delta$ del domini d'integració. Cal veure, doncs, que aquesta contribució es pot fer arbitràriament petita. Aquesta està dominada per
$$n\int_{(-\delta,\delta)} |x| P_X(a_n dx) = \frac{n}{a_n}\int_{(-a_n\delta, a_n\delta)} |y| P_X(dy),$$
i llavors el lema 3.12 indica que el costat dret tendeix, per $n \nearrow \infty$, a $\frac{2-\alpha}{1-\alpha}C\delta^{1-\alpha}$, que tendeix a 0 amb δ. Es pot reescriure el límit, doncs, per $n(\psi(t/a_n) - 1) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \varphi(t)$, i pel teorema 2.18, es té $\psi^n(t/a_n) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \lambda(t)$, amb $\varphi = e^\lambda$.

2. L'argument anterior també serveix, llevat del fet que ara enlloc de (3.12), es té l'anàleg
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2} nx^2 P_X(a_n dx) \xrightarrow{n\nearrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\nu(dx).$$
Per justificar-ho cal veure que la contribució del tram $|x| > t$ a la integral de l'esquerra és arbitràriament petita triant t gran, cosa que segueix directament del lema 3.12.

3. Per demostrar, en aquest cas, que (3.11) equival a la igualtat de l'enunciat, cal demostrar que, per cert $t \in \mathbb{R}$,
$$n|\psi(t/a_n) - 1|^2 \xrightarrow{n\nearrow\infty} 0.$$
Segons el lema 3.12, per $\beta < 1$ el moment d'ordre β, m_β, de P_X és finit. Fent servir la desigualtat $|e^{it} - 1| < 2|t|^\beta$ es té $|\psi(t/a_n) - 1 < 2m_\beta(|t|/a_n)^\beta$. Per tant, el costat esquerre es comporta com $O(n{a_n}^{-2\beta})$, però (3.10) diu que n es comporta com $O({a_n}^{1+\varepsilon})$ per a tot $\varepsilon \in (0,\infty)$, i per tant el límit és correcte.

□

4 Processos de Lévy: definició, caracterització i existència

L'objectiu d'aquest capítol és definir i donar propietats dels processos de Lévy; és a dir, els processos estocàstics d'increments independents i estacionàris i estocàsticament continus, així com explicar-ne la relació amb les lleis infinitament divisibles. Es segueix [5].

4.1 Definició i exemples

Si es pensa en els processos a temps continu més senzills, un pensa en el moviment brownià o en els processos de Poisson. Tots dos són exemples de processos de Lévy: el primer amb camins mostrals continus i el segon amb camins mostrals amb salts. La classe dels processos de Lévy, però, és més àmplia.

De fet, els processos de Lévy són als processos a temps continu el que la passejada aleatòria és als processos a temps discret.

Definició 4.1. *Un procés estocàstic* $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *amb valors a* $\mathbb{R}$ *és un procés de Lévy si compleix*

1. $X_0 = 0$ *q.s.,*
2. *té increments independents; és a dir, per qualssevol* $n \in \mathbb{N}$ *i* $t_0, \dots, t_n \in [0,\infty)$ *amb* $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$*, les variables* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *són independents,*
3. *té increments estacionaris; és a dir, per a tot* $s, t \in [0,\infty)$*, la llei de* $X_{s+t} - X_s$ *no depèn de* s*,*
4. *és estocàsticament continu; és a dir, per a tot* $t \in [0,\infty)$ *i* $\varepsilon \in (0,\infty)$*, es compleix* $\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$
5. *els camins mostrals* $X_t(\omega)$ *són càdlàg q.s.; és a dir, són continus per la dreta per* $t \ge 0$ *i tenen límit per l'esquerra per* $t > 0$ *q.s.*[3]

Si un procés compleix les condicions 1, 2, 3 i 4 però no necessàriament 5, es diu que és "de Lévy en llei". S'usarà la denominació "additiu" pels processos que compleixin les condicions 1, 2, 4 i 5, i es dirà que són "additius en llei" si compleixen 1, 2 i 4.

	$X_0 = 0$ q.s.	Increments independents	Increments estacionaris	Continuïtat estocàstica	Camins càdlàg q.s.
Additiu en llei	✓	✓		✓	
Additiu	✓	✓		✓	✓
de Lévy en llei	✓	✓	✓	✓	
de Lévy	✓	✓	✓	✓	✓

Taula 1: Representació de les diverses definicions que s'usarà, segons les propietats que compleixi el procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$.

[3]El terme *càdlàg* ve del francès "continu à droite, limite à gauche". Es farà servir la notació usual $D(A,B)$ pel conjunt de les funcions $A \to B$ càdlàg.

Reflexionant una mica més sobre la definició, es veu que en el cas dels processos de Lévy es pot ometre la continuïtat estocàstica de la definició. Això es pot justificar amb el resultat següent:

Proposició 4.2. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ amb $X_0 = 0$ q.s. i increments estacionaris. Llavors, la continuïtat estocàstica equival a $\lim_{t\searrow 0} \mathbb{P}(|X_t| > \varepsilon) = 0$, per a tot $\varepsilon \in (0, \infty)$.*

Demostració. Per la propietat dels increments estacionaris i el fet que $X_0 = 0$ q.s., es té, per a tot $s \in [0, \infty)$ i $\varepsilon \in (0, \infty)$, $\mathbb{P}(|X_{t+s} - X_s| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_t - X_0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_t| > \varepsilon)$. Prenent el límit, es té el resultat. □

Si els camins mostrals són càdlàg q.s., però, aquesta condició equivalent es compleix (ja que el procés té camins continus per la dreta a zero q.s.), i per tant el procés és també estocàsticament continu.

També es veurà, més endavant (al teorema 4.22), que tot procés de Lévy en llei admet una modificació que és procés de Lévy, és a dir, que per a tot procés de Lévy en llei $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ hi ha un procés de Lévy $\{X'_t\}_{t\in[0,\infty)}$ tal que $\mathbb{P}(X_t = X'_t) = 1$, per a tot $t \in [0, \infty)$.[4]

Exemple 4.3. Es dóna un parell d'exemples de processos de Lévy, extrets de [1].

1. El primer, que ja s'ha esmentat, és el moviment brownià estàndard a $\mathbb{R}$; és a dir, el procés $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ tal que $B_t \sim \mathrm{N}(0, t)$ amb camins mostrals continus, així com el moviment brownià amb tendència, que ve donat per $B_t^{(a,\sigma)} = at + \sigma B_t$ per certs $a \in \mathbb{R}$ i $\sigma \in [0, \infty)$, que té per tant $B_t^{(a,\sigma)} \sim \mathrm{N}(at, \sigma^2 t)$.

   De fet, el moviment brownià amb tendència és l'únic procés de Lévy amb camins mostrals continus, cosa que es veurà més endavant.

2. Un altre cas és el procés de Poisson de paràmetre $\lambda \in (0, \infty)$; és a dir, el procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ que té llei $X_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. És útil també definir-ne la versió compensada; és a dir, $\tilde{X}_t = X_t - \lambda t$, que té esperança nul·la i ja no pren tan sols valors a $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. En la mateixa línia, el procés de Poisson compost $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$, que és el que té per llei una llei de Poisson composta, també és un procés de Lévy.

4.2 Relació amb les lleis infinitament divisibles

A l'hora de donar detalls sobre les distribucions dels processos de Lévy és quan apareixen les lleis infinitament divisibles. Essencialment, es veurà que hi ha una correspondència un a un entre les lleis infinitament divisibles i els processos de Lévy.

Abans, però, convé veure un lema sobre les lleis infinitament divisibles que no s'ha vist fins ara.

Lema 4.4. *Si P és una llei infinitament divisible, llavors; per a tot $t \in [0, \infty)$, hi ha una llei P^t infinitament divisible tal que les funcions característiques compleixen $\varphi_{P^t} = (\varphi_P)^t$.*

[4] Aquest fet fa que moltes fonts (com ara [1]) no incloguin la condició 5 a la definició de procés de Lévy, i demostren llavors que tot procés de Lévy té una modificació de camins càdlàg q.s.

Demostració. Ja s'ha vist per $t = 1/n$ per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, a proposició 2.9. Llavors, per $t \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, s'expressa $t = m/n$ amb $m, n \in \mathbb{N}$ i tan sols cal convolucionar m vegades el cas ja vist de $t = 1/n$.

El cas amb $t = 0$ correspon a la funció característica que és idènticament u, i per tant la llei corresponent és δ_0.

Finalment, pel cas amb $t \in [0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$, es pren una successió $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}}$ que tendeixi a t. Llavors, es té

$$(\varphi_P)^{t_n} \xrightarrow{n \nearrow \infty} (\varphi_P)^t,$$

i $(\varphi_P)^t$ és contínua i per tant funció característica. Llavors, per corol·lari 2.20, la distribució corresponent és infinitament divisible. $\square$

Es farà servir la notació d'aquest lema per la probabilitat P^t que s'obté en aquest procés.

Teorema 4.5.

1. *Si $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ és un procés de Lévy en llei a $\mathbb{R}$, llavors, per a tot $t \in [0, \infty)$, es té llei P_{X_t} infinitament divisible i $P_{X_t} = P^t_{X_1}$.*

2. *Si P és una llei infinitament divisible a $\mathbb{R}$, llavors hi ha un procés de Lévy en llei $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ tal que $P_{X_1} = P$.*

Demostració.

1. Sigui $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un procés de Lévy en llei. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, \ldots, n\}$. Es posa $t_k = kt/n$ i $\mu_n = P_{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}$ i aquesta llei és independent de k per la propietat dels increments estacionaris. Llavors, $P_{X_t} = \mu_n * \overset{n}{\ldots} * \mu_n$ i la llei és infinitament divisible. Que es té $P_{X_t} = P^t_{X_1}$ per a tot $t \geq 0$ és conseqüència immediata de lema 4.4. Amb això, s'ha provat 1.

2. Sigui μ una llei infinitament divisible a $\mathbb{R}$. Llavors, μ^t és una probabilitat de funció característica $(\varphi_\mu)^t$. Llavors, per $s, t \in [0, \infty)$, es té

$$\begin{aligned} \mu^s * \mu^t &= \mu^{s+t}, \\ \mu^0 &= \delta_0, \\ \mu_t &\xrightarrow{t \searrow 0} \delta_0. \end{aligned}$$

Ara, el que es farà és construir el procés de Lévy en llei corresponent. Sigui $\{X_t\}_{t \geq 0}$ la família de variables aleatòries donada per $X_t(\omega) = \omega(t)$ com al teorema d'extensió de Kolmogorov, és a dir, prenent Ω el conjunt de les funcions $[0, \infty) \to \mathbb{R}$.[5] per a

[5] Recordi's que el teorema d'extensió de Kolmogorov s'enuncia de la següent manera, per $\mathbb{R}$.

Teorema 4.6. *Sigui, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ amb $t_1 < \cdots < t_n$, una probabilitat $P_{t_1,\ldots,t_n}$ tal que, si $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $B_k = \mathbb{R}$ per un cert k, es té*

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = P_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \cdots \times B_n).$$

Llavors, hi ha una única probabilitat P sobre $\mathcal{F}$ que té distribucions $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}$ a dimensió finita.

La prova es pot trobar, per exemple, a [2].

tot $n \in \mathbb{N}$ i $t_0, \ldots, t_n \geq 0$ amb $t_0 < \ldots t_n$, es defineix

$$P_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mu^{t_0}(dy_0) \mathbb{1}_{B_0}(y_0) \prod_{k=1}^{n} \mu^{t_k - t_{k-1}}(dy_n) \mathbb{1}_{B_n}(y_0 + \cdots + y_k).$$

$P_{t_0,\ldots,t_n}$ s'estén a una mesura de probabilitat a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ i, pel teorema d'extensió de Kolmogorov, es té una única probabilitat P amb

$$P(X_{t_0} \in B_0, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = P_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n).$$

En particular, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ té distribució P^t. Tan sols queda comprovar que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ és un procés de Lévy en llei.

Per a tot $n \in \mathbb{N}$, sigui $t_0, \ldots, t_n \geq 0$ amb $t_0 < \cdots < t_n$. Es té, de la definició,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(f(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(y_0, \ldots, y_0 + \cdots + y_n) \mu^{t_0}(dy_0) \mu^{t_1 - t_0}(dy_1) \ldots \mu^{t_n - t_{n-1}}(dy_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

per qualsevol funció f mesurable i acotada. En particular, sigui la funció f definida per

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} z_j (x_j - x_{j-1}) \right),$$

donats certs $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. Es té, doncs,

$$\mathbb{E}(f(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})) = \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{iz_k, y_k} \mu^{t_k - t_{k-1}}(dy_k).$$

D'aquí, es té

$$\mathbb{E}\left(e^{iz_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})} \right) = \int_{\mathbb{R}} e^{iz_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})} \mu^{t_k - t_{k-1}}(dy_k),$$

per a tot $k \in 1, \ldots, n$ i per tant $X_k - X_{k-1}$ té llei $\mu^{t_k - t_{k-1}}$ i, a més,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^{n} z_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \right) \right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{iz_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})} \right).$$

S'ha vist, doncs, la propietat dels increments independents i la dels increments estacionaris. A més, com $\mu^t \xrightarrow{t \searrow 0} \delta_0$, es té $X_0 = 0$ q.s. i la continuïtat estocàstica, donat que $\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_{s-t}| > \varepsilon)) \xrightarrow{s \to t} 0$, de manera que el procés és de Lévy en llei.

□

D'aquesta importantíssima propietat, hi ha un corol·lari directe.

Corol·lari 4.7. *Sigui $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ i $\{X'_t\}_{t \in [0,\infty)}$ processos de Lévy en llei amb $P_{X_1} = P_{X'_1}$. Llavors, $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ i $\{X'_t\}_{t \in [0,\infty)}$ són idèntics en llei.*

Demostració. Com que les lleis són idèntiques per X_1 i X'_1, per teorema 4.5, es té $P_{X_t} = P_{X'_t}$ per a tot $t \in [0, \infty)$. Llavors, per a tot $s \in [0, \infty)$, es té $X_{s+t} - X_s \sim X'_{s+t} - X'_s$, i per tant, per la independència dels increments,

$$(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \sim (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \ldots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}}),$$

per a tota seqüència $t_0, \ldots, t_n \geq 0$ amb $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i $n \in \mathbb{N}$. D'aquí, com $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$ és funció determinista dels increments, es té

$$(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}) \sim (X'_{t_0}, \ldots, X'_{t_n}).$$

□

Per a tot procés de Lévy $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$, el triplet canònic (σ, a, ν) corresponent a la llei de X_1 es dirà que és el "triplet generador" del procés. De fet, pel teorema anterior i la descomposició de Lévy-Khintxin, això dóna l'expressió de la funció característica del procés,

$$\varphi_{X_t}(z) = \exp\left[t\left(iaz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{(-1,1)})\nu(dx)\right)\right].$$

4.3 Funcions de transició i la propietat de Markov

Una altra propietat que cal ressaltar dels processos de Lévy és la propietat de Markov. Se'n donarà la definició usant funcions de transició i tot seguit es demostrarà que els processos de Lévy la tenen.

Definició 4.8. *Una família $\{P_{s,t}\}_{0 \leq s \leq t < \infty}$ de funcions $P_{s,t} : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, és una funció de transició a $\mathbb{R}$ si*

1. *$P_{s,t}(x, \cdot)$ és una mesura de probabilitat com a funció de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixat $x \in \mathbb{R}$,*
2. *$P_{s,t}(\cdot, B)$ és mesurable com a funció de $\mathbb{R}$ fixat $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*
3. *$P_{s,s}(x, B) = \delta_x(B)$ per a tot $s \in [0, \infty)$ i $(x, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i*
4. *es compleix, per a tot $u \geq t$ i $(x, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$\int_{\mathbb{R}} P_{t,u}(y, B) P_{s,t}(x, dy) = P_{s,u}(x, B).$$

Les propietats 1 i 2 comporten que, per a tota funció f mesurable i acotada (i per a tot $s, t \in [0, \infty)$ amb $s \leq t$), la funció $\int_{\mathbb{R}} f(y) P_{s,t}(x, dy)$ és mesurable, ja que tota tal funció f es pot expressar com a límit de funcions elementals.

La propietat 4 es coneix com a identitat de Chapman-Kolmogorov. Una funció de transició es diu que és temporalment homogènia si, a més, $P_{s+h,t+h}$ no depèn de h. En aquest cas, queda determinada per un dels dos paràmetres (cosa que podem particularitzar prenent $h = -s$ i fixant així el primer paràmetre a 0), i es posa $P_t = P_{s,s+t}$ per $s \in [0, \infty)$. La propietat de Chapman-Kolmogorov s'escriu, llavors,

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(y, B) P_s(x, dy) = P_{s+t}(x, B),$$

per $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Donada una funció de transició $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$, es pot definir un procés estocàstic associat, que es denota $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Sigui Ω_0 el conjunt de les funcions $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ i es posa $Y_t(\omega) = \omega(t)$, per $\omega \in \Omega_0$. Es pren, doncs, $\mathcal{F}_0$ la σ-àlgebra generada per Y_t.

Per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ amb $t_0 < \cdots < t_n$ es defineix una mesura estenent la funció definida per

$$\begin{aligned}\mu^{0,a}_{t_0,\ldots,t_n}(B_0, \ldots, B_n) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} & P_{0,t_0}(a, dx_0)\mathbb{1}_{B_0}(x_0)P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1)\mathbb{1}_{B_1}(x_1) \\ & \ldots P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n)\mathbb{1}_{B_n}(x_n),\end{aligned} \tag{4.2}$$

per un cert $a \in \mathbb{R}$. Aquesta s'estén a una única mesura de probabilitat a $\mathbb{R}^{n+1}$ i, per la propietat de Chapman-Kolmogorov, es pot aplicar el teorema d'extensió de Kolmogorov. Llavors, hi ha una única extensió d'aquesta família a $\mathcal{F}_0$, que es denota $P^{0,a}$.

Anàlogament, si es pren la restricció de la família $\{P_{s,t}\}_{u\leq s\leq t<\infty}$, per cert $u \in [0, \infty)$, es pot definir $P^{u,a}$ a $(\Omega_u, \mathcal{F}_u)$. En el cas temporalment homogeni, u és irrellevant i es denota senzillament P^a.

Definició 4.9. *Un procés estocàstic $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és de Markov amb punt inicial $a \in \mathbb{R}$ i funció de transició $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ si és idèntic en llei amb el procés $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ construït més amunt a $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P^{0,a})$.*

Anàlogament, un procés estocàstic $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és de Markov amb punt inicial $a \in \mathbb{R}$ a l'instant $u \in [0, \infty)$ i funció de transició $\{P_{s,t}\}_{u\leq s\leq t<\infty}$ si és idèntic en llei amb el procés $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ construït més amunt a $(\Omega_u, \mathcal{F}_u, P^{u,a})$.

Es diu que $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és la representació de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a l'espai de camins. Si la funció de transició és temporalment homogènia, es diu que el procés és temporalment homogeni.

Cal una darrera definició abans de començar a tractar els processos de Lévy.

Definició 4.10. *Una funció de transició $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ a $\mathbb{R}$ és espacialment homogènia si compleix*

$$P_{s,t}(x, B) = P_{s,t}(0, B - x),$$

per a tot $s, t, x \in \mathbb{R}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on $B - x = \{y \in \mathbb{R} : y + x \in B\}$.

Això permet caracteritzar els processos additius en llei com, precisament, els processos de Markov amb funció de transició espacialment homogènia.

Teorema 4.11.

1. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés additiu en llei a $\mathbb{R}$. Llavors, la família $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ de funcions $P_{s,t} : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ definida per*

   $$P_{s,t}(x, B) = \mathbb{P}(X_t - X_s \in B - x)$$

   és una funció de transició espacialment homogènia i el procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és de Markov amb punt inicial 0 i aquesta funció de transició.

2. *Recíprocament, si $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés de Markov estocàsticament continu a $\mathbb{R}$ amb funció de transició espacialment homogènia i punt inicial 0, llavors $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu en llei.*

Per demostrar-lo, caldrà el lema següent:

Lema 4.12.

1. *Sigui* $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *procés additiu en llei a* $\mathbb{R}$. *Per* $s,t \in [0,\infty)$ *amb* $s \le t$, *es té la llei* $P_{X_t-X_s}$ *infinitament divisible.*

2. *Recíprocament, si* $\{\mu_{s,t}\}_{0\le s\le t<\infty}$ *és un sistema de mesures de probabilitat a* $\mathbb{R}$ *que satisfan, per* $s,t,u \in [0,\infty)$ *amb* $s \le t \le u$,

$$\begin{aligned} \mu_{s,t} * \mu_{t,u} &= \mu_{s,u}, \\ \mu_{s,s} &= \delta_0, \\ \mu_{s,t} &\xrightarrow{s\to t} \delta_0, \end{aligned}$$

llavors hi ha un procés additiu en llei $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *tal que, per a tot* $s,t \in [0,\infty)$ *amb* $s \le t$, $X_t - X_s$ *té llei* $\mu_{s,t}$.

3. *Si* $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *i* $\{X'_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *són processos additius en llei a* $\mathbb{R}$ *tals que* $X_t \sim X'_t$ *per a tot* $t \in [0,\infty)$, *llavors* $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *i* $\{X'_t\}_{t\in[\infty)}$ *són iguals en llei.*

Demostració.

1. Per a tot $s \in [0,\infty)$, es té $\{X_{s+t} - X_s\}_{t\in[0,\infty)}$ procés additiu en llei i llavors $\mu_{s,t}$ és infinitament divisible (la prova que les lleis dels processos additius en llei són infinitament divisibles és anàloga a la del teorema 4.5, apartat 1).

2. La prova és idèntica a la del teorema 4.5, apartat 2, substituïnt les lleis involucrades.

3. Sgui $\mu_{s,t}$ i $\mu'_{s,t}$ les distribucions de $X_t - X_s$ i de $X'_t - X'_s$, amb $s,t \in [0,\infty)$, $s \le t$. Llavors, com $X_0 = X'_0 = 0$, es té $\mu_{0,t} = \mu'_{0,t}$. Com $\mu_{0,t}$ és infinitament divisible, la seva funció característica no s'anul·la per la proposició 2.9. Per tant, $\mu_{0,s} * \mu_{s,t} = \mu_{0,t}$, $\mu'_{0,s} * \mu'_{s,t} = \mu'_{0,t}$ i $\mu_{s,t} = \mu'_{s,t}$. La resta de la prova segueix com al corol·lari 4.7.

□

Demostració del teorema 4.11.

1. Cada $P_{s,t}(x,\cdot)$ és una mesura de probabilitat, i a més de la definició es té, per a tot $s \in [0,\infty)$ i $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{s,s}(x,B) = \mathbb{P}(X_s - X_s \in B - x) = \mathbb{P}(0 \in B - x) = \delta_0(B - x) = \delta_x(B).$$

Que és espacialment homogènia és immediat de la definició. Que és mesurable es pot veure pel fet

$$P_{s,t}(x,B) = \mathbb{P}(X_t - X_s \in B - x) = P_{X_t - X_s}(B - x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) P_{X_s - X_t}(dy).$$

Pel que fa a la identitat de Chapman-Kolmogorov, per $s, t, u \in [0, \infty)$ amb $s \leq t \leq u$, es té

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} P_{t,u}(y, B) P_{s,t}(x, dy) &= \int_{\mathbb{R}} P_{t,u}(x + y, B) P_{X_t - X_s}(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_{t,u}(B - x - y) P_{X_t - X_s}(dy) \\
&= (P_{X_t - X_s} * P_{X_u - X_t})(B - x) \\
&= P_{X_u - X_s}(B - x) \\
&= P_{s,u}(x, B).
\end{aligned}$$

Com s'ha fet més amunt, es pot construir un procés $\{Y_t\}_{t \in [0,\infty)}$ de Markov que té aquesta funció de transició i punt inicial 0. Pel lema 4.12, $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ i $\{Y_t\}_{t \in [0,\infty)}$ són iguals en llei, i per tant $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ és procés de Markov amb les propietats que es volia.

2. En les condicions de l'enunciat, es defineix, per a tot $s, t \in [0, \infty)$ amb $s \leq t$, $\mu_{s,t} = P_{s,t}(0, \cdot)$, on $\{P_{s,t}\}_{0 \leq s \leq t < \infty}$ és la funció de transició. Llavors,

$$P_{s,t}(x, B) = P_{s,t}(0, B - x) = \mu_{s,t}(B - x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x + y) \mu_{s,t}(dy)$$

i per tant, per a tota funció mesurable i acotada f, es té també

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) P_{s,t}(x, dy) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y) \mu_{s,t}(dy).$$

Aleshores, per $t_0, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ amb $t_0 < \cdots < t_n$, es té

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{t_0} \in B_0, \ldots, X_{t_n} \in B_n) &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} P_{0,t_0}(a, dx_0) \mathbb{1}_{B_0}(x_0) P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) \mathbb{1}_{B_1}(x_1) \\
&\qquad \ldots P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n) \mathbb{1}_{B_n}(x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \mu_{0,t_0}(dx_0) \mathbb{1}_{B_0}(x_0) \mu_{t_0,t_1}(dx_1) \mathbb{1}_{B_1}(x_0 + x_1) \\
&\qquad \ldots \mu_{t_{n-1},t_n}(dx_n) \mathbb{1}_{B_n}(x_0 + \cdots + x_n).
\end{aligned}$$

Llavors, per a tota funció mesurable i acotada f, $\mathbb{E}(f(x_{t_0}, \ldots, X_{t_n}))$ és igual al costat dret de (4.1) canviant les probabilitats per $\mu_{0,t_0}, \ldots, \mu_{t_{n-1},t_n}$. Per tant, seguint la prova del teorema 4.5, $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ té increments independents i $X_t - X_s$ té llei $\mu_{s,t}$ per a tot $s, t \in [0, \infty)$ amb $s \leq t$. Així, $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ és un procés de Lévy en llei.

□

El cas temporalment homogeni, però, és el que interessa: és el que correspon als processos de Lévy.

Teorema 4.13.

1. *Sigui $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ un procés de Lévy en llei a $\mathbb{R}$. Si es pren la família $\{P_t\}_{t \in [0,\infty)}$ de funcions $P_t : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ definida per*

$$P_t(x, B) = \mathbb{P}(X_t \in B - x),$$

llavors $\{P_t\}_{t \in [0,\infty)}$ és una funció de transició temporalment i espacial homogènia i $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ és un procés de Markov amb punt inicial 0 i aquesta funció de transició.

2. *Recíprocament, tot procés de Markov estocàsticament continu i temporalment homogeni a $\mathbb{R}$ amb punt inicial* 0 *i funció de transició espacialment homogènia és un procés de Lévy en llei.*

Demostració.

1. Pel teorema 4.11, tan sols cal veure que la funció de transició és temporalment homogènia, cosa que és conseqüència directa de la propietat dels increments estacionaris: si la llei de $X_{t+s} - X - t$ no depèn de $s \in [0, \infty)$ per a tot $t \in [0, \infty)$, es té funció de transició

$$P_{t,t+s}(x, B) = \mathbb{P}(X_{t+s} - X_t \in B - s),$$

també independent de s i per tant temporalment homogènia.

2. Novament pel teorema 4.11, tan sols cal veure que el procés definit té els increments estacionaris. Seguint la demostració del teorema esmentat, es una pren funció de transició $\{P_t\}_{t\in[0,\infty)}$ i X_t té llei P_t per a tot $t \in [0, \infty)$. Per tant, com que la funció de transició és temporalment homogènia, es té directament l'estacionarietat dels increments.

□

La següent propietat és la coneguda propietat de Markov. S'enuncia i demostra la propietat bàsica i després s'enunciarà la versió més forta que compleixen els processos de Lévy.

Es denotarà $\mathbb{E}^{u,a}$ l'esperança sota la mesura de probabilitat $P^{u,a}$ a $(\Omega^u, \mathcal{F}^u)$.

Proposició 4.14 (Propietat de Markov). *Sigui* $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *la representació a l'espai de camins d'un procés de Markov amb funció de transició* $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$. *Sigui* f *una funció mesurable acotada a* $\mathbb{R}^{n+1}$, *per cert* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *i* $t_0, \dots, t_n \in [0, \infty)$ *amb* $t_0 < \cdots < t_n$. *Llavors,* $\mathbb{E}^{0,a}(f(Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n}))$ *és mesurable en* a *i*

$$\mathbb{E}^{0,a}(f(Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n})) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} P_{0,t_0}(a, dx_0) \left(\prod_{j=1}^{n} P_{t_{j-1},t_j}(x_{j-1}, dx_j) \right) f(x_0, \dots, x_n).$$

A més, per $m \in \mathbb{N}$ *i per a tot* $s_0, \dots, s_m, s \in [0, \infty)$ *amb* $s_0 < \cdots < s_m \leq s$ *i funció* g *mesurable i acotada a* $\mathbb{R}^m$, *es té*

$$\mathbb{E}^{0,a}(g(Y_{s_0}, \dots, Y_{s_m}) f(Y_{s+t_0}, \dots, Y_{s+t_n})) = \mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \dots, Y_{s_m}) \mathbb{E}^{s,Y_s}(f(Y_{s+t_0}, \dots, Y_{s+t_n}))].$$

Demostració. El cas amb $n = 0$ és immediat. S'assumeix, doncs, que $n \in \mathbb{N}$. Si una funció h és mesurable i acotada a $\mathbb{R}^{n+1}$, llavors es té $\int_{\mathbb{R}} h(x_0, \dots, x_n) P_{s,t}(x_{n-1}, dx_n)$ acotada i mesurable.

La primera igualtat és (4.2) pel cas que f sigui producte d'indicadors de borelians, i l'extensió a f general n'és conseqüència. D'aquí es dedueix la mesurabilitat respecte a.

Per veure la segona igualtat novament es pren $g(x_0, \dots, x_m) = \mathbb{1}_{C_0}(x_0) \dots \mathbb{1}_{C_m}(x_m)$ i $f(x_0, \dots, x_m) = \mathbb{1}_{B_0}(x_0) \dots \mathbb{1}_{B_n}(x_n)$. Llavors, el costat esquerre de la igualtat és

$$P^{0,a}(Y_{s_0} \in C_0, \dots, Y_{s_m} \in C_m, Y_s \in \mathbb{R}, Y_{s+t_0} \in B_0, \dots, Y_{s+t_n} \in B_n).$$

Així, la igualtat sorgeix per (4.2) integrant $n+1$ cops i usant la primera igualtat de la proposició. L'extensió a f i g generals n'és conseqüència. $\square$

La propietat més forta que s'ha comentat abans és la següent.

Proposició 4.15. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés de Lévy a $\mathbb{R}$. Aleshores, per a tot $s \in [0,\infty)$, es té que $\{X_{s+t} - X_s\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés de Lévy idèntic en llei a $\{X_t\}_{t\geq 0}$.*

Demostració. Per cert $s \in [0,\infty)$, sigui $Z_t = X_{s+t} - X_s$. És clar de la definició que $Z_0 = 0$ i que $Z_{t_2} - Z_{t_1} = X_{s+t_2} - X_{s+t_1}$ (per a tot $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ amb $t_2 \geq t_1$) i, per tant, de la definició de procés de Lévy per $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ es dedueix que $\{Z_t\}_{t\in[0,\infty)}$ també la compleix. $\square$

4.4 Existència de processos de Lévy

Fins ara s'ha vist que per a tota llei infinitament divisible hi ha un procés de Lévy en llei que la té com a llei a l'instant 1, únic llevat d'igualtat en llei. Per acabar d'establir la correspondència entre processos de Lévy i lleis infinitament divisibles, en aquesta secció es veurà que tot procés de Lévy en llei admet una modificació que és un procés de Lévy.

Teorema 4.16. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés de Markov a $\mathbb{R}$ amb funció de transició $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$ i un cert punt inicial. Es posa, per $\varepsilon, T \in [0,\infty)$ i $u \in (0,\infty)$,*

$$\alpha_{\varepsilon,T}(u) = \sup\{P_{s,t}(x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)^{\mathrm{c}}) : x \in \mathbb{R}, s,t \in [0,T], 0 \leq t-s \leq u\}.$$

Si, per a tot $\varepsilon \in (0,\infty)$, $T \in [0,\infty)$,

$$\lim_{u\searrow 0} \alpha_{\varepsilon,T}(u) = 0 \tag{4.3}$$

llavors hi ha un procés de Markov $\{X'_t\}_{t\in[0,\infty)}$ que és una modificació de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ amb camins mostrals càdlàg. Aquest procés satisfà, per a tot $t \in (0,\infty)$,

$$\lim_{s\nearrow t} \mathbb{P}(X'_t = X'_s) = 1.$$

Si, a més, per a tot $\varepsilon, T \in (0,\infty)$,

$$\lim_{u\searrow 0} \alpha_{\varepsilon,T}(u)/u = 0, \tag{4.4}$$

hi ha $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega_1)$ i els camins mostrals hi són continus.

Demostrant aquest teorema, s'haurà avançat gran part de la feina que es pretenia fer en aquesta secció. Tanmateix, per fer-ho caldrà definir algun concepte i demostrar tres lemes.

Definició 4.17. *Sigui $M \subset [0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\infty)$ i un procés estocàstic $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Es diu que un camí mostral $X_t(\omega)$, amb $\omega \in \Omega$, té $n \in \mathbb{N}$ ε-oscil·lacions a M si hi ha $t_0, \ldots, t_n \in M$ amb $t_0 < \cdots < t_n$ i $|X_{t_j}(\omega) - X_{t_{j-1}}(\omega)| > \varepsilon$ per a tot $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Si M té n ε-oscil·lacions a M per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, es diu que té infinites ε-oscil·lacions a M.

Es posa $B(n,\varepsilon,M) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega)$ té n ε-oscil·lacions a $M\}$ i de la mateixa manera $B(\infty,\varepsilon,M) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega)$ té infinites ε-oscil·lacions a $M\}$.

Per un procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$, definirem dos subconjunts de Ω pel lema següent. Sigui

$$\Omega_2 = \{\omega \in \Omega : \lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,\infty); \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \in \mathbb{R}, \forall t \in (0,\infty)\}$$

i $\Omega_2' = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{N,k}$, amb

$$A_{N,k} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ no té infinites } \frac{1}{k}\text{-oscil·lacions a } [0,N]\cap\mathbb{Q}\}.$$

Com que $\mathbb{Q}$ és numerable, $\Omega_2' \in \mathcal{F}$. Se segueix amb aquesta notació per Ω_2 i Ω_2'.

Lema 4.18. *$\Omega_2' \subset \Omega_2$.*

Demostració. Sigui $\omega \in \Omega_2'$. Sigui $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ amb $t_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} t$ de manera decreixent. Llavors, per a tot $k \in \mathbb{N}$, hi ha n_0 tal que

$$|X_{t_n}(\omega) - X_{t_0}(\omega)| \le \frac{1}{k}$$

per a tot $n \ge n_0$. Per tant, $\lim_{t\nearrow\infty} X_{t_n}(\omega) \in \mathbb{R}$ i es donen els dos límits de la definició de Ω_2. □

Lema 4.19. *Si un procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és estocàsticament continu i $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$, hi ha una modificació seva $\{X_t'\}_{t\in[0,\infty)}$ tal que els camins mostrals són càdlàg.*

Demostració. Pel lema anterior, si $\omega \in \Omega_2'$, es defineix $X_t'(\omega) = \lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$. Si $\omega \notin \Omega_2'$, es defineix $X_t'(\omega) = 0$. Amb aquesta definició, els camins mostrals són càdlàg. A més, si $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ amb $t_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} t$ de manera decreixent, es té $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ i $X_{t_n} \xrightarrow{\text{q.s.}} X_t'$ perquè $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$, i per tant $\mathbb{P}(X_t = X_t') = 1$ per a tot $t \in [0,\infty)$ i $\{X_t'\}_{t\in[0,\infty)}$ és una modificació de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$. □

Lema 4.20. *Sigui $p, n, m \in \mathbb{N}$ i $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n, u, v, T \in \mathbb{R}$ amb $0 \le s_1 < \cdots < s_m \le u \le t_1 < \cdots < t_n \le v \le T$ i es posa $M = \{t_1, \dots, t_n\}$. Si $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés de Markov amb funció de transició $\{P_{s,t}\}_{0\le s\le t<\infty}$ de punt inicial $a \in \mathbb{R}$. Llavors,*

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{B(p,4\varepsilon,M)}) \le \mathbb{E}(Z)(2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u))^p,$$

amb $\varepsilon \in (0,\infty)$ i per qualsevol $Z = g(X_{s_1}, \dots, X_{s_m})$ amb g mesurable i no negativa.

Demostració. Com que la proposició dóna propietats sobre l'esperança, n'hi ha prou de demostrar la propietat en la representació a l'espai de camins del procés estocàstic. Per tant, s'assumeix que $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és aquesta representació. Es provarà per inducció en p.

Per $p = 1$, per $k \in \mathbb{N}$ es posa

$$\begin{aligned} C_k &= \{|X_{t_j} - X_u| \le 2\varepsilon : j \in \{1, \dots, k-1\}, |X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon\}, \\ D_k &= \{|X_v - X_{t_k}| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Llavors, $C_1, \dots, C_n$ són disjunts i

$$B(1, 4\varepsilon, M) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{|X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \subset \{|X_v - X_u| \ge \varepsilon \cup \bigcup_{k=1}^{n} (C_k \cap D_k).$$

Per tant, es pot encadenar, per la propietat de Markov,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{B(1,4\varepsilon,M)}) &\leq \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{\{|X_v-X_u|\geq\varepsilon\}}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{C_k}\mathbb{1}_{D_k}) \\
&\leq \mathbb{E}^{0,a}(Z)\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{C_k})\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) \\
&\leq 2\mathbb{E}^{0,a}(Z)\alpha_{\varepsilon,T}(v-u).
\end{aligned}$$

Es suposa ara que l'enunciat es compleix per $p-1$. Per $k \in \mathbb{N}$ es posa

$$\begin{aligned}
F_k &= \{X_t \text{ té } p-1 \text{ } 4\varepsilon\text{-oscil·lacions a } \{t_1,\dots,t_k\} \text{ però no a } \{t_1,\dots,t_{k-1}\}\}, \\
G_k &= \{X_t \text{ té una } 4\varepsilon\text{-oscil·lació a } \{t_k,\dots,t_n\}\}.
\end{aligned}$$

Llavors, $F_1,\dots,F_n$ són disjunts i

$$\begin{aligned}
B(p-1,4\varepsilon,M) &= \bigcup_{k=1}^{n} F_k, \\
B(p,4\varepsilon,M) &\subset \bigcup_{k=1}^{n} (F_k \cap G_k).
\end{aligned}$$

Si $\omega \in B(p,4\varepsilon,M)$, llavors el camí mostral corresponent té p 4ε-oscil·lacions en cert $\{t_{n_0},\dots,t_{n_p}\}$, amb $n_0 < \cdots < n_p$ i per tant hi ha $k \in \{0,\dots,n_{p-1}$ tal que $\omega \in F_k$. Per altra banda, $\omega \in G_k$ ja que $|X(t_{n_{p-1}}) - X(t_{n_p})| > 4\varepsilon$. Llavors, per la propietat de Markov i usant el cas amb $p=1$, es té

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{B(p,4\varepsilon,M)}) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{F_k}\mathbb{1}_{G_k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{F_k})2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) \\
&\leq \mathbb{E}^{0,a}(Z\mathbb{1}_{B(p-1,4\varepsilon,M)})2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) \\
&\leq \mathbb{E}^{0,a}(Z)(2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u))^p.
\end{aligned}$$

□

Amb això ja s'ha preparat les eines que cal per demostrar el teorema 4.16.

Demostració del teorema 4.16. L'assumpció (4.3) amb $T \in [0,\infty)$ implica la continuïtat estocàstica de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$.

Per provar l'existència de la modificació de camins mostrals càdlàg, tan sols cal provar que $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$, pel lema 4.19. Per la defininció de Ω_2', n'hi ha prou de veure que $\mathbb{P}({A_{N,k}}^{\mathrm{c}}) = 0$ per a tot $N,k \in \mathbb{N}$. Com que es té (4.3), es pot triar l tal que $2\alpha_{1/4k,N}(N/l) < 1$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}({A_{N,k}}^{\mathrm{c}}) &= \mathbb{P}(B(\infty,1/k,[0,N]\cap\mathbb{Q})) \\
&\leq \sum_{j=1}^{l} \mathbb{P}(B(\infty,1/k,[(j-1)N/l, jN/l]\cap\mathbb{Q})).
\end{aligned}$$

Ara, si s'etiqueta $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} = [(j-1)N/l, jN/l] \cap \mathbb{Q}$, pel lema 4.20 es té, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(B(p, 1/k, \{t_1, \ldots, t_n\})) \leq (2\alpha_{1/4k,N}(N/l))^p.$$

Prenent $n \nearrow \infty$, justament, es té

$$\mathbb{P}(B(p, 1/k, [(j-1)N/l, jN/l] \cap \mathbb{Q})) \leq (2\alpha_{1/4k,N}(N/l))^p.$$

Ara, com que s'ha pres l tal que $2\alpha_{1/4k,N}(N/l) < 1$, prenent $p \nearrow \infty$ el costat dret s'anul·la (i per tant l'esquerre també. D'aquesta manera, es té $\mathbb{P}({A_{N,k}}^c) = 0$, com es volia veure.

Per acabar el teorema, s'assumeix (4.4). N'hi ha prou de veure ara, per cada $N \in \mathbb{N}$, que hi ha $H_N \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(H_N) = 1$ i que s'hi compleix la condició desitjada, és a dir,

$$H_N \subset \{\lim_{s \nearrow t} X'_s = X'_t, \forall t \in (0, N]\}.$$

Per cert N sigui, per $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} R_{l,\varepsilon}(\omega) &= \#\{j \in \{1, \ldots, l\} : |X'_{jN/l}(\omega) - X'_{(j-1)N/l}(\omega)| > \varepsilon\}, \\ R_\varepsilon(\omega) &= \#\{t \in (0, N] : |X'_t(\omega) - \lim_{s \nearrow t} X'_s(\omega)| > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

Llavors, es té per la definició $R_\varepsilon(\omega) \leq \liminf_{l \nearrow \infty} R_{l,\varepsilon}(\omega)$, però es pot veure que, en esperança, el costat esquerre s'anul·la: es té

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{l,\varepsilon}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{l} \mathbb{1}_{\{|X'_{jN/l} - X'_{(j-1)N/l}| > \varepsilon\}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|X'_{jN/l} - X'_{(j-1)N/l}| > \varepsilon\}}) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \mathbb{P}(|X'_{jN/l} - X'_{(j-1)N/l}| > \varepsilon) \\ &\leq l\alpha_{\varepsilon,N}(N/l), \end{aligned}$$

i es té, per (4.4), el darrer terme tendint a 0 per $l \nearrow \infty$. Llavors, pel lema de Fatou, $\mathbb{E}(\liminf_{l \nearrow \infty} R_{l,\varepsilon}) = 0$ i llavors $\mathbb{E}(R_\varepsilon) = 0$. Com que R_ε és positiu o nul, es té $R_\varepsilon = 0$ q.s. i es pot prendre

$$H_N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\liminf_{l \nearrow \infty} R_{l,1/k} = 0\} \subset \{R_\varepsilon = 0, \forall \varepsilon \in (0, \infty)\},$$

que és just el que es volia veure. □

Per provar el resultat objectiu d'aquest apartat, s'usarà un lema més.

Lema 4.21. *Un procés $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ estocàsticament continu ho és de manera uniforme en tot interval finit $[0, t_0] \subset \mathbb{R}$.*

Demostració. El que s'ha de veure és que per a tot $\varepsilon, \eta \in (0, \infty)$ hi ha $\delta \in (0, \infty)$ tal que, si $s, t \in [0, t_0]$ i $|s - t| < \delta$, llavors $\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) < \eta$. Sigui doncs tal ε i η. Per a tot

$t \in [0,\infty)$ hi ha $\delta_t > 0$ tal que $\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon/2) < \eta/2$. Si es posa $I_t = (t - \delta_t/2, t + \delta_t/2)$, es té

$$[0, t_0] \subset \bigcup_{t \in [0,t_0]} I_t.$$

Pel teorema de Heine-Borel, doncs, hi ha un subrecobriment finit $\{I_{t_j} : j \in \{1, \ldots, n\}\}$ de $[0, t_0]$ amb cert $n \in \mathbb{N}$.

Sigui llavors $\delta = \min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \delta_{t_j}/2$. Si $|s - t| < \delta$ i $s, t \in [0, t_0]$, llavors $t \in I_{t_j}$ per cert $j \in \{1, \ldots, n\}$ i per tant $|s - t_j| < \delta_{t_j}$, i

$$\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_s - X_{t_j}| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|X_t - X_{t_j}| > \varepsilon/2) < \eta.$$

□

Finalment, doncs, es pot veure el resultat que es volia trobar.

Teorema 4.22. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés de Lévy en llei a $\mathbb{R}$. Llavors, té una modificació que és un procés de Lévy.*

Demostració. Pel teorema 4.13, el procés $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés de Markov amb funció de transició espacialment homogènia $\{P_{s,t}\}_{0\leq s\leq t<\infty}$. Per tant, per a tot $\varepsilon \in (0,\infty)$ i $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{s,t}(x, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)^{\mathrm{c}}) = P_{s,t}(0, (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathrm{c}}) = \mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon).$$

Per tant, es té $\alpha_{\varepsilon,T}(u) \xrightarrow{u \searrow 0} 0$ pel lema 4.21 i es pot aplicar el teorema anterior. □

Com s'ha avançat abans, el teorema 4.5 i el teorema 4.22 tenen com a corol·lari immediat el següent.

Corol·lari 4.23. *Per a tota llei infinitament divisible P a $\mathbb{R}$, hi ha un procés de Lévy $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ (únic llevat d'identitat en llei) tal que $P_{X_1} = P$.*

5 La descomposició de Lévy-Itô

Aquest últim capítol de la memòria està dedicat a la descomposició de Lévy-Itô, resultat que permet separar els camins mostrals d'un procés de Lévy (o més en general, d'un procés additiu) en una part contínua i una part que representa els salts. Es segueix [5].

5.1 Mesures aleatòries de Poisson

Per poder enunciar i provar la descomposició de Lévy-Itô cal definir prèviament les mesures aleatòries de Poisson i donar-ne algunes propietats bàsiques.

Definició 5.1. *Sigui* $(\Xi, \mathcal{G}, \rho)$ *un espai de mesura* σ*-finit. Una família de variables aleatòries* $\{N(G)\}_{G\in\mathcal{G}}$ *en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *amb valors a* $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ *és una mesura aleatòria de Poisson a* Ξ *amb intensitat* ρ *si*

1. *per cada* $G \in \mathcal{G}$, $N(G)$ *té llei de Poisson de paràmetre* $\rho(G)$,
2. *per a tot* $n \in \mathbb{N}$, *si* $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ *són disjunts dos a dos,* $N(G_1), \dots, N(G_n)$ *són independents, i*
3. *per a tot* ω, $N(\cdot, \omega) = N(\cdot)(\omega)$ *és una mesura a* Ξ.

Primer de tot, es dóna un teorema d'existència.

Proposició 5.2. *Per a tot espai de mesura* σ*-finit* $(\Xi, \mathcal{G}, \rho)$ *hi ha, en algun espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, una mesura aleatòria de Poisson* $\{N(G)\}_{G\in\mathcal{G}}$ *a* Ξ *amb intensitat* ρ.

Demostració. Es separarà la prova en tres casos. Primer, s'assumeix que $\rho(\Xi) = 0$. En aquest cas, es pren també $N(G)$ idènticament zero i compleix l'enunciat.

Com a segon cas, es pren mesura finita amb $\rho(\Xi) > 0$. En un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es pot construir un seguit $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.i.i.d. a Ξ de distribució $\rho/\rho(\Xi)$ i una variable aleatòria Y de Poisson amb mitjana $\rho(\Xi)$ de manera que Y i $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siguin independents. Es posa $N(G) = 0$ si $Y = 0$ i $N(G) = \sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_G(Z_j)$ si $Y \geq 1$.

És clar, així, que satisfà el punt 3 de la definició. Sigui $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ i $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ disjunts que recobreixin Ξ, a més de $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, i es defineix $n = n_1 + \dots + n_k$. Llavors,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(G_1) =& n_1, \dots, N(G_k) = n_k) \\
&= \mathbb{P}(N(G_1) = n_1, \dots, N(G_k) = n_k | N(\Xi) = n)\mathbb{P}(N(\Xi) = n) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{G_1}(Z_j) = n_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{G_k}(Z_j) = n_1\right)\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \frac{n!}{(n_1!)\dots(n_k!)}\left(\frac{\rho(G_1)}{\rho(\Xi)}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\rho(G_k)}{\rho(\Xi)}\right)^{n_k} e^{-\rho(\Xi)}\frac{(\rho(\Xi))^n}{n!} \\
&= \prod_{j=1}^{k} e^{-\rho(G_j)}\frac{(\rho(G_j))^{n_j}}{n_j!}.
\end{aligned}
$$

Sumant per $n_1, \dots, n_k$ llevat de n_j, es té $\mathbb{P}(N(G_j) = n_j) = e^{-\rho(G_j)}(\rho(G_j))^{n_j}/n_j!$, i per tant es satisfà les condicions 1 i 2.

Queda tractar el cas amb $\rho(\Xi) = \infty$. Com que ρ és σ-finita, hi ha $\Xi_1, \Xi_2, \dots \in \mathcal{G}$ que recobreixen Ξ amb $\rho(\Xi_k) < \infty$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Es defineix la mesura ρ_k per $\rho_k(G) = \rho(G \cap \Xi_k)$, que queda restringida a Ξ_k. Usant el cas anterior, es pot construir mesures aleatòries de Poisson $\{N_k(G)\}_{G\in\mathcal{G}}$ d'intensitat ρ_k. Sigui, per a tot $G \in \mathcal{G}$,

$$N(G) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k(G).$$

Es pot calcular, fàcilment,

$$\mathbb{E}(N(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(N_k(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(G) = \rho(G).$$

Ara, com la suma de variables de Poisson és Poisson amb paràmetre suma, $N(G)$ és de Poisson, si $\rho(G) < \infty$. En cas que $\rho(G) = \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_k(G) \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\rho_k(G)}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (a \wedge \rho_k(G)/2) = \infty,$$

per alguna constant $a \in (0, \infty)$. Llavors, el lema de Borel-Cantelli porta a $N(G) = \infty$ q.s. si $\rho(G) = \infty$, i es té totes les propietats de l'enunciat. $\square$

A banda de l'existència, tan sols cal donar algunes propietats bàsiques.

Proposició 5.3. *Sigui $(\Xi, \mathcal{G}, \rho)$ un espai de mesura finit i $\{N(G)\}_{G\in\mathcal{G}}$ una mesura aleatòria de Poisson a Ξ amb intensitat ρ. Sigui $f : \Xi \to \mathbb{R}$ mesurable i es defineix, per $\omega \in \Omega$,*

$$Y(\omega) = \int_{\Xi} \varphi(\xi) N(d\xi, \omega). \tag{5.1}$$

Llavors, es compleix

1. *Y és una variable aleatòria a $\mathbb{R}$ amb mesura de Poisson composta que satisfà*

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(\int_{\Xi} (e^{itf(\xi)} - 1)\rho(d\xi)\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1)(\rho \circ f^{-1})(dx)\right)$$

   per a tot $t \in \mathbb{R}$, on φ_Y és la funció característica de Y,

2. *si $\int_{\Xi} |f(\xi)|^2 \rho(d\xi) < \infty$, llavors $\mathbb{E}(|Y|^2) < \infty$ i*

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\Xi} f(\xi)\rho(d\xi),$$
$$\mathbb{V}(Y) = \int_{\Xi} |f(\xi)|^2 \rho(d\xi),$$

3. *suposant que, per $m \in \mathbb{N}$, $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}$ i posant, per $\omega \in \Omega$ i $k \in \{1, \dots, m\}$,*

$$Y_k(\omega) = \int_{G_k} f(\xi) N(d\xi, \omega),$$

   es té $Y_1, \dots, Y_m$ independents.

Demostració.

1. Com que $N(\cdot,\omega)$ no s'anul·la només en un nombre finit de punts, $Y(\omega)$ és finit. Sigui, per $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, el conjunt $C_p^n = \{x \in \mathbb{R} : 2^{-n}(p-1) < x \leq 2^{-n}p\}$. És clar que $\{C_p^n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ recobreix $\mathbb{R}$. Per cada un d'aquests conjunts, es tria $x_p^n \in C_p^n$ i es defineix $f_n : \Xi \to \mathbb{R}$ per $f_n(\xi) = x_p^n$ si $\xi \in f^{-1}(C_p^n)$. En aquest cas, per l'amplada dels intervals, es té $|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq 2^{-n}$.

   Sigui $Y_n(\omega) = \int_\Xi f_n(\xi)N(d\xi,\omega)$. Llavors,
$$|Y_n(\omega) - Y(\omega)| \leq 2^{-n}N(\Xi,\omega) \xrightarrow{n\nearrow\infty} .$$
   Com que f_n té imatge discreta, podem reescriure la integral que defineix Y_n, de manera que es té
$$Y_n(\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_p^n N(f^{-1}(C_p^n),\omega),$$
   i per tant Y_n és una variable aleatòria en $\mathbb{R}$ i té funció característica
$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}(t) &= \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left(e^{itx_p^n N^{-1}(C_p^n)}\right)\\ &= \prod_{p\in\mathbb{Z}} \exp\left((e^{itx_p^n}-1)\rho(f^{-1}(C_p^n))\right)\\ &= \exp\left(\int_\Xi (e^{itf_n(\xi)}-1)\rho(d\xi)\right).\end{aligned}$$
   Per tant, Y és una variable aleatòria a $\mathbb{R}$ i satisà la propietat que de l'enunciat, de manera que la distribució de Y és de Poisson composta.

2. De la condició de l'enunciat, es té la derivació sota el signe d'integral; i, per tant,
$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Xi (e^{itf(\xi)}-1)\rho(d\xi) &= \int_\Xi f(\xi)e^{itf(\xi)}\rho(d\xi),\\ \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\int_\Xi (e^{itf(\xi)}-1)\rho(d\xi) &= \int_\Xi (f(\xi))^2 e^{itf(\xi)}\rho(d\xi),\end{aligned}$$
   i per la connexió entre els moments i les derivades de les funcions característiques es té el resultat de l'enunciat.

3. Usant la mateixa f_n de sobre, es posa
$$Y_{n,k}(\omega) = \int_{G_k} f_n(\xi)N(d\xi,\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_p^n N(G_k \cap C_p^n).$$
   Com que $B_k \cap C_p^n$ són disjunts, per $k \in \{1,\ldots,m\}$, $p \in \mathbb{Z}$, es té $Y_{n,1},\ldots,Y_{n,m}$ independents i, com $Y_{n,k} \xrightarrow{n\nearrow\infty} Y_k(\omega)$, $Y_1,\ldots,Y_m$ són independents.

□

5.2 Enunciat de la descomposició de Lévy-Itô

La descomposició de Lévy-Itô s'enuncia en els dos teoremes d'aquesta secció, que es demostrarà a la següent. En el context dels processos additius, que és on es treballarà, s'anomena "triplets generadors" els triplets canònics $\{(\sigma_t, a_t, \nu_t)\}_{t\in 0,\infty)}$ de la llei del procés a cada instant. Estan ben definits perquè ja s'ha vist que la llei d'un procés additiu és infinitament divisible.

Es posa, per $a, b \in [0,\infty)$, $D_{a,b} = \{x \in \mathbb{R} : a < |x| \le b\}$ i $D_{a,\infty} = \{x \in \mathbb{R} : a < |x|\}$. Es posa també $H = (0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Escriurem un element $h \in H$ com $h = (s, x)$, amb $s \in (0,\infty)$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema 5.4. *Sigui $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés additiu en $\mathbb{R}$ que té $\{(\sigma_t, a_t, \nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ triplets generadors. Es defineix la mesura $\tilde{\nu}$ a H per $\tilde{\nu}((0,t] \times B) = \nu_t(B)$, amb $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sigui $\Omega_0 \subset \Omega$ amb $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tal que els camins mostrals hi són càdlàg. Es posa, per $B \in \mathcal{B}(H)$ i $\omega \in \Omega$,*

$$J(B,\omega) = \begin{cases} \#\{s \in [0,\infty) : (s, X_s(\omega) - X_{s^-}(\omega)) \in B\}, & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Llavors, $\{J(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ és una mesura aleatòria de Poisson en H amb intensitat $\tilde{\nu}$, i es compleix

1. *hi ha $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ amb $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ tal que la variable aleatòria X_t^1 donada, per a tot $\omega \in \Omega_1$, per*

$$X_t^1(\omega) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{(0,t]\times D(\varepsilon,1]} (xJ(d(s,x),\omega) - x\tilde{\nu}(d(s,x))) + \int_{(0,t]\times D(1,\infty)} xJ(d(s,x),\omega) \tag{5.2}$$

   està ben definida per $t \in [0,\infty)$ i la convergència és uniforme en t en tot interval acotat. Llavors, $\{X_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu en $\mathbb{R}$ amb triplets $\{(0, 0, \nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$,

2. *si es defineix, per cada $t \in [0,\infty)$, una variable aleatòria X_t^2 donada, per a tot $\omega \in \Omega_1$, per*

$$X_t^2(\omega) = X_t(\omega) - X_t^1(\omega),$$

   hi ha $\Omega_2 \in \mathcal{F}$ amb $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ tal que, per a tot $\omega \in \Omega_2$ el camí mostral $X_t^2(\omega)$ és continu. A més, $\{X_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu en $\mathbb{R}$ amb triplets $\{(\sigma_t, a_t, 0)\}_{t\in[0,\infty)}$, i

3. *els processos $\{X_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{X_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ són independents.*

El primer sumand de la definició de X_1 s'anomena "suma compensada de salts". $\{X_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ s'anomena "part amb salts" de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$, mentre que $\{X_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ n'és la "part contínua".

Teorema 5.5. *Amb la mateixa notació que al teorema anterior, suposi's que, per a tot $t \in (0,\infty)$, es compleix $\int_{-1}^{1} |x|\nu_t(dx) < \infty$. Es posa $a_0(t)$ per la deriva de la llei del procés a l'instant $t \in [0,\infty)$. Llavors, es compleix*

1. *hi ha $\Omega_3 \in \mathcal{F}$ amb $\mathbb{P}(\Omega_3) = 1$ tal que la variable aleatòria X_t^3 donada, per a tot $\omega \in \Omega_3$, per*

$$X_t^3(\omega) = \int_{(0,t]\times D(0,\infty)} xJ(d(s,x),\omega)$$

esà ben definida per $t \in [0,\infty)$. Llavors, $\{X_t^3\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu en $\mathbb{R}$ amb funció característica donada per

$$\varphi_{X_t^3}(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1)\nu_t(dx)\right),$$

2. *si es defineix, per cada $t \in [0,\infty)$, una cariable aleatòria X_t^4 donada, per a tot $\omega \in \Omega_3$, per*
$$X_t^4(\omega) = X_t(\omega) - X_t^3(\omega),$$
per a tot $\omega \in \Omega_2 \cap \Omega_3$, el camí mostral $X_t^4(\omega)$ és continu. A més, $\{X_t^4\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu en $\mathbb{R}$ amb funció característica donada per
$$\varphi_{X_t^4}(z) = e^{ia_0(t)z - \sigma_t{}^2 z^2/2},$$
i

3. *els processos $\{X_t^3\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{X_t^4\}_{t\in[0,\infty)}$ són independents.*

En aquest cas, $\{X_t^3\}_{t\in[0,\infty)}$ s'anomena "part amb salts" de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$, mentre que $\{X_t^4\}_{t\in[0,\infty)}$ n'és la "part contínua".

Dos corol·laris interessants de la descomposició de Lévy-Itô són els següents.

Corol·lari 5.6. *Per un procés de Lévy, la part contínua és un moviment brownià.*

Demostració. La part contínua d'un procés de Lévy $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ té triplet generador $(\sigma, a, 0)$, per certs $\sigma \in [0,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Llavors, la seva representació de Lévy-Khintxin dóna una funció característica

$$\varphi_{X_t}(z) = e^{iatz - t\sigma^2 z^2/2},$$

cosa que indica llei $\mathrm{N}(ta, t\sigma^2)$. □

Si es pren un procés de Lévy continu, doncs, es té part amb salts nul·la, i per tant el procés és igual a la seva part contínua. Així, s'ha demostrat el següent.

Corol·lari 5.7. *Un procés de Lévy de camins mostrals continus és un moviment brownià.*

5.3 Prova de la descomposició de Lévy-Itô

Per provar ambdós teoremes el que es farà és, per cada procés additiu, construir-ne un d'idèntic en llei on sí que es tingui la descomposició de Lévy-Itô, i després provar que si dos processos són idèntics en llei i un té la descomposició, l'altre també la té.

Fer-ho, però, requerirà passar per vuit lemes. Sigui, d'ara endavant, $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés additiu en $\mathbb{R}$ definit a l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb triplets canònics $\{(\sigma_t, a_t, \nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Sigui també $\tilde{\nu}$ la mesura σ-finita en H que s'ha definit just abans.

Per la proposició 5.2, hi ha un espai de probabilitat $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$ on existeix una mesura aleatòria de Poisson $\{N(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ a H amb intensitat $\tilde{\nu}$. Posem $\mathbb{E}^0$ l'esperança respecte la probabilitat $\mathbb{P}^0$.

Lema 5.8. *Hi ha $\Omega_1^0 \in \mathcal{F}^0$ amb $\mathbb{P}^0(\Omega_1^0) = 1$ tal que, per $\omega \in \Omega_1^0$ es compleix*

1. *per a tot $\varepsilon, t \in (0,\infty)$, la mesura $N(\cdot,\omega)$, restringida a $(0,t] \times D_{\varepsilon,\infty}$, no s'anul·la tan sols en un nombre finit de punts, a cada un dels quals assigna mesura u,*

2. *per a tot $s \in (0,\infty)$, es té $N(\{s\} \times D_{0,\infty},\omega) \in \{0,1\}$.*

Demostració. Per a tot $\omega \in \Omega^0$, $N(\cdot,\omega)$ té valors a $\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$. Es posa $H_{t,\varepsilon} = (0,t]\times D_{\varepsilon,\infty}$. Com $\mathbb{E}^0(N(H_{t,\varepsilon})) = \tilde{\nu}(H_{t,\varepsilon}) < \infty$, es té $\mathbb{P}^0(N(H_{t,\varepsilon}) < \infty) = 1$. Si $N(H_{t,\varepsilon},\omega) = n \in \mathbb{N}$, llavors $N(\cdot,\omega)$ restringida a $H_{t,\varepsilon}$ no és nul·la a n punts com a màxim.

Sigui $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ successions amb $t_k \xrightarrow{k\nearrow\infty} \infty$ i $\varepsilon_k \xrightarrow{k\nearrow\infty} 0$, i es posa $\Omega' = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{N(H_{t_k,\varepsilon_k}) < \infty\}$. Llavors, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$, i per tant, per a tot $\omega \in \Omega'$, $t, \varepsilon \in (0,\infty)$, es té que $N(\cdot,\omega)$ restringida a $H_{t,\varepsilon}$ no s'anul·la tan sols en un nombre finit de punts.

Sigui ara $\{N'(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ la mesura aleatòria de Poisson construïda a la prova de la proposició 5.2, amb $\Xi_1 = (0,t_1] \times D_{\varepsilon_1,\infty}$ i

$$\Xi_k = ((0,t_k] \times D_{\varepsilon_1,\infty}) \setminus ((0,t_{k-1}] \times D_{\varepsilon_k-1},\infty),$$

per $k \geq 2$. Prenent un cert Ξ_k, es posa $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les definides al segon cas de la prova. Així, si es posa $\{Z_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ per les primeres components, es té

$$\mathbb{P}^0(Z_n^1 = Z_m^1) = \int_{(0,t_k]} \mathbb{P}^0(Z_n^1 = s) P_{Z_m^1}(ds) = 0,$$

per $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Per altra banda, es té

$$\begin{aligned} \{\exists s \in (0,\infty) \text{ tal que } & N'(\Xi_k \cap (\{s\} \times D_{0,\infty})) \geq 2\} \\ & \subset \{\exists n,m \in \mathbb{N}, s \in (0,\infty) \text{ tals que } n \neq m \text{ i } Z_n, Z_m \in \{s\} \times D_{0,\infty}\} \\ & \subset \{\exists n,m \in \mathbb{N} \text{ tals que } n \neq m \text{ i } Z_n, Z_m \in \{s\} \times D_{0,\infty}\}. \end{aligned}$$

Ja s'ha vist que aquest darrer esdeveniment té probabilitat nul·la, i per tant $N'(\Xi_k\cap(\{s\}\times D_{0,\infty})) \leq 1$ per a tot $s \in (0,\infty)$ q.s. Posant $\tilde{\Xi}_k = \bigcup_{l=1}^{k} \Xi_l$ es pot provar anàlogament $N'(\tilde{\Xi}_k\cap(\{s\}\times D_{0,\infty})) \leq 1$ per a tot $s \in (0,\infty))$ q.s. Fent $k \nearrow \infty$ s'obté $N'(\{s\}\times D_{0,\infty}) \leq 1$ per a tot $s \in (0,\infty)$ q.s.

Sigui ara, per $\varepsilon \in (0,\infty)$, $Y_0 = 0$ i $Y_t = N(H_{t,\varepsilon})$ per a tot $t \in (0,\infty)$. $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu de camins mostrals esglaonats de salt enter i càdlàg. Sigui, per $k \in \mathbb{N}$, $U_k = \inf\{t \in [0,\infty) : Y_t \geq k\}$. Veure que $N(\{s\} \times D_{0,\infty}) \leq 1$ per a tot $s \in (0,\infty)$ q.s. és equivalent a veure que

$$\mathbb{P}^0(U_1 < \dots U_k < \infty) = \mathbb{P}^0(U_k < \infty)$$

per a tot $k \in \mathbb{N}$. Però aquestes probabilitats són idèntiques a les que s'ha vist construint amb $\{N'(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$. Així, queda provat l'enunciat. $\square$

D'ara endavant, per una funció f de domini $[0,\infty)$, es posarà $||f||_t = \sup_{s\in[0,t]} |f(s)|$, per a tot $t \in [0,\infty)$.

Lema 5.9. *Sigui $t \in (0,\infty)$ i $\{Z_s^j\}_{s\in[0,t]}$ processos estocàstics independents, per $j \in \mathbb{N}$, i les seves sumes denotades $S_s^0 = 0$ i $S_s^n = \sum_{j=1}^{n} Z_s^j$ per $n \in \mathbb{N}$. Suposant que, per cada $j \in \mathbb{N}$, els camins mostrals són càdlàg q.s., per a tot $\varepsilon \in (0,\infty)$ i $n \in \mathbb{N}$ es té*

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq j\leq n} ||S^j||_t > 3\varepsilon) \leq 3 \max_{1\leq j\leq n} \mathbb{P}(||S^j||_t > \varepsilon).$$

Demostració. Sigui $M_0 = 0$ i $M_k = \max_{1\leq j\leq k} ||S_j||$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Sigui $a, b \in (0,\infty)$ i $A_k = \{M_{k-1} \leq a + b < ||S^k||_t\}$ per $k \in \mathbb{N}$. Per definició, són disjunts, i $\{M_n > a + b\} = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(||S^n||_t > a) &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap \{||S^n||_t > a\}) \\
&\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap \{||S^n - S^k||_t \leq b\}) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(||S^n - S^k|| \leq b) \\
&\geq \mathbb{P}(M_n > a + b) \min_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(||S^n - S^k||_t \leq b).
\end{aligned}$$

Prenent $a = \varepsilon$ i $b = 2\varepsilon$, $\mathbb{P}(||S^n||_t > \varepsilon) \geq \mathbb{P}(M_n > 3\varepsilon)(1 - 2\max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(||S^k||_t > \varepsilon))$. En cas que aquest màxim sigui menor que $1/3$, això dóna l'enunciat. Si aquest màxim és major o igual, però, l'enunciat és evident per si sol. $\square$

Lema 5.10. *Sigui $\{S_t^n\}_{t\in[0,\infty)}$ amb $n \in \mathbb{N}$ com al lema anterior. Si*

$$\lim_{m,n\nearrow\infty} ||S^n - S^m||_t = 0 \text{ q.s.},$$

llavors hi ha un procés estocàstic $\{S_s\}_{s\in[0,t]}$ tal que els seus camins mostrals són càdlàg q.s., i

$$\lim_{n\nearrow\infty} ||S^n - S||_t = 0 \text{ q.s.}$$

Demostració. S'aplica el lema anterior a $Z_{n+1}, \ldots$, de manera que, per $m > n$,

$$\mathbb{P}(\max_{n\leq j\leq m} ||S^j - S^n||_t > 3\varepsilon) \leq 3 \max_{n\leq j\leq m} \mathbb{P}(||S^j S^n||_t > \varepsilon),$$

però es pot veure que

$$\mathbb{P}(\max_{j,k\in\{n,\ldots,m\}} ||S^j - S^k||_t > 6\varepsilon) \leq \mathbb{P}(\max_{n\leq j\leq m} ||S^j - S^n||_t > 3\varepsilon),$$

i llavors, s'obté

$$\mathbb{P}(\sup_{j,k\geq n} ||S^j - S^k||_t > 6\varepsilon) \leq 3 \sup_{j\geq n} \mathbb{P}(||S^j - S^n||_t > \varepsilon).$$

El costat dret de la darrera s'anul·la per $n \nearrow \infty$ per la premisa, i per tant es té $\lim_{n\nearrow\infty} \sup_{j,k\geq n} ||S^j - S^k||_t = 0$ q.s., i com que l'espai de funcions $D([0,t],\mathbb{R})$ és tancat sota convergència uniforme, s'obté el procés $\{S_t\}_{t\in[0,\infty)}$ desitjat. $\square$

Lema 5.11. *Sigui, per $n \in \mathbb{N}$, $Z^1, \ldots, Z^n$ v.a.i. a $\mathbb{R}$ de segon moment finit i esperança nul·la. Sigui, per $j \in \{1,\ldots,n\}$, $S^j = Z^1 + \cdots + Z^j$. Llavors, per $\varepsilon \in (0,\infty)$,*

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq j\leq n} |S^j| > \varepsilon) \leq \frac{27}{\varepsilon^2}\mathbb{E}((S^n)^2).$$

Demostració. Aplicant el lema 5.9 a $Z^j_t = Z^j$, es té

$$\mathbb{P}(\max_{1\le j\le n} |S^j| > \varepsilon) \le 3 \max_{1\le j\le n} \mathbb{P}(|S^j| > \varepsilon/3).$$

Per altra banda, es té

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S^j| > \varepsilon/3) &\le \frac{1}{(\varepsilon/3)^2}\mathbb{E}((S^j)^2)\\ &\le \frac{1}{(\varepsilon/3)^2}\mathbb{E}[(S^j)^2 + (S^n - S^j)^2]\\ &= \frac{1}{(\varepsilon/3)^2}\mathbb{E}[(S^j + (S^n - S^j))^2]\\ &= \frac{1}{(\varepsilon/3)^2}\mathbb{E}((S^n)^2),\end{aligned}$$

cosa que porta directament al resultat, unint ambdues desigualtats. □

Lema 5.12. *Per a tot* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ *amb* $\varepsilon_n \xrightarrow{n\nearrow\infty} 0$, *hi ha* $\Omega^0_2 \in \mathcal{F}^0$ *amb* $\mathbb{P}^0(\Omega^0_2) = 1$ *tal que, per* $\omega \in \Omega^0_2$, *es té, per a tot* $t \in [0,\infty)$,

$$\int_{(0,t]\times D_{\varepsilon_n,1}} x(N(d(s,x),\omega) - \tilde{\nu}(d(s,x)))$$

convergeix a una funció càdlàg uniformement en tot interval de temps acotat per $n \nearrow \infty$.

Demostració. Sigui $\varepsilon_0 = 1$ i

$$Z^n_t = \int_{(0,t]\times D_{\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1}}} x[N(d(s,x)) - \tilde{\nu}(d(s,x))],$$

per $n \in \mathbb{N}$, de camins mostrals càdlàg q.s. Si es posa $\{S^n_t\}_{t\in[0,\infty)}$ les sumes fins a n, la integral de l'enunciat és S^n_t. Té esperança nul·la i a més, per $m \in \{n+1,\dots\}$,

$$\mathbb{E}(|S^m_t - S^n_t|^2) = \int_{D_{\varepsilon_m,\varepsilon_n}} x^2\nu_t(dx)$$

per la proposició 5.3. Sigui ara $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} = ([0,t)\cap\mathbb{Q})\cup\{t\}$ una enumeració amb $r = 0$ i $r_1 = t$. Llavors,

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |S^m_s - S^n_s| > \varepsilon) = \lim_{q\nearrow\infty} \mathbb{P}(\max_{0\le j\le q} |S^m_{r_j} - S^n_{r_j}| > \varepsilon).$$

Per un cert q, es posa $\{s_n\}_{n\in\{0,\dots,q\}}$ l'ordenació ascendent de $\{r_n\}_{n\in\{0,\dots,q\}}$. Llavors,

$$S^m_t - S^n_t = \sum_{j=1}^{q} \int_{(s_{j-1},s_j]\times D_{\varepsilon_m,\varepsilon_n}} x[N(d(s,x)) - \tilde{\nu}(d(sx))].$$

La dreta és una suma de v.a.i, per la proposició 5.3, i pel lema 5.9 el límit anterior està acotat per $27\varepsilon^{-2}\int_{(0,t]\times D_{\varepsilon_m,\varepsilon_n}} x\nu_t(dx)$, que s'anul·la en fer $m,n \nearrow \infty$. Aplicant el lema 5.10, la successió dels $\{S^n_t\}_{t\in[0,\infty)}$ convergeix uniformement a tot interval acotat de temps q.s. cap algun $\{S_t\}_{t\in[0,\infty)}$ que és, per tant, càdlàg. □

Lema 5.13. *Sigui* $\{S_t^\varepsilon\}_{t\in[0,\infty)}$ *donat per*

$$S_t^\varepsilon(\omega) = \int_{(0,t]\times D_{\varepsilon,1}} x[N(d(s,x),\omega) - \tilde{\nu}(d(s,x))].$$

Hi ha $\Omega_3^0 \in \mathcal{F}^0$ *amb* $\mathbb{P}^0(\Omega_3^0) = 1$ *tal que, per a tot* $\omega \in \Omega_3^0$, $S_t^\varepsilon(\omega)$ *convergeix uniformement en tot interval de temps acotat per* $\varepsilon \searrow 0$. *Si es posa* $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ *per*

$$Y_t^1(\omega) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} S_t^\varepsilon(\omega) + \int_{(0,t]\times D_{1,\infty}} xN(d(s,x),\omega),$$

amb $\omega \in \Omega_3^0$, *llavors* $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ *és un procés additiu de triplets canònics* $\{(0,0,\nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$.

Demostració. Per a tot $f \in D([0,\infty),\mathbb{R})$, es posa $||f|| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\min\{1, \sup_{t\in[0,n]}|f(t)|\}$. Llavors, aquesta norma metritza la convergència uniforme en intervals acotats. Notem que

$$\limsup_{\varepsilon,\varepsilon'\searrow 0} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)|| = \lim_{n\nearrow\infty} \sup_{\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1/n)} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)||.$$

A més, com que la mesura $N(\cdot,\omega)$ restringida a $(0,t]\times D_{a,1}$ no s'anul·la tan sols a un nombre finit de punts, per a tot $a \in (0,\infty)$, es té

$$\sup_{\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1/n)} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)|| = \sup_{\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1/n)\cap\mathbb{Q}} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)||.$$

Es tria, per algun $n \in \mathbb{N}$, un nombre de punts $\{\varepsilon_j^n\}_{j\in 1,\dots,k_n}, \{\varepsilon_j'^n\}_{j\in 1,\dots,k_n} \subset \mathbb{Q}\cap(0,1/n)$ de manera que

$$\mathbb{P}(\sup_{\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1/n)} ||S_\cdot^\varepsilon - S_\cdot^{\varepsilon'}|| - \max_{j\in\{1,\dots,k_n\}} ||S_\cdot^{\varepsilon_j^n} - S_\cdot^{\varepsilon_j'^n}|| > 1/n) < 1/n.$$

Si es posa $\{\varepsilon_j\}_{j\in\{1,\dots,2k_n}} \subset \mathbb{Q}\cap(0,1/n)$ la reordenació de les èpsilon anteriors en ordre decreixent. Llavors, per $n \nearrow \infty$,

$$\sup_{\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1/n)} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)|| - \sup_{j,k\in J(n)} ||S_\cdot^{\varepsilon_j}(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon_k{}^n}(\omega)|| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

amb $J(n)$ el conjunt d'índexs que tenen les èpsilon dins de $(0,1/n)$. Llavors, també hi ha convergència quasi segura i

$$\limsup_{\varepsilon,\varepsilon'\searrow 0} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)|| = \limsup_{j,k\nearrow\infty} ||S_\cdot^{\varepsilon_j}(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon_k{}^n}(\omega)||, \text{ q.s.}$$

Llavors, pel lema anterior, hi ha $\Omega_3^0 \in \mathcal{F}^0$ amb $\mathbb{P}^0(\Omega_3^0) = 1$ tal que, per $\omega \in \Omega_3^0$,

$$\limsup_{\varepsilon,\varepsilon'\searrow 0} ||S_\cdot^\varepsilon(\omega) - S_\cdot^{\varepsilon'}(\omega)|| = 0.$$

Per tant, $S_\cdot^\varepsilon(\omega)$ convergeix per $\varepsilon \searrow 0$ a una funció càdlàg uniformement en tot interval de temps acotat.

Per la segona part, segons la proposició 5.3, $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ té increments independents i funció característica donada per

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_t^1}(z) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(iz\left(S_t^\varepsilon + \int_{(0,t]\times D_{1,\infty}} xN(d(s,x))\right)\right)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \exp\left(\int_{D_{\varepsilon,\infty}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbb{1}_{D_{\varepsilon,1}}(x))\nu_t(dx)\right) \\
&= \exp\left(\int_{D_{0,\infty}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbb{1}_{D_{0,1}}(x))\nu_t(dx)\right).
\end{aligned}$$

Així, $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ és additiu amb triplets $\{(0,0,\nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$. $\square$

Sigui $\{Y_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ un procés additiu a $\mathbb{R}$ amb camins mostrals continus de triplets generadors $\{(\sigma_t, a_t, 0)\}_{t\in[0,\infty)}$, que existeix, com s'ha vist anteriorment. Es construeix $\{Y_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ a Ω^0 de manera que sigui independent de $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ del lema anterior. Llavors, $\{Y_t = Y_t^1 + Y_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu de triplets generadors $\{(\sigma_t, a_t, \nu_t)\}_{t\in[0,\infty)}$.

Lema 5.14. *Hi ha $\Omega_4^0 \in \mathcal{F}^0$ amb $\mathbb{P}^0(\Omega_4^0) = 1$ tal que, per a tot $\omega \in \Omega_4^0$ i $B \in \mathcal{B}(H)$, $N(B,\omega) = \#\{s \in [0,\infty) : (s, Y_s - Y_{s^-}) \in B\}$.*

Demostració. Com que els camins de $\{Y_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$ són continus, es té, per a tot $s \in [0,\infty)$, $Y_s - Y_{s^-} = Y_s^1 - Y_{s^-}^1$. Es posa

$$V_\varepsilon^t = \int_{(0,t]\times D_{\varepsilon,\infty}} x[N(d(s,x)) - \mathbb{1}_{D_{\varepsilon,1}}(x)\tilde{\nu}(d(s,x))].$$

Sigui $\Omega_4^0 \in \mathcal{F}^0$ amb $\mathbb{P}^0(\Omega_4^0) = 1$ tal que, per a tot $\omega \in \Omega_4^0$, es compleix el lema 5.8 i $V_\varepsilon^t(\omega)$ tendeix a $Y_t^1(\omega)$ uniformement en tot interval de temps finit per $\varepsilon \searrow 0$. Llavors,

$$Y_s^1(\omega) - Y_{s^-}^1(\omega) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}(V_\varepsilon^s(\omega) - V_\varepsilon^{s^-}(\omega)).$$

Si $N(\{(s,x)\},\omega) = 1$, llavors $N(\{s\}\times D_{0,\infty},\omega) = 1$ i $V_\varepsilon^s(\omega) - V_\varepsilon^{s^-}(\omega) = x$ per ε prou petit. Per tant, $Y_s^1(\omega) - Y_{s^-}^1(\omega) = x$. Si $N(\{s\}\times D_{0,\infty},\omega) = 0$, llavors $Y_s^1(\omega) - Y_{s^-}^1(\omega) = 0$. $\square$

Es posa $x_t(f) = x(t,f) = f(t)$ per a tota $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ càdlàg, i $\mathcal{F}^D$ la σ-àlgebra generada per $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Els punts dels salts de f són numerables, però no sempre es poden numerar en ordre creixent. Per $n \in \mathbb{N}$, el nombre de salts de f tals que $f(t) - f(t^-) \in D_{1/n,1/(n-1)}$ (si $n = 1$, es pren ∞ pel terme indefinit) és finit en tot interval de temps acotat. Es denota aquests temps, ordenats, per $0 < t_{n,1}(f) < t_{n,2}(f) < \ldots$ i, si n'hi ha $k \in \mathbb{N}$, es posa $t_{n,k+1}(f) = t_{n,k+2}(f) = \cdots = \infty$.

Lema 5.15. *Per a tot $n, j \in \mathbb{N}$, $t_{n,j}(f)$ és $\mathcal{F}^D$-mesurable.*

Demostració. Per a tot $t \in [0,\infty)$, es té $t_{1,1}(f) \le t$ si, i només si, hi ha $l \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $m \in \mathbb{N}$, hi ha $r, s \in ((0,t) \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$ tals que $r < s < r + \frac{1}{m}$ i $|f(s) - f(r)| > 1 + \frac{1}{l}$. Llavors, $t_{1,1}(f)$ és $\mathcal{F}^D$-mesurable.

La prova per a tots els altres es fa de la mateixa manera, exigint que r sigui més gran que els temps anteriors. $\square$

Finalment, es disposa de totes les eines necessàries per provar el teorema 5.4 i el teorema 5.5.

Demostració del teorema 5.4. Fent servir els lemes, s'ha construït un procés additiu $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$ que té descomposició de Lévy-Itô i és idèntic en llei a $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Es provarà ara que té la mateixa descomposició.

Hi ha $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ i $\Omega_5^0 \in \mathcal{F}^0$ amb $\mathbb{P}(\Omega_0) = \mathbb{P}(\Omega_5^0) = 1$ tals que els camins mostrals de $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a Ω_0 i els de $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ a Ω_5^0 són càdlàg. Es defineix $\psi : \Omega \to D([0,\infty),\mathbb{R})$ i

$\psi^0 : \Omega^0 \to D([0,\infty),\mathbb{R})$ per

$$x_t(\psi(\omega)) = \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$
$$x_t(\psi^0(\omega)) = \begin{cases} Y_t(\omega), & \omega \in \Omega_5^0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_5^0, \end{cases}$$

fent servir la definció anterior de $x_t(f) = f(t)$. Ara, si $G \in \mathcal{F}^D$ és un cilindre a $D([0,\infty),\mathbb{R})$, es té $\mathbb{P}(\psi^{-1}(G)) = \mathbb{P}^0((\psi^0)^{-1}(G))$. Es denota aquest valor per $\mathbb{P}^D(G)$. Així, sota aquesta mesura, $\{x_t\}_{t\in[0,\infty)}$ és un procés additiu idèntic en llei amb $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$.

Es posa ara, per $f \in D([0,\infty),\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{B}(H)$,

$$j(B,f) = \#\{s \in (0,\infty) : (s, x_s(f) - x_{s^-}(f)) \in B\}.$$

Pels dos lemes anteriors, doncs, i preservant la notació, es té

$$j(B,f) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{G(k,j)}(f), \tag{5.3}$$

on

$$G(k,j) = \{f : t_{k,j}(f) < \infty, x(t_{k,j}(f),(f) - x(t_{k,j}(f)^-, f) \in B\}.$$

Com $x(t,f)$ és $(\mathcal{B}([0,\infty)) \times \mathcal{F}^D)$-mesurable, del darrer lema es té que $x(t_{k,j}(f),f)$ i $x(t_{k,j}(f),f)$ són $\mathcal{F}^D$-mesurables. Llavors, $G(k,j) \in \mathcal{F}^D$ i $j(B,f)$ és $\mathcal{F}^D$-mesurable. Llavors, $J(B,\omega) = j(B,\psi(\omega))$, per $\omega \in \Omega_0$, i del lema 5.14, $N(B,\omega) = j(B,\psi^0(\omega))$, per $\omega \in \Omega_4^0 \cap \Omega_5^0$. Així, $\{J(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$, $\{N(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ i $\{j(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ són idèntics en llei i per tant $\{J(B)\}_{B\in\mathcal{B}(H)}$ és mesura aleatòria de Poisson d'intensitat $\tilde{\nu}$.

Queda veure els tres punts del teorema, es defineix, per $f \in D([0,\infty),\mathbb{R})$,

$$u_t^\varepsilon(f) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_{t_{k,j}(f)}(f) - x_{t_{k,j}(f)^-}(f))\mathbb{1}_{G_t^\varepsilon(k,j)}(f) - \int_{D_{\varepsilon,1}} x\nu_t(dx),$$

on

$$G_t^\varepsilon(k,j) = \{f : t_{k,j}(f) \leq t, x_{t_{k,j}(f)}(f) - x_{t_{k,j}(f)^-}(f) > \varepsilon\}.$$

Com s'ha vist, tan sols un nombre finit de sumands pot no anul·lar-se. Ara, es posa

$$U_t^\varepsilon(\omega) = \begin{cases} u_t^\varepsilon(\psi(\omega)), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \notin \Omega_0. \end{cases}$$

És $\mathcal{F}^D$-mesurable, i es té, per $\omega \in \Omega_0$,

$$U_t^\varepsilon(\omega) = \int_{(0,t]\times D_{\varepsilon,\infty}} x(J(d(s,x),\omega) - \mathbb{1}_{D_{\varepsilon,1}}(x)\tilde{\nu}(d(s,x))).$$

Fent servir la definició de la prova del lema 5.14, es té $V_t^\varepsilon(\omega) = u_t^\varepsilon(\psi^0(\omega))$ per $\omega \in \Omega_4^0 - \Omega_5^0$. Si es posa $D_0 = \{f : u_t^\varepsilon(f)$ convergeix uniformement en intervals acotats per $\varepsilon \searrow 0\}$, es té

$$D_0 = \{f : \limsup_{\varepsilon,\varepsilon'} ||u_\cdot^\varepsilon(f) - u_\cdot^{\varepsilon'}(f)|| = 0\},$$

amb la norma del lema 5.13. Llavors, $D_0 \in \mathcal{F}^D$ i es troba

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U^\varepsilon(f) \text{ convergeix uniformement en intervals acotats per } \varepsilon \searrow 0) \\ &= \mathbb{P}^D(D_0) \\ &= \mathbb{P}^0(V^\varepsilon(f) \text{ convergeix uniformement en intervals acotats per } \varepsilon \searrow 0) \\ &= 1,\end{aligned}$$

pel lema 5.13. Per tant, es té $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ amb $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ amb la propietat 1 i $X_t^1(\omega)$ està ben definit per $\omega \in \Omega_1$. Es posa $X_t^1(\omega) = 0$ per $\omega \notin \Omega_1$. Sigui

$$x_t^1(f) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_t^\varepsilon(f), & f \in D_0, \\ 0, & f \notin D_0. \end{cases}$$

Com que $X_t^1(\omega) = x_t^1(\psi(\omega))$ per $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ i $Y_t^1(\omega) = x_t^1(\psi^0(\omega))$ per $\omega \in \Omega_3^0 \cap \Omega_4^0 \cap \Omega_5^0$, es té $\{X_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{x_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ additius en llei i idèntics en llei amb $\{Y_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$, cosa que prova 1.

Per provar 2 i 3, es defineix $x_t^2(f) = x_t(f) - x_t^1(f)$ per $f \in D([t,\infty), \mathbb{R})$ i, per $\omega \in \Omega$, $X_t^2(\omega) = X_t(\omega) - X_t^1(\omega)$. Llavors, per $\omega \in \Omega_2 \cap \Omega_1$, es té $X_t^2(\omega) = x_t^2(\psi(\omega))$. De la definició, però, $Y_t^2(\omega) = x_t^2(\psi^0(\omega))$ per $\omega \in \Omega_3^0 \cap \Omega_4^0 \cap \Omega_5^0$.

Per a tot $f \in D_0$, es té $x_t^2(f)$ contínua en t: si t és un punt de discontinuïtat de f, llavors $u_t^\varepsilon(f) - u_{t-}^\varepsilon(f) = x_t(f) - x_{t-}^\varepsilon(f)$ per ε prou petit, i com $x_t^2(f) - x_{t-}^1(f) = x_t(f) - x_{t-}^1(f)$ es té $x_t^2(f) = x_{t-}^2(f)$. Per tant, $X_t^2(\omega)$ és continu en t per $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, i s'ha vist doncs que la identitat en llei de $\{(X_t^1, X_t^2)\}_{t\in[0,\infty)}$, $\{(Y_t^1, Y_t^2)\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{(x_t^1, x_t^2)\}_{t\in[0,\infty)}$, i això prova la independència de $\{X_t^1\}_{t\in[0,\infty)}$ i $\{X_t^2\}_{t\in[0,\infty)}$. □

Demostració del teorema 5.5. Per un borelià B tal que $B \subset D_{\varepsilon,\infty}$ per cert $\varepsilon \in (0,\infty)$, sigui $Y'(B) = \int_{(0,t]\times B} |x| J(d(s,x))$. Per la proposició 5.3, té llei de Poisson composta i es té

$$\mathbb{E}(e^{-uY'(B)}) = \exp\left(\int_B (e^{-u|x|} - 1)\nu_t(dx)\right),$$

per $u \in (0,\infty)$. Si es tria $B = D_{\varepsilon,\infty}$, es té, fent el límit $\varepsilon \searrow 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-u \int_{(0,t]\times D_{0,\infty}} |x| J(d(s,x))\right)\right] = \exp\left(\int_{D_{0,\infty}} (e^{-u|x|} - 1)\nu_t(dx)\right),$$

i això tendeix a 1 per $u \searrow 0$, de manera que es té

$$\int_{(0,t]\times D_{0,\infty}} |x| J(d(s,x)) < \infty, \text{ q.s.}$$

Llavors, $\{X_t^3\}_{t\in[0,\infty)}$ és finit q.s., i de teorema 5.4, es té, per a tot $\omega \in \Omega$ i $t \in [0,\infty)$,

$$X_t^3(\omega) = X_t^1(\omega) + \int_{D_{0,1}} x\nu_t(dx),$$

i el procés $\{X_t^4\}(\omega)$ similarment satisfà

$$X_t^4(\omega) = X_t^2(\omega) - \int_{D_{0,1}} x\nu_t(dx),$$

de manera que s'ha obtingut totes les propietats que calia. □

6 Conclusions

En aquesta memòria s'ha estudiat les propietats bàsiques de i les relacions entre les lleis infinitament divisibles i els processos de Lévy. Això ha culminat amb la prova de dos resultats importants en el desenvolupament teòric en aquests camps, el teorema de representació de Lévy-Khintxin i la descomposició de Lévy-Itô. S'ha assolit, doncs, l'objectiu inicial del projecte d'explorar la construcció teòrica al voltant d'aquests conceptes.

Aquests dos resultats suposen un bon tancament per al treball però, evidentment, es podria anar més enllà, ja que els processos de Lévy són un camp molt ric amb múltiples capes i direccions. Per exemple, es podria estudiar la propietat de semimartingala, estudiar propietats distribucionals o aprofundir més en el cas particular de les lleis estables i els processos que hi van associats. També es podria indagar en les seves aplicacions, per exemple, en el camp de la modelització financera.

La gran major part dels coneixements que s'ha hagut de fer servir s'havien treballat prèviament en les assignatures del Grau de Matemàtiques de Probabilitats, obligatòria de tercer curs, i Probabilitats avançades, optativa de quart curs. També s'ha usat resultats tècnics d'Anàlisi complexa. Hauria estat útil cursar, també, l'optativa de quart curs de Processos estocàstics, cosa que no ha estat possible per raons d'incompatibilitat d'horaris, i per tant s'ha hagut d'aprendre al llarg del treball part dels continguts que s'hi ensenya.

Referències

[1] Applebaum, D.: *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2ª edició, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] Billingsley, P.: *Probability and Measure*, 2ª edició, John Wiley & Sons, Nova York, 1986.

[3] Feller, W.: *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, vol. II*, 2ª edició, Limusa, Ciutat de Mèxic, 1985.

[4] Klenke, A.: *Probability theory: a comprehensive course*, 2ª edició, Springer-Verlag, Londres, 2014.

[5] Sato, K.: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, 1ª edició, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[6] Vives, J.: Apunts manuscrits sobre lleis infinitament divisibles, 2006.