UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Corbes invariants en sistemes dinàmics forçats quasi-periòdicament

Autor: Fidel Salvia Jordana

Director: Dr. Àngel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2023

Abstract

When studying a dynamic System, one of the best tools we have to describe its dynamics is the study of its fixed points. But when a system is disturbed in a quasi-periodic way, these points cease to exist, so the simplest elements we are left with to study are the invariant curves. The objective of this thesis is to discuss the existence of invariant curves in quasi-periodically forced dynamic systems, as well as providing an algorithm to compute them. If the system is reducible, we will study the dynamics of said curves. To reach this goal, we require an introduction to differential calculus in Banach spaces. We will address properties that are very similar to those already known in $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, in order to prove the Theorem of implicit function in Banach spaces.

Resum

Quan estudiem un sistema dinàmic, una de les eines més útils que tenim per poder descriure la seva dinàmica és l'estudi dels seus punts fixos. Però quan es pertorba un sistema de manera quasi-periòdica, aquests punts deixen de poder existir, i els elements més senzills que ens queden per estudiar-lo són les corbes invariants. L'objectiu d'aquest treball és discutir l'existència de corbes invariants en sistemes dinàmics forçats quasi-periòdicament, així com donar un algoritme per calcular-les. En el cas que el sistema sigui reductible, s'estudiarà la dinàmica d'aquestes corbes. Per assolir aquest objectiu, requerim fer una introducció al càlcul diferencial en espais de Banach. Hi abordarem propietats molt semblants a les ja conegudes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, amb la finalitat de demostrar el Teorema de la funció implícita en espais de Banach.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agraïments

Vull agrair als meus dos bons amics, Francesc i Tricas. Aquest treball no hauria estat possible sense ells. També vull agrair al meu tutor, Àngel. No he sigut l'alumne més aplicat, però, atresoraré tot el coneixement que m'has ofert i que m'has ajudat a pair al llarg d'aquest semestre.

Índex

1 Introducció

En aquest treball ens plategem estudiar les corbes invariants dels **sistemes forçats quasi-periòdicament**, aquests són de la forma

$$\begin{cases} \overline{x} = f(x) + \varepsilon g(x,\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ paràmetre positiu, $\theta \in \mathbb{T}^r$, amb $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{T}^r$ complint $\frac{\omega_i}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ per tot $i = 1, \ldots, r$ i f i g funcions prou regulars, com ha mínim de classe $\mathcal{C}^m$. I on g és una funció quasi-periòdica respecte la variable θ.

Una corba invariant del sistema (1.1) és una funció $\varphi : \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}^n$ contínua que compleix

$$\varphi(\theta + \omega) = f(\varphi(\theta)) + \varepsilon g(\varphi(\theta), \theta) \tag{1.2}$$

Abans que res, definim bé la noció de quasi-periodicitat que usarem.

Definició 1.1. *$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és* ***quasi-periòdica de classe*** *$\mathcal{C}^m$ si existeix $r > 0$, $r \in \mathbb{N}$, existeix $\omega \in \mathbb{T}^r$ i existeix $G : \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^m$ tals que*

$$\langle k, \omega \rangle \neq 0 \ (mod\ 2\pi),$$

per tot $k \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ i tals que $g(t) = G(t\omega)$. On $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és el producte escalar usual.

Exemple 1.2. La funció

$$g(t) = cos(t) + cos(\sqrt{2}t),$$

no és periòdica però si és quasi-periòdica. Triant $r = 2$, $\omega = (1, \sqrt{2})$ i $G : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $G(\theta_1, \theta_2) = cos(\theta_1) + cos(\theta_2)$, es té $g(t) = G(\omega t)$ i

$$\langle (k_1, k_2), \omega \rangle = k_1 + \sqrt{2}k_2 \neq 0 \ (\text{mod } 2\pi)$$

per tot $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$.
Igualment per

$$g(t) = cos(t) + cos(2t) + cos(\sqrt{2}t).$$

En aquest cas triem, $G(\theta_1, \theta_2) = cos(\theta_1) + cos(2\theta_1) + cos(\theta_2)$.

Treballarem en sistemes dinàmics discrets únicament, ja que, en el cas de EDOs com la següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta_1, \cdots, \theta_{r+1}), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{r+1} = \omega_{r+1}. \end{cases}$$

Triant la secció de Poincaré $\theta_{r+1} = 0$ (mod 2π), i iterant el flux en temps $\frac{2\pi}{\omega_{r+1}}$ ens podem reduir al cas discret.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_1^0 \\ \vdots \\ \theta_r^0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_1^0 \\ \vdots \\ \theta_r^0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{en temps } \frac{2\pi}{\omega_{r+1}}]{\text{flux}} \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \theta_1^0 + \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_{r+1}} \\ \vdots \\ \theta_r^0 + \omega_r \frac{2\pi}{\omega_{r+1}} \\ 2\pi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \theta_1^0 + \widehat{\omega_1} \\ \vdots \\ \theta_r^0 + \widehat{\omega_r} \end{pmatrix}$$

El problema de trobar una corba que compleixi (1.2), és equivalent a trobar una solució de l'equació funcional següent:

$$T_\omega\varphi - F_\varepsilon\varphi = 0, \tag{1.3}$$

on $T_\omega, F_\varepsilon : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^r, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^r, \mathbb{R}^n)$, complint

$$\begin{aligned} T_\omega\varphi(\theta) &= \varphi(\theta+\omega), \\ F_\varepsilon\varphi(\theta) &= f(\varphi(\theta)) + \varepsilon g(\varphi(\theta), \theta). \end{aligned}$$

Per resoldre l'existència d'una solució de (1.3), utilitzarem el teorema de la funció implícita i donarem diversos mètodes per calcular-la numèricament al llarg del treball. Per aquest fi, necessitarem les nocions i resultats elementals del càlcul diferencial en espais de Banach.

Un cop determinada l'existència de corbes invariants, i obtinguts mètodes numèrics per calcular-les, ens preguntem si podem dir alguna cosa de la seva estabilitat. Escrivim el sistema (1.1) de la següent forma:

$$\begin{cases} \overline{x} = f(x,\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

i ens restringim al cas $r = 1$. Sigui φ_0 una corba invariant,

$$\varphi_0(\theta+\omega) = f(\varphi(\theta), \theta).$$

Fent el desenvolupament de Taylor,

$$f(\varphi(\theta) + h, \theta) = f(\varphi(\theta), \theta) + D_x f(\varphi(\theta), \theta)h + O_2(\|h\|).$$

Aleshores definit $A(\theta) = D_x f(\varphi(\theta), \theta)$ i usant la condició d'invariància, obtenim

$$f(\varphi(\theta) + h, \theta) = \varphi(\theta+\omega) + A(\theta)h + O_2(\|h\|).$$

Si h és petit, el factor $O_2(\|h\|)$ el podem ignorar. Aleshores, això ens diu que allunyant-nos un increment h petit de la corba invariant, la dinàmica en aquest punt, vindrà determinada per el sistema dinàmic lineal següent:

$$\begin{cases} \overline{h} = A(\theta)h, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega. \end{cases}$$

Ara, si podem fer un canvi $h = C(\theta)y$ prou regular, de tal manera que $\overline{h} = A(\theta)h$ és transformi en $\overline{y} = By$, on B no depèn de θ, podrem estudiar l'estabilitat de la corba a partir de B. Això no sempre ho podrem fer, però en el cas que si, direm que la corba és reductible i donarem mètodes numèrics per determinar la seva estabilitat.

2 Resultats previs

En aquesta secció, farem un repàs per els resultats i definicions que donarem per coneguts, així com alguns comentaris sobre la notació utilitzada al llarg del treball.

2.1 Espais de Banach

Al llarg del treball, $\mathbb{K}$ actuarà com el cos real $\mathbb{R}$ o el cos complex $\mathbb{C}$ indistintament. Tots els espais de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tindran $\mathbb{K}$ com ha cos base i normalment els denotarem simplement E. Utilitzarem $\|\cdot\|$ per les normes dels espais, i ometrem fer referència a l'espai al qual pertanyen, a no ser que pugui causar confusió. En aquests casos, les denotarem per $\|\cdot\|_E$, on E serà l'espai al qual pertany.

També denotarem per $B(a, r)$ la bola de centre a i radi r.

Donem per coneguts, els resultats elementals relatius als espais de Banach i s'utilitzaran al llarg del treball sense fer-los referència. També és donaran per conegudes, les nocions elementals relatives a les aplicacions contínues i lineals entre espais de Banach. Denotarem per $\mathcal{L}(E, F)$, el conjunt de totes les aplicacions contínues i lineals de l'espai E en l'espai F.

Remarquem ara, els resultats sobre $\mathcal{L}(E, F)$ que cal recordar, aquests és troben demostrats en tot detall a [1].

Teorema 2.1. *Sigui $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les següents condicions són equivalents:*

1. *f és contínua en E.*
2. *f és contínua en l'origen, 0.*
3. *$\|f(x)\|$ està acotada en $B(0, 1)$.*

Aquest teorema ens permet definir una norma a $\mathcal{L}(E, F)$;

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Amb aquesta norma, $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ és un espai de Banach. A més, ens permet acotar $\|f(x)\|$ en termes de $\|x\|$ i és el mínim factor que ho fa.

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$$

Usarem la notació $Isom(E, F)$ per referir-nos al conjunt de totes les $f \in \mathcal{L}(E, F)$ que són isomorfismes. Sabem que $Isom(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que f bijectiva $\}$.

També sabem les següents propietats de $Isom(E, F)$.

Teorema 2.2. *Siguin E i F espais de Banach, tenim*

1. *$Isom(E, F)$ és un obert en $\mathcal{L}(E, F)$.*
2. *l'aplicació $u \mapsto u^{-1}$ de $Isom(E, F)$ en $\mathcal{L}(E, F)$ és contínua.*

2.2 Aproximació de funcions periòdiques

Alhora de donar un algoritme per calcular les corbes invariants, haurem de descriure com les discretitzem. Això ho farem mitjançant un truncament de la seva sèrie de Fourier. Els nostres programes calcularan els coeficients de Fourier de la corba buscada, fins un determinat ordre. Amb aquest objectiu, utilitzarem les formules següent.

Sigui f una funció 2π-periòdica i sigui $\mathcal{P}_{2n+1}$ el subespai vectorial generat per les funcions $\frac{1}{2}$, $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$, $\ldots$, $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$. Si $2n \leq m$, la millor aproximació de f mitjançant $f^* \in \mathcal{P}_{2n+1}$, ve donada per

$$f^*(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta).$$

I s'obtenen els coeficients de Fourier, utilitzant la discretització de $[0, 2\pi)$

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{m+1}, \; i = 0, \ldots, m,$$

amb les formules següents:

$$a_0 = \frac{2}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f(\theta_i),$$
$$a_j = \frac{2}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f(\theta_i) \cos(j\theta_j),$$
$$b_j = \frac{2}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f(\theta_i) \sin(j\theta_j).$$

3 Teorema del punt fix en espais mètrics complets

El teorema del punt fix que veurem en aquesta secció ens servirà per provar el teorema de la funció implícita. També per demostrar l'existència de corbes invariants atractores, així com un mètode numèric per calcular-les.

Definició 3.1. *Sigui* (X, d) *un espai mètric i sigui* $f : X \to X$ *una aplicació, diem que* f *és una* ***contracció*** *si existeix una constant fixada* $h < 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq hd(x, y), \text{ per tot } x, y \in X.$$

Observem que per la pròpia definició, una contracció és una aplicació contínua.

Teorema 3.2. *Sigui* (X, d) *un espai mètric complet, aleshores tota contracció* $f : X \to X$ *té un únic punt fix.*

Demostració. Sigui h la constant de contracció de l'aplicació f. Primer provarem la existència construint una successió convergent al punt fix. Sigui $x_0 \in X$ un punt qualsevol, definim la successió d'iterats de f, $\{x_n\}_n$, com

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ per tot } n \in \mathbb{N}.$$

Tenim que f és una contracció, per tant

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq hd(x_{n-1}, x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Així obtenim

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq h^n d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aleshores, fixat n, per qualsevol $m > n$ tenim

$$d(x_n, x_m) \leq (h^n + \cdots + h^{m-1})d(x_0, x_1) \leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1).$$

Amb això deduïm que la successió $\{x_n\}_n$ és de Cauchy, i com l'espai X és complet tenim que és convergent. Sigui $p \in X$ tal que $x_n \to p$, com f és continua tenim

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(p).$$

Finalment provem la unicitat. Siguin p i q dos punts fixes de f, aleshores

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq hd(p, q).$$

Com $h < 1$, tenim que $p = q$. □

Corol·lari 3.3. *Sigui* (X, d) *un espai mètric complet,* $f : X \to X$ *una contracció amb constant de contracció* h *i* p *el seu punt fix. Alsehores per qualsevol* $x_0 \in X$*, considerant la successió d'iterats de* f*,* $\{x_n\}_n$*, definida com* $x_{n+1} = f(x_n)$ *per* $n \in \mathbb{N}$*. Tenim les estimacions següents:*

$$d(x_n, p) \leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1), \tag{3.1a}$$

$$d(x_n, p) \leq \frac{h}{1-h} d(x_{n-1}, x_n). \tag{3.1b}$$

Les desigualtats d'aquest corol·lari serveixen a diferents propòsits. La desigualtat 3.1a ens diu en termes de la distància entre x_0 i x_1, quants cops hem d'iterar f començant des de x_0 per estar dintre un rang de distància especifica del punt fix. Això ens serveix per acotar superiorment el temps necessari per calcular el punt fix. La desigualtat 3.1b ens diu quan a prop estem del punt fix en terme de les dos iteracions anteriors. Aquesta estimació és molt important perquè ens serveix com a criteri de parada, ja que si les dos últimes iteracions són quasi iguals vol dir que estem molt a prop del punt fix.

4 Existència i càlcul d'una corba invariant atractora

Partim del sistema (1.1), fixem $r = 1$ i imposem les condicions següents:

1. $f(0) = 0$,
2. $\|D_x f(0)\| = L < 1$.

Suposant que tant f con g són prou regulars i ε és prou petit. Aleshores ens preguntem si existeix $\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que compleix la condició d'invariància (1.2).

4.1 Existència d'una corba invariant atractora

Sota les hipòtesis anteriors, provarem que existeix una corba invariant. Per a tal fi, utilitzarem el teorema del punt fix, un cop construïda una contracció en un espai mètric complet convenient.

Definim primer en quin espai mètric treballarem. Considerem el conjunt $\mathcal{X} = \mathcal{C}_b(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$, que és el conjunt de les funcions contínues i acotades de $\mathbb{T}^1$ en $\mathbb{R}^n$. I per $\varphi \in \mathcal{X}$, utilitzem la norma

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} \|\varphi(\theta)\|_n.$$

On $\|\cdot\|_n$ és una norma en $\mathbb{R}^n$. Ja sabem que $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ és un espai de Banach i per tant, amb la distància definida per la norma, és un espai mètric complet. Notem que la φ contínua buscada, als ser $\mathbb{T}^1$ compacte, també és acotada.

Sigui $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida per

$$F\varphi(\theta) = f(\varphi(\theta - \omega)) + \varepsilon g(\varphi(\theta - \omega), \theta - \omega),$$

on $\varphi \in \mathcal{X}$ i $\theta \in \mathbb{T}^1$. El problema què volem resoldre és equivalent a trobar un punt fix de F.

Primer de tot volem que F estigui ben definida. Suposem que f és $\mathcal{C}^1$ en un entorn del $0 \in \mathbb{R}^n$, aleshores existeix un entorn obert U de 0 tal que per tot $x \in U$, $\|D_x f(x)\| \leq \widetilde{L} < 1$. Sigui ara $r > 0$ tal que $\overline{B(0,r)} \subseteq U$, aleshores definim el conjunt

$$\widetilde{B}_r = \{\varphi \in \mathcal{X} : \|\varphi\| \leq r\}.$$

Observem que $\widetilde{B}_r$ també és un espai mètric complet i anem a veure que la restricció de F en $\widetilde{B}_r$ està ben definida. Triem $\varphi \in \widetilde{B}_r$, aleshores tenim

$$\|f(\varphi(\cdot - \omega)) + \varepsilon g(\varphi(\cdot - \omega), \cdot - \omega)\| \leq \|f(\varphi)\| + \varepsilon \|g(\varphi, \cdot)\| \leq \widetilde{L}\|\varphi\| + \varepsilon \|g(\varphi, \cdot)\|.$$

En la última desigualtat hem aplicat el teorema del valor mitjà. Ara, si g és almenys contínua, com $\|\varphi\| \leq r$, tenim que $F : \widetilde{B}_r \to \widetilde{B}_r$ està ben definida.

Només ens falta veure que F és una contracció. Siguin $\varphi_1, \varphi_2 \in \widetilde{B}_r$, tenim

$$\|F\varphi_1 - F\varphi_2\| \leq \|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\| + \varepsilon \|g(\varphi_1, \cdot) - g(\varphi_2, \cdot)\|.$$

Ara si g és $\mathcal{C}^1$ respecte x en $B(0,r)$, existeix ξ_ε tal que

$$\xi_\varepsilon \geq \varepsilon \frac{\|g(\varphi_1,\cdot) - g(\varphi_2,\cdot)\|}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|}.$$

I aleshores utilitzant $\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\| \leq \widetilde{L}\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, tenim la cota

$$\|F\varphi_1 - F\varphi_2\| \leq (\widetilde{L} + \xi_\varepsilon)\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Si ε prou petit, podem garantir que $\widetilde{L}+\xi_\varepsilon < 1$. I per tant, $F : \widetilde{B}_r \to \widetilde{B}_r$ és una contracció.

4.2 Mètode numèric per calcular una corba atractora

Sota les hipòtesis donades, existeix una corba invariant. Anem ara a donar un algoritme per calcular-la.

L'algoritme ve donat per la prova del Teorema 3.2, iterant $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n) + \varepsilon g(\varphi_n,\cdot)$ i utilitzant la condició de parada donada per el Corol·lari 3.3. Alhora de calcular les iteracions, ho farem utilitzant els $2N+1$ primers coeficients de fourier i la discretització següent de $\mathbb{T}^1$,

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{2N+1}, \text{ amb } i : 0 \to 2N.$$

Inicialment començarem amb totes els coeficients iguals a 0, $\varphi_0 \equiv 0$.

Aleshores en el pas k, donats els coeficients de Fourier φ_k de φ, els utilitzem per calcular el valor de

$$F_i^k = f(\varphi(\theta_i - \omega)) + \varepsilon g(\varphi(\theta_i - \omega), \theta_i),$$

mitjançant la sèrie de Fourier discretitzada de φ. I finalment amb els punts $\{F_i^k\}_i$, calculem mitjançant les formules discretitzades dels coeficients de Fourier, els coeficients de φ_{k+1}.

Aquest procès el repetim fins què els dos últims iterats siguin molt propers. Això ho determinarem mitjançant la norma de la diferència dels seus coeficients de Fourier.

5 Càlcul diferencial en espais de Banach

L'objectiu d'aquesta secció és dotar-nos de les eines necessaris del càlcul diferencial en espais de Banach per tal de poder provar l'existència de corbes invariants mitjançant el teorema de la funció implícita.

Al llarg de la secció considerarem E i F dos espais de Banach arbitraris amb cos base $\mathbb{K}$ i amb normes $\|\cdot\|_E$ i $\|\cdot\|_F$ respectivament. I un subconjunt $U \subseteq E$ obert i no buit.

5.1 Definició de derivada

Definició 5.1. *Siguin $f, g : U \to F$ aplicacions. Donat un punt $a \in U$, es diu que f i g són* ***tangents*** *en a si el valor*

$$m(r) = \sup_{\|x-a\|_E \le r} \|f(x) - g(x)\|_F,$$

definit per $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq U$, satisfà la condició

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m(r)}{r} = 0. \tag{5.1}$$

Observem que fixat un punt $a \in U$, la relació "*f i g són tangents en a*" és d'equivalència. Això es dedueix ràpidament de les propietats elementals de les normes.
També, si f i g són tangents en a aleshores la funció $f - g$ és contínua en a, on pren el valor 0. Per tant, la continuïtat en el punt a de f és equivalent a la continuïtat en el punt a de g.

Definició 5.2. *Siguin $f : U \to F$ i $a \in U$. Es diu que f és* ***diferenciable*** *en a si compleix:*

1. *f és contínua en a.*

2. *Existeix una aplicació $g : E \to F$ lineal tal que les aplicacions $x \mapsto f(x) - f(a)$ i $x \mapsto g(x - a)$ són tangents en a.*

Si f és diferenciable en el punt a, g és única i s'escriu $f'(a)$. Se l'anomena la ***derivada*** *de f en el punt a. A més, $f'(a) \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Amb aquesta notació, la condició què ha de complir $f'(a)$ s'escriu:

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)\|_F = o(\|x - a\|_E) \tag{5.2}$$

Anem ara a provar les afirmacions què s'han fet en la definició anterior. Per això necessitarem el següent lema.

Lema 5.3. *Sigui $g : E \to F$ una aplicació lineal i $a \in U$, si $g(x - a)$ i 0 són tangents en a aleshores g és idènticament nul·la.*

Demostració. Sigui $g : E \to F$ una aplicació lineal, com $\|g\|= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|g(x)\|$, tenim

$$m(r) = \sup_{\|x-a\|_E \leq r} \|g(x-a)\| = \sup_{\|x\|_E \leq r} \|g(x)\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|g(rx)\| = r\|g\|.$$

I per tant, si $\frac{m(r)}{r} \to 0$ quan $r \to 0^+$, es té $\|g\|= 0$. $\square$

Ara, suposem que existeixen $g, g^* : E \to F$ lineals tals que, tant $g(x-a)$ com $g^*(x-a)$ són tangents a $f(x) - f(a)$ en el punt a. Per ser relació d'equivalència, tenim que $g(x-a) - g^*(x-a)$ i 0 són tangents en a, per tant $g - g^*$ és idènticament nul·la. A més, com al ser $f'(a)$ lineal, la seva continuïtat en el 0, implica la continuïtat a tota reu. Per tant, si f diferenciable en a, $f'(a) \in \mathcal{L}(E; F)$.

Un cop donada la noció de derivada, anem a veure amb dos exemples que aquesta, no es tan diferien de la que ja coneixíem en $\mathbb{R}$.

Exemple 5.4. Sigui ara $E = \mathbb{R}$ i F un espai de Banach amb cos base $\mathbb{R}$. Tenint en compte que l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : & F \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \\ & x \mapsto Px \end{aligned}$$

on $Px : \mathbb{R} \to F$ està definida per $Px(\lambda) = \lambda x$, és una isometria entre F i $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$, anomenem a aquesta isometria, la **isometria natural**. Aleshores donada una aplicació $f : U \subseteq \mathbb{R} \to F$, usant la isometria entre F i $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$, f és diferenciable en el punt a si existeix un element $c \in F$ tal que

$$\|f(x) - f(a) - (x-a)c\|_F = o(|x-a|).$$

Això és equivalent a què el límit següent existeixi i sigui c.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Amb aquest exemple, observem que la definició que hem fet de derivada, respecta a la ja coneguda per funcions de variable real amb valors a un espai de Banach F.

Ara, si representem aquest límit c per $f'(a)$, l'aplicació lineal $P_{f'(a)}(\lambda) = \lambda f'(a)$, és l'element que l'hi correspon en la isometria natural.

Exemple 5.5. Considerem l'espai de Banach format per les aplicacions continues de $\mathbb{T}^1$ a $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{X} = \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$, amb la norma del suprem $\|\cdot\|$. Sigui $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, volem calcular la derivada de l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} F \colon & \mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ & \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

Fixada $\varphi_0 \in \mathcal{X}$, busquem $DF(\varphi_0) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ lineal i contínua, complint

$$\frac{\|F(\varphi_0 + h) - F(\varphi_0) - DF(\varphi_0)(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ quan } \|h\| \to 0,$$

on $h \in \mathcal{X}$ no nul·la però amb norma petita. Escollim

$$\begin{aligned} DF(\varphi_0)\colon \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ \varphi &\mapsto D_x f(\varphi_0(\cdot))\varphi \end{aligned}$$

Clarament és lineal i contínua. A més, fent el desenvolupament de Taylor tenim

$$f(\varphi_0(\theta) + h(\theta)) - f(\varphi_0(\theta)) - D_x f(\varphi_0(\theta))h(\theta) = O_2(h(\theta)).$$

Per tant $DF(\varphi_0)$ és la derivada de F en el punt φ_0.

Definició 5.6. *Es diu que $f : U \to F$ és **diferenciable** si ho és en tot punt de U. En aquest cas, definim $f' : U \to \mathcal{L}(E; F)$ com l'**aplicació derivada** de l'aplicació diferenciable $f : U \to F$.*

Definició 5.7. *Es diu que $f : U \to F$ és **diferenciable amb continuïtat** o de classe $\mathcal{C}^1$, si compleix:*

1. *f és diferenciable.*

2. *L'aplicació derivada $f' : U \to \mathcal{L}(E; F)$ és contínua.*

Amb la següent proposició, veurem que la derivada és invariant per canvis de normes en els espais de Banach E i F, per altres normes equivalents.

Proposició 5.8. *Sigui $f : U \to F$ diferenciable en el punt $a \in U$. Siguin $\|\cdot\|_E$ i $\|\cdot\|_F$ les normes de E i F respectivament i siguin respectivament $|\cdot|_E$ i $|\cdot|_F$ normes equivalents. Aleshores f també és diferenciable segons les normes $|\cdot|_E$ i $|\cdot|_F$ i la seva derivada és la mateixa.*

Demostració. Sigui $f'(a) \in \mathcal{L}(E; F)$ derivada en el punt a de f i sigui $x \in U$ tal que $x \neq a$. Com $\|\cdot\|_E$ i $|\cdot|_E$ són equivalents, es té

$$\frac{1}{|x-a|_E} \leq M \frac{1}{\|x-a\|_E}$$

amb $M \in \mathbb{R}$ fixat. D'igual manera, com $\|\cdot\|_F$ i $|\cdot|_F$ són equivalents, es té també

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|_F \leq N \|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|_F$$

amb $N \in \mathbb{R}$ fixat. Aleshores

$$\frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|_F}{|x-a|_E} \leq NM \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E}$$

Per hipòtesis

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0.$$

Per tant $f'(a)$ també és la derivada en el punt a amb les normes equivalents $|\cdot|_E$ i $|\cdot|_F$. $\square$

5.2 Propietats de la derivada

A partir d'ara, ens referirem a G com un altre espai de Banach amb norma $\|\cdot\|_G$ i considerarem un subconjunt $V \subseteq F$ obert i no buit.

Teorema 5.9. *Siguin $f : U \to F$ i $g : V \to G$ contínues i sigui $a \in U$. Suposem $f(a) \in V$, f diferenciable en a i g diferenciable en $f(a)$, aleshores l'aplicació composició $h = g \circ f$ és diferenciable en el punt a i compleix*

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Demostració. Com $f(a) \in V$, tenim que $f^{-1}(V) \subseteq U$ és un obert de E que conté a. En l'obert $U' = f^{-1}(V)$ està definida l'aplicació composició $h = g \circ f : U' \to G$, que és contínua.
Aleshores sigui

$$\varphi(x-a) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

i sigui

$$\psi(y - f(a)) := g(y) - g(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a)).$$

Per hipòtesis, $\|\varphi(x-a)\|_F = o(\|x-a\|_E)$ i $\|\psi(y-f(a))\|_G = o(\|y - f(a)\|_F)$.

Triem $y = f(x)$, i com $h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a))$, obtenim

$$h(x) - h(a) = \psi(f(x) - f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)).$$

Ara com $g'(f(a))$ és lineal i $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varphi(x-a)$, tenim

$$h(x) - h(a) = (g'(f(a)) \circ f'(a))(x-a) + g'(f(a))(\varphi(x-a)) + \psi(f(x) - f(a)).$$

És suficient veure que tant $g'(f(a))(\varphi(x-a))$ com $\psi(f(x) - f(a))$ són tangents a 0 en a.

Com

$$\|g'(f(a))(\varphi(x-a))\|_F \leq \|g'(f(a))\| \|\varphi(x-a)\|_F,$$

i com $\|\varphi(x-a)\|_F = o(\|x-a\|_E)$, aleshores $g'(f(a))(\varphi(x-a))$ és tangent a 0 en a. Per altra banda,

$$\|\psi(f(x) - f(a))\|_G = o(\|f(x) - f(a)\|_F),$$

i per $\|x-a\|_E$ prou petit i $M > \|f'(a)\|$ prou gran, tenim

$$\|f(x) - f(a)\|_F = \|f'(a)(x-a) + \varphi(x-a)\|_F \leq \|f'(a)\| \|x-a\|_E + \|\varphi(x-a)\|_F \leq M\|x-a\|_E.$$

Per tant, $\psi(f(x) - f(a))$ tangent a 0 en a i aleshores

$$h(x) - h(a) = (g'(f(a)) \circ f'(a))(x-a) + \phi(x-a),$$

amb $\|\phi(x-a)\|_G = o(\|x-a\|_E)$. Per tant, h és diferenciable en a amb derivada $g'(f(a)) \circ f'(a)$. □

Proposició 5.10. *Siguin $f, g : U \to F$ dos aplicacions diferenciables en $a \in U$, aleshores $h = f + g$ també és diferenciable en a i compleix*

$$h'(a) = f'(a) + g'(a).$$

I també per $\lambda \in \mathbb{K}$, l'aplicació $k = \lambda f$ és diferenciable en a i compleix

$$k'(a) = \lambda f'(a).$$

Per tant, el conjunt de totes les aplicacions de U en F diferenciables en el punt a és un subespai vectorial i l'aplicació $f \mapsto f'(a)$ és una aplicació lineal d'aquest subespai en $\mathcal{L}(E; F)$.

Aquest resultat és prova directament a partir de les propietats elemental de les normes.

Proposició 5.11. *Sigui $f : U \to F$ una aplicació constant, aleshores f és diferenciable i la seva derivada és idènticament nul·la en tot punt $a \in U$.*

Demostració. Clarament la funció constant a 0 és tangent a $0 = f(x) - f(a)$ en a, per tot $a \in U$. □

Proposició 5.12. *Sigui $f : U \to F$ una restricció d'una aplicació lineal contínua $f^* : E \to F$, aleshores f és diferenciable i $f'(a) = f^*$ per tot $a \in U$.*

Demostració. Sigui $a \in U$, per $\|x - a\|_E \leq r$ i $B(a, r) \subseteq U$ tenim $f(x - a) = f^*(x - a) = f^*(x) - f^*(a)$, i clarament $f(x) - f(a)$ és tangent a $f^*(x) - f^*(a) = f(x) - f(a)$ en a, i això val per qualsevol $a \in U$. □

5.3 Derivades parcials

Suposem ara que l'espai F és producte d'un nombre finit d'espais de Banach,

$$F = F_1 \times \cdots \times F_m.$$

Per cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ considerem la projecció $p_j : F \to F_j$, i la injecció canònica $u_j : F_j \to F$ definida per $u_j(x_j) = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$.

Clarament, p_j i u_j són aplicacions lineals i contínues, i a més a més compleixen

$$\begin{cases} p_j \circ u_j = Id_{F_j}, \\ \sum_{j=1}^{m} u_j \circ p_j = Id_F. \end{cases} \tag{5.3}$$

Proposició 5.13. *Amb la notació anterior, sigui $f : U \to F$ contínua. Aleshores, f és diferenciable en el punt $a \in U$, si i només si, per cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, la funció $f_j = p_j \circ f : U \to F_i$ és diferenciable en el punt a. A més, en aquest cas*

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{m} u_j \circ f_j'(a).$$

Demostració. Suposem primer que f diferenciable en a. Per la proposició 5.12 les aplicacions p_j i u_j al ser lienals i contínues són diferenciables i per el teorema 5.9, $f_j = p_j \circ f$ és diferenciable per composició d'aplicacions diferenciables. Amb $f_j'(a) = p_j \circ f'(a) \in \mathcal{L}(E; F_j)$

Recíprocament, suposem que per tot $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j és diferenciable. Aleshores per la segona propietat de (5.3) tenim

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \circ p_j \circ f = f.$$

Per tant, $f = \sum_{j=1}^{m} u_j \circ f_j$ és diferenciable al ser suma i composició d'aplicacions diferenciables (proposició 5.10 i teorema 5.9).

I en aquest cas, com la derivada de u_j és ella mateixa, tenim

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{m} u_j \circ f_j'(a)$$

□

De forma semblant, suposem ara que l'espai E és el producte d'un nombre finit d'espais de Banach,

$$E = E_1 \times \cdots \times E_n.$$

I sigui F un espai de Banach, U un obert no buit de E, $f : U \to F$ una aplicació contínua i per cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ considerem la injecció $\lambda_i : E_i \to E$ definida per

$$\lambda(x_i) = (a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Definició 5.14. *Anomenem a $f \circ \lambda_i$ la **i-èsima aplicació parcial** en el punt a. Aquesta aplicació composta està definida en l'obert $(\lambda_i)^{-1}(U) \subseteq E_i$, que conté $a_i \in E_i$.*

Proposició 5.15. *Amb la notació anterior, si f és diferenciable en el punt a, aleshores per cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'aplicació parcial $f \circ \lambda_i$ és diferenciable en el punt a_i. Denotarem per $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, o per $f'_{x_i}(a)$, la derivada d'aquesta aplicació parcial en el punt a, és un element de $\mathcal{L}(E_i; F)$ i l'anomenem **derivada parcial** de f respecte x_i. I a més,*

$$f'(a)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i),$$

per $(h_1, \ldots, h_n) \in E$.

Demostració. Sigui $u_i : E_i \to E$ la injecció canònica, tal i com s'ha definit anteriorment. Clarament es té

$$\lambda_i(x_i) = a + u_i(x_i - a_i),$$

i també

$$\lambda_i'(x_i) = u_i.$$

Aleshores, si f diferenciable en el punt a, $f \circ \lambda_i$ també ho és i $(f \circ \lambda_i)'(a) = f'(a) \circ u_i$ (teorema 5.9).

A més, per (5.3) tenim,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i = Id_E.$$

Compostant a banda i banda per $f'(a)$ obtenim

$$\sum_{i=1}^{n}(f'(a) \circ u_i) \circ p_i = f'(a).$$

Com $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \circ u_i$, tenim la igualtat buscada. $\square$

Finalment combinem les dos situacions anteriors, suposem alhora que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ i $F = F_1 \times \cdots \times F_m$.

Sigui U obert no buit de E i sigui $f : U \to F$ diferenciable en el punt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Aleshores les $f_i = p_i \circ f$ són diferenciables en el punt a, i per tant, existeixen les derivades parcials $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i; F_j)$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$. A més,

$$f'(a) = \sum_{i,j} u_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i. \tag{5.4}$$

Per tant, l'aplicació lineal $f'(a)$ està determinada per la matriu de m files i n columnes de les $(\partial f_j / \partial x_i)(a)$.

A més, sigui $G = G_1 \times \ldots \times G_p$ espai de Banach i una aplicació contínua g d'un obert $V \subseteq G$ en $U \subseteq E$, diferenciable en un punt $b \in V$ tal que $g(b) = a$. Considerem la composició $h = f \circ g : V \to F$. Aleshores tenim

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(b) = (h_j \circ \lambda_k)'(b_k) = h_j'(b) \circ u_k = p_j \circ h'(b) \circ u_k = p_j \circ f'(a) \circ g'(b) \circ u_k.$$

Ara usant la igualtat (5.4) en $f'(a)$ i $g'(b)$ i usant que u_i i p_i són lineals i compleixen que $p_t \circ u_i = 0$ si $t \neq i$ i $p_i \circ u_i = Id$, tenim

$$p_j \circ f'(a) \circ g'(b) \circ u_k = \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_t}(a) \circ \frac{\partial g_t}{\partial y_k}(b).$$

Per tant, la matriu de derivades parcials de l'aplicació composta, és el producte de les matrius de les derivades parcials de les aplicacions de la composició.

5.4 Difeomorfismes de classe $\mathcal{C}^1$

Recuperem E i F com espais de Banach qualsevol i U i V oberts no buits de E i F respectivament.

Definició 5.16. *Es diu que $f : U \to V$ és un **difeomorfisme de classe** $\mathcal{C}^1$ si compleix:*

1. *f és bijectiva,*
2. *f considerada com una aplicació de U en F és de classe $\mathcal{C}^1$ i*
3. *l'aplicació inversa $f^{-1} : V \to E$ és de classe $\mathcal{C}^1$.*

Proposició 5.17. *Sigui $f : U \to V$ un homeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$. Aleshores f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ si i només si, per tot $x \in U$, $f'(x) \in Isom(E, F)$.*

Per provar la proposició utilitzarem el lema següent:

Lema 5.18. *Sigui $f : U \to V$ un homeomorfisme i $a \in U$ tal que f és diferenciable en a. Aleshores $g = f^{-1}$ és diferenciable en el punt $b = f(a) \in V$ si i només si, $f'(a) \in Isom(E, F)$. A més, en aquest cas*

$$g'(b) = (f'(a))^{-1}.$$

Demostració. Suposem primer que g és diferenciable en el punt b. Aleshores per el teorema 5.9 tenim

$$g'(b) \circ f'(a) = Id_E \text{ i } f'(a) \circ g'(b) = Id_F.$$

Per tant, $f'(a)$ és un isomorfisme de E en F, i $g'(b)$ el seu invers.
Suposem ara que $f'(a) \in Isom(E, F)$ i sigui

$$\varphi(x - a) := f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Com f diferenciable en el punt a, $\|\varphi(x - a)\|_F = o(\|x - a\|_E)$. Ara aplicant $(f'(a))^{-1}$ i escrivint $y = f(x)$ tenim

$$(f'(a))^{-1}\varphi(x - a) = (f'(a))^{-1}(y - b) - x + a. \tag{5.5}$$

Com $g(y) = x$ i $g(b) = a$, només cal provar que $\|(f'(a))^{-1}\varphi(x-a)\|_E = o(\|y-b\|_F)$. Ara, per la igualtat (5.5) i per ser $(f'(a))^{-1}$ contínua tenim

$$\|(f'(a))^{-1}\|\|y - b\|_F \geq \|(f'(a))^{-1}\varphi(x - a)\|_E - \|x - a\|_E.$$

Com $(f'(a))^{-1}$ a més és lineal, $\|(f'(a))^{-1}\varphi(x - a)\|_E = o(\|x - a\|_E)$. D'aquí deduïm que $o(\|y - b\|_F) \leq o(\|x - a\|_E)$, tenint així el resultat buscat. $\square$

Un cop demostrat el lema, provem la proposició 5.17. Observem que és suficient provar que si per tot $x \in U$, $f(x) \in Isom(E, F)$ aleshores $g = f^{-1}$ és de classe $\mathcal{C}^1$, és a dir, que l'aplicació $g' : V \to \mathcal{L}(F; E)$ definida per $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ és contínua. Però aquesta és composició d'aplicacions contínues i per tant contínua.

5.5 Teorema de l'aplicació inversa local

Teorema 5.19. *Sigui $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ i sigui $a \in U$. Suposem que*

$$f'(a) \in Isom(E, F).$$

Aleshores existeix un entorn obert $U_1 \subseteq U$ de a i un entorn obert $V \subseteq F$ de $b = f(a)$ tals que f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U_1 en V.

Demostració. Sota les hipòtesis del teorema, l'aplicació lineal $(f'(a))^{-1}$ va de F en E. Aleshores, fixat $y \in F$ considerem l'aplicació següent,

$$\begin{aligned} \widetilde{f} \colon U &\to E \\ x &\mapsto (f'(a))^{-1}(f(x) - y) \end{aligned}$$

Per el Teorema 5.9, al ser composició d'aplicacions diferenciables, $\widetilde{f}$ és diferenciable en a.

Ara fixat $y \in F$, definim $\varphi(x) = x - \widetilde{f}(x)$, aplicació de U en E. Volem provar que és una contracció.
Considerem $r > 0$ prou petit tal que $B(a,r) \in U$. Sigui $x_1, x_2 \in B(a,r)$, tenim

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|_E \leq \|\varphi(x_1) - \varphi(a)\|_E + \|\varphi(x_2) - \varphi(a)\|_E$$

i per $x \in B(a,r)$, com $(f'(a))^{-1}$ isomorfisme,

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi(a)\|_E &= \|x - a - \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(a)\|_E = \|x - a - (f'(a))^{-1}(f(x) - f(a))\|_E = \\ &= \|-(f'(a))^{-1}(-f'(a)(x-a) + f(x) - f(a))\|_E \leq \\ &\leq \|(f'(a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)}\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|_E.\end{aligned}$$

Com f diferenciable en a, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $r > 0$ prou petit tal que

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|_E \leq \varepsilon\|x - a\|_E, \text{ per } \|x-a\|_E = r.$$

Usant les desigualtats anteriors, per $1 > \varepsilon > 0$ si r és prou petita tenim,

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|_E \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|_E$$

Fixat $r > 0$ tal que $\varphi : B(a,r) \to E$ sigui una contracció, volem veure que $\varphi(B(a,r)) \subseteq B(a,r)$. Utilitzarem un raonament sembla al usat per provar que φ és una contracció, en aquest cas imposarem condicions sobre $r' > 0$, on r' compleix que $y \in B(b,r') \subseteq F$, amb $b = f(a)$. Fixat $x \in B(a,r)$, tenim

$$\|\varphi(x) - a\|_E = \|x - a - (f'(a))^{-1}(f(x) - y)\|_E \leq \|(f'(a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)}\|f(x) - y - f'(a)(x-a)\|_E.$$

Si r' és prou petit, podem garantir que

$$\|\varphi(x) - a\|_E \leq M_{r'}\|x - a\|_E, \text{ amb } M_{r'} \leq 1.$$

I per tant, $\|\varphi(x) - a\|_E \leq r$. Aleshores, fixats $r, r' > 0$ prou petits, per el teorema 3.2, donat $y \in B(b,r')$, existeix un únic $x \in B(a,r)$ tal que

$$x = x - (f'(a))^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Abans de continuar, necessitem provar la desigualtat (5.6). Donats $x_1, x_2 \in B(a,r)$, es té

$$\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2) = (x_1 - x_2) - (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)),$$

i tenint en compte que φ és una contracció amb paràmetre de contracció h, obtenim

$$\|\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2)\|_E \geq (1-h)\|x_1 - x_2\|_E \tag{5.6}$$

Introduïm ara la següent notació. Per $y \in B(b,r')$, és representa per $g(y)$ l'únic $x \in B(a,r)$ tal que $f(x) = y$. Definint d'aquesta forma una aplicació

$$g : B(b,r') \to B(a,r).$$

La desigualtat (5.6) ens diu que, si $y_1, y_2 \in B(b,r')$, es té

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq \frac{\|(f'(a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,F)}}{1-h}\|y_1 - y_2\|.$$

Això ens diu que g és contínua. Sigui $U_0 = f^{-1}(B(b,r'))$, com f contínua, $U_0 \subseteq B(a,r) \subseteq E$ obert. Aleshores les aplicacions

$$f\colon U_0 \to B(b,r')$$
$$g\colon B(b,r') \to V$$

són bijectives i recíproques una de l'altra, com són contínues es tracta d'homeomorfismes.

Ara, com $f'(x)$ existeix per tot $x \in U_0$, aleshores existeix un entorn obert $U_1 \subseteq U_0$ tal que $f'(x) \in Isom(E,F)$, ja que $Isom(E,F)$ és un obert de $\mathcal{L}(E,F)$. També $V = f(U_1)$ és un obert. Aleshores estem en condicions d'aplicar la proposició 5.17, el que ens permet concloure que f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U_1 en V.
Hem demostrat doncs, el teorema. □

Corol·lari 5.20. *$f : U \to F$, de classe $\mathcal{C}^1$ és difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U a un obert de F, si i només si és compleix:*

1. *f és injectiva i*
2. *$f'(x) \in Isom(E,F)$ per a tot $x \in U$.*

Demostració. Només ens cal provar la implicació recíproca. A partir del teorema 5.19, la condició *2.* implica que $f : U \to F$ és una aplicació oberta. Ara si provem que f és un homeomorfisme de U en $f(U)$, utilitzant la proposició 5.17, sabrem que f és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U en $f(U)$. Però, usant la condició *1.*, f és una bijecció de U en $f(U)$ i a més és contínua i oberta. Aleshores f és un homeomorfisme de U en $f(U)$. □

5.6 Teorema de l'aplicació implícita

Teorema 5.21. *Siguin E, F i G espais de Banach, $U \subseteq E \times F$ obert i*

$$f\colon U \to G$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

de classe $\mathcal{C}^1$. Suposem $f(a,b) = 0$ i que la derivada parcial

$$f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(F,G)$$

és un isomorfisme de F en G. Aleshores existeix un entorn obert $U_0 \subseteq U$ de (a,b), existeix un entorn obert $U_1 \subseteq U$ de a i existeix

$$g\colon U_1 \to F$$

de classe $\mathcal{C}^1$ tals que,

$$(x,y) \in U_0 \text{ i } f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in U_1 \text{ i } y = g(x). \tag{5.7}$$

Demostració. Utilitzarem el teorema de la funció inversa. Primer, considerem l'aplicació

$$\widetilde{f}\colon U \to E \times G$$
$$(x,y) \mapsto (x, f(x,y)).$$

$\widetilde{f}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ ja que les seves components ho són. I la seva derivada en (a, b), $\widetilde{f}'(a, b)$, està definida mitjançant la matriu:

$$\begin{pmatrix} Id_E & 0 \\ f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{pmatrix}.$$

Aleshores, $\widetilde{f}'(a, b)$ és l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} E \times F &\to E \times G \\ (x, y) &\mapsto (x, f'_x(a, b)(x) + f'_y(a, b)(y)). \end{aligned}$$

Com $f'_y(a, b) \in Isom(E, F)$, $\widetilde{f}'(a, b)$ és un isomorfisme amb recíproc

$$\begin{aligned} E \times G &\to E \times F \\ (x, z) &\mapsto (x, (f'_y(a, b))^{-1}(z) - ((f'_y(a, b))^{-1} \circ f'_x(a, b))(x)). \end{aligned}$$

Apliquem a $\widetilde{f}$, en l'entorn del punt $(a, b) \in U$, el teorema 5.19. Això ens permet afirmar el següent:

Existeix un entorn obert $U_0 \subseteq U$ de (a, b) i existeix un altre entorn obert $W \subseteq E \times G$ de $(a, 0) = \widetilde{f}(a, b)$, tals que $\widetilde{f}$ és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U_0 en W.

Sigui $\widetilde{g}$ el difeomorfisme recíproc, aquest té la forma

$$\widetilde{g}(x, z) = (x, g(x, z)),$$

amb $(x, z) \in W$. Això defineix la funció $g \colon W \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Com $\widetilde{f}$ i $\widetilde{g}$ homeomorfismes recíprocs,

$$(x, y) \in U_0 \text{ i } f(x, y) = z \Leftrightarrow (x, z) \in W \text{ i } g(x, z) = y. \tag{5.8}$$

Triem ara $z = 0$ en aquesta relació. Si identifiquem E amb un subespai de $E \times F$, identificant $x \in E$ amb $(x, 0) \in E \times F$, la relació $(x, 0) \in W$, ens diu que x pertany a la intersecció de W amb E. Aquesta intersecció és un obert $U_1 \subseteq E$, que conté a, ja que W conté $(a, 0)$. Escrivint

$$g(x) = g(x, 0).$$

Es té una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en l'obert U_1. Aleshores la relació (5.8) és convertix en en la relació (5.7) de l'enunciat. □

Com ha últim cometari, es té que si E és connex, l'aplicació implícita g del teorema, és única. Aquest resultat no el provarem, però és pot trobar un principi de la demostració en [1].

6 Existència de corbes invariants

Partim del sistema (1.1), fixem $r = 1$ i solament imposem que $f(0) = 0$. Suposem que tant f com g són prou regulars i ε prou petit, aleshores ens preguntem sota quines condicions existeix $\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que compleix la condició d'invariància (1.2). Utilitzarem el teorema de la funció implícita per aquests fi.

Usarem el mateix espai que en el cas de corba atractora, $\mathcal{X} = \mathcal{C}_b(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$, amb la norma del suprem $\|\cdot\|$. Definim la aplicació següent

$$\begin{aligned} H\colon \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathcal{X} \\ (\varphi, \varepsilon) &\mapsto T_\omega\varphi - F_\varepsilon\varphi. \end{aligned}$$

On $T_\omega, F_\varepsilon : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, definides per

$$\begin{aligned} T_\omega\varphi(\theta) &= \varphi(\theta + \omega), \\ F_\varepsilon\varphi(\theta) &= f(\varphi(\theta)) + \varepsilon g(\varphi(\theta), \theta). \end{aligned}$$

Primerament hem de veure que H és de classe $\mathcal{C}^1$. Clarament T_ω és lineal i contínua, per tant és diferenciable amb derivades parcials

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}T_\omega(\varphi, \varepsilon) = T_\omega \text{ i } \frac{\partial}{\partial\varepsilon}T_\omega(\varphi, \varepsilon) = 0.$$

Anem a calcular ara les derivades parcials de F_ε. Triant $g(\varphi) = Df(\varphi)$, tenim

$\|F_0\varphi_1 - F_0\varphi_2 - g(\varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)\| = \|f(\varphi_1) - f(\varphi_2) - Df(\varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)\|$, per $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{X}$.

Per tant, $\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varepsilon(\varphi) = Df(\varphi)$. A més, es veu fàcilment que $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F_\varepsilon(\varphi)(\lambda) = \lambda g(\varphi, \cdot)$.

Per tant, H és diferenciable i H' és contínua.

Ara, com $f(0) = 0$, associant 0 a $\{0\} \times \mathbb{T}^1$, tenim que $H(0, 0) = 0$. I com

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}H(0, 0)(\varphi) = Df(0)\varphi - T_\omega\varphi.$$

Clarament $\varphi \to Df(0)\varphi$, entenent $Df(0)$ com ha matriu, és lineal i contínua. Aleshores només ens quedaria per provar que $\frac{\partial}{\partial\varphi}H(0, 0) \in Isom(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Amb la proposició següent, tenim una condició suficient sobre $Df(0)$ per tal que existeixi una corba invariant.

Proposició 6.1. *Sigui $\mathcal{X} = \mathcal{C}_b(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$. Si A invertible, no té VAPs en el cercle unitat i tots els seus VAPs són reals, aleshores l'aplicació*

$$\begin{aligned} G :&\mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ &\varphi \mapsto A\varphi - T_\omega\varphi \end{aligned}$$

és un isomorfisme de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$.

Demostració. Clarament, G és lineal i contínua, per tant, només fa falta provar que G és bijectiva.

Provem primer que és injectiva. Siguin $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{X}$, i suposem que

$$A(\psi_1 - \psi_2) - T_\omega(\psi_1 - \psi_2) = 0. \tag{6.1}$$

Però això és equivalent a dir que la corba $\psi_1 - \psi_2$ és una corba invariant del sistema dinàmic

$$\begin{cases} \overline{x} = Ax, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega. \end{cases}$$

Ara com A no té VAPs en el cercle unitat, $x = Ax$ si i només si, $x = 0$. Aleshores, l'única corba invariant del sistema és $\varphi \equiv 0$. D'aquí deduïm que, $\psi_1 = \psi_2$. I per tant, G és injectiva.

Només ens queda provar la exhaustivitat. Volem provar que, donat $\psi \in \mathcal{X}$ fixat, existeix $\varphi \in \mathcal{X}$ tal que

$$\psi = A\varphi - T_\omega\varphi. \tag{6.2}$$

Aquesta condició, es equivalent a provar que el sistema dinàmic,

$$\begin{cases} \overline{x} = Ax + \psi(\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

té una corba invariant. Com A és pot diagonalitzar, $A = PDP^{-1}$ on D matriu diagonal. Ens podem reduir al cas $A = D$, ja que fent el canvi $x = Py$, s'obté

$$\begin{cases} \overline{y} = Dy + \widetilde{\psi}(\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

on $\widetilde{\psi} = P^{-1}\psi$.

Sigui $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, aleshores (6.2) és equivalent a trobar $\varphi_1, \dots \varphi_n$ tals que,

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_\omega\varphi_1 \\ \vdots \\ T_\omega\varphi_n \end{pmatrix},$$

amb $|\lambda_i| \neq 1$ per $i = 1, \dots, n$.

Per tant, ens podem reduir al cas 1D, només hem de provar que donat $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ existeix $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ tal que,

$$\psi = \lambda\varphi - T_\omega\varphi. \tag{6.3}$$

Ara si $|\lambda| < 1$, utilitzant la secció 4, veiem que φ és una corba invariant atractora del sistema dinàmic

$$\begin{cases} \overline{x} = \lambda y + \psi(\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

i per tant, existeix.

I si $|\lambda| > 1$, com $|\frac{1}{\lambda}| < 1$, sigui $\tilde{\varphi}$ la solució de

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi} - T_{-\omega}\tilde{\varphi}.$$

Fent el canvi, $\tilde{\varphi} = -\lambda T_{\omega}\varphi$, tenim la φ buscada. Per tant, tenim provada la exhaustivitat.
$\square$

7 Reductibilitat en sistemes 1D

En aquesta secció, treballarem amb sistemes dinàmics 1-dimensionals forçats quasi-periòdicament de la forma

$$\begin{cases} \overline{x} = f_\varepsilon(x,\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

on $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ paràmetre, $\theta \in \mathbb{T}^1$, $\omega \in \mathbb{T}^1$ i f funció prou regular, com ha mínim $\mathcal{C}^m$.

Definició 7.1. *Sigui $\varphi_0(\theta)$ una corba invariant de (7.1), de classe $\mathcal{C}^m$, el seu **comportament normal linealitzat** ve descrit per el següent sistema:*

$$\begin{cases} \overline{x} = a(\theta)x, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

on $a(\theta) = D_x f_0(\varphi_0(\theta),\theta)$, i la resta d'elements descrits d'igual manera que en (7.1). Com $f \in \mathcal{C}^m$, $a(\theta)$ també ho és. Suposarem però que (7.2) no és trivial, és a dir $a(\theta)$ no és idènticament zero.

Definició 7.2. *El sistema (7.2) s'anomena **reductible**, si existeix un canvi de variables $x = c(\theta)y$ continu gairebé per tot θ, tal que (7.2) passa ha ser:*

$$\begin{cases} \overline{y} = by, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{7.3}$$

on b no depèn de θ.
*Una corba invariant s'anomena **reductible** si el seu comportament normal linealitzat és reductible.*

Observem que, si (7.2) és reductible per $b \neq 0$, aleshores $b = \frac{c(\theta)}{c(\theta+\omega)}a(\theta)$ implica que $a(\theta)$ mai s'anul·la. És ha dir, si $a(\theta)$ té zeros, (7.2) no és pot reduir.

Proposició 7.3. *Sigui el sistema (7.2), considerem també el sistema*

$$\begin{cases} \overline{y} = b(\theta)y, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

*i suposem que $b \in \mathcal{C}^\infty$. Suposem també la **condició diofàntica** següent:*

$$\exists \gamma \text{ i } \exists \tau \geq 1 \text{ tals que } |q\omega - 2\pi p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau},\ \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{7.5}$$

Aleshores, existeix una funció $c \in \mathcal{C}^\infty$ estrictament positiva, tal que el canvi $x = c(\theta)y$ transforma (7.2) en (7.4), si i només si és compleixen les dos condicions següents:

1. *$\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ és pot estendre a una funció $\mathcal{C}^\infty$ per tot θ, i*

2. $$\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} d\theta = 0.$$

Demostració. Sigui $c : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ estrictament positiva. La transformació $x = c(\theta)y$, converteix $\overline{x} = a(\theta)x$ en

$$\overline{y} = \frac{c(\theta)}{c(\theta+\omega)}a(\theta)y. \tag{7.6}$$

Ara, considerem l'equació

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \frac{c(\theta+\omega)}{c(\theta)}, \ \forall\theta \in \mathbb{T}^1. \tag{7.7}$$

I suposem les condicions *1.* i *2.*. Prenent logaritmes obtenim,

$$\ln\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \ln c(\theta+\omega) - \ln c(\theta). \tag{7.8}$$

Ara, podem construir la c buscada mitjançant la sèrie de Fourier. Denotem per $\{\alpha_k\}_k$ i $\{c_k\}_k$ els coeficients de Fourier de $\ln\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ i $\ln c(\theta)$ respectivament. Fent el càlcul es comprova que c_0 no està definit. Però és d'esperar, ja que la transformació reduïda és defineix mòdul escalar.
Si $k \neq 0$, igualant coeficients en (7.8), obtenim

$$c_k = \frac{\alpha_k}{\exp(ik\omega) - 1}. \tag{7.9}$$

Ara, la condició diofàntica (7.5) i la suavitat de $\ln\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, al ser $a, b \in \mathcal{C}^\infty$, ens garanteix un decaïment adequat per els valors $|c_k|$. (En la secció 8.1 estudiem el decaïment dels coeficients de Fourier). Això ens garanteix que $\ln c(\theta) \in \mathcal{C}^\infty$, i per tant $c(\theta)$ també és $\mathcal{C}^\infty$.

Ara provem la implicació contrària, suposem que existeix el canvi $\mathcal{C}^\infty$, $x = c(\theta)y$, aleshores la condició *1.* és dedueix de (7.7) i la condició *2.* de (7.8). □

Observació 7.4. Com nosaltres en (1.1) estem suposant $\frac{\omega}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$,

$$\frac{\omega}{2\pi} \neq \frac{p}{q} \Leftrightarrow q\omega - 2\pi p \neq 0 \Leftrightarrow |q\omega - 2\pi p| > 0, \ \forall(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

la condició diofàntica (7.5) és compleix sempre.

Això ens dona el següent corol·lari, què ens permet caracteritzar la reductibilitat.

Corol·lari 7.5. *Suposem que ω satisfà la condició diofàntica* (7.5)*, i $a \in \mathcal{C}^\infty$. Aleshores* (7.3) *és reductible si i només si, a no té zeros.*

Demostració. Notem que només ens cal provar la implicació recíproca. Suposem doncs que a no té zeros. Aleshores podem definir el valor

$$b = sign(a)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a(\theta)|d\theta\right) \neq 0. \tag{7.10}$$

On $sign(a)$ denota el signe de a. Amb aquesta definició de $b(\theta) \equiv b$, és immediat comprovar les condicions *1.* i *2.* de la proposició anterior. □

Observació 7.6. En el cas (1.1), tenim que $a(\theta) = f'(\varphi_0(\theta))$. On φ_0 és la nostra corba invariant. És pot comprovar la condició de no anul·lació de a dintre el propi mètode numèric, mirant si els punts crítics de f estan fora del rang de valors que pren φ_0.

La següent proposició ens diu que la condició $a \in \mathcal{C}^\infty$ no és evitable.

Proposició 7.7. *Existeix $a \in \mathcal{C}^m$ estrictament positiva tal que,* (7.1) *no és reductible mitjançant un transformació $\mathcal{C}^m$.*

És pot trobar la demostració d'aquesta proposició en [4].

Ara, ens plantegem estudiar l'estabilitat d'una corba invariant φ_0 de (1.1) en el cas 1-dimensional. Primerament, comprovarem si φ_0 és reductible. En aquest cas, només hem de calcular b usant (7.10). Això ho farem mitjançant la regla del trapezi per al càlcul d'integrals. Aquest mètode numèric, és molt adient quant s'usa en funcions 2π-periòdiques i de classe $\mathcal{C}^\infty$, per els motius què es comentaran en la següent secció.

Un cop calculat b, el seu valor ens determinarà l'estabilitat de φ_0.

1. Si $|b| < 1$, aleshores φ_0 és atractora.

2. Si $|b| > 1$, aleshores φ_0 és repulsora.

8 Error en l'ús de la regla del trapezi

En aquesta secció, pretenem justificar l'ús de la regla dels trapezis, alhora de calcular integrals de funcions 2π-periòdiques. Primer, observarem com decauen els coeficients de Fourier de les funcions analítiques. I després, donarem una acotació de l'error causat en l'ús de trapezis, què dependrà dels coeficients què queden fora de l'ordre en què treballem.

8.1 Decaïment dels coeficients de Fourier per funcions analítiques

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periòdiques i analítica. La podem expressar com ha sèrie de Fourier,

$$f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\theta}.$$

Amb coeficients

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Al ser analítica, donat un punt $x_0 \in [0, 2\pi)$, podem estendre-la a $\mathbb{C}$ com una sèrie de potències en una bola centrada en x_0. Això ens permet definir la franja, $\mathcal{F} := [0, 2\pi] \times [-ip, 0] \subseteq \mathbb{C}$, on p és el mínim radí d'aquestes boles. Aleshores podrem estendre f en $\mathcal{F}$, de tal manera que no tingui pols.

Sigui γ la frontera de $\mathcal{F}$, aleshores podem escriure

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

On l'operació $+$ és refereix a la concatenació, i on γ_i, per $i = 1, \ldots, 4$, usant la notació $(x, y) = x + iy$, són els costats; $\{y = 0\} \cap \mathcal{F}$, $\{x = 2\pi\} \cap \mathcal{F}$, $\{y = -p\} \cap \mathcal{F}$ i $\{x = 0\} \cap \mathcal{F}$ respectivament.

Aleshores, sabem que

$$\int_\gamma f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = 0.$$

Ara, descomponent γ, i usant que l'integral sobre γ_2 i sobre γ_4 val igual, al ser f 2π-periòdica, i que aquestes és recorren en sentits oposats, tenim

$$\int_{\gamma_1} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta + \int_{\gamma_3} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = 0.$$

Observem que l'integral sobre γ_1 és el coeficient f_k, anem ara a donar una acotació de l'integral sobre γ_3.

$$|\int_{\gamma_3} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta| = |\int_0^{2\pi} f(\theta - ip) e^{-ik(\theta - ip)} d\theta| \leq \int_0^{2\pi} M |e^{-ik\theta}| e^{-i|k|p} d\theta = 2\pi M e^{-i|k|p},$$

on

$$M = \max_{|\mathrm{Im}\theta| \leq p} |f(\theta)|.$$

Com la sèrie de Fourier d'aplicacions de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ és defineix component a component, obtenim, el següent resultat

Proposició 8.1. *Si $\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^n$ corba de classe $\mathcal{C}^\infty$, aleshores els seus coeficients de Fourier decauen exponencialment.*

8.2 Regla del trapezi per funcions 2π-periòdiques

Sigui ara

$$I := \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta,$$

la integral què volem calcular. Fem una partició de N,

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{N+1}, \ \forall i = 0, \dots, N.$$

Aleshores l'aproximació per la regla de trapezis de l'integral I ve donada per;

$$I_N = \frac{2\pi}{N+1}\left(\frac{f(0)+f(2\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\right). \tag{8.1}$$

Estudiarem només el cas;

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta). \tag{8.2}$$

El cas en què f només depèn dels coeficients b_k és raona de forma similar. I per la linealitat de l'integra i de trapezis, podem ajuntar els dos resultats en el cas general.

Usant (8.2), observem que

$$I = a_0\pi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)d\theta = a_0\pi.$$

Ara, apliquem (8.2) a (8.1) i tenim

$$I_N = a_0\pi + \frac{2\pi}{N+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\left(\frac{\cos(0k)+\cos(2\pi k)}{2} + \sum_{i=1}^{N}\cos(k\theta_i)\right)\right) = I + \frac{2\pi}{N+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k,$$

on

$$S_k = \frac{\cos(0k)+\cos(2\pi k)}{2} + \sum_{j=1}^{N}\cos(k\frac{2\pi j}{N+1}).$$

Observem que per $k = t(N+1)$, amb $t \in \mathbb{N}$, tenim

$$S_{t(N+1)} = N+1.$$

Ara, si $k = t(N+1)+p$, amb $t \in \mathbb{N}$ i $1 \le p \le N$, es té

$$S_{t(N+1)+p} = 1 + \sum_{j=1}^{N}\cos(2\pi j(t + p\frac{1}{N+1})) = \sum_{j=0}^{N}\cos(\frac{2\pi p}{N+1}j) =$$

$$= Re\left(\sum_{j=0}^{N}\exp(\frac{2\pi ijp}{N+1})\right) = Re\left(\frac{1-\exp(2\pi ip)}{1-\exp(\frac{2\pi ip}{N+1})}\right) = 0.$$

Obtenint així l'error següent en la regla de trapezis:

$$I_N = I + 2\pi\sum_{i=1}^{\infty} a_{i(N+1)}.$$

Observació 8.2. Si utilitzem $2N+1$ coeficients reals de Fourier, $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$, per representar una corba, els coeficients què determinen l'error de la regla del trapezi, queden fora de l'ordre en què treballem. Per tant, la regla del trapezi no ens afegeix error, és exacta.

9 Càlcul de corbes invariants no atractores en sistemes 1D

En aquesta secció, presentarem un mètode general per el càlcul numèric de corbes invariants, en sistemes dinàmics forçats quasi-periòdicament 1-dimensionals. Considerarem sistemes dinàmics de la forma,

$$\begin{cases} \overline{x} = f(x) + g(\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

L'objectiu és calcular una corba φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tal que per tot $\theta \in \mathbb{T}^1$, $\varphi(\theta+\omega) = f(\varphi(\theta)) + g(\theta)$. La corba serà representada per la sèrie de Fourier truncada, i aquest truncament s'escollirà pet tal de tenir una precisió donada.

El mètode és basa en una iteració per Newton en l'espai de coeficients de Fourier. Per tant, començarem amb un conjunt de coeficients de Fourier, corresponents a una aproximació φ_0 de la corba invariant. Aquesta aproximació, haurà de complir que la norma de l'aplicació

$$r_0(\theta) = \varphi_0(\theta+\omega) - f(\varphi_0(\theta)) - g(\theta).$$

sigui petita. Per exemple, en el cas que $g(\theta)$ tingui norma petita i $f(0) = 0$, podem escollir $\varphi_0 \equiv 0$.
El següent pas és buscar una aplicació h, tal que $\varphi_1 = \varphi_0 + h$ sigui una millor aproximació de la corba invariant. Per trobar h, linealitzem en φ_0, mitjançant el desenvolupament de Taylor.

$$\begin{aligned} r_1(\theta) &= \varphi_1(\theta+\omega) - f(\varphi_1(\theta)) - g(\theta) = \\ &= \varphi_0(\theta+\omega) + h(\theta+\omega) - f(\varphi_0(\theta) + h(\theta)) - g(\theta) = \\ &= h(\theta+\omega) - p(\theta)h(\theta) - q(\theta) + O_2(|h(\theta)|), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} p(\theta) &= f'(\varphi_0(\theta)) \text{ i} \\ q(\theta) &= f(\varphi_0) + g(\theta) - \varphi_0(\theta+\omega). \end{aligned}$$

Ignorant $O_2(|h(\theta)|)$, tenim que h satisfà l'equació

$$h(\theta+\omega) = p(\theta)h(\theta) + q(\theta). \tag{9.1}$$

Per trobar h, usem el sistema dinàmic lineal

$$\begin{cases} \overline{h} = p(\theta)h, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega. \end{cases} \tag{9.2}$$

Com estem estudiant el cas no atractora, podem suposar que $p(\theta)$ no s'anul·la en $\mathbb{T}^1$ i usant el corol·lari 7.5, veiem que (9.2) és reductible. Aleshores, existeix un canvi $\mathcal{C}^\infty$, $h = c(\theta)y$, tal que el sistema és transforma a un amb coeficient constant.

$$\begin{cases} \overline{y} = \lambda y, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases}$$

on

$$\lambda = \frac{p(\theta)c(\theta)}{c(\theta+\omega)}.$$

Usant (7.8), el càlcul de $c(\theta)$ ve donat per

$$\ln\lambda = \ln p(\theta) + \ln c(\theta) - \ln c(\theta+\omega),\ \forall\theta\in\mathbb{T}^1. \tag{9.3}$$

Denotem per $\{p_k\}_k$ i per $\{c_k\}_k$ els coeficients de Fourier de $\ln\circ p$ i $\ln\circ c$ respectivament. Aleshores, podem resoldre (9.3) mitjançant l'expansió en sèrie de Fourier. Com el coeficient c_0 és indeterminat, escollim $c_0 = 0$ i tenim que $\ln\lambda = p_0$. També

$$c_k = \frac{p_k}{e^{ik\omega}-1},\ k\neq 0. \tag{9.4}$$

Observem que podríem tenir problemes de petits divisors, però la condició diofàntica (7.5), ens garanteix que això no passarà.

Observació 9.1. Ens interessarà calcular els coeficients de Fourier reals de $\ln\circ c$. Aleshores siguin

$$\ln p(\theta) = \frac{a_0(p)}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k(p)\cos(k\theta) + b_k(p)\sin(k\theta),$$

$$\ln c(\theta) = \frac{a_0(c)}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k(c)\cos(k\theta) + b_k(c)\sin(k\theta),$$

amb $a_0(p) = \ln\lambda$ i $a_0(c) = 0$. I usant les identitats trigonomètriques;

$$\cos(k(\theta+\omega)) = \cos k\theta\cos k\omega - \sin k\theta\sin k\omega,$$

$$\sin(k(\theta+\omega)) = \sin k\theta\cos k\omega - \cos k\theta\sin k\omega.$$

Aleshores tenim que els coeficients $a_k(c)$ i $b_k(c)$, per $k = 1,\ldots,N$, són solució del sistema

$$\begin{cases} a_k(p) = (1-\cos k\omega)a_k(c) - (\sin k\omega)b_k(c),\\ b_k(p) = (1-\cos k\omega)b_k(c) + (\sin k\omega)a_k(c).\end{cases}$$

Obtenint les formules

$$a_k(c) = \frac{(\sin k\omega)b_k(p) + (1-\cos k\omega)a_k(p)}{2-2\cos k\omega},$$

$$b_k(c) = \frac{(1-\cos k\omega)b_k(p) - (\sin k\omega)a_k(p)}{2-2\cos k\omega}.$$

Un cop trobat c, podem aplicar el canvi $h = c(\theta)y$ a (9.1), perquè tingui la forma

$$y(\theta+\omega) = \lambda y + \widehat{q}(\theta),\ \text{ on } \widehat{q}(\theta) = \frac{q(\theta)}{c(\theta)}.$$

Aquesta equació, és pot resoldre fàcilment a partir dels coeficients de Fourier de les funcions involucrades:

$$y_k = \frac{\widehat{q}_k}{e^{ik\omega}-\lambda},\ k\neq 0,$$

i $y_0 = 0$. Observem que en aquest cas, no tenim problemes amb petits divisors.

Observació 9.2. Igual que abans, ens interessarà tenir els coeficients reals de y. Denotem per $a_k(y)$ i $b_k(y)$ els coeficients reals de y i $a_k(\widehat{q})$ i $b_k(\widehat{q})$ els coeficients reals de $\widehat{q}$. Raonem de forma similar i obtenim

$$a_0(y) = \frac{a_0(\widehat{q})}{1-\lambda},$$

$$a_k(y) = \frac{(\cos k\omega - \lambda)a_k(\widehat{q}) - (\sin k\omega)b_k(\widehat{q})}{\lambda^2 + 1 - 2\lambda\cos k\omega},$$

$$b_k(y) = \frac{(\sin k\omega)a_k(\widehat{q}) + (\cos k\omega - \lambda)b_k(\widehat{q})}{\lambda^2 + 1 - 2\lambda\cos k\omega}.$$

Finalment, recuperem $h(\theta) = c(\theta)y(\theta)$ i podem donar per completat el pas del mètode de Newton, $\varphi_1 = \varphi_0 + h$.

Podem seguir iterant més passos del mètode de Newton, per obtenir una millor aproximació. Com ha condició de parada, podem demanar que la norma de

$$r_k(\theta) = \varphi_k(\theta + \omega) - f(\varphi_k(\theta)) - g(\theta)$$

sigui prou petit per tal de complir amb una precisió donada.

10 Càlcul de corbes invariants

En aquesta secció usarem el mètode de Newton, per tal de donar un mètode general per calcular corbes invariants, de sistemes dinàmics com el següent:

$$\begin{cases} \overline{x} = f(x,\theta), \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{10.1}$$

amb $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{T}^1$ i $\frac{\omega}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Definim les aplicacions

$$T_\omega : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \mapsto \varphi(\cdot + \omega)$$

$$F : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \mapsto f(\varphi) - T_\omega \varphi$$

Sabem que T_ω és una aplicació lineal, i que els zeros de F corresponen a corbes invariants continues de (10.1). El mètode que presentem en aquesta secció calcula numèricament un zero de F.

Escrivim φ com a sèrie de Fourier real,

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta, \text{ amb } a_i, b_i \in \mathbb{R}^n. \tag{10.2}$$

Aleshores, fixarem un valor de truncament N per aquesta serie. L'objectiu és determinar una aproximació amb $2N+1$ coeficients de Fourier, a_0, a_i, b_i $(1 \leq k \leq N)$, d'un zero de F. Amb aquest objectiu, construirem una discretització de l'aplicació F de la forma següent:

Primer, escollirem la malla de $\mathbb{T}^1$;

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{2N+1}, \; 0 \leq j \leq 2N. \tag{10.3}$$

Ara, donat un conjunt de coeficients de Fourier, $\varphi_N = \{a_0, a_i, b_i : 0 \leq i \leq N\}$, calculem els punts $\varphi(\theta_j)$, després $f(\varphi(\theta_j))$, a continuació $\varphi(\theta_j + \omega)$ i finalment podem calcular $f(\varphi(\theta_j)) - \varphi(\theta_j + \omega)$. Això ho fem per $0 \leq j \leq N$. Amb aquestes dades, podem obtenir els coeficients de Fourier de $f(\varphi(\theta)) - \varphi(\theta + \omega)$. Anomenem F_N als coeficients de Fourier de F, trobats mitjançant aquesta discretització, i anomenem f_N als coeficients de $f \circ \varphi$ i també anomenem $T\omega_N$ als coeficients de $\varphi(\theta + \omega)$.

Per aplicar Newton, necessitem calcular la diferencial de $\varphi_N \mapsto F_N$. Ho podem fer aplicant la regla de la cadena en el procès per calcular F_N. Usem el diagrama següent, per tal de donar nom als anteriors processos;

$$\varphi_N \xrightarrow{A} \{f(\varphi(\theta_j))\}_{j=0}^{2N} \xrightarrow{B} f_N$$

$$\varphi_N \xrightarrow{C} T\omega_N$$

Definim primer la notació que utilitzarem. Per facilitar els càlculs, considerarem $\varphi_N \in \mathbb{R}^{(2N+1)n}$, amb l'ordre de coeficients següent:

$$(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots, a_N, b_N), \text{ amb } a_0, a_1, a_n \in \mathbb{R}^n$$

Ens referirem per $\varphi_{N,t}$ al component $(t+1)$-èsim del vector φ_N. Observem que $\varphi_{N,0}$ correspon al coeficient a_0, que $\varphi_{N,2i-1}$ correspon al a_i i $\varphi_{N,2i}$ correspon al b_i, per $i : 1 \to N$. Utilitzarem la mateixa notació per $F_N, f_N \in \mathbb{R}^{(2N+1)n}$.

També, concedirem $\{f(\varphi(\theta_j))\}_{j=0}^{2N}$ com ha vector de $\mathbb{R}^{2N+1}$, ordenat per j. L'escriurem com $\widehat{f} = (f(\varphi(\theta_0)), \ldots, f(\varphi(\theta_j)), \ldots, f(\varphi(\theta_{2N})))$. Ens referirem a $f(\varphi(\theta_j))$ com la seva component $(j+1)$-èsima.

Observem que $F_N = f_N - T\omega_N$.

Sigui DF_N la matriu diferencial de F_N. Apliquem ara la regla de la cadena, i tenim,

$$DF_N = M_B \cdot M_A - M_C,$$

on M_A, M_B i M_C matrius diferencials del procés A, B i C respectivament.

Anem ara a donar un càlcul explícit d'aquestes matrius. Calculem primer M_B, observem que si $M_B = (mb_{i,j})_{i,j=0\to 2N}$, tenim

$$mb_{i,j} = \frac{\partial f_{N,i}}{\partial f(\varphi(\theta_j))}, \text{ per } i,j = 0 \to 2N.$$

Abans hem de calculem $f_{N,i}$, per $i : 0 \to 2N$;

$$\begin{aligned} f_{N,0} &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f(\varphi(\theta_k)), \\ f_{N,2i-1} &= \frac{2}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f(\varphi(\theta_k))\cos i\theta_k, \text{ per } i : 1 \to N, \\ f_{N,2i} &= \frac{2}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f(\varphi(\theta_k))\sin i\theta_k, \text{ per } i : 1 \to N. \end{aligned}$$

Derivem ara respecte $f(\varphi(\theta_j))$ i tenim,

$$\begin{aligned} mb_{0,j} &= \frac{1}{2N+1} Id_{n\times n}, \text{ per } j : 0 \to 2N, \\ mb_{2i-1,j} &= \frac{2}{2N+1}\cos i\theta_j Id_{n\times n}, \text{ per } j : 0 \to 2N,\ i : 1 \to N \\ mb_{2i,j} &= \frac{2}{2N+1}\sin i\theta_j Id_{n\times n}, \text{ per } j : 0 \to 2N,\ i : 1 \to N \end{aligned}$$

És veu clarament que M_B és una matriu $(2N+1)n \times (2N+1)n$ definida per blocs $n \times n$.

Calculem ara $M_A = (ma_{i,j})_{i,j=0\to 2N}$. Es té,

$$ma_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \varphi_{N,j}} f(\varphi(\theta_i)), \text{ per } i,j = 0 \to 2N.$$

Derivant, obtenim

$$\begin{aligned}
ma_{i,0} &= D_x f(\varphi(\theta_i)) \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}(\theta_i) = D_x f(\varphi(\theta_i)), \text{ per } i : 0 \to 2N, \\
ma_{i,2j-1} &= D_x f(\varphi(\theta_i)) \frac{\partial \varphi}{\partial a_j}(\theta_i) = \cos(j\theta_i) D_x f(\varphi(\theta_i)), \text{ per } i : 0 \to 2N \text{ i per} i : 1 \to N \\
ma_{i,2j} &= D_x f(\varphi(\theta_i)) \frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(\theta_i) = \sin(j\theta_i) D_x f(\varphi(\theta_i)), \text{ per } i : 0 \to 2N \text{ i per} i : 1 \to N
\end{aligned}$$

Igual que abans, M_A és una matriu $(2N+1)n \times (2N+1)n$ definida per blocs $n \times n$.

Finalment, calculem $M_C \ (mc_{i,j})_{i,j=0\to 2N}$. En aquest cas tenim,

$$mc_{i,j} = \frac{\partial T\omega_{N,i}}{\partial \varphi_{N,j}}, \text{ per } i,j = 0 \to 2N.$$

Aleshores com

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta &\xrightarrow{T_\omega} \varphi(\theta+\omega) = \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega + b_i \sin i\omega) \cos i\theta + (b_i \cos i\omega - a_i \sin i\omega) \sin i\theta.
\end{aligned}$$

Tenim que $T\omega_N$ està definida per,

$$\begin{aligned}
a_0 &\mapsto a_0, \\
a_i &\mapsto a_i \cos i\omega + b_i \sin i\omega, \\
b_i &\mapsto b_i \cos i\omega - a_i \sin i\omega.
\end{aligned}$$

Ara, derivant obtenim;

$$mc_{i,0} = \begin{cases} Id_{n\times n}, & \text{si } i = 0, \\ 0_{n\times n}, & \text{si } i \neq 0, \end{cases} \quad mc_{2i-1,2j-1} = \begin{cases} \cos j\omega Id_{n\times n}, & \text{si } i = j, \\ 0_{n\times n}, & \text{si } i \neq 0, \end{cases}$$

$$mc_{2i-1,2j} = \begin{cases} \sin j\omega Id_{n\times n}, & \text{si } i = j, \\ 0_{n\times n}, & \text{si } i \neq 0, \end{cases} \quad mc_{2i,2j-1} = \begin{cases} -\sin j\omega Id_{n\times n}, & \text{si } i = j, \\ 0_{n\times n}, & \text{si } i \neq 0, \end{cases}$$

$$mc_{2i,2j} = \begin{cases} \cos j\omega Id_{n\times n}, & \text{si } i = j, \\ 0_{n\times n}, & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

M_C també és una matriu $(2N+1)n \times (2N+1)n$ definida per blocs $n \times n$.

Finalment apliquem el mètode de Newton a $F_N(\varphi_N) = 0$. Inicialitzem amb $\varphi_N^{(0)}$ propera a la solució buscada. I en el pas $k+1$, calculem

$$\varphi_N^{(k+1)} = \varphi_N^{(k)} + z.$$

On $z \in \mathbb{R}^{(2N+1)n}$ és solució del sistema

$$DF_N(\varphi_N^{(k)})z = -F_N(\varphi_N^{(k)}).$$

Aquesta solució, la podem trobar mitjançat el mètode de Gauss. I com ha condició de parada, ens fixarem quan la norma $\|z\|_1$ és prou petita. També cal destacar, que en cada pas hem de calcular les matrius M_A, M_B i M_C.

11 Reductibilitat en sistemes n-dimensionals

En aquesta secció considerem sistemes dinàmics com (10.1). Estendrem a dimensió arbitraria, els conceptes vistos en la secció 7. En aquesta secció no demostrarem totes les proposicions que anunciarem, totes les demostracions però, és poden trobar a [3].

Definició 11.1. *Sigui $\varphi_0(\theta)$ una corba invariant de* (10.1)*, el seu* ***comportament normal linealitzat*** *ve descrit per el sistema dinàmic:*

$$\begin{cases} \overline{x} = A(\theta)x, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{11.1}$$

on $A(\theta) = D_x f(\varphi_0(\theta))$ i la resta d'elements descrits d'igual forma que (10.1)*.*

Definició 11.2. *El sistema* (11.1) *s'anomena* ***reductible*** *si existeix un canvi de variables, $x = C(\theta)y$ tal que* (11.1) *es transforma en*

$$\begin{cases} \overline{y} = By, \\ \overline{\theta} = \theta + \omega, \end{cases} \tag{11.2}$$

on $B = C^{-1}(\theta + \omega)A(\theta)C(\theta)$ no depèn de θ. Aquest canvi pot ser complex.

Si el comportament normal linealitzat d'una corba invariant φ_0 de (10.1) *és reductible, diem que φ_0 és reductible.*

Observem que (11.2) és pot descriure mitjançant els VAPs de B. Més endavant, descriurem un mètode numèric per tal d'aproximar els VAPs de B, en el cas que (11.1) sigui reductible.

11.1 Caracterització de la reductibilitat

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} T_\omega : &\mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}^n) \\ &\varphi(\theta) \mapsto \varphi(\theta + \omega) \end{aligned}$$

I considerem el següent **problema generalitzat de VAPs**:

És vol trobar $(\lambda, \varphi) \in (C) \times (\mathcal{C}(\mathbb{T}^1, \mathbb{C}^n) \setminus \{0\})$ tals que

$$A(\theta)\varphi(\theta) = \lambda T_\omega \varphi(\theta), \tag{11.3}$$

considerant $\omega/2\pi \notin \mathbb{Q}$.

Proposició 11.3. *Considerem el problema generalitzat de VAPs* (11.3) *per una corba φ_0 invariant de* (10.1)*, amb $A(\theta) = D_x f(\varphi_0(\theta))$. Aleshores, si f no depèn de θ, 1 és un VAP de* (11.3)*. El seu corresponent VEP és $\varphi_0'(\theta)$, la derivada de φ_0 respecte θ.*

Demostració. És veu directament, derivant la condició d'invariància de φ_0;

$$\varphi_0(\theta + \omega) = f(\varphi_0(\theta)).$$

□

Proposició 11.4. *Sigui λ un VAP de* (11.3) *amb VEP φ. Aleshores per tot $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda e^{ik\omega}$ també és un VAP de* (11.3)*, amb VEP associat $\hat{\varphi}(\theta) = e^{-ik\theta}\varphi(\theta)$.*

Proposició 11.5. *Suposem que* (11.1) *pot ser reduït a* (11.2) *per un canvi $x = C(\theta)y$. Aleshores és compleix:*

1. *Si λ és un VAP de B, aleshores λ és un VAP de* (11.3).
2. *Si λ és un VAP de* (11.3)*, aleshores existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda e^{ik\omega}$ és un VAP de B.*

En particular, en el cas reductible, el conjunt de VAPs de (11.3) *no és buit.*

Demostració. Suposem primer que λ és VAP de B, i sigui v el seu VEP. Definim $\varphi(\theta) = C(\theta)v$, aleshores

$$A(\theta)\varphi(\theta) = A(\theta)C(\theta)v = C(\theta+\omega)Bv = \lambda C(\theta+\omega)v = \lambda\varphi(\theta+\omega).$$

Suposem ara, λ VAP de (11.3), i $\psi(\theta)$ el seu corresponent VEP i definim $\varphi(\theta) = C^{-1}(\theta)\psi(\theta)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} B\varphi(\theta) = BC^{-1}(\theta)\psi(\theta) &= C^{-1}(\theta+\omega)A(\theta)\psi(\theta) = \\ &= \lambda C^{-1}(\theta+\omega)\psi(\theta+\omega) = \lambda\varphi(\theta+\omega). \end{aligned}$$

Podem suposar que B és diagonal, $B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ja que el cas en forma de Jordan, és pot tractar de forma similar. Considerem l'expansió en sèrie de Fourier de φ.

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \text{ amb } c_k \in \mathbb{R},$$

Ara usant $B\varphi(\theta) = \lambda\varphi(\theta+\omega)$, obtenim

$$Bc_k = \lambda c_k e^{ik\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{11.4}$$

Com φ no és la funció zero, existeix almenys un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $c_{k_0} \neq 0$. Aleshores, existeix $1 \leq j_0 \leq$ tal que la component j_0-èsima de c_{k_0} no és zero. Prenent la component j_0-èsima en (11.4), obtenim

$$\lambda_{j_0} = \lambda e^{ik_0\omega},$$

i això implica que $\lambda = \lambda_{j_0} e^{i(-k_0)\omega}$. □

Definició 11.6. *És diu que dos VAPS λ_1 i λ_2* ***no estan ω-relacionats*** *si*

$$\lambda_1 \neq e^{ik\omega}\lambda_2, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En cas contrari, es diu que estan ***ω-relacionats****.*

Proposició 11.7. *Suposem que existeixen n VAPS $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ del problema* (11.3)*, què no estan ω-relacionats dos a dos . Aleshores, el sistema* (11.1) *és pot reduir a* (11.2)*, amb $B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Proposició 11.8. *El problema generalitzat de VAPs* (11.3) *no pot tenir més de n VAPS que no estan ω-relacionats dos a dos.*

Per tant, per a cada conjunt de n VAPs quèe no estan ω-relacionats dos a dos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de (11.3), existeix una transformació lineal què envia el sistema original (11.1) a la forma reduïda (11.2), amb $B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. El mòdul d'aquest VAPSs, dictamina l'estabilitat del sistema. L'argument dels VAPSs es defineix excepte per múltiples de ω. Aquesta manca d'unicitat de l'argument també està relacionada amb la manca d'unicitat de la transformació reductora: si $x = C(\theta)y$ és una transformació reductora de (11.1) a (11.2), llavors és pot comprovar que $e^{-ik\theta}C(\theta)$ també és una transformació reductora, i la matriu reduïda és ara $e^{ik\omega}B$.

11.2 Aproximació dels VAPs de la matriu reduïda

El mètode què utilitzarem per tal de d'aproximar els VAPs del la matriu B, del sistema reduït (11.2) què descriu el comportament normal linealitza, d'una corba invariant reductible φ, del sistema (10.1), requereix aproximar les solucions del problema generalitzat de VAPs (11.3) corresponent a φ. Per aquest objectiu, requerirem discretitzar l'aplicació $T_{-\omega} \circ A(\theta)$. Observem que $A(\theta) = D_x f(\varphi_0(\theta))$ i per tant, podem usar la discretització realitzada en la secció 10.

Podem implementar l'aproximació dels VAPS de B, immediatament desprès del mètode numèric presentat en la secció 10.

Si derivem respecte φ_N

$$T_{-\omega} \circ A(\theta)\varphi - \lambda\varphi = 0,$$

on φ_N denota el vector de coeficients de Fourier truncat de φ. Obtenim

$$(M_C)^{-1} \cdot M_B \cdot M_A - \lambda Id = 0.$$

On M_A, M_B i M_C són les matrius presentades en la secció 10, un cop calculat l'aproximació de φ. A més, és fàcil veure que $(M_C)^{-1} = M_C^T$.

Aleshores un cop calculat φ, immediatament podem calcular els VAPs i VEPs corresponents, de la matriu $\mathcal{M} = (M_C)^{-1} \cdot M_B \cdot M_A$. Usant la notació de la secció 10, definim $m = (2N+1)n$.

Siguin $\{\lambda_j\}_{j=0}^m$ els VAPs de $\mathcal{M}$ i $\{v_j\}_{j=0}^m$ els seus VEPs corresponents. Per simplificar, considerarem que (11.1) és reductible, i sigui μ_0 un dels VAPs de la matriu reduïda B. Aleshores, l'operador $T_{-\omega} \circ A(\theta)$ té tots els valors, $\mu_k = \mu_0 e^{ik\omega}$ per $z \in \mathbb{Z}$, com ha VAPs. La discretització només conté un nombre finit d'aquest valors, i no tenen perquè tenir la mateixa precisió.

Un cop sabut això, el primer pas consistirà en detectar els VAPs més precisos, per utilitzar-los com ha representants de les classes d'equivalència, introduïdes a partir de la definició de ω-relacionats.

Suposem que $\psi(\theta)$ és un VEP de (11.3) amb VAP λ. Usant la proposició 11.4, tenim que $e^{-ik\theta}\psi(\theta)$ és un VEP de (11.3) amb VAP $\lambda e^{ik\omega}$. Definim ara, la norma

$$\|\psi\|^{(1)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j(\psi)||j|.$$

on $c_j(\psi)$ coeficient i-èsim de la sèrie de Fourier de ψ. La idea és usar

$$TE(\psi, N) = \sum_{|j|>N} |c_j(\psi)||j|.$$

per mesurar l'error de truncament, què estem realitzant al escollir un ordre N de coeficients de Fourier. Fixem-nos que, els nostres $VEPs$ de $\mathcal{M}$, ja venen representat com un vector de coeficients de Fourier, per tant el calcul de la norma $\|\cdot\|^{(1)}$ ens resultarà senzill.

Aleshores si considerem un VEP de (11.3) de la forma $e^{-ik\theta}\psi(\theta)$, el seu error de truncament només serà petit per un conjunt reduït de $|k|$. Per tant, aquests VEPs són els que és poden aproximar bé usant la nostra discretització.

El procés es resumeix de la següent manera. Un cop calculats $\{\lambda_j\}_{j=0}^m$ i $\{v_j\}_{j=0}^m$ determinem quins són els que tenen una norma $\|\cdot\|^{(1)}$ més petita, ho podem fer agrupant-los, no cal comprovar si tots estan ω-relacionats entre tots. També s'ha de tenir en compte que, com ha màxim hauríem de tenir n classes de VEPs.

11.3 Estabilitat de les corbes invariants reductibles

El cas hiperbòlic es veu fàcilment des del moment que apareixen VAPs de mòdul diferents de 1. Ens centrem únicament en el cas en què hi ha VAPs amb part imaginària igual a zero. En aquesta situació, només un dels VAPs de cada classe d'equivalència és real.

El cas el·líptic correspon en el cas que els VAPs tinguin norma igual a 1. Com que qualsevol representant de cada classe d'equivalència es pot prendre com a VAP de la matriu reduïda B, i això correspon a seleccionar una transformació $C(\theta)$ diferent per reduir el sistema. Estem interessats per els que fan la transformació $C(\theta)$ més simple possible i per aquest motiu, escollirem el VAP corresponent al VEP de norma mínima dintre la seva classe.

Referències

[1] H. Cartan: Cálculo diferencial, Omega, 1972.

[2] A. Saleh, Q. H.: Topics in Fixed Point Theory, Springer, 2014.

[3] À. Jorba: Numerical computation of the normal behaviour of invariant curves of n-dimensional maps, *Nonlinearity*, Vol. 14, No.5, pàg. 943-976, doi. 10.1088/0951-7715/14/5/303.

[4] À. Jorba, J. C. Tatjer: A mechanism for the fractalitzation of invariant curves in quasi-periodically forced 1-D maps, *Discrete and continuous dynamical systems series B*, Vol. 10, No. 2 & 3, September & October 2008, pàg. 537-567.

[5] À. Jorba, F. J. Muñoz-Almaraz, J. C. Tatjer: On non-smooth pitchfork bifurcations in invertible quasi-periodically forced 1-D maps, *Journal of difference equations and applications*, 2018, Vol. 24, No. 4, pàg. 588-608, doi. 10.1080/10236198.2017.1331889.