Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA DE CONVOLUCÓ DE TITCHMARSH

Autor: Duna Rom Escuté

Director: Dr. Xavier Massaneda Clares
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

Abstract

The Titchmarsh Convolution Theorem is a renowned theorem on the support of the convolution on two functions, and it has several possible equivalent formulations. Within this project, we expose the details of Thomas Randsford's proof [5], based on the factorization of functions in the space H^∞ of holomorphic and bounded functions on the disk. To reformulate the convolution problem in terms of holomorphic functions one uses the Laplace transform.

Resum

El Teorema de Convolució de Titchmarsh és un teorema reconegut sobre el suport de la convolució de dues funcions, i té diverses formulacions equivalents possibles. En aquest projecte, exposem en detall la demostració de Thomas Randsford [5], basada en la factorització de l'espai H^∞ de funcions holomorfes i acotades del disc. Per reformular el problema de la convolució en termes de funcions holomorfes s'utilitza la transformada de Laplace.

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al meu tutor, Xavier Massaneda Clares, per la seva dedicació, atenció i suport incondicional durant tot el treball realitzat. Les seves explicacions sovint han sigut determinants per entendre aquells continguts més enrevessats.

En segon lloc, vull agrair als meus pares, Joan i Olga, per tota la paciència que han tingut i per fer-me costat tots aquests anys en la vida acadèmica però també en la personal. Sé que sempre han volgut el millor per mi i han fet tot el que estava en les seves mans.

No em voldria oblidar dels amics i amigues que he fet en aquesta etapa. Sense elles res d'això hagués sigut possible: han sigut les meves confidents, el meu suport i la meva família en aquesta ciutat.

Índex

1 Introducció

Donades dues funcions integrables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es defineix la seva convolució $f * g$ com la funció

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{-\infty} f(t-s)g(s)ds \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

És clar que si $f(t) = 0$ per gairebé tot $t \in (-\infty, a)$ i $g(t) = 0$ per gairebé tot $t \in (-\infty, b)$ aleshores $(f * g)(t) = 0$ per gairebé tot $t \in (-\infty, a+b)$: com que

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_{b}^{-\infty} f(t-s)g(s)ds ,$$

si $t \leqslant a+b$ aleshores $t - s \leqslant a$ per gairebé tot $s \geq b$ i per tant $f(t-s) = 0$.

Aleshores, si definim, donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable,

$$\alpha(f) := sup\{a \in \mathbb{R} : f(t) = 0 \text{ q.p.t. } t \in (-\infty, a)\}$$

tenim que, per l'argument anterior,

$$\alpha(f * g) \geq \alpha(f) + \alpha(g) .$$

El teorema de convolució de Titchmarsh afirma que la desigualtat en l'altra sentit també és certa.

Teorema de convolució de Titchmarsh. Siguin $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funcions integrables tals que $\alpha(f) > -\infty$ i $\alpha(g) > -\infty$. Aleshores

$$\alpha(f * g) = \alpha(f) + \alpha(g) .$$

Aquest teorema té diverses formulacions, i és important en diversos problemes d'anàlisi harmònica, àlgebres de Banach, teoria d'operadors, o en processat de senyal.

Al llarg del temps han sorgit múltiples demostracions d'aquest teorema, cap d'elles senzilla. La prova inicial que va proporcionar E.C. Titchmarsh [7] consistia en l'anàlisi directa de convolucions, integrals i propietats dels suports de les funcions.

A mesura que les matemàtiques van anar avançant, l'anàlisi funcional va esdevenir una eina potent per demostrar aquest teorema. Algunes proves posteriors van utilitzar conceptes de l'anàlisi funcional, com la teoria de distribucions, els espais de Schwartz i productes de convolució en aquests espais.

L'anàlisi harmònica també va jugar un paper crucial en la demostració del teorema de convolució de Titchmarsh. Es van utilitzar tècniques de l'anàlisi de Fourier, especialment les propietats de les transformades de Fourier i la seva relació amb les convolucions, per establir les propietats dels suports en el teorema de convolució.

El desenvolupament de la teoria de la mesura va proporcionar un marc més rigorós per tractar integrals i mesures. Van sorgir noves demostracions, aprofitant tècniques de teoria de la mesura que van permetre perfeccionar la comprensió dels suports de les funcions i les convolucions.

Més recentment, nous enfocaments de la teoria d'operadors i espais funcionals han contribuït a demostracions modernes del teorema. Utilitzant conceptes d'aquests camps, s'han obtingut demostracions que utilitzen propietats d'operadors actuant sobre espais de funcions per establir la relació dels suports.

En concret, en aquest treball presentem la prova d'aquest resultat donada per Thomas Ransford a [5]. La prova es basa en una reformulació del problema en termes de funcions holomorfes i acotades al disc, mitjançant la transformada de Laplace, definida com

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt\,.$$

Al capítol de preliminars es definirà més formalment i se'n veuran algunes propietats. La propietat fonamental de la transformada de Laplace en aquest context és que transforma la convolució en producte:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)\ .$$

Si $\alpha(f) > -\infty$, aleshores

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{\alpha(f)}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

i per tant

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant \int_{\alpha(f)}^{\infty} |f(t)|e^{-t\,Re\,z}dt \leqslant e^{-\alpha(f)\,Re\,z}dt||f||_{L^1(\mathbb{R})}\ .$$

Fent una translació de f, podem suposar que $\alpha(f) = 0$, i per tant que $\mathcal{L}f(z)$ és una funció holomorfa i acotada al semipla $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} :\ Re\,z > 0\}$. Mitjançant la transformació de Möbius habitual

$$\tau(z) = \frac{1-z}{1+z}\quad ,$$

que és un biholomorfisme entre el semipla $\mathbb{H}$ i el disc unitat $\mathbb{D}$, el problema de Titchmarsh acaba traduit en un problema de producte de funcions holomorfes i acotades a $\mathbb{D}$.

Arribats a aquest punt s'utilitza el que, de fet, serà el cor del treball: la factorització de tota funció F holomorfa i acotada a $H^\infty(\mathbb{D})$ en un producte de Blashke B, que descriu els zeros de F, una funció externa O, que depèn només dels valors frontera de F a la circumferència unitat, i una funció interna singular S. És aquesta estructura tan precisa la que permet finalment provar el teorema.

Finalment, remarquem que el teorema de convolució de Titchmarsh es pot expresar en termes de suports. El suport d'una funció integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és el subconjunt tancat de $\mathbb{R}$ més petit tal que $f = 0$ q.p.t. punt del seu complementari. Escrivim $supp(f)$ a aquest subconjunt. Hem vist al principi que per tot parell de funcions integrables f, g tenim

$$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g) \,. \tag{1.1}$$

Suposarem que $supp(f)$ i $supp(g)$ són compactes, aleshores el Teorema de Titchmarsh reformulat en aquests termes ens diu que els dos costats de l'equació (1.1) tenen el mateix mínim i el mateix màxim.

Definim l'envolupant convexa d'un conjunt com el subconjunt convex més petit que el conté, i escrivim $conv(\cdot)$ per denotar-lo. Reescrivint l'equació (1.1) en termes d'envolupants convexes tenim

$$conv(supp(f * g)) = conv(supp(f)) + conv(supp(g)) \,. \tag{1.2}$$

Reformulat d'aquesta manera, podem extendre el resultat a espais de major dimensió. Siguin f , $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funcions integrables amb suport compacte, aleshores es manté l'equació (1.2). De fet, l'equació (1.2) segueix sent certa per f i g distribucions de $\mathbb{R}^n$ amb suports compactes. Aquesta generalització s'obté a [4] i es pot deduïr fàcilment a partir de la versió inicial del Teorema de Titchmarsh.

El treball s'ha organitzat per tal d'exposar tota la informació necessària per demostrar el teorema de manera tant autocontinguda com fos possible i amb un fil conductor coherent.
Al primer capítol, titulat Preliminars, es començarà parlant de transformacions de Möbius, es definiran i se n'estudiaran sobretot dos tipus en concret. En primer lloc s'estudiarà el biholomorfisme

$$\tau(z) = \frac{1+z}{1-z} \,,$$

que ens permet passar del disc unitat $\mathbb{D}$ al semiplà positiu $\mathbb{H}$. En veurem algunes propietats com per exemple que la imatge de la frontera del disc són els imaginaris purs o que el segment real $[-1, 1]$ va a la semirecta real positiva. Aquesta transformació de Möbius serà vital per demostrar el Teorema de Titchmarsh, ja que ens permetrà traslladar el problema del semiplà $\mathbb{H}$ al disc $\mathbb{D}$. Seguidament estudiarem la família de funcions

$$\varphi_a^\theta(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \,, \quad a \in \mathbb{D}, \theta \in [0, 2\pi] \,.$$

Veurem que φ_a^θ és un biholomorfisme del disc que envia a al 0 i que, de fet, tots els automorfismes del disc unitat són d'aquesta forma. Amb això haurem vist tot el que necessitem sobre transformacions de Möbius.

Seguidament, partirem de nocions d'anàlisi complexa, com ara la definició de funció holomorfa, funció harmònica i propietat de la mitjana, en veurem la relació i propietats i ho utilitzarem per presentar el nucli i la integral de Poisson $P[f]$ d'una funció f definida a la circumferència unitat. Especialment ens interessarà el comportament a la frontera d'aquesta, en particular, veurem un resultat molt important que ens dirà que, si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ aleshores el límit

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1^-} P[f](re^{i\theta}) ,$$

existeix per a gairebé tot $\theta \in [0, 2\pi]$. De fet, la transformació de Poisson ens permet, per una part, representar funcions harmòniques, i per l'altra, produir funcions harmòniques a un disc amb valors frontera prefixats.
Seguirem defininint funció subharmònica, i en veurem algunes propietats que ens serviran per produir més funcions d'aquest tipus, o propietats com la que dóna nom a aquest tipus de funcions. També en veurem alguns exemples molt importants que utilitzarem en els següents capítols com ara $\log|f|$ o $|f|^p$, on f és una funció holomorfa.
Finalment acabarem el capítol parlant de la transformada de Laplace. Aquesta és l'eina que ens permetrà transformar el problema que presenta el Teorema de Titchmarsh d'una convolució a un producte de funcions. Ens interessarà veure quan la transformada de Laplace és acotada, i veure com interactua amb $\alpha(f)$. De fet veurem que si $\alpha(f) > -\infty$, fent una translació

$$g(t) = g(t - \alpha(f)) ,$$

obtenim una funció amb transformada de Laplace sempre serà acotada en $\mathbb{H}$. Així es dona per finalitzat aquest capítol de preliminars.

En el capítol central del treball, el de factorització, tenim per objectiu provar que tota funció $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ factoritza de manera única en un producte $f = B \cdot O \cdot S$, amb B producte de Blaschke, O funció externa i S part singular. Per aconseguir aquesta factorització començarem estudiant el producte de Blaschke. Veurem que per tota funció de H^∞, els seus zeros tenen una condició de creixement restringit; aquesta precisament es la que ens assegurarà la bona definició del producte de Blaschke. En veurem una propietat molt important:

$$\lim_{r \to 1^-} |B(re^{i\theta})| = 1 \ , \ \text{q.p.t. } \theta \in [0, 2\pi] .$$

Aquesta propietat ens diu, en particular, que si considerem $g = f/B$, aleshores $g \in H^\infty$ i $||f||_\infty = ||g||_\infty$. En aquest punt passarem a parlar dels espais de Hardy H^p, amb $1 \leqslant p < \infty$. De fet també veurem que els zeros també factoritzen en un producte de Blaschke i $||g||_{H^p} = ||f||_{H^p}$, amb la mateixa notació que abans.
En aquest subcapítol el que ens interessa és provar uns resultats a H^∞. Per fer-ho, com que $H^q \subset H^p$, amb $q \leqslant p$, els demostrarem per H^2 i ja els tindrem per H^∞. Triem H^2 perquè té estructura d'espai de Hilbert, i per tant tenim un producte escalar i una norma definides, de fet també tindrem una base ortornormal la qual ens facilitarà veure alguns resultats. El més important que provarem serà que si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ aleshores

$$\lim_{r \to 1^-} |f(re^{i\theta})| \text{ existeix q.p.t. } \theta \in [0, 2\pi] .$$

A la part final del capítol veurem els teoremes que ens permetran fer la factorització que desitgem. Per poder acabar aquesta factorització, abans haurem de veure algunes nocions de teoria de la mesura: veurem què és una mesura singular i algunes propietats força bàsiques d'aquesta. Aleshores, definirem funció interna i funció externa i veurem com interactuen amb f. Arribats a aquest punt ja podem veure els dos teoremes que ens permetran fer la factorització. El primer, Teorema 3.28, en descriu el comportament de la funció externa O_f associada a f a la frontera del disc i ens diu com es comporta el $\log |O_f|$. Un resultat important que també ens dona aquest teorema és que el límit radial de la funció externa coincideix amb el límit radial de f q.p.t. punt de la frontera del disc. El segon teorema de factorització, Teorema 3.29, ens parla de la factorització com a tal i del paper que hi juguen les funcions internes.
Al finalitzar aquest capítol ja tenim totes les eines necessàries per factoritzar una funció de H^∞ i, per tant, provar el teorema.

L'últim apartat del treball dóna finalmen la prova del Teorema de Titchmarsh. Començarem utilitzant la transformada de Laplace per convertir el problema de convolució de dues funcions a un problema equivalent sobre el producte de funcions holomorfes al semiplà $\mathbb{H}$. Un cop tinguem el producte de funcions, les traslladarem al disc amb la transformació de Möbius que hem vist

$$\tau(z) = \frac{1+z}{1-z} \, ,$$

on, com que sabem que són holomorfes i acotades, les podrem factoritzar d'acord amb el que hem vist en el capítol anterior. Veurem alguns resultats auxiliars, i provarem el teorema argumentant per contradicció.

2 Preliminars

En aquest capítol veurem una sèrie d'eines que ens serviran per reformular el problema que planteja el Teorema de Titchmarsh en termes de funcions holomorfes i acotades. En concret presentarem les bases per poder construïr la factorització d'una funció de H^∞ en un producte de Blaschke, la funció externa associada i la part singular. A l'última part del capítol, parlarem de la Transformada de Laplace.

2.1 Anàlisi complexa

Aquesta subsecció està dedicada a recordar alguns conceptes d'anàlisi complexa, com ara la definició de funcions harmòniques i la propietat de la mitjana, per tal de poder construir el nucli de Poisson i la integral de Poisson. Però, abans d'això, parlarem de les transformacions de Möbius, que ens permetran, per una part, transformar el nostre problema i traslladar-lo al disc unitat, i per l'altra caracteritzar els automorfismes del disc.

2.1.1 Transformació de Möbius

Com indica el títol, en aquesta secció es presentaran les transformacions de Möbius. Ens interessa en concret la transformació definida per $\tau(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, que ens permet passar del disc al semiplà complex positiu i viceversa. A més, al ser un biholomorfisme (holomorfa i bijectiva), ens permet traslladar els resultats que vegem d'un espai a l'altre. També farem especial èmfasi en els automorfismes del disc que permuten un punt $a \in \mathbb{D}$ pel 0, deixant la frontera invariant.

Definició 2.1. *Diem que una funció de la forma $\tau(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ amb $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, amb la condició $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, és una transformació de Möbius.*

La transformació de Möbius es pot veure com una o vàries transformacions lineals de l'esfera seguida de la projecció d'aquesta en el pla complex, mitjançant la projecció estereogràfica. Aquestes transformacions sempre són composicions d'aquests tres tipus de transformacions:
1) Translacions: $\tau_a(z) = z + a \quad a \in \mathbb{C}$.
2) Homotècia: $H_a(z) = az \quad a \neq 0$.
3) Inversió : $I(z) = \frac{1}{z}$.
Observem que si estenem $\mathbb{C}$ al projectiu i fem servir coordenades homogènies, podem pensar τ com la projecció al pla de la transformació lineal a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha z+\beta \\ \gamma z+\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(z) \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Per tant, imposar la condició $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ és equivalent a que el determinant de la matriu de la transformació sigui diferent a 0, és a dir que τ sigui bijectiva a l'esfera.

Observació 2.2. Pel Teorema de Riemann, sabem que sempre existeix un biholomorfisme (holomorfa i bijectiva) entre dominis simplement connexos. En concret, $\tau(z) = \frac{1+z}{1-z} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ ens dona una transfomació biholomorfa entre el disc i el semiplà, per tant, tot resultat que vegem en un d'aquests dominis es traslllada a l'altre automàticament.
De fet, més endavant, utlilitzarem la transformada de Möbius per pasar el problema de transformades de Laplace a un problema de funcions holomorfes i acotades a $\mathbb{D}$.

Proposició 2.3. *La trasformació de Möbius $\tau(z) = \frac{1+z}{1-z}$ té les següents propietats:*
(a) $\tau(0) = 1$, $\tau(-1) = 0$, $\tau(1) = \infty$.
(b) El segment real $[-1, 1]$ va a la semirecta real positiva.
(c) La frontera del disc va als imaginaris purs.
(d) $\tau(z) = \frac{1+z}{1-z} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$
(e) $\tau^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1} : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$

Demostració. Només veurem el (c) i el (d) ja que la resta són immediats:
(c)

$$\begin{aligned}\tau(e^{i\theta}) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{|1-e^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta - i\sin(-\theta)}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{2i\sin\theta}{|1-e^{i\theta}|^2}\end{aligned}$$

(d) Hem de veure que $\tau(z) \in \mathbb{H}$, és a dir, que $Re(\tau(z)) > 0$. Tenim

$$Re(\tau(z)) = Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

com que $z \in \mathbb{D}$, tant el numerador com el denominador són més grans que zero i trivialment tenim que $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0$.
Faltaria veure que és exhaustiva.

Això és clar: l'equació $\frac{1+z}{1-z} = w$ té solució única $z = \frac{w-1}{w+1}$, i si $Re(w) > 0$ es compleix que $\left|\frac{w-1}{w+1}\right| < 1$ □

Per representar funcions harmòniques mitjançant la integral de Poisson, cosa que ens interessarà en els següents capítols, un element clau és conèixer els automorfismes del disc unitat. Per veure això necessitem recordar el Lema de Schwarz.

Lema de Schwarz. *Sigui $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ una funció holomorfa tal que $f(0) = 0$. Aleshores:*
(a) $|f(z)| \leqslant |z|$ per tot $z \in \mathbb{D}$.
(b) $|f'(0)| \leqslant 1$.
A més, si val la igualtat a un sol punt $z_0 \in \mathbb{D}$, llavors $f(z) = e^{i\theta}z$, amb $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demostració. Considerem la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

que és contínua i holomorfa en $\mathbb{D}$. Aleshores, posant $|z| = r$ i tenint en compte que f va del disc al disc tancat, tenim

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{r} \ ,$$

és a dir $\max\limits_{|z|=r} |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$. Fent $r \to 1$ i aplicant el principi del mòdul màxim

$$\max_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leqslant 1 \ ,$$

la qual cosa implica tant (a) com (b).
Falta veure que si es dóna la igualtat en algun punt, aleshores $f(z) = e^{i\theta}z$, amb $\theta \in [0, 2\pi]$. Considerem la funció en $\mathbb{D}$ definida com $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ amb $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, i amb $g(0) = f'(0)$. Pel Teorema de singularitat evitable, la funció g és holomorfa en $\mathbb{D}$ i per la primera part del Lema de Schwarz tenim que $|g(z)| \leqslant 1$ per tot $z \in \mathbb{D}$ i $|g(0)| = 1$. Aleshores pel Principi del mòdul màxim, g ha de ser una constant de mòdul 1, per tant només pot ser

$$g(z) = e^{i\theta} \ ,$$

per $z \in \mathbb{D}$. □

Proposició 2.4. *Les transformacions de Möbius de la forma* $\varphi_a^\sigma(z) = e^{i\sigma}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathbb{D}$, $\sigma \in [0, 2\pi]$ *són biholomorfismes del disc.*

Observació 2.5. Vegem la següent igualtat, que ens ajudarà a demostrar la proposició que veurem a continuació. Sigui $\varphi_a^\sigma(z) = e^{i\sigma}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ amb $a, z \in \mathbb{C}$ i $\bar{a}z \neq 1$, aleshores

$$1 - |\varphi_a^\sigma(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \ . \tag{2.1}$$

Comprovem aquesta igualtat:

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_a^\sigma(z)|^2 &= 1 - \frac{a-z}{1-\bar{a}z}\overline{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}} = \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}{|1-\bar{a}z|^2} - \frac{|a|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |z|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1-|a|^2-|z|^2+|a|^2|z|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \ . \end{aligned}$$

Observació 2.6. Notem $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, definida com $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, que és la transformació del disc en el disc que canvia el 0 per a. Es pot comprobar fàcilment que $\varphi_a \circ \varphi_a = Id$.

Demostració. Hem de veure que $\varphi_a^\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi_a^\sigma : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ i que φ_a^σ és holomorfa i bijectiva.
Veure que $|\varphi_a^\sigma| \leqslant 1$ és equivalent a veure $|\varphi_a^\sigma|^2 \leqslant 1$. Com que $a, z \in \mathbb{D}$, $1 - |z|^2 > 0$ i $1 - |a|^2 > 0$, que per la equació (2.1) implica que $1 - |\varphi_a^\sigma(z)|^2 > 0$, i per tant, $|\varphi_a^\sigma(z)| < 1$, tal i com volíem.
Observem que si $a, z \in \partial\mathbb{D}$, totes les desigualtats que acabem de veure es converteixen en igualtats, i per tant tenim que, efectivament, $\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right| = 1$.

Per veure que és bijectiva observem és injectiva i exhaustiva. Vegem la exhaustivitat: veiem que $\varphi_a^\sigma(z) = e^{i\sigma}\frac{a-z}{1-\bar{a}z} = re^{i\alpha}$, amb $0 \leqslant r < 1$ i $\alpha \in [0, 2\pi)$ fixats sempre té solució.

$$\frac{a-z}{1-\overline{a}z} = re^{i(\alpha-\sigma)} \ .$$

Posant $b = re^{i(\alpha-\sigma)}$, l'equació equival a

$$z - a = b - \overline{a}zb \ ,$$

$$z(1+\overline{a}b) = b + a$$

i per tant

$$z = \frac{b+a}{1+\overline{a}b} = \frac{re^{i(\alpha-\sigma)}+a}{1+\overline{a}re^{i(\alpha-\sigma)}} \ .$$

Per tant, z queda perfectament determinat i φ_a^σ és exhaustiva.
La injectivitat és immediata, ja que totes les transformacions de Möbius ho són.
Finalment hem de veure que φ_a^σ és holomorfa. Però, tal i com veurem en el següent apartat d'aquest capítol, si $z = x + iy$, i definim

$$\frac{\partial \varphi_a^\sigma}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_a^\sigma}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_a^\sigma}{\partial y}\right) dz \ ,$$

veure que φ_a^σ és holomorfa és equivalent a veure

$$\frac{\partial \varphi_a^\sigma}{\partial \bar{z}} = 0 \ ,$$

cosa que és immediata. $\square$

Proposició 2.7. *Els automorfismes del disc queden perfectament determinats per la familia de funcions φ_a^σ que acabem de veure, és a dir:*
$Aut(\mathbb{D}) = \{\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : \varphi$ *és holomorfa i bijectiva*$\} = \{e^{i\sigma}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ a \in \mathbb{D},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Demostració. En la porposició anterior hem vist que φ_a^σ són automorfismes del disc, per tant, falta veure l'altra inclusió, és a dir que tots els automorfismes del disc són de la forma $\varphi_a(z) = e^{i\sigma}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ amb a fixat i $\sigma \in [0, 2\pi)$.
Sigui $\Phi \in Aut(\mathbb{D})$, suposem $\Phi(0) = a \in \mathbb{D}$, aleshores podem considerar l'automorfisme del disc $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, que permuta a i 0. Ara composant $F := \varphi_a \circ \Phi$ tenim que $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ i $F(0) = \varphi_a(\phi(0)) = \varphi_a(a) = 0$, és a dir es compleixen les hipòtesis del Lema de Schwarz. Per tant, $|F(z)| \leqslant |z|$, $z \in \mathbb{D}$.
Ara, considerem la inversa $G := F^{-1}$, que és holomorfa a $\mathbb{D}$. Observem que $G = \Phi^{-1} \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ i $G(0) = 0$, per tant, podem tornar a aplicar el lema de Schwarz i deduir que $|G(\zeta)| = |F^{-1}(\zeta)| \leqslant |\zeta|$, $\zeta \in \mathbb{D}$. I sent $\zeta = F(z)$, aquesta darrera desigualtat en térmes de z és $|z| \leqslant |F(z)|$, $z \in \mathbb{D}$.
Hem vist, $|F(z)| \leqslant |z|$ i $|z| \leqslant |F(z)|$, per tant, només pot ser $|F(z)| = |z|$. Ara, F compleix la igualtat del Lema de Schwarz i, per tant, tenim $F(z) = e^{i\theta}z$, amb θ fixat. Així doncs, podem donar de forma explícita Φ : dient $b = e^{i\theta} \in \mathbb{D}$, tenim

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \varphi_a^{-1}(F(z)) = \varphi_a(F(z)) &= \frac{a - F(z)}{1-\bar{a}F(z)} = \frac{a - e^{i\theta}z}{1-\bar{a}e^{i\theta}z} \\ &= e^{i\theta}\frac{ae^{-i\theta}-z}{1-\bar{a}e^{i\theta}z} = e^{i\theta}z\frac{b-z}{1-\bar{b}z} = \varphi_b^\theta(z) \ .\end{aligned}$$

$\square$

2.1.2 Funcions harmòniques

En aquesta subsecció començarem parlant de les funcions harmòniques per introduïr la propietat de la mitjana i, posteriorment, parlar del nucli de Poisson i la integral de Poisson i veure'n el comportament a la frontera del disc unitat.

Sigui z un nombre complex tal que $z = x + yi$ amb $x, y \in \mathbb{R}$, de manera que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{z + \bar{z}}{2} \,.$$

Diferenciant

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \qquad \text{i} \qquad dy = \frac{dz + d\bar{z}}{2i} = -i\frac{dz + d\bar{z}}{2} \,.$$

Sigui $f = f(x, y)$ una funció diferenciable respecte x i y; tenim

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dz + d\bar{z}}{2} - i\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}. \end{aligned}$$

Definint

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz$$

ens queda

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \,.$$

És immediat comprovar que les equacions de Cauchy-Riemann per a $f = u + iv$ equivalen a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Definició 2.8. *Sigui Ω un obert de $\mathbb{C}$. Una funció $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ es diu que és harmònica en Ω si*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \,.$$

Observació 2.9. En termes de la variable complexa z, tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta u \,. \end{aligned}$$

Per tant, $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

Vegem tot seguit la relació entre funcions harmòniques i funcions d'holomorfes.

Teorema 2.10. *Sigui D un domini de $\mathbb{C}$.*
(a) Si f és holomorfa en D, aleshores $u = Re(f)$ és harmònica en D.
(b) Si u és harmònica en D i D és simplement connex, aleshores $u = Re(f)$ per alguna f holomorfa en D. A més f és única llevat d'afegir-li una constant.

Demostració. (a) Sigui $f = h + ik$. Per les equacions de Cauchy-Riemann tenim que $h_x = k_y$ i $h_y = -k_x$. Per tant,

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} = k_{yx} - k_{xy} = 0 \ .$$

(b) Si $h = Re(f)$, per alguna f funció holomorfa, escrivim $f = h + ki$, aleshores

$$f' = h_x + ik_x = h_x - ih_y \ . \tag{2.2}$$

Aleshores, si f existeix, f' està completament determinada per h, i per tant, f és única llevat de sumar-li una constant. L'equació (2.2) també ens indica com construïr la funció f. Definim $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ de la següent manera

$$g = h_x - ih_y \ .$$

Aleshores $g \in \mathcal{C}^1(D)$ i g satisfà les equacions de Cauchy-Riemann ja que

$$h_{xx} = -h_{yy} \qquad\qquad h_{xy} = h_{yx} \ .$$

Per tant, g és holomorfa en D. Fixem $z_0 \in D$, definim $f : D \to \mathbb{C}$ fent

$$f(z) = h(z_0) + \int_{z_0}^{z} g(w)dw \ ,$$

on es límits d'integració estan ben definits ja que D és un domini simplement connex. A més, per aquesta mateixa raó, el teorema de Cauchy assegura que la integral no depèn del camí triat. Per tant, f és holomorfa en D i $f' = g = h_x - ih_y$. Escrivint $u = Re(f)$, tenim

$$u_x - iu_y = f' = h_x - ih_y \ ,$$

i per tant, $(u-h)_x \equiv 0$ i $(u-h)_y \equiv 0$. Aleshores $u - h$ és constant en D, i escrivint $z = z_0$ tenim que la constant és 0. Per tant, $h = Re(f)$. □

El resultat que veurem a continuació ens diu que l'harmonicitat es preserva per a transformacions holomorfes.

Proposició 2.11. *Sigui $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una funció harmònica i sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa amb $Im(f) \subset \Omega$. Aleshores $u \circ f$ és una funció harmònica.*

Demostració. Tenint en compte que f és holomorfa i aplicant la regla de la cadena:

$$\Delta\left(u \circ f\right)(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u(f(z))\right] = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} f(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\right] = 0 \ .$$

□

La propietat que veurem a continuació ens caracteritzarà les funcions harmòniques, tal com veurem al Teorema 2.19.

Definició 2.12. *Sigui u una funció contínua en un obert Ω. Diem que u té la propietat de la mitjana si per a tot disc $D(z,r)$ tal que $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$ es té*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta \ .$$

Proposició 2.13. *Sigui Ω obert de $\mathbb{C}$. Tota funció harmònica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ té la propietat de la mitjana.*

Demostració. Pel Teorema 2.10, que u sigui una funció harmònica és equivalent a dir que, localment, és la part real d'una funció holomorfa $f(z) = u(z) + iv(z)$ on $u(z) = Re(f)$ i $v(z) = Im(f)$. Ara, agafant $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ amb $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$, utilitzant la fórmula de Cauchy tenim

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi.$$

Parametritzant $\xi = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi]$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta,$$

Separant part real i part imaginària i igualant parts reals obtenim finalment

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})d\theta \ .$$

□

2.1.3 El nucli i la representació de Poisson

En aquest apartat veurem la trasformació de Poisson que permet, per una part, representar funcions harmòniques, i per l'altra produïr funcions harmòniques a un disc amb valors frontera prefixats.
Sigui u una funció que té la propietat de la mitjana. Podem normalitzar fent $z_0 = 0$ i $r = 1$, és a dir, reescalar el disc on prenem la propietat de la mitjana per tal que sigui el disc unitat:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \ .$$

Fixem u i apliquem el que acabem de veure a $u \circ \varphi_z$ que, per la Proposició 2.11, és harmònica:

$$u(z) = (u\circ\varphi_z)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u\circ\varphi_z)(e^{i\theta})d\theta \ .$$

Per fer el canvi de paràmetre $\varphi_z(e^{i\theta}) = e^{it}$, hem de calcular-ne el jacobià. Tenim

$$\varphi_z(e^{i\theta}) = \frac{z - e^{i\theta}}{1-\bar{z}e^{i\theta}} = e^{it} \ .$$

Aïllant $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \frac{e^{it} - z}{e^{it}\bar{z} - 1} = \varphi_z^{-1}(e^{i\theta}) \ ,$$

derivant i aïllant

$$ie^{i\theta}d\theta = \frac{ie^{it}(|z|^2 - 1)}{(e^{it}\bar{z} - 1)^2}dt$$

$$d\theta = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{e^{it}(|z|^2 - 1)}{(e^{it}\bar{z} - 1)^2}dt = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}dt \ .$$

Per tant, el canvi de paràmetre en la integral inicial ens queda:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}dt \ . \tag{2.3}$$

Definició 2.14. ***(Nucli de Poisson).*** *Donats $z \in \mathbb{D}$ i $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$, definim el nucli de Poisson com*

$$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \ .$$

Observació 2.15. (1) El núcli de Poisson és la part real d'una funció holomorfa:

$$\begin{aligned} Re\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] &= \frac{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} + \frac{e^{-it}+\bar{z}}{e^{-it}-\bar{z}}}{2} \\ &= \frac{1 - e^{it}\bar{z} + e^{-it}z - |z|^2 + 1 + \bar{z}e^{it} - ze^{-it} - |z|^2}{2(e^{it} + z)(e^{-it} + \bar{z})} \\ &= \frac{1 + |z|^2}{1 - \bar{z}e^{it} - ze^{-it} + |z|^2} = P(z, e^{it}) \ . \end{aligned}$$

Com que $H(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ és holomorfa en $\mathbb{D}$, tenim que, automàticament, $P(z, e^{it})$ és una funció harmònica.
(2) Escrivint $z = re^{i\theta}$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ens queda l'expressió

$$P(re^{i\theta}, e^{it}) = P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \ . \tag{2.4}$$

(3) Podem redimensionar el nucli de Poisson per a qualsevol disc $D(z_0, r)$ traslladant 0 a z_0 i reescalant r a 1.

La integral que apareix a (2.3) també té sentit si f és integrable a $\partial\mathbb{D}$.

Definició 2.16. ***(Integral de Poisson.)*** *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, definim la integral de Poisson de f, $P[f] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, com*

$$P[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})f(e^{it})dt \, .$$

És a dir, podem agafar una funció integrable a la frontera del disc i construir una nova funció que estigui definida per tot $\mathbb{D}$. Per (2.3), quan f és harmònica a un entorn de $\mathbb{D}$, tenim $P[f](z) = f(z), \ z \in \mathbb{D}$.

Teorema 2.17. *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, aleshores la integral de Poisson $P[f]$ és una funció harmònica en $\mathbb{D}$.*

Demostració. La funció $P[f](z)$ és harmònica si i només si $0 = \Delta P[f](z)$, que és cert ja que

$$\Delta P[f](z) = \Delta \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \Delta P(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \, .$$

□

Observació 2.18. La integral de Poisson també es pot interpretar com una convolució amb el núcli de Poisson: si $z = re^{i\theta}$

$$P[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}, e^{it}) f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \, .$$

Una primera propietat que surt de la representació de Poisson és l'equivalència entre harmonicitat i propietat de la mitjana.

Teorema 2.19. *Sigui $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Són equivalents:*
(a) u és contínua en Ω i satisfà la propietat de la mitjana.
(b) u és harmònica en Ω.

Demostració. (b) $\Rightarrow$ (a) Vist a la Proposició 2.19.
(a) $\Rightarrow$ (b):
Fixat $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, podem considerar la transformada de Poisson al disc $\overline{D(a,r)}$, és a dir, $P[u]$. Clarament, tenim que $P[u]$ és contínua i harmònica en $\overline{D(a,R)}$ i $P[u]|_{\partial D(a,R)} = u$ (fórmula (2.3)). Definim $v := u - P[u]$, $m := sup\{v(z) \mid z \in \overline{D(a,R)}\} = \max\{v(z) \mid z \in \overline{D(a,R)}\}$. Suposem que $m > 0$ i definim $E = \{z \in \overline{D(a,R)} \mid v(z) = m\}$. Com que $P[u]$ i u coincideixen a la frontera del disc, $v|_{\partial D(a,R)} = 0$ i com que E és un subconjunt compacte de $D(a,R)$, aleshores existeix $z_0 \in E$ tal que

$$|z_0 - a| \geq |z - a| \quad \forall z \in E.$$

Per tot r prou petit, al menys la meitat del cercle amb centre a z_0 i radi r està fora de E. Per tant, els corresponents valors sobre la frontera de $D(z_0, r)$ són tots menors que $m = v(z_0)$. Però, com que v té la propietat de la mitjana, ja que tant u com $P[u]$:

$$v(z_0) = \int_{\partial D(z_0,r)} v(t) dt \, .$$

Però la part esquerra és m i la dreta és estríctament menor a m. Per tant tenim una contradicció que ve de suposar $m > 0$, per tant $m = 0$ i $v \leqslant 0$. Fent el mateix raonament a $-v$, arribarem a la mateixa contradicció i per tant només pot ser que $v = 0$, és a dir $u = P[u]$ en $\overline{D(a,r)}$. Però com que $\overline{D(a,r)}$ és un disc tancat qualsevol, u és harmònica en tot Ω. □

2.1.4 Comportament a la frontera de la integral de Poisson

Ens interessa entendre el comportament d'aquestes funcions, en particular voldrem estudiar-ne el comportament a la frontera. Per això estudiarem el comportament del nucli de Poisson.

Teorema 2.20. *El nucli de Poisson té les següents propietats:*
(a) $P(z, e^{i\theta}) \geq 0$ *per* $r \in [0, 1]$ *i* $z \in \mathbb{D}$.
(b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})dt = 1$, *per tot* $z \in \mathbb{D}$.
(c) $P(z, e^{it}) = P(z, e^{-it})$, *que és directe de la Definició 2.14.*
(d) $P_r(t) \leq P_r(\delta)$ *per* $0 \leq \delta \leq |t| \leq \pi$.
(e) Per cada $\delta > 0$, $\int_{|t-\theta|\geq\delta} P(z, e^{it})dt \to 0$ *quan* $r \to 1$, *per tot* $z \in \mathbb{D}$.

Demostració. L'apartat (a) és directe. Veiguem el (b):
Com que $u(z) = 1$ és una funció harmònica a tot $\mathbb{C}$, compleix la fórmula (2.3), i aleshores $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})dt = 1$.
El (c) l'obtenim de canviar $\cos(t) = \cos(-t)$ en la definició de núcli de Poisson 2.4.
Donat que $\cos(t)$ és decreixent en $[0, \pi]$ i, tal i com hem dit, simètric, tenim (d).
Només ens queda veure l'(e): per (d)

$$\begin{aligned}\int_{\pi\geq|t-\theta|\geq\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})dt &= \int_{\pi\geq|t-\theta|\geq\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt \\ &\leqslant \int_{\pi\geq|t-\theta|\geq\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2}dt\end{aligned}$$

Suposem que $t - \theta \geq 0$, aleshores $\delta + \theta \leqslant t \leqslant \pi + \theta$ i la integral ens queda:

$$\int_{\delta+\theta}^{\pi+\theta} P_r(\delta)dt = (\pi - \delta)P_r(\delta)\,.$$

D'altra banda, si $t - \theta \leqslant 0$ aleshores $\theta - \delta \geq t \geq \theta - \pi$ i la integral ens queda:

$$\int_{\theta-\pi}^{\theta-\delta} P_r(\delta)dt = (\pi - \delta)P_r(\delta)\,.$$

En ambdós casos ens dóna el mateix. Finalment:

$$\lim_{r\to1^-}\int_{|\theta-t|\geq\theta} P(re^{i\theta}, e^{it})dt \leqslant 2\lim_{r\to r^-}(\pi-\delta)P_r(\delta) = (\pi-\delta)\frac{0}{2[1-\cos\delta]} = 0\,.$$

□

A partir d'aquestes propietats tenim el primer resultat sobre comportament a la frontera de la transformada de Poisson.

Teorema 2.21. *Sigui* $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ *una funció contínua, aleshores*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} P[f](z) = f(e^{i\theta}) \quad \textit{per tot } \theta \in [0, 2\pi).$$

Demostració. Com que f és una funció uniformement contínua en $[0, 2\pi]$ tenim que per tot $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $|t - \theta| < \delta$ amb $\theta \in [0, 2\pi]$ aleshores $|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| < \frac{\epsilon}{2}$. Notant $z = re^{i\theta}$), i utilitzant que $\int_{\partial\mathbb{D}} P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi} = 1$ (Teorema 2.20 (b)) tenim

$$\begin{aligned}\left|P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\right| &= \left|\int_{\partial\mathbb{D}} P(re^{i\theta}, e^{it})f(e^{it})\frac{dt}{2\pi} - f(e^{i\theta})\right| \\ &= \left|\int_{\partial\mathbb{D}} P(re^{i\theta}, e^{it})(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{dt}{2\pi}\right| .\end{aligned}$$

Fixat ϵ, separem en dos la integral: la part propera a θ i la part llunyana. A la part propera utilitzem la continuïtat, i tenim

$$\begin{aligned}\left|P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\right| &\leqslant \left|\int_{|t-\theta|<\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{dt}{2\pi}\right| \\ &+ \left|\int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{dt}{2\pi}\right| \\ &\leqslant \int_{|t-\theta|<\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})|\frac{dt}{2\pi} \\ &+ \int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})(|f(e^{it})| + |f(e^{i\theta})|)\frac{dt}{2\pi} \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2||f||_{\mathbb{L}^\infty(\partial\mathbb{D})} \int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi} .\end{aligned}$$

Ara, utilitzant l'apartat (e) del Teorema 2.20, triem un $r = |z|$ prou proper a 1 de manera que $\int_{|t-\theta|>\delta} P(re^{i\theta}, e^{it})\frac{dt}{2\pi} < \frac{\epsilon}{4||f||_{\mathbb{L}^\infty(\partial\mathbb{D})}}$ i la desigualtat ens queda

$$\left|P[f](re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

□

Corol·lari 2.22. *Si $f \in C(\partial\mathbb{D})$ és contínua a la frontera del disc i definim $E[f]$ a $\mathbb{D}$ com*

$$E[f](z) := \begin{cases} P[f](z) & si \quad z \in \mathbb{D} \\ f(z) & si \quad z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

aleshores $E[f](z)$ és harmònica a $\mathbb{D}$ i contínua a tot $\overline{\mathbb{D}}$.

A continuació volem veure una propietat molt important de la integral de Poisson: per a tota $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ es té $\lim_{r\to 1^-} P[f](e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ per quasi tot $\theta \in [0, 2\pi]$. Per fer-ho, hem de veure alguns resultats auxiliars.

Definició 2.23. *Sigui $\varphi \in L^1[0, 2\pi]$, fixat un $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, diem que θ_0 és un punt de Lebesgue de φ si*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} |\varphi(t) - \varphi(\theta_0)|dt = 0 .$$

Proposició 2.24. *Sigui φ una funció contínua en θ_0, aleshores θ_0 és un punt de Lebesgue de φ.*

Demostració. Com que φ una funció contínua en θ_0, tenim que per tot $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que, si $|t - \theta_0| < \delta$, aleshores $|\varphi(t) - \varphi(\theta_0)| < \epsilon$. Per tant,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} |\varphi(t) - \varphi(\theta_0)|dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} \epsilon dt = \epsilon \ .$$

□

Teorema 2.25. *Sigui $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Si θ_0 és un punt de Lebesgue de f, aleshores*

$$\lim_{r\to 1} P[f](re^{i\theta_0}) = f(e^{i\theta_0}) \ .$$

En particular, si f és contínua a θ_0, aleshores es compleix l'equació anterior.

Pel Teorema de diferenciació de Lebesgue (que queda fora de l'àmbit d'aquest treball), si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, gairebé tot punt és de Lebesgue de f. Per tant, aquest resultat ens assegura l'existència del límit radial de f a gairebé tot punt de la frontera de $\mathbb{D}$.

Demostració. Sigui $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, podem suposar, fent una rotació si cal, que $\theta_0 = 0$. Definint $\varphi(t) = f(e^{it})$ i

$$A := \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \varphi(s)ds \ ,$$

aleshores volem veure que $\lim_{r\to 1} P[\varphi](r) = A$. Observem que

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \varphi(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} (\varphi(s) - \varphi(0))ds + \varphi(0) \ .$$

Per tant, volem veure que

$$\lim_{r\to 1} P[f](r) - A = 0 \ .$$

Pel Teorema 2.20 (b)

$$P[f](r) - A = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, e^{it})(\varphi(t) - A)\frac{dt}{2\pi} \ .$$

Procedirem fent integració per parts, agafant $P(r, e^{it})$ i $(\varphi(t) - A)$. Tenim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P(r, e^{it}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1 - r^2}{(r - e^{it})(r - e^{-it})}\right] = (1 - r^2)\frac{e^{it}i(r - e^{-it}) - (r - e^{it})ie^{-it}}{(r - e^{it})^2(r - e^{-it})^2} \\
&= (1 - r^2)\left[\frac{ie^{it}}{(r - e^{it})^2(r - e^{-it})^2} - \frac{ie^{-it}}{(r - e^{it})^2(r - e^{-it})^2}\right] \\
&= \frac{1 - r^2}{|r - e^{it}|^2}\left(\frac{ie^{it}}{r - e^{it}} - \frac{ie^{-it}}{r - e^{-it}}\right) = \frac{1 - r^2}{|r - e^{it}|^2} i \left(\frac{e^{it}}{r - e^{it}} - \frac{e^{-it}}{r - e^{-it}}\right) \\
&= -2\frac{1 - r^2}{|r - e^{it}|^2} Im\left(\frac{e^{it}}{r - e^{it}}\right) \ .
\end{aligned}$$

Això dóna directament l'acotació

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\right| &\leqslant 2\frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^2}\left|Im\left(\frac{e^{it}}{r-e^{it}}\right)\right| \\ &\leqslant 2\frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^2}\frac{1}{|r-e^{it}|} = 2\frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^3}\ .\end{aligned} \tag{2.5}$$

Per tant, recuperant la integració per parts ens queda

$$P[f](r)-A = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt\right\}\ .$$

Anem a veure que aquesta integral tendeix a 0 quan r tendeix a 1. Vegem que el primer sumand de la integral tendeix a 0. Utilitzant que $P(r,i) = \frac{1-r^2}{|r-i|^2} = \frac{1-r^2}{r^2+1} \xrightarrow{r\to 1} 0$ i que $\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - 2A\pi$ és acotada,

$$\begin{aligned}&\left[P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = P(r,i)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi ds - A(-\pi)\right) - P(r,i)(0-A\pi) \\ &= P(r,i)\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - 2A\pi\right) = \frac{1-r^2}{|r-i|^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi ds - 2A\pi\right) \xrightarrow{r\to 1} 0\ .\end{aligned}$$

I, per tant, la integral ens ha quedat

$$\lim_{r\to 1} P[f](r) - A = -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt\ .$$

Ara només falta veure que la segona part de la integral també tendeix a 0. Però observem que, utilitzant l'acotació (2.5), la part amb $|t| > \delta > 0$ d'aquesta integral és despreciable

$$\begin{aligned}\left|\int_{|t|>\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt\right| &\leqslant 2\int_{|t|>\delta}\frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^3}(||\varphi||_1 + |A|\pi)dt \\ &\leqslant 2\int_{|t|>\delta}\frac{1-r^2}{\delta^3}(||\varphi||_1 + |A|\pi)dt \xrightarrow{r\to 1} 0\ .\end{aligned}$$

Per tant, el límit ara ens ha quedat de la següent manera

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 1} P[f](r) - A = -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt + \int_{0}^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt\right]\ .\end{aligned}$$

Agafem només el tros de la integral que va de $-\delta$ a 0 i fem el canvi de variable $x = -t$

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(s)ds - At\right)dt &= \int_{\delta}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{-ix})\left(\int_{-\pi}^{-x}\varphi(s)ds + Ax\right)(-dx) \\ &= \int_{0}^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{-ix})\left(\int_{-\pi}^{-x}\varphi(s)ds + Ax\right)dx\ .\end{aligned}$$

Per l'expressió de la derivada del nucli de Poisson obtinguda anteriorment

$$\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{-ix}) = -2\frac{1-r^2}{|r-e^{ix}|^2}Im\left(\frac{e^{-ix}}{r-e^{-ix}}\right) = -2\frac{1-r^2}{|r-e^{ix}|^2}Im\left(\overline{\frac{e^{ix}}{r-e^{ix}}}\right)$$
$$= 2\frac{1-r^2}{|r-e^{ix}|^2}Im\left(\frac{e^{ix}}{r-e^{ix}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{ix}) \ .$$

Per tant, tenim

$$\int_{-\delta}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(s)ds - At\right)dt = -\int_{0}^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{ix})\left(\int_{-\pi}^{-x}\varphi(s)ds + Ax\right)dx \ .$$

Recuperant l'última expressió del límit tenim

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 1}(P[f](r) - A) = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_0^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At\right)dt \\
&+ \int_0^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds - At - \int_{-\pi}^{t}\varphi(s)ds + At\right)dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_0^{\delta}\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})\left(\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds - 2At\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_0^{\delta} -\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})2t\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds - A\right)dt \ .
\end{aligned}$$

Per les hipòtesis, com que $\theta_0 = 0$ és un punt de Lebesgue de f, fixat un $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que si $0 < t \leqslant \delta$ aleshores $\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds - A\right| < \epsilon$. Per tant, utilitzant la fórmula (2.5), per $t \in [0, 2\pi]$ tenim $-\frac{\partial P}{\partial t} \geq 0$, aleshores podem acotar la integral del límit anterior:

$$\left|\int_0^{\delta} -\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})2t\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds - A\right)dt\right| \leqslant \int_0^{\delta} -\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})2\,t\,\epsilon\, dt \ .$$

I fent integració per parts, agafant t i $\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})dt$, ens queda

$$\left|\int_0^{\delta} -\frac{\partial}{\partial t}P(r,e^{it})2t\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\varphi(s)ds - A\right)dt\right| = \epsilon\left\{[-tP(r,e^{it})]_0^{\delta} + \int_0^{\delta}P(r,e^{it})dt\right\}$$
$$\leqslant \epsilon\left\{-\delta P(r,e^{i\delta}) + \int_0^{\delta}P(r,e^{it})dt\right\} = \epsilon(0+2\pi) \leqslant 2\epsilon\pi \ .$$

Amb això hem acabat la demostració. □

Observació 2.26. Un anàleg del teorema anterior també es compleix si canviem f per una mesura μ finita d $\partial\mathbb{D}$, és a dir, si considerem $P[\mu](z) = \int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})d\mu(e^{i\theta})$.

Es diu que $P[f]$ és la solució del problema de Dirichlet a $\mathbb{D}$.

2.1.5 Funcions subharmòniques

En aquesta secció parlarem de les funcions subharmòniques, en veurem alguns exemples molt importants, que utilitzarem més endavant quan fem la factorització, i en veurem algunes propietats.

Definició 2.27. ***(Funció subharmònica).*** *Una funció $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ és subharmònica si compleix:*
(a) $-\infty \leqslant u(z) < \infty, \forall z \in \Omega$.
(b) u és semicontínua superior en Ω. És a dir, el conjunt $\{x \in \Omega | u(x) < \alpha\}$ és obert $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
(c) Per tot $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$,

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \, .$$

(d) No existeix cap $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ tal que la integral de (c) és $-\infty$.

Pel nostre estudi, el Teorema que veurem a continuació ens presenta l'exemple més important de funcions subharmòniques.

Teorema 2.28. *Si Ω és un domini de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ i $f \not\equiv 0$ aleshores $\log|f|$ és una funció subharmònica a Ω.*

Demostració. Definint $\log|0| = -\infty$ aconseguim que $\log|f|$ sigui una funció subharmònica a tot Ω, ja que a $\Omega -$ {zeros de f} és harmònica per ser la part real de la funció holomorfa $\log f$, i en els zeros d'f serà subharmònica per com l'hem definit. □

L'objectiu en aquest apartat és veure que la composició d'una funció subharmònica amb una funció convexa és subharmònica. Per poder demostrar això necessitem refrescar la Desigualtat de Jensen.

Definició 2.29. ***(Funció convexa).*** *Donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diem que f és convexa en $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si per $a < s < t < u < b$*

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(y) - f(t)}{u - t} \, .$$

Teorema 2.30. ***(Desigualtat de Jensen).*** *Sigui (Ω, Σ, μ) un espai de probabilitats. Sigui $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció μ-mesurable i sigui $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció convexa. Aleshores*

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) \, d\mu.$$

Demostració. Per la definició de convexa en (a, b) tenim que per $a < s < t < u < b$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \, .$$

Aleshores, fixat $t_0 \in (a,b)$, existeix β tal que

$$\sup_{t<t_0} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} \leqslant \beta \leqslant \inf_{t>t_0} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} \ .$$

Per tant, per tot $t \in (a,b)$ es compleix

$$(t-t_0)\beta \leqslant \varphi(t)-\varphi(t_0) \ .$$

Ara, triant $t = f(x)$ i $t_0 = \int_\Omega f(x)d\mu(x)$ tenim

$$\left(f(x) - \int_\Omega f(x)d\mu(x)\right)\beta \leqslant \varphi(f(x)) - \varphi\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) \ .$$

Integrant als dos costats i recordant que t_0 és una constant, ens queda:

$$\left(\int_\Omega (f(x)-t_0)\, d\mu(x)\right)\beta \leqslant \int_\Omega (\varphi(f(x)) - \varphi(t_0))\, d\mu(x) \ .$$

Tenint en compte que (Ω, Σ, μ) és un espai de probabilitats, i per tant, $\int_\Omega d\mu(x) = 1$, i tornant a escriure t_0 com la integral:

$$0 = \left(\int_\Omega f(x)d\mu(x) \ - \int_\Omega f(x)d\mu(x)\right)\beta \leqslant \int_\Omega \varphi(f(x))d\mu(x) - \varphi\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) \ .$$

Finalment

$$\varphi\left(\int_\Omega f(x)d\mu(x)\right) \leqslant \int_\Omega \varphi(f(x))d\mu(x) \ .$$

□

La Proposició que veurem a continuació, ens diu que la composició de una funció u subharmònica amb una φ creixent i convexa, produeix una funció subharmònica. Això ens permetrà generar molts exemples nous de funcions subharmòniques.

Proposició 2.31. *Siguin $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funció subharmònica en Ω i $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció monòtona creixent i convexa. Aleshores $\varphi \circ u$ és subharmònica.*

Demostració. Com que u és subharmònica, si $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ aleshores

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta \ .$$

Utilitzant que φ és contínua i creixent

$$\varphi(u(z_0)) \leqslant \varphi\left(\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right) \ .$$

Ara, aplicant la desigualtat de Jensen a la funció convexa φ i la mesura de probabilitat $d\mu(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ a $[0, 2\pi]$,

$$\varphi(u(z_0)) \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(u(z+re^{i\theta})\right)\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u(z+re^{i\theta}))d\theta \ ,$$

tal com volíem. Veure que també es compleixen els altres de la definició de funció subharmònica és trivial. □

Proposició 2.32. *Si* $f \in H(\Omega)$*, llavors* $u(z) = |f(z)|^p$*,* $p > 0$*, és una funció subharmònica a* Ω*.*

Demostració. Apliquem la proposició anterior a la funció convexa $\varphi(t) = e^{pt}$ i la funció subharmònica $u(z) = \log|f(z)|$; tenim que:

$$(\varphi \circ u)(z) = e^{p \log|f(z)|} = |f(z)|^p$$

és subharmónica. □

Ara passarem a veure la propietat que dóna nom a les funcions subharmòniques.

Lema 2.33. *Sigui* u *una funció contínua i subharmònica en* Ω*, sigui* K *un subconjunt compacte de* Ω *i sigui* U *una funció contínua i real en* K *i harmònica a l'interior* B *de* K *tal que*

$$u(z) \leqslant U(z) \quad a\ la\ frontera\ de\ K.$$

Aleshores $u(z) \leqslant U(z)$ *a tot* K*.*

En particular, si u és subharmònica i $u(z) = U(z)$ a la frontera d'un disc, aleshores $u \leqslant U$ al disc.

Demostració. Sigui $v := u - U$, i suposem, per arribar a contradicció, que $v(z) > 0$ per algun $z \in B$. Com que v és contínua en K, té un màxim $m := \max\{v(z)|z \in K\}$ i $m > 0$. Definim $E := \{z \in K|v(z) = m\}$. Com que $v \leqslant 0$ a la frontera de K, el conjunt E és un subconjunt compacte no buit de B. Sigui z_0 un punt de la frontera de E. Aleshores per algun r prou petit $\overline{D(z_0, r)} \subset B$ (és tancat per definició i acotat per ser dins de K). Però hi ha una part de la frontera de $\overline{D(z_0, r)}$ que està fora de E. Aleshores,

$$v(z_0) = m > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta \ ,$$

i, per tant, v no és subharmònica en B. Però v és la resta d'una funcio subharmònica amb una d'harmònica, per tant v és subharmònica. Per tant hem trobat una contradicció. □

Tot seguit enunciarem una última propietat que més endavant farem servir amb $u = |f|^p$, f holomorfa.

Teorema 2.34. *Sigui* u *una funció subharmònica en* $\mathbb{D}$*, i sigui*

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta \ , r < 1.$$

Aleshores $\varphi(r)$ *és una funció creixent.*

Demostració. Sigui $0 < r_1 < r_2 < 1$. Sigui U una funció contínua en $\overline{D(0, r_2)}$ i harmònica a $D(0, r_2)$ amb $U|_{\partial D(0,r)} = u$, és a dir la transformació de Poisson de u a $D(0, r)$. Per la proposició anterior, $u \leqslant U$ en $\overline{D(0, r_2)}$. Per tant,

$$\varphi(r_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_1 e^{i\theta})d\theta = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_2 e^{i\theta})d\theta = \varphi(r_2) \ .$$

□

2.2 Transformada de Laplace

En aquest apartat veurem la definició i algunes propietats de la transformada de Laplace. En particular, ens interessa perquè transforma la convolució en un producte de funcions, la qual cosa permet reformular el Teorema de Titchmarsh.

Definició 2.35. *Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funció integrable ($f \in L^1(\mathbb{R})$) i tal que $\alpha(f) > -\infty$. Definim la seva transformada de Laplace $\mathcal{L}f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ com:*

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt\,.$$

Observem que la transformada de Laplace és ben definida en a $\mathbb{H}$, és a dir, la integral convergeix si z és del semiplà $\mathbb{H}$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-zt}|dt = \int_{\alpha(f)}^{\infty} |f(t)|e^{-tRez}dt\,.$$

Essent $Rez > 0$, aleshores $e^{-tRez} \leqslant e^{-\alpha(f)Rez}$, i per tant

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant e^{-\alpha(f)Rez} \int_{\alpha(f)}^{\infty} |f(t)|dt = e^{-\alpha(f)Rez} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = e^{-\alpha(f)Rez}||f||_{L_1}\,.$$

En general, utilitzarem l'acotació

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant Ae^{-\alpha(f)Rez} \qquad z \in \mathbb{H}\,. \tag{2.6}$$

Observació 2.36. Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i tal que $a = \alpha(f) > -\infty$. Podem convertir f en una funció g tal que $\alpha(g) = 0$ i que conservi les mateixes propietats que f, fent una translació $g(t) = f(t-a)$. Clarament, tindrem, per la fórmula anterior, que

$$\mathcal{L}g(z) = \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-zt}dt$$

és acotada en $\mathbb{H}$. Això ens diu que no perdem generalitat suposant que $\alpha(f) = 0$, que és el que farem a partir d'ara.

Teorema 2.37. ***(Teorema d'unicitat de la transformada de Laplace).*** *Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tals que $\alpha(f) = \alpha(g) = a$. Si $\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}g(z)$ per tot $z \in \mathbb{C}$ amb $Re(z) > a$, aleshores $f(t) = g(t)$ per gairebé tot $t \in \mathbb{R}$.*

Aquest és un resultat ben conegut que queda fora de l'àmbit d'aquest treball. Per completitud, donem una demostració per a funcions contínues a trossos donada per Don Marshall [1].

Demostració. Observem que si $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ per gairebé tot t, aleshores $\mathcal{L}(f-g) = 0$ per gairebé tot t. Per tant és suficient veure que si $\mathcal{L}f = 0$ per gairebé tot t, aleshores $f \equiv 0$ per gairebé tot t. A més, per l'observació anterior, podem suposar $\alpha(f) = a = 0$ sense pèrdua de generalitat.

Suposem doncs $\mathcal{L}f(z) = 0$. Fixant $s_0 > 0$, prenem els valors $z = s_0 + n + 1, \quad n = 0, 1, ...$ i fem seguidament el canvi de variable $u = e^{-t}$; ens queda:

$$0 = \mathcal{L}f(s_0 + n + 1) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts_0}e^{-nt}e^{-t}dt = \int_0^1 u^n(f(-\ln\ u)u^{s_0})du\,.$$

Sigui $h(u) := f(-\ln\ u)u^{s_0}$. Tenim que h és contínua a trossos en $(0, 1]$, i com que

$$\lim_{u\to 0} h(u) = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-s_0 t} = 0\,,$$

podem definir $h(u) = 0$ de manera que h serà contínua a trossos en $[0, 1]$.
Volem deduir de la igualtat anterior que $h \equiv 0$. Tenim doncs que, donat $p(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$ un polinomi qualsevol,

$$\int_0^1 p(u)h(u)du = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 u^n h(u)du = 0\,.$$

Ara, pel teorema de Weierstrass, aproximem h uniformement per una sucessió de polinomis p_n de manera que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} ||p_n - h||_\infty = \lim_{n\longrightarrow\infty} (\max_{t\in[0,1]} |p_n(t) - h(t)|) = 0\ .$$

Per tant:

$$0 = \int_0^1 p_n(u)h(u)du \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 h(u)h(u)du = \int_0^1 h^2(u)du\,.$$

Per tant, com que h^2 és positiva, tenim $h^2(u) = 0$ q.p.t. $u \in [0, 1]$. A més h és contínua q.p.t $u \in [0, 1]$, per tant $h \equiv 0$ q.p.t. $u \in [0, 1]$. Clarament doncs, $f \equiv 0$ q.p.t. t tal i com volíem veure. $\square$

Lema 2.38. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ amb suport compacte, aleshores $\mathcal{L}f(z)$ és una funció entera.*

Demostració. Hem de veure que, efectivament, $\mathcal{L}f(z)$ té sentit en tot $\mathbb{C}$ (i), i que és holomorfa (ii). Sigui $[a, b]$ tal que el suport compacte de f $K \subset [a, b]$.
(i) Acotant directament,

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant \int_a^b |f(t)|e^{-Re\,z\,t}dt\,.$$

Si $Rez > 0$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant \int_a^b |f(t)|e^{-aRez}dt = e^{-aRez}\int_a^b |f(t)|dt\,.$$

Si $Rez < 0$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant \int_a^b |f(t)|e^{-bRez}dt = e^{-bRez}\int_a^b |f(t)|dt = e^{\max(|a|,|b|)Re\,z}||f||_{L^1(\mathbb{R})}\ .$$

En general, podem escriure doncs

$$|\mathcal{L}f(z)| \leqslant e^{max(|a|,|b|)Re\,z} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\,.$$

(ii) Per comprovar que $\mathcal{L}f(z)$ és holomorfa, utilitzant el Teorema de Cauchy i el Teorema de Morera, n'hi ha prou amb veurem que és contínua i que $\int_{\partial\triangle} \mathcal{L}f(z)dz = 0$ per tot triangle $\triangle \subset \mathbb{C}$.
Anem a veure'n la continuïtat. Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$, acotant directament

$$|\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}f(z_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-zt} - e^{-z_0 t})dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-zt} - e^{-z_0 t}|dt\,.$$

Ara, utilitzant que $e^{-tz} = e^{-t[z_0+(z-z_0)]} = e^{-tz_0} \cdot e^{-t(z-z_0)}$ podem fer

$$|e^{-zt} - e^{-z_0 t}| = |e^{-tz_0}(e^{-t(z-z_0)} - 1)| = e^{-tRez_0}|e^{-t(z-z_0)} - 1|\,.$$

D'altra banda, prenent R tal que $[a, b] \subset [-R, R]$. Aleshores es compleixi que $f(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin [-R, R]$. Per tant, si $|z - z_0| \leqslant \delta$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}f(z_0)| &\leqslant \int_{-R}^{R} |f(t)|e^{-tRez_0}|e^{-t(z-z_0)} - 1|dt \leqslant e^{R|Re\,z_0|} \int_{-R}^{R} |f(t)||e^{R\delta} - 1|dt \\ &\leqslant e^{R|Rez|} \cdot (e^{R\delta} - 1) \cdot \int_{-R}^{R} |f(t)|dt = C(e^{R\delta} - 1)\,. \end{aligned}$$

Ara, agafant $\delta > 0$ prou petit, tindrem que per tot $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}f(z_0)| < \epsilon$, i per tant hem vist la continuïtat.
Falta veure que la integral de $\mathcal{L}f$ a la vora de tot triangle val 0. Tenim, per Fubini

$$\int_{\partial\triangle} \mathcal{L}f(z)dz = \int_{\partial\triangle} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-tz}dtdz = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{\partial\triangle} e^{-tz}dz \right) dt\,.$$

Com que la funció $F(z) = e^{-tz}$ és entera, pel Teorema de Cauchy, sabem que $\int_{\partial\triangle} e^{tz}dz = 0$ i per tant

$$\int_{\partial\triangle} \mathcal{L}f(z)dz = 0\,.$$

$\square$

El resultat que veurem a continuació és una mena de recíproc de l'acotació que hem vist abans. Ens diu que l'acotació (2.6) és bona i acurada.

Lema 2.39. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{L}f(z)$ és acotat a $\mathbb{H}$, aleshores $\alpha(f) \geq 0$.*

Demostració. Considerem $f_1 = f \cdot \mathbb{1}_{[-\infty,0]}$ i $f_2 = f \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty]}$. Clarament, tenim que $f = f_1 + f_2$ i, per la linealitat de la transformada de Laplace, $\mathcal{L}f = \mathcal{L}f_1 + \mathcal{L}f_2$.
Considerem $\alpha(f) < 0$ per arribar a contradicció. Aleshores és evident que f_1 té

suport compacte en $[\alpha(f), 0]$, i, pel lema anterior, $\mathcal{L}f_1$ és entera.
Si $t \in [\alpha(f), 0]$, $Re\, z \leqslant 0$ tenim $-t\, Re\, z \leqslant 0$ i $e^{-t\, Re\, z} \leqslant 1$. Per tant,

$$|\mathcal{L}f_1(z)| \leqslant \int_{\alpha(f)}^{0} |f_1(t)|dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\,.$$

Si, altrament, $Re\, z > 0$, pel mateix argument que abans ens queda que

$$|\mathcal{L}f_2(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\ .$$

A més $\mathcal{L}f$ és acotat per hipòtesi. Com que $\mathcal{L}f_1$ és suma de funcions acotades a $\mathbb{H}$,

$$\mathcal{L}f_1 = \mathcal{L}f - \mathcal{L}f_2\ ;$$

$\mathcal{L}f_1$, també ha de ser acotat a $\mathbb{H}$.
Hem vist que $\mathcal{L}f_1$ és una funció entera i acotada a tot $\mathbb{C}$, per tant, pel Teorema de Liouville, és una funció constant. D'altra banda, sabem que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathcal{L}f_1(x) = 0$, ja que pel teorema de la convergència dominada

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{-\alpha(f)}^{0} f(t)e^{-tx}dt = \int_{-\alpha(f)}^{0} f(t) \lim_{x\to-\infty} e^{-tx}dt = 0\ .$$

Per tant, pel Teorema 2.37 (unicitat de la transformada de Laplace), tenim que $f_1 \equiv 0$ q.p.t.

$\square$

3 Factorització de funcions a H^∞

El nostre objectiu en aquest capítol és factoritzar una funció $f \in H^\infty$ en $f = B{\cdot}O{\cdot}S$, on B és el producte de Blaschke, és a dir la part que conté els zeros de la funció, O és la funció externa associada a f, és a dir, la que s'obté a partir dels valors que pren f a la frontera del disc, i S és la part singular.
Una factorització molt semblant, de la forma $f = B \cdot O \cdot \frac{S_1}{S_2}$ amb la mateixa notació, val per qualsevol espai H^p, $0 < p < \infty$.

3.1 Producte de Blaschke

Els zeros ($Z(f) = \{z_j\}_j$) de tota funció f de H^∞ tenen una condició de creixement restringit, la condició de Blaschke: $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |z_j| \leqslant \infty$. Això ens permet construir el que anomenem producte de Blaschke.
L'element clau per provar tot això és la següent igualtat.

Teorema 3.1. ***(Fórmula de Jensen.)*** *Sigui $f \in H(\mathbb{D})$ una funció holomorfa tal que $f(0) \neq 0$. Sigui $Z(f) = \{z_j\}_j$ el conjunt de zeros d'f, que apareixen tantes vegades com multiplicitat tenen. Sigui $0 < r < 1$ tal que f no té zeros a la circumferència $|z| = r$. Aleshores*

$$\log|f(0)| + \sum_{0<|z_j|<r} \log\frac{r}{|z_j|} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \ .$$

Demostració. Procedirem per casos.

- Cas $Z(f) = \emptyset$. Aleshores $\log|f(z)|$ és una funció harmònica i per la propietat de la mitjana

  $$\log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \ ,$$

  tal i com voliem veure.

- Cas $Z(f) \neq \emptyset$. Siguin $z_1, ..., z_n$ els zeros de $f(z)$ a $D(0,r)$, on apareixen tants cops com multiplicat tenen dins el disc.
  Aleshores podem considerar el que s'anomena producte de Blaschke amb zeros $z_1, ..., z_n$ redimensionat a $D(0,r)$:

  $$B_r(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{r(z_j - z)}{r^2 - \overline{z_j} z}, \qquad z \in D(0,r).$$

  Observem que el producte de Blaschke és un producte de les transformacions de Möbius φ_{z_j} redimensionades al disc $D(0,r)$, per tant, és immediat que té mòdul 1 a la frontera del disc $D(0,r)$. Ara, podem definir

  $$g(z) := \frac{f(z)}{B_r(z)} \ .$$

Aquesta funció és analítica i no té zeros dins de $D(0,r)$. També, com que el producte de Blaschke té mòdul 1 a la frontera tenim que $|g(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|$. Aplicant un altre cop la propietat de la mitjana, ara a la funció $\log|g|$, tenim

$$\log|g(0)| = \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \ .$$

Com que $g(0) = f(0)\prod_{j=1}^n \frac{r}{z_j}$, tenim finalment

$$\log|f(0)| + \sum_{j=1}^n \log\left|\frac{r}{z_j}\right| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \ .$$

□

Teorema 3.2. *Sigui $f(z) \not\equiv 0$ una funció holomorfa i sigui $Z(f) = \{z_j\}_j$ els zeros de f, repetits segons multiplicitat. Si*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} < \infty \ ,$$

aleshores

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|) < \infty \ .$$

Demostració. Aplicant la fórmula de Jensen (3.1) tenim

$$\log|f(0)| + \sum_{0<|z_j|<r} \log\left|\frac{r}{z_j}\right| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \ ,$$

és a dir

$$\sum_{|z_j|<r} \log\frac{r}{|z_j|} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)| \ .$$

Fent tendir $r \to 1^-$ tenim

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\frac{1}{|z_j|} = \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)| \ .$$

Com $1-|t| \leqslant \log\frac{1}{|t|}$ per $|t| \leqslant 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1-|z_j| \leqslant \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} - \log|f(0)| \ .$$

□

Definició 3.3. ***(Producte de Blaschke.)*** *Sigui $z_1, ..., z_n$ punts dins del disc. Definim el producte de Blaschke finit associat a $z_1, ..., z_n$ com*

$$B_n(z) := z^m \prod_{j=0}^n \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\bar{z}_j z} \ .$$

El factor z^m correspon al cas $z_j = 0$, en cas que aquest punt sigui a la família. Tal com hem definit abans la transformació de Möbius φ_{z_j} , aquesta s'anul·la a z_j, per tant $\prod_{j=1}^{N} \varphi_{z_j}$ s'anul·la a $\{z_j\}_{j=1}^{N}$. Per això $Z(B_n) = \{z_j\}_{j=1}^{n}$. També tindrem que, tal i com vam veure a la Proposició 2.4 , $|\varphi_{z_j}(e^{i\theta})| = 1$. A més, com que B_n és holomorfa, per ser producte de funcions holomorfes, tenim que pel Principi del mòdul màxim, el màxim, que és 1, s'assoleix a la frontera i per tant $||B_n||_\infty = 1$.

Utilitzarem la notació següent $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$, si és que aquest límit existeix. Veurem més endavant (Teorema 3.13), que per a $f \in H^\infty$, els valors $f^*(e^{i\theta})$ estan ben definits per gairebé tot $\theta \in [0, 2\pi]$.

Lema 3.4. *Sigui $f \in H^\infty$, i sigui f^* la funció límit radial de f que està definida q.p.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. Llavors, per a tot $0 \leqslant r < 1$, es compleix que*

$$\log|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{i\theta})|\, d\theta\,. \tag{3.1}$$

El terme central de l'equació (3.1) és una funció no decreixent en r. A més, si $f \neq 0$, llavors $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$ per a gairebé tot $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostració. La primera desigualtat és directa, perque $\log|f|$ és subharmònica. La integral del mig és creixent en r, per la Formula de Jensen (Teorema 3.1). Per veure la segona desigualtat, suposem sense perdua de generalitat que $||f||_\infty \leqslant 1$, apliquem el Lema de Fatou a $\log\frac{1}{|f|} \geq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{1}{|f^*(e^{i\theta})|}\right) d\theta \leqslant \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}\right) d\theta\,.$$

Això equival a

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{i\theta})|\, d\theta\,,$$

i per tant ja tenim l'equació (3.1). □

Teorema 3.5. *Sigui $\{z_j\}_j$ una successió de punts en $\mathbb{D}$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty\,.$$

Aleshores el producte de Blaschke

$$B(z) = z^m \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z}$$

té les propietats següents:
1. Convergeix uniformement en cada disc $|z| \leqslant R < 1$.
2. Els zeros de $B(z)$ són exactament els $\{z_j\}$, amb multiplicitat igual al nombre de vegades que apareix en $\{z_j\}$.
3. $|B(z)| < 1$ per $|z| < 1$, i $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ quasi per tot $\theta \in [0, 2\pi]$.
4. $\lim\limits_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})| d\theta = 0$.

Demostració. Sigui $b_j(z) = \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}$ de manera que $B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} b_j(z)$. Comencem veient la convergència uniforme. Observem que

$$\begin{aligned}|1 - b_j(z)| &= \left|1 - \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}\right| = \left|\frac{z_j(1-\overline{z_j}z)}{z_j(1-\overline{z_j}z)} - \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}\right| \\ &= \left|\frac{z_j - |z_j|^2 z - |z_j|z_j + |z_j|z}{z_j(1-\overline{z_j}z)}\right| = \left|\frac{-|z_j|z - z_j}{z_j(1-\overline{z_j}z)}(|z_j| - 1)\right|\end{aligned}$$

Aplicant les desigualtats triangulars, com que $|z_j| < 1$ i $|z| < R < 1$,

$$|1 - b_j(z)| \leqslant \frac{|z_j|(1+|z|)}{|z_j||1-|z_j||z||}(1-|z_j|) \leqslant \frac{1+R}{1-R}(1-|z_j|) \,.$$

Com que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_j|) < \infty$ aleshores

$$|B(z)| = \prod_{j=1}^{\infty}|b_j(z)| = e^{\sum_{j=1}^{\infty}\log|b_j(z)|} \,.$$

Utilitzant que per a j prou gran $|b_j(z)|$ és proper a 1, i per la desigualtat triangular, $\log|b_j(z)| \leqslant 1 - |b_j(z)| \leqslant |1 - b_j(z)|$. Per tant,

$$|B(z)| \leqslant e^{\sum_{j=1}^{\infty} 1-|b_j(z)|} < \infty \,.$$

En definitiva, tenim que el producte infinit convergeix uniformement en cada disc $|z| \leqslant R < 1$ i per tant $B(z)$ és una funció analítica en $|z| < 1$. A més, cada z_j és un zero de $B(z)$ amb la seva multiplicitat corresponent, i no té cap més zero.
Vegem l'apartat 3. Que $|B(z)| < 1$ quan $|z| < 1$ és cert ja que cadascun dels seus factors ho és, tal i com vam veure a la Proposició 2.7. Per tant, $||B||_\infty \leqslant 1$, que implica que $B \in H^\infty \subset H^p$. Per tant, $B^*(e^{i\theta})$ existeix i $|B^*(e^{i\theta})| \leqslant ||B||_\infty \leqslant 1$.
L'únic que ens falta veure que és $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ q.p.t. Sigui

$$B_n(z) = z^m \prod_{j=1}^{n}\frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}$$

el producte de Blaschke finit. Com que en general, quan f^* existeix q.p.t. tenim

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi}|f^*(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \,,$$

substituint a la desigualtat anterior f per B/B_n, i utilitzant que $|B_n(e^{i\theta})| = 1$ per a tot θ, veiem que

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})}\right|\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi}|B^*(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Però acabem de veure que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(z) = B(z)$ uniformement en cada disc $|z| \leqslant R < 1$, aleshores, fent $n \to \infty$, la desigualtat anterior dona

$$1 \leqslant \int_0^{2\pi}|B^*(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \,.$$

Però alhora també hem vist que $|B^*(e^{i\theta})| \leqslant 1$ q.p.t. provant així que $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ q.p.t.
Falta veure l'apartat 4. El límit existeix perquè

$$\varphi(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta$$

és creixent (pel Teorema 2.34) i obviament $\varphi(r) \leqslant 0$, ja que $|B(re^{i\theta})| \leqslant 1$ per a tot $r < 1$ i $\theta \in [0, 2\pi)$. Ara considerem el producte de zeros a partir de l'enèssim

$$\widetilde{B}_n(z) = \prod_{j>n} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}$$

i observem que, per definició

$$B(z) = B_n(z) \cdot \widetilde{B}_n(z) \ .$$

En particular

$$\log |B(re^{i\theta})| = \log |B_n(re^{i\theta})| + \log |\widetilde{B}_n(re^{i\theta})| \ . \tag{3.2}$$

Com que B_n és un producte finit i $|B_n(e^{i\theta})| = 1$ per a tot θ, és clar que

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B_n(re^{i\theta})| \, d\theta = 0 \ ,$$

ja que, de fet, $\log |B_n(z)|$ és contínua a tot un entorn de $\partial\mathbb{D}$.
Amb això i (3.2) tenim per tant

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| \, d\theta = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\widetilde{B}_n(re^{i\theta})| \, d\theta \ .$$

Aplicant el Lema 3.4 a $f = \widetilde{B}_n$ tenim aleshores

$$\log |\widetilde{B}_n(0)| \leqslant \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\widetilde{B}_n(re^{i\theta})| d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\widetilde{B}_n^*(re^{i\theta})| d\theta$$

i per la igualtat anterior

$$\log |\widetilde{B}_n(0)| \leqslant \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta \leqslant 0 \ .$$

A mesura que n tendeix a ∞ el terme

$$\log |\widetilde{B}_n(0)| = \sum_{j>n} \log |z_j|$$

tendeix a 0, ja que és la cua d'una sèrie convergent.
Amb això obtenim finalment

$$0 \leqslant \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| \leqslant 0 \ .$$

$\square$

Observació 3.6. Com a conseqüencia d'aquest resultat tenim immediatament que, si $g := \frac{f}{B}$, aleshores $||g||_\infty = ||f||_\infty$, ja que pel principi del mòdul màxim

$$||f||_\infty = \lim_{r \to 1} \sup_{|z|=r} |f(z)| \ .$$

3.2 Límits radials dels espais H^p

Definim l'espai de Hardy H^p com la classe de funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ amb

$$||f||_{H^p} := \left(\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p} < \infty \, .$$

Primer veurem que, donada una funció $f \in H^p$, la funció $g = f/B$ també és de H^p i $||f||_p = ||g||_p$. Després estudiarem l'espai H^2 i en deduirem, en particular, que per tota funció $f \in H^\infty$, el límit radial $f^*(e^{i\theta})$ és ben definit q.p.t.

Per facilitar la notació definim

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \, ,$$

quan existeixi.

Començem amb una acotació puntual per a les funcions de H^p

Lema 3.7. *Sigui $f \in H^p$, $z \in \mathbb{D}$. Aleshores*

$$|f(z)| \leqslant \left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{1/p} ||f||_{H^p} \, .$$

Demostració. Com que $|f|^p$ és subharmònica, per a $r < 1$,

$$|f(0)|^p \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = ||f||^p_{H^p} \, .$$

Donada $r < 1$ sigui $f_r(z) = f(rz)$. La primera desigualtat anterior és, aleshores,

$$|f(0)|^p \leqslant \int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\theta})^p \frac{d\theta}{2\pi} \, .$$

Aplicant això a $f_r \circ \varphi_z$ tenim

$$|f_r(z)|^p \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f_r\left(\varphi_z(e^{i\theta})\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \, .$$

Amb el canvi $\varphi_z(e^{i\theta}) = e^{i\psi}$ utilitzat a l'apartat 2.1.3 tenim, doncs

$$|f_r(z)|^p \leqslant \int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\psi})|^p P(z, e^{i\psi}) \frac{d\psi}{2\pi}$$

Com que $|e^{i\psi} - z| \geqslant 1 - |z|$ per a tot ψ, tenim

$$P(z, e^{i\psi}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\psi}-z|^2} \leqslant \frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2} = \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

i per tant

$$|f_r(z)|^p \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\psi})|^p \frac{d\psi}{2\pi} \leqslant \frac{2}{1-|z|} ||f||^p_{H^p} \, ,$$

i fent el límit $r \to 1$, obtenim finalment la desigualtat enunciada. ☐

Corol·lari 3.8. *Sigui $\{f_n\}_n$ una successió convergent en la norma de H^p. Aleshores és uniformement convergent sobre compactes. Equivalentment, donat $\overline{D(0,r)}$, amb $r<1$, $\forall z \in K$ i $\forall n,m \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{\overline{D(0,r)}} |f_n(z)-f_m(z)| \leqslant \sup_{\overline{D(0,r)}} \left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{1/p} ||f_n(z)-f_m(z)||_{H^p}$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{1-r}\right)^{1/p} ||f_n(z)-f_m(z)||_{H^p} .$$

En particular, si f_n és de Cauchy a H^p, aleshores és de Cauchy (i per tant convergent) uniformement en compactes.

Corol·lari 3.9. *Tota successió $\{f_n\}_n$ H^p-Cauchy convergeix puntualment a una funció analítica $f(z)$.*

El següent teorema ens dóna la factorització dels zeros d'una funció de H^p amb el producte de Blaschke.

Teorema 3.10. ***(F. Riesz [3]).*** *Sigui $0<p<\infty$. Siguin $f(z)\in H^p$, $f\not\equiv 0$, sigui $\{z_j\}_j$ els zeros de $f(z)$, i $B(z)$ el producte de Blaschke amb zeros $\{z_j\}_j$. Aleshores $B(z)$ és un producte convergent,*

$$g(z)=\frac{f(z)}{B(z)}\in H^p$$

i

$$||g||_{H_p} = ||f||_{H_p} .$$

Demostració. Que $B(z)$ és convergent és conseqüència immediata del Teorema 3.2, ja que, per la desigualtat de Jensen, totes les funcions de H^p compleixen la hipòtesi d'aquest teorema. Suposarem que $f(z)$ té infinits zeros, d'altra manera el teorema és trivial.

Sigui

$$B_n(z) = z^m \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j|}{z_j}\frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}$$

el producte de Blaschke finit, definim

$$g_n(z)=\frac{f(z)}{B_n(z)} .$$

Com que $|B_n(z)|\to 1$ quan $|z|\to 1$, per $n\in\mathbb{N}$ fixada i $\epsilon>0$, tenim $|B_n(z)|>1-\epsilon$ per $|z|$ prou a propera de 1. Per tant,

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \frac{1}{(1-\epsilon)^p}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \frac{1}{(1-\epsilon)^p}||f||^p_{H^p} .$$

Fent tendir $\epsilon\to 0$, tenim que per tot $r<1$ i tot n

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant ||f||^p_{H^p} ,$$

i, per tant, $g_n \in H^p$ amb $||g_n||_{H^p} \leqslant ||f||_{H^p}$.
Pel Teorema 3.5, $g_n(z) \to g(z)$ uniformement en cada circumferència $|z| = R < 1$.
Per tant, $g \in H^p$ i no té zeros.
Per veure que $||f||_{H^p} \leqslant ||g_n||_{H^p}$ només fa falta observar que $|B| \leqslant 1$

$$|f| = |g\,B| = |g||B| \leqslant |g| \ .$$

Aleshores

$$||f||_{H^p} \leqslant ||g||_{H^p} \ .$$

Per tant, ja tenim la igualtat. □

El nostre objectiu és veure unes propietats de l'espai H^∞, en particular que tota $f \in H^\infty$ té límits radials $f^*(e^{i\theta})$ q.p.t $\theta \in [0, 2\pi]$. Per fer-ho ens centrarem en H^2 i aprofitant l'estructura de Hilbert d'aquest espai, les provarem i comentarem que aquests mateixos resultats són vàlids per tots els H^p.

3.2.1 L'espai H^2

La importància particular de H^2 es deu al fet que té estructura d'espai de Hilbert amb el producte escalar

$$< f, g >= \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \ .$$

Observem que la norma de qualsevol $f \in H^2(\mathbb{D})$ és

$$\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >} = \left(\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Definició 3.11. *Definim* $L^2[0, 2\pi] := \{\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *tals que* $||f||_{L^2[0,2\pi]} \leqslant \infty\}$ *on*

$$||f||_{L^2[0,2\pi]} = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Observació 3.12. Es ben conegut que $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ formen una base ortonormal a l'espai $L^2[0, 2\pi]$. L'ortonormalitat és directa:

$$< e^{int}, e^{imt} >= \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} \frac{dt}{2\pi} = \begin{cases} 0 & si \quad n - m \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad n - m = 0 \end{cases} \ .$$

Per l'altra part, que el sistema $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és un sistema generador es prova amb arguments de denistat de les funcions contínues a suport compacte.

En el següent teorema veurem les propietats bàsiques de H^2.

Teorema 3.13. *(a) Una funció $f \in H(\mathbb{D})$, de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}),$$

és a H^2 si i només si $\sum_n |a_n|^2 < \infty$; en aquest cas,

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(b) Si $f \in H^2$, aleshores f té límits radials $f^*(e^{i\theta})$ ben definits q.p.t. $\theta \in [0, 2\pi]$. A més, $f^* \in L^2(\partial\mathbb{D})$ i

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 0 .$$

(c) La funció f és tant la integral de Poisson com la integral de Cauchy de f^*, és a dir: si $z \in \mathbb{D}$, llavors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) f^*(e^{it}) dt$$

i

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ .$$

Demostració. (a) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, aleshores

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sup_{r<1} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} (re^{-i\theta})^m \right] \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sup_{r<1} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} \, r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}) \frac{d\theta}{2\pi} . \end{aligned}$$

Per l'Observació 3.12

$$||f||^2 = \sup_{r<1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 .$$

(b) Sigui f una funció de H^2, per a $s < 1$ tenim

$$f_s(e^{i\theta}) = f(se^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n e^{in\theta} .$$

Considerem $g(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, que està ben definida i és de $L^2(\partial\mathbb{D})$, per l'Observació 3.12 i per (a), aleshores tenim que

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} < g, e^{in\theta} > e^{in\theta},$$

on $< g, e^{in\theta} >= \widehat{g}(n) = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$.
Aleshores, tenim, per l'ortonormalitat de la base $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} ||g - f_s||^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}_n(n) - \widehat{f}_s(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < g, e^{in\theta} > - < f_s, e^{in\theta} > |^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_n s^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |1 - s^n|^2 \ . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\lim_{s\to 1} ||g - f_s||^2 = \lim_{s\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - f_s(e^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{s\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |1 - s^n|^2 = 0 \ .$$

Com que $g \in L^2(\partial\mathbb{D}) \subset L^1(\partial\mathbb{D})$, tenim, pel Teorema 2.25

$$\lim_{r\to 1} P[g](re^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) \quad \text{q.p.t. } \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Amb això tenim doncs

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) \quad \text{q.p.t. } \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Això prova que els límits radials $f^*(e^{i\theta})$ existeixen gairebé per tot $\theta \in [0, 2\pi]$ i valen g. A més pel que hem vist abans

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} &= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - f_r(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{r\to 1} ||g - f_r||^2_{L^2(\partial\mathbb{D})} = 0 \ . \end{aligned}$$

(c) Per a qualsevol $s \in (0, 1)$, $f_s(z) = f(s\,z)$ és holomòrfa en $D(0; 1/s)$. Per tant, si $z \in \mathbb{D}$ i $z = re^{i\theta}$, tenim $f_s(z) = u_s(z) + iv_s(z)$, amb u_s, v_s harmòniques, i per tant

$$\begin{aligned} f_s(z) = u_s(z) + iv_s(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) u_s(e^{it}) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) v_s(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) f_s(e^{it}) dt = P[f_s](z) \end{aligned}$$

i

$$f(z) = \lim_{s\to 1} f_s(z) = \lim_{s\to 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f_s(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ .$$

Considerem la diferència

$$P[f_s](z) - P[g](z) = \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it}) \left(f_s(e^{it}) - g(e^{it}) \right) \frac{dt}{2\pi} \ .$$

Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz i per l'estimació puntual de $P(z, e^{it})$

$$\begin{aligned}|P[f_s](z) - P[g](z)| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})|f_s(e^{it}) - g(e^{it})|\frac{dt}{2\pi} \\ &\leqslant \left[\int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})^2 \frac{dt}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_s(e^{it}) - g(e^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) ||f_s - g||_{L^2(\partial\mathbb{D})} .\end{aligned}$$

Com que $\lim_{s\to 1} ||f_s - g||_{L^2(\partial\mathbb{D})} = 0$, deduïm que

$$f(z) = \lim_{s\to 1} f_s(z) = \lim_{s\to 1} P[f_s](z) = P[g](z) .$$

$\square$

Observació 3.14. (1) Com que $H^\infty \subset H^2$, els resultats que hem vist per H^2 són immediatament certs per H^∞. En concret, si $f \in H^\infty$ aleshores

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$$

existeix q.p.t. $\theta \in [0, 2\pi]$, i a més, pel principi del mòdul màxim, tenim

$$||f||_\infty = \lim_{r\to 1} \max_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})| = \max_{\theta\in[0,2\pi]} |f^*(e^{i\theta})| = ||f^*||_{L^\infty(\partial\mathbb{D})} .$$

(2) Suposem que $f \in H^p$ per algun $p > 0$, B és el producte de Blaschke format amb els zeros de f, i $g = \frac{f}{B}$. El Teorema 3.10 mostra que $\|g\|_p = \|f\|_p$. Com que g no té zeros en $\mathbb{D}$ i $\mathbb{D}$ és simplement connex, existeix $\varphi \in H(\mathbb{D})$ tal que $\exp(\varphi) = g$. Posem $h = \exp\left(\frac{p\varphi}{2}\right)$. Llavors $h \in H(\mathbb{D})$, i $|h|^2 = |g|^p$, per tant $h \in H^2$ i, de fet $\|h\|_2^2 = \|g\|_p^p$. Així f té una factorització de la forma

$$f = B \cdot h^{2/p}$$

on $h \in H^2$ i h no té zeros en $\mathbb{D}$. Això fa possible, en molts casos, aplicar resultats provats a H^2 a funcions de qualsevol H^p.

El següent teorema es pot provar fent servir un argument similar al que acabem de fer.

Teorema 3.15. *Si $f \in H^1$, llavors*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

existeix en quasi tots els punts de $\mathbb{D}$, i

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|\, d\theta = 0.$$

3.3 La factorització

En aquesta secció veurem els teoremes que ens permetran fer la factorització que necessitem per resoldre el Teorema de Titchmarsh. Recordem que ja hem vist que, $f \in H^\infty$, podem factoritzar-la $f = B \cdot e^g$, amb B producte de Blaschke i $e^g \in H^\infty$ sense zeros amb $||f||_\infty = ||e^g||_\infty$. Ens queda descriure e^g, és a dir g.
Abans de fer aquests teoremes parlarem breument sobre teoria de mesures positives a $\partial\mathbb{D}$ ja que aquestes prenen un paper important en aquests teoremes.

Definició 3.16. *Sigui σ una mesura finita, positiva i boreliana a $\partial\mathbb{D}$ (σ a $[0, 2\pi]$). Diem que és σ singular (respecte la mesura de Lebesgue) si existeixen $A, B \subset [0, 2\pi]$ que formin una partició de $[0, 2\pi]$ (equivalentment, que $A \cup B = [0, 2\pi]$, $A \cap B = \emptyset$) tals que $\sigma(A) = 0$, $|B| = 0$, és a dir, σ es concentra a B, que té mesura de Lebesgue 0, i la mesura de Lebesgue es concentra a A.*

Exemple 3.17. L'exemple típic de mesura singular és la delta de Dirac: fixem $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ i, si $\mathcal{B}$ indica la σ-àlgebra dels Borelians, definim la mesura $\delta_{\theta_0} : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 2\pi]$ per

$$\delta_{\theta_0}(E) = \begin{cases} 1 & si \quad \theta_0 \in E \\ 0 & si \quad \theta_0 \notin E \ . \end{cases}$$

Aleshores σ es concentra a $B = \{\theta_0\}$, i $A = [0, 2\pi] \setminus \{\theta_0\}$.

Podem fer sumes (finites i no finites) amb deltes a un conjunt numerable de punts i produir noves mesures singulars. Per exemple,

$$\sigma = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \delta_{1/n}$$

és una mesura finita concentrada a la successió $\{1/n\}_{n \geq 1}$. Però també hi ha mesures singulars concentrades a conjunts no numerables.

Proposició 3.18. *Quan una mesura positiva (singular o no) és finita a $[0, 2\pi]$, la transformada de Poisson*

$$P[\sigma](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{it})\, d\sigma(t)$$

està trivialment ben definida i dona una funció positiva.

Demostració. Utilitzant l'acotació del nucli de Poisson $P(z, e^{it}) \leq \frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2} = \frac{1+|z|}{1-|z|}$, i fent servir que $\sigma([0, 2\pi]) < \infty$, la integral ens queda

$$P[\sigma](z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|} \int_0^{2\pi} d\sigma(t) < \infty \ .$$

□

Escrivim ara una propietat elemental que necessitarem més endavant.

Proposició 3.19. *Sigui σ una mesura singular, aleshores*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sigma((\theta_0 - t, \theta_0 + t))}{|(\theta_0 - t, \theta_0 + t)|} = 0 \qquad \textit{gairebé per tot } \theta_0 \,.$$

Amb aquesta Proposició i l'argument de la prova del Teorema 2.25 tenim

Corol·lari 3.20. *Sigui $f \in L^1$, aleshores*

$$\lim_{r\to 1} P[\sigma](re^{i\theta}) = 0 \textit{ gairebé per tot } \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Demostració. Això és directe, perquè σ viu a un conjunt B de mesura de Lebesgue 0, i fora d'aquest conjunt σ val 0. Per tant,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sigma((\theta_0 - t, \theta_0 + t))}{|(\theta_0 - t, \theta_0 + t)|} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}\sigma((\theta_0 - t, \theta_0 + t)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int_{\sigma_0-\delta}^{\sigma_0+\delta} d\sigma(t) = 0 \,.$$

□

Definició 3.21. *Una funció $I \in H^\infty$ es diu que és interna si $|I^*(e^{i\theta})| = 1$ q.p.t. en $\partial\mathbb{D}$.*

Observació 3.22. El producte de Blaschke és un exemple de funció interna. Al següent resultat les caractaritzem totes.

Teorema 3.23. *Suposem que c és una constant tal que $|c| = 1$, B és el producte de Blaschke, i σ és una mesura de Borel positiva finita en $\partial\mathbb{D}$, que és singular respecte a la mesura de Lebesgue. Aleshores la funció*

$$M(z) = cB(z)\exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma(t)\right) \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{3.3}$$

és una interna, i tota funció interna és d'aquesta forma.

Demostració. Si l'equació (3.3) es compleix i $g = M/B$, llavors $\log|g|$ és la integral de Poisson de $-d\sigma$, per tant $\log|g| \leqslant 0$, així que $g \in H^\infty$, i el mateix és veritat per a M. A més, pel Corol·lari 3.20, els límits radials de $\log|g|$ són 0 q.p.t. punt. Com que $|B|^* = 1$ gairebé a tot arreu, ens queda que, tal com volíem veureu, M és una funció interna.
Recíprocament, sigui B el producte de Blaschke format amb els zeros d'una funció M interna, escrivim $g = M/B$. Llavors $\log|g|$ és harmònica en $\mathbb{D}$. Els Teoremes 3.5 i 3.10 mostren que $|g| \leqslant 1$ en $\mathbb{D}$ i que $|g|^* = 1$ q.p.t punt de $\partial\mathbb{D}$. Llavors $\log|g| \leqslant 0$. Finalment, concluïm que $\log|g|$ és la integral de Poisson de $-d\sigma$, per alguna mesura positiva σ en $\partial\mathbb{D}$. Com hem dit abans, per la Poposició 3.19, es comprova que σ és singular. Finalment, com que $\log|g|$ és la part real de

$$h(z) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma(t),$$

tenim que $g = ce^h$ per alguna constant c amb $|c| = 1$. Per tant ens queda que M és de la forma (3.3). □

Definició 3.24. *La funció singular associada a una mesura positiva singular σ, és la funció de la forma*

$$S_\sigma(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma(t)\right) .$$

Exemple 3.25. Un exemple de funció singular que utilitzarem a la demostració del Teorema de Titchmarsh surt d'agafar $\sigma = \delta_1$

$$S_{\delta_1}(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) .$$

Observació 3.26. Amb la notació que hem vist,

$$|S_\sigma(re^{i\theta})| = \exp(-P[\sigma](re^{i\theta}))$$

tendeix a $\exp(0) = 1$ gairebé per tot $\theta \in [0, 2\pi]$, és a dir, S és interna.

Passarem ara a veure l'altre tipus de funcions que surten a la factorització.

Definició 3.27. *Una funció externa per la classe H^p és una funció de la forma*

$$O_\psi(z) := c \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t) \frac{dt}{2\pi}\right\} \quad z \in \mathbb{D} ,$$

amb $|c| = 1$, $\psi(t) \geq 0$, $\log\psi \in L^1(\partial\mathbb{D})$, i $\psi \in L^p(\partial\mathbb{D})$.

Teorema 3.28. *Sigui ψ una funció mesurable a $\partial\mathbb{D}$ tal que $\psi \geq 0$ i $\log\psi \in L^1(\partial\mathbb{D})$, aleshores podem considerem O_ψ la funció externa associada a ψ. Llavors:*
(a) $\log|O_\psi|$ és la integral de Poisson de $\log\psi$
(b) $|O_\psi^*(e^{i\theta})| = \lim_{r\to 1} |O_\psi(re^{i\theta})| = \psi(e^{i\theta})$ q.p.t punt en $\partial\mathbb{D}$
(c) $O_\psi \in H^p$ si i només si $\psi \in L^p(\partial\mathbb{D})$. Si això ocorre, $||O_\psi||_{H^p} = ||\psi||_{L^p(\mathbb{D})}$

Demostració. Per la definició de O_ψ tenim

$$\begin{aligned}
\log|O_\psi| &= \log\left|c\exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t)\frac{dt}{2\pi}\right\}\right| \\
&= \log|c| + \log\left|\exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t)\frac{dt}{2\pi}\right\}\right| \\
&= \log\exp Re\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t)\frac{dt}{2\pi}\right\} .
\end{aligned}$$

Com que $Re(z\cdot w) = Re\, z \cdot Re\, w - Im\, z \cdot Im\, w$ i $\psi(z) \geq 0$, agafant el Logaritme principal, ens queda que $Re\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\psi(t)\right\} = P(z, e^{it})\, Re\{\log|\psi(t)|\}$. Per tant, ja tenim l'apartat (a):

$$\log|O_\psi| = \int_0^{2\pi} Re\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|\psi(t)|\right\} \frac{dt}{2\pi} = P[\log|\psi|] .$$

De l'apartat (a) tenim que $\log|O_\psi| = P[\log|\psi|]$, i fent el límit radial, pel Teorema 2.25, obtenim

$$\log|O_\psi^*(e^{i\theta})| = \log|\psi(e^{i\theta})| \quad q.p.t \quad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Per tant, $|O_\psi^*(e^{i\theta})| = \psi^*(e^{i\theta})$. Falta veure l'apartat (c). Comencem veient l'implicació $\Rightarrow$.
Si $O_\psi \in H^p$, el lema de Fatou implica que $||O_\psi^*||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leqslant ||O_\psi||_p$, i per (b) $||\psi||_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leqslant ||O_\psi||_p$.
Vegem ara l'implicació $\Leftarrow$. Si $\psi \in L^p(\partial\mathbb{D})$, podem considerar O_ψ i, per un raonament similar al de l'apartat (a),

$$|O_\psi|^p = \left| c\exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}|\log\psi(t)|\frac{dt}{2\pi}\right\}\right|^p = \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|\psi(t)|^p\frac{dt}{2\pi}\right\} \ .$$

Ara, utilitzant la desigualtat de Jensen per $\varphi(t) = e^{pt}$, $g(t) = \log|\psi(t)|$ i la mesura $d\mu(t) = P(z, e^{it})\frac{dt}{2\pi}$

$$\begin{aligned} |O_\psi(e^{i\theta})|^p &= \varphi\left(\int_0^{2\pi} g(t)d\mu(t)\right) \leqslant \int_0^{2\pi} (\varphi\circ g)(t)d\mu(t) \\ &= \int_0^{2\pi} P(z, e^{it})|\psi(t)|^p\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^p d\mu(t) \ . \end{aligned}$$

Integrant la desigualtat respecte de la mesura $\frac{d\theta}{2\pi}$ i aplicant Fubini, ens queda que $||O_\psi|| \leqslant ||\psi||_p$, per $p \leqslant \infty$. El cas $p = \infty$ és trivial. Per tant, només pot ser $||O_\psi|| = ||\psi||_p$. □

Com a conseqüència d'aquest resultat tenim el següent comportament frontera de funcions de H^p.

Teorema 3.29. *[6]. Sigui $0 < p \leqslant \infty$, i sigui $f \in H^p$, i $f \not\equiv 0$. Aleshores*
(a) $\log f^*(e^{i\theta}) \in L^1(\partial\mathbb{D})$
(b) La funció externa

$$O_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt\right\} \quad z \in \mathbb{D} \ ,$$

està a H^p, i existeix una funció interna I_f tal que $f = O_f \cdot I_f$.
(c) A més a més,

$$\log|f(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi} \ ,$$

on la igualtat ocorre si I_f és una constant.

Demostració. Considerem $f \in H^1$. Pel Teorema 3.10, podem factoritzar f i trobar una funció $g = f/B \in H^1$ sense zeros, i com que pel Teorema 3.5 $|B^*| = 1$ q.p.t. punt a $\partial\mathbb{D}$, aleshores $|f^*| = |g^*|$ q.p.t. punt a $\partial\mathbb{D}$. Per tant, serà suficient provar el resultat per g en comptes de fer-ho per f, o equivalentment, suposarem que f no té zeros.
Sigui $f \in H^1$ una funció sense zeros i tal que $f(0) = 1$. Aleshores $\log|f|$ és

harmònica a $\mathbb{D}$ i $\log|f(0)| = 0$ ja que suposem $|f(0)| = 1$. Aleshores per la propietat de la mitjana

$$0 = \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\log^+|f(re^{i\theta})| - \log^-|f(re^{i\theta})|]d\theta \ ,$$

i per tant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leqslant ||f||_{H^1} \tag{3.4}$$

Aquesta darrera desigualtat surt directe de la desigualtat de Jensen i el fet que per tot $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \leqslant ||f||_{H^1}$$

De la desigualtat (3.4) tenim, pel Lema de Fatou

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^{\pm}|f^*(e^{i\theta})|d\theta \leqslant \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^{\pm}|f(re^{i\theta})|d\theta \leqslant ||f||_{H^1}$$

Per tant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f^*(e^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-|f^*(e^{i\theta})|d\theta \leqslant 2||f||_{H^1}$$

és a dir, $\log|f^*| \in L^1(\partial\mathbb{D})$

Anem a veure l'apartat (b). Per l'apartat (c) del Teorema anterior, com que $O_f \in H^1$, $|O_f^*| = |f^*| \neq 0$ q.p.t. punt, ja que $\log|f^*| \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Aleshores, puc construir

$$I(z) := \frac{f(z)}{O_f(z)}$$

i està ben definit. Si veig que $|f(z)| \leqslant |O_f(z)|$ per $z \in \mathbb{D}$, aleshores implicarà que la funció $I(z)$ és una funció interna, ja que $I^*(e^{i\theta}) = \frac{f^*(e^{i\theta})}{|f^*(e^{i\theta})|}$ q.p.t. θ, i ja haurem aconseguit la factorització.
Com que per l'apartat (a) del teorema anterior, $\log|O_f| = P[\log|f^*|]$, la desigualtat que volem veure, és equivalent a

$$\log|f| \leqslant P[\log|f^*|] \ . \tag{3.5}$$

Per a $|z| \leqslant 1$ i $R \in (0,1)$ sigui, com abans, $f_R(z) = f(Rz)$.

Fixant $z \in \mathbb{D}$ tenim, per l'harmonicitat de $\log|f_R|$ a un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$,

$$\log|f_R(z)| = P[\log|f_R|](z) = P[\log^+|f_R|](z) - P[\log^-|f_R|](z) \tag{3.6}$$

Utilitzant que $|\log^+ x - \log^+ y| \leqslant |x-y|$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, la desigualtat triangular, l'acotació del nucli de Poisson i el Teorema 3.15 tenim

$$\begin{aligned}
&\left|P\left[\log^+|f_R|\right](z) - P\left[\log^+|f^*|\right](z)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\left[\log^+|f_R(e^{it})| - \log^+|f^*(e^{it})|\right] dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\left|\log^+|f_R(e^{it})| - \log^+|f^*(e^{it})|\right| dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\big||f_R(e^{it})| - |f^*(e^{it})|\big|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})|f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})|dt \\
&\leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})\right| dt \xrightarrow{R\to 1} 0\,.
\end{aligned}$$

El lema de Fatou també dona (juntament amb (3.6)):

$$\begin{aligned}
P\left[\log^-|f^*|\right](z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\log^-|f^*(e^{it})|dt \\
&\leqslant \lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\log^-|f_R(e^{it})|dt \\
&= \lim_{R\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\log^+|f_R(e^{it})|dt - \log|f_R(z)|\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})\log^+|f^*(e^{it})|dt - \log|f(z)|
\end{aligned}$$

Si ens hi fixem, aquesta és la desigualtat que volíem provar; tenim

$$P\left[\log^-|f^*|\right](z) \leqslant P\left[\log^+|f^*|\right](z) - \log|f(z)|\,,$$

és a dir

$$\log|f(z)| \leqslant P\left[\log^+|f^*|\right](z) - P\left[\log^-|f^*|\right](z) = P\left[\log|f^*|\right](z)\,.$$

Avaluant la desigualtat (3.5) per $z = 0$ i fent el logaritme aconseguim

$$\log|f(0)| \leqslant P[\log|f^*|](0) = \int_0^{2\pi} P(0,e^{it})\log|f^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\log|f^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi}\,.$$

Observem que la igualtat se satisfà si i només si $|f(0)| = |O_f(0)|$. Això es compleix si i només si $|I_f(0)| = 1$, i com que $||I_f||_\infty = 1$ això ocorre si i només si I_f és una constant, tal com diu l'enunciat.

Amb això conclou la prova per el cas $p = 1$.
Si $1 < p \leqslant \infty$, aleshores $H^p \subset H^1$, per tant només faltaria provar que $O_f \in H^p$. Però com que si $f \in H^p$, pel Lema de Fatou, $|f^*| \in L^p(\partial\mathbb{D})$; per tant, pel Teorema 3.28, $O_f \in H^p$. □

Corol·lari 3.30. *Tota funció f holomorfa i acotada en $\mathbb{D}$ tal que $f \not\equiv 0$, té una factorització única de la forma $f = B\cdot O\cdot S$, on B és el producte de Blaschke, O és una funció externa i S és una funció sinigular.*

4 Demostració del Teorema de Titchmarsh

Comencem amb un resultat clau, i ben conegut: la transformada de Laplace converteix la convolució en producte.

Proposició 4.1. *Siguin f i g dues funcions integrables tals que $\alpha(f), \alpha(g) > -\infty$, aleshores $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ a $\mathbb{H}$.*

Demostració. La demostració es basa en fer servir les definicions, aplicar el Teorema de Fubini, utilitzar que $e^{tz} = e^{-z(t-s+s)} = e^{-z(t-s)}e^{-zs}$ i, finalment, fer el canvi de variàble $x = t - s$, així, si $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)e^{-zt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds \right) e^{-z(t-s)}e^{-zs}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)e^{-z(t-s)}g(s)e^{-zs}ds \right) e^{-zt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-zx}dx \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-zs}ds = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z)
\end{aligned}$$

□

Recordem que, tal i com vam observar al principi de la Introducció, $\alpha(f * g) \geq \alpha(f) + \alpha(g)$. Ens queda veure la desigualtat oposada. Argumentarem per contradicció: siguin f i g amb les hipòtesis del Teorema, aleshores sabem que $\alpha(f) > -\infty$ i $\alpha(g) > -\infty$, a més, suposem que $\alpha(f*g) > \alpha(f)+\alpha(g)$. Traslladant correctament f i g, podem suposar que $\alpha(f), \alpha(g) < 0$ i $\alpha(f * g) > 0$.
Com que $\alpha(f), \alpha(g) < 0$, pel contrarecíproc del Lema 2.39, $\mathcal{L}f$ i $\mathcal{L}g$ no estàn acotats. D'altra banda, $\mathcal{L}f\mathcal{L}g = \mathcal{L}(f * g)$ si que està acotat en $\mathbb{H}$ ja que

$$|\mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z)| = |\mathcal{L}(f * g)(z)| \leqslant Ae^{-\alpha(f*g)Re\, z}$$

i $\alpha(f * g) > 0$.

Per tant, si demostrem el següent resultat ja haurem acabat.

Proposició 4.2. *Siguin F i G dues funcions holomorfes en $\mathbb{H}$ tal que $|F(z)| \leqslant Ae^{aRe\, z}$ i $|G(z)| \leqslant Be^{bRe\, z}$ amb A, a, B, b constants positives. Si F i G són no acotades, aleshores $F \cdot G$ és no acotada.*

En el nostre cas $a = -\alpha(f)$ i $b = -\alpha(b)$. Abans de veure la demostració necessitem veure alguns resultats previs.

Corol·lari 4.3. *Sigui $H = B \cdot O \cdot \frac{S_{\sigma_1}}{S_{\sigma_2}}$, amb la notació de (2). Aleshores H és acotada si i només si $\sigma_1 - \sigma_2$ és una mesura positiva.*

Demostració. Vegem primer la implicació cap a l'esquerra. Suposem que $\sigma_1 - \sigma_2$ és una mesura. Aleshores

$$\frac{S_{\sigma_1}(z)}{S_{\sigma_2}(z)} = \frac{e^{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\sigma_1(e^{i\theta})}}{e^{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\sigma_2(e^{i\theta})}} = e^{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} (d\sigma_1 - d\sigma_1)(e^{i\theta})} .$$

Fent-ne la norma

$$\left|\frac{S_{\sigma_1}(z)}{S_{\sigma_2}(z)}\right| = e^{-Re\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} (d\sigma_1 - d\sigma_1)(e^{i\theta})\right\}} = e^{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} (d\sigma_1 - d\sigma_1)(e^{i\theta})}$$
$$= e^{-\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{i\theta}) (d\sigma_1 - d\sigma_1)(e^{i\theta})} ,$$

que és acotada, per hipòtesi.

Anem a veure l'altra implicació. Pel que hem vist sabem que existeix una factorització única $H = \widetilde{B} \cdot \widetilde{O} \cdot \widetilde{S}_\mu$ amb μ mesura positiva, amb la notació de (2). A més, per l'enunciat, tenim $H = B \cdot O \cdot \frac{S_{\sigma_1}}{S_{\sigma_2}}$. Per la unicitat de la factorització, necessàriament

$$B = \widetilde{B}, \quad O = \widetilde{O}, \quad \widetilde{S}_\mu = \frac{S_{\sigma_1}}{S_{\sigma_2}} .$$

Per tant, $\mu = \sigma_1 - \sigma_2$ i, $\sigma_1 - \sigma_2$ és mesura positiva. □

Ara ja podem fer la demostració de la Proposició 4.2.

Demostració. Com que $|F(z)| \leqslant Ae^{aRe\, z}$ és acotada, puc construir $f(z) = F(z)e^{-az}$, que clarament és acotada a $\mathbb{H}$. Ara, per la Proposició 2.3, la composició $(f \circ \tau)(z) = f(\tau(z))e^{-a\tau(z)} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ és una funció holomorfa acotada en el disc unitat. Per tant, pel Corol·lari 3.30 puc factoritzar-la de manera única

$$F(\tau(z))e^{-a\tau(z)} = B(z)O(z)S_\sigma(z) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

on B és el producte de Blaschke, O és una funció externa acotada i S_σ és una funció interna singular. Notem que $e^{-a\tau(z)} = S_{a\delta_1}(z)$, on δ_1 és la delta de Dirac (vegeu Exemple 3.17). Per tant, tenim

$$f \circ \tau = B\, O\, \frac{S_\sigma}{S_{a\delta_1}} .$$

Si F no és acotada en $\mathbb{H}$, aleshores necessàriament $f \circ \tau$ no és acotada a $\mathbb{D}$ i, pel Corol·lari 4.3, $\sigma - a\delta_1$ no és una mesura positiva, és a dir $\sigma(\{1\}) < a$. Fent el raonament anàleg per G tindrem, si $g(z) = G(z)e^{-bz}$,

$$g \circ \tau = \tilde{B}\, \tilde{O}\, \frac{S_\mu}{S_{b\delta_1}} ,$$

on $\tilde{B}$ és el producte de Blaschke, $\tilde{O}$ és una funció externa i $S_\mu(z)$ és una funció externa o singular; a més, si G no és acotada aleshores $\mu(\{1\}) < b$.
Multiplicant les equacions de F i G obtenim

$$(fg) \circ \tau = (B\tilde{B})(O\tilde{O}) \frac{S_{\sigma+\mu}}{S_{(a+b)\delta_1}} .$$

Si F i G són ambdues no acotades, aleshores la mesura no pot ser positiva i $(\sigma + \mu)\{1\} < a + b$. Del Corol·lari 4.3 aleshores $(fg) \circ \tau$ no és acotada en $\mathbb{D}$, equivalentment, FG no és acotada en $\mathbb{H}$. $\square$

Amb això concluïm la demostració de la Proposició 4.2 i, per tant, del Teorema de Titchmarsh.

Referències

[1] Donald E. Marshall. Personal webpage.
https://sites.math.washington.edu/∼marshall/math_135/UniqueLaplace.pdf

[2] Duren, Peter L. : *Theory of H^p spaces. 1st Edition, Volume 38*, Dover Publications Inc., Juliol, 1970

[3] Garnett, John B.: *Bounded Analytic Functions*, Springer; Revised edition, Octubre, 2006.

[4] Lions, J.L.: Supports dans la transformation de Laplace. J. Anal. Math. 2, https://doi.org/10.1007/BF02825641, desembre de 1952.

[5] Ransford, T. Letter to the Editor: A Short Complex-Variable Proof of the Titchmarsh Convolution Theorem. J Fourier Anal Appl 25, 2697-2702 (2019). https://doi.org/10.1007/s00041-019-09679-9

[6] Rudin, Walter: *Real and Complex Analysis*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[7] Titchmarsh, E. C. (1926). *The Zeros of Certain Integral Functions*, Proceedings of the London Mathematical Society. s2-25 (1): 283-302. doi:10.1112/plms/s2-25.1.283.