UNIVERSITAT DE BARCELONA

# PART I: TEORIA DEL CONSUM

Tema 1: Preferències i racionalitat
Tema 2: Possibilitats del consumidor
Tema 3: Elecció i demanda del consumidor

*Departament de Teoria Econòmica*
*monica.serrano@ub.edu*



## El problema del consumidor racional

- **Objectiu:**
  - **TEMA 1: Preferències** — Corbes d'indiferència; Funcions d'utilitat
- **Restriccions:**
  - **TEMA 2: Possibilitats de consum** → Restricció pressupostària
- **Decisió:**
  - **TEMA 3: Elecció** → Funció de demanda

# PART I: TEORIA DEL CONSUM

## Tema 3: Elecció i demanda del consumidor

*MICROECONOMIA II - ECONOMIA*
*monica.serrano@ub.edu*
*Mònica Serrano ©*

## Guió del tema 3

- Planificació del tema
- 0. Introducció
- 1. El problema primal: la maximització de la utilitat
- 2. El problema dual: la minització de la despesa
- 3. Estàtica comparativa
- 4. Preferències revelades
- 5. Agregació: la funció de demanda de mercat

*Mònica Serrano ©*

## 0. Introducció: Esquema primal-dual

**PROBLEMA PRIMAL**

$$\max_{x_1,x_2} \quad U(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

**DEMANDA ORDINÀRIA (MARSHALIANA)**

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$

Identitat de Roy

**FUNCIÓ D'UTILITAT INDIRECTA**

$$V = V(p_1, p_2, \overline{m})$$

**PROBLEMA DUAL**

$$\min_{x_1,x_2} \quad E(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad \overline{U} = U(x_1,x_2)$$

**DEMANDA COMPENSADA (HICKSIANA)**

$$x_1^h = h(p_1, p_2, \overline{U})$$

Lema de Shepard

**FUNCIÓ DE DESPESA**

$$E^* = D(p_1, p_2, \overline{U})$$

Inversa

*Mònica Serrano ©*

## Guió del tema 3

- Planificació del tema
- 0. Introducció
- 1. El problema primal: la maximització de la utilitat
- 2. El problema dual: la minització de la despesa
- 3. Estàtica comparativa
- 4. Preferències revelades
- 5. Agregació: la funció de demanda de mercat

UNIVERSITAT DE BARCELONA

*Mònica Serrano ©*

# 1.1.1. Elecció consumidor: Gràficament

- **CRITERI D'ELECCIÓ:**

**Generalment, l'individu triarà la cistella de béns òptima que estigui sobre la recta pressupostària i que li permeti assolir la CI més allunyada de l'origen possible.**

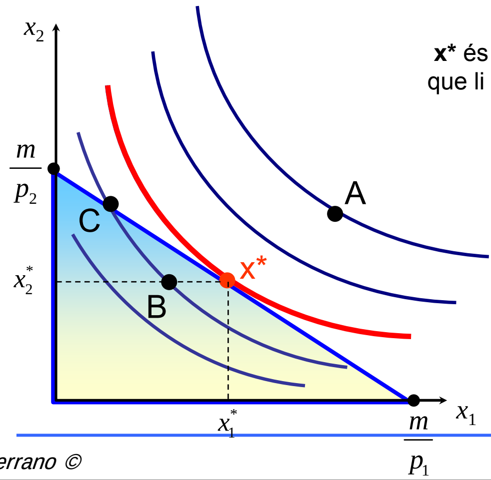
- Cistella òptima = $x^* = (x_1^*, x_2^*)$
- Generalment = no vol dir sempre
  - Criteri independent de la forma de les preferències i restricció pressupostària.

**VIGILEU AMB LES FÒRMULES MEMORITZADES**



# 1.1.1. Elecció consumidor: Gràficament

- **GRÀFICAMENT:**




**x*** és la **cistella òptima**, la cistella que li proporciona més utilitat donat el seu poder adquisitiu.

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)$$

## 1.1.1.a. Cas solució interior, única i tangent

- **Direm que l'elecció òptima de l'individu serà:**
  - Una **solució interior...**

    ...si x* està a l'interior del gràfic (no eixos)
  - Una **solució única...**

    ...si només hi ha 1 única x*
  - I una solució que compleix el **criteri de tangència...**

    ...la CI és tangent a la RP en un punt

    ...el pendent de la CI i el pendent de la RP són iguals.



## 1.1.1.a. Cas solució interior, única i tangent

- **Criteri de tangència:**

**Pendent CI = Pendent RP**

$$RMS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} \qquad pdt\ RP = \frac{x_2}{x_1} - \frac{p_1}{p_2}$$

**Criteri de tangència**

Expressió 1

$$\frac{UM_1}{UM_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Expressió 2

$$\lambda = \frac{UM_1}{p_1} = \frac{UM_2}{p_2}$$

## 1.1.1.a. Cas solució interior, única i tangent

Cas 1 $UM_1 = 16 \quad p_1 = 24$
$UM_2 = 4 \quad p_2 = 6$

Cas 2 $UM_1 = 10 \quad p_1 = 24$
$UM_2 = 5 \quad p_2 = 6$

- **Exemple expressió 1:**

  **Cas 1**

  **Cas 2**

- **Exemple expressió 2:**

  **Cas 1**

  **Cas 2**

UNIVERSITAT DE BARCELONA

*Mònica Serrano ©*

## 1.1.1.b. Altres casos

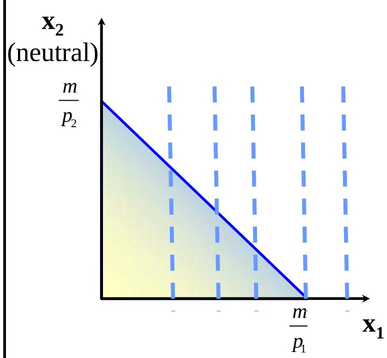
- **Anem a veure casos on l'elecció òptima de l'individu serà:**
  - Solució **NO interior =** solucions de **cantonada =** als **eixos**
  - Solució **NO única**
  - I una solució que **NO** compleix el **criteri de tangència...**

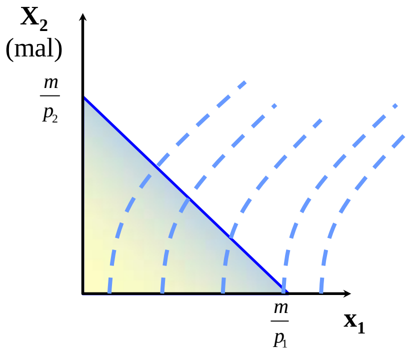
UNIVERSITAT DE BARCELONA

*Mònica Serrano ©*

## 1.1.1.b. Altres casos: NO INTERIORS

- **Quan un bé és NEUTRALS o MAL:**



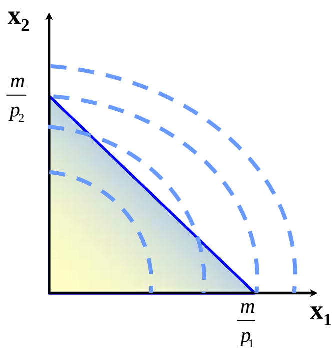




- Ens gastarem tota la renda en l'altra bé i res en el bé neutral o mal



## 1.1.1.b. Altres casos: NO INTERIORS

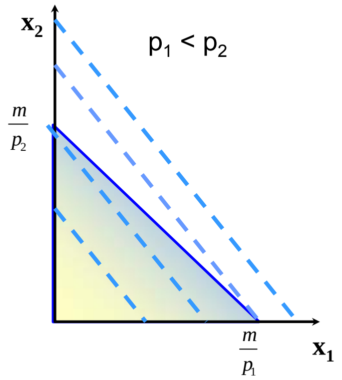
- **Quan un bé té preferències CÒNCAVES:**

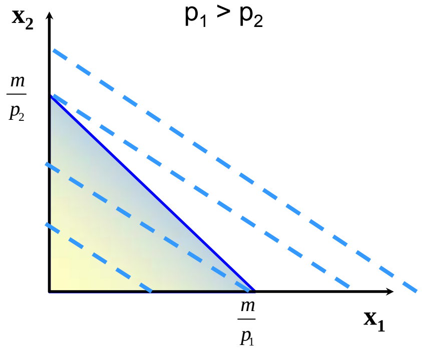



- Ens gastarem tota la renda en un dels béns. Quin?

# 1.1.1.b. Altres casos: NO INTERIORS

- **Béns SUBSTITUTIUS si $(a/b) \neq (p_1/p_2)$:**



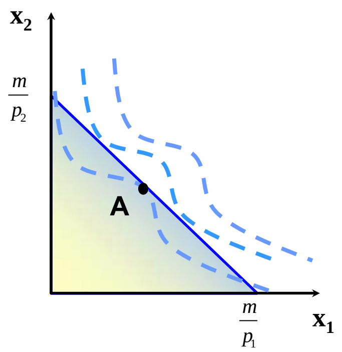



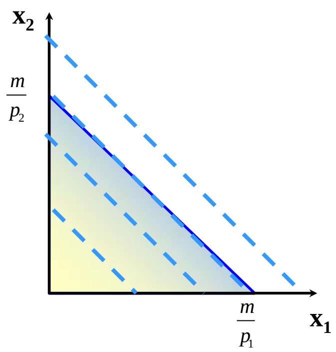

  - Ens gastarem tota la renda en el bé més barat.



# 1.1.1.b. Altres casos: NO ÚNIQUES

- **Preferències no estrictament convexes... pot passar...**

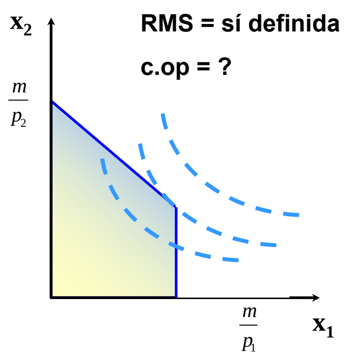


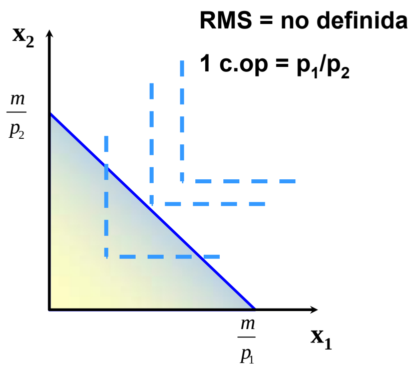




  - En aquests dos casos hi ha 2 cistelles òptimes o indeterminades.

## 1.1.1.b. Altres casos: NO TANGENCIA

- **No es compleix el criteri de tangència quan...**



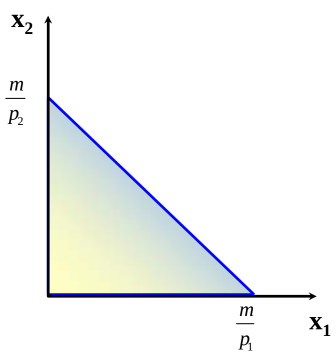




- En aquests sabem com fa l'elecció i coneixem la x* (tot i no tenir tangència).



## 1.1.1.b. Altres casos: MÉS EXEMPLES

- **Béns amb sacietat:**



# 1.1.1.b. Altres casos: MÉS EXEMPLES

- **Exemple: Compte d'estalvis per estudis universitaris**

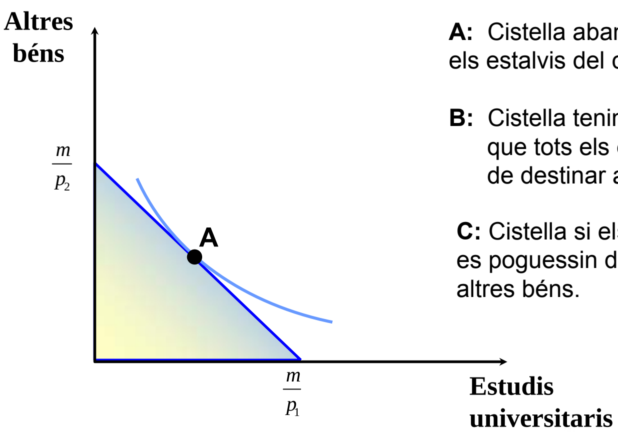
  - Fa uns anys els pares de "Pocos Ceros" van obrir un compte d'estalvis per pagar la carrera del seu fill.
  - Els diners acumulats només es poden gastar en els estudis de "Pocos Ceros".

  - No hi ha dubte, que si part dels diners es poguessin destinar a la compra d'altres béns i serveis la seva elecció òptima canviari.



# 1.1.1.b. Altres casos: MÉS EXEMPLES

- **Exemple: Compte d'estalvis per estudis universitaris**




**A:** Cistella abans de rebre els estalvis del compte.

**B:** Cistella tenint en compte que tots els estalvis s'han de destinar als estudis.

**C:** Cistella si els estalvis es poguessin destinar a altres béns.

## 1.1.2. Elecció consumidor: Formalment

- **CONCLUSIÓ DE L'APARTAT ANTERIOR:**

Quan les **PREFERÈNCIES** són **estrictament convexes** i la **RESTRICCIÓ PRESSUPOSTÀRIA** és **convexa**, l'elecció òptima de l'individu compleix la condició de **tangència**.

$$RMS = \frac{UM_1}{UM_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Aquesta condició es deriva del **PROBLEMA PRIMAL**.
- Aplicarem el **MÈTODE DEL MULTIPLICADOR DE LAGRAGE**.



## 1.1.2.a. Mètode del multiplicador de Lagrange

- **Passos per aplicar el MML:**
  - 1º Escrivim el problema d'optimització i identifiquem les variables i els paràmetres.
  - 2º Escrivim les funcions implícites de les restriccions.
  - 3º Escrivim el lagrangià.
  - 4º Calculem les condicions de primer i segon ordre per trobar un màxim.

## 1.1.2.b. Interpretació econòmica de λ

- **λ assigna un “preu ombra” a la restricció:**
  - Si λ = valor elevat — si relaxem la RP la utilitat augmentaria molt.
  - Si λ = valor baix — si relaxem la RP la utilitat no augmentaria molt.
  - Si λ = 0 — si relaxem la RP no variaria (no estan vinculades).
  - Indica com varia el valor òptim de la FU quan variem un dels paràmetres. $$\lambda = \frac{\partial L}{\partial m}$$
  - Una altra interpretació: $$\lambda = \frac{\text{benefi marginal d'algo}}{\text{cost marginal d'algo}} = \frac{UM_1}{p_1}$$



## 0. Introducció: Esquema primal-dual

**PROBLEMA PRIMAL**

$$\max_{x_1,x_2} \quad U(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

**PROBLEMA DUAL**

$$\min_{x_1,x_2} \quad E(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad \bar{U} = U(x_1,x_2)$$

**DEMANDA ORDINÀRIA (MARSHALIANA)**

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$

Identitat de Roy

**DEMANDA COMPENSADA (HICKSIANA)**

$$x_1^h = h(p_1, p_2, \bar{U})$$

Lema de Shepard

**FUNCIÓ D'UTILITAT INDIRECTA**

$$V = V(p_1, p_2, \bar{m})$$

Inversa

**FUNCIÓ DE DESPESA**

$$E^* = D(p_1, p_2, \bar{U})$$

## 1.2.1. Obtenció funció de demanda ordinària

- **Funció de demanda ordinària o Marshalliana:**
  - Ens diu com l'individu escull la **cistella òptima** que determina la **quantitat demandada** del bé 1 i bé 2:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)$$

  - Per analitzar com varia x* quan varien els preus del béns i/o la renda...

... Necessitarem conèixer la **funció de demanda**

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$
$$x_2 = f(p_1, p_2, m)$$



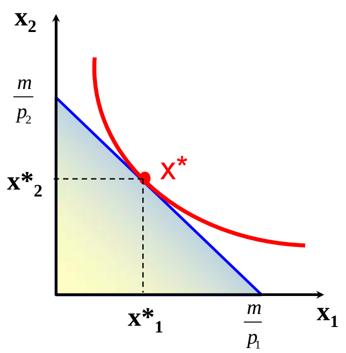
## 1.2.1. Obtenció funció de demanda ordinària

- **Com obtenir la funció de demanda ordinària:**
  - Formalment la funció de demanda es pot obtenir per 3 mètodes:
    1. Mètode del multiplicador de Lagrange
    2. Mètode de substitució
    3. Mètode directe
  - En qualsevol cas **sempre** recomanem **dibuixar** primer.
  - Farem els casos de:
    - Cobb-Dougles (aplicant els 3 mètodes)
    - Substitutius perfectes
    - Complementaris perfectes

## 1.2.1.a. Funció demanda: Cobb-Douglas

- **Cobb-Douglas:** $U(x_1, x_2) = a \ln x_1 + b \ln x_2$

  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$




Funció de demanda del bé 1:

$$x_1^* = \frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1}$$

Funció de demanda del bé 2:

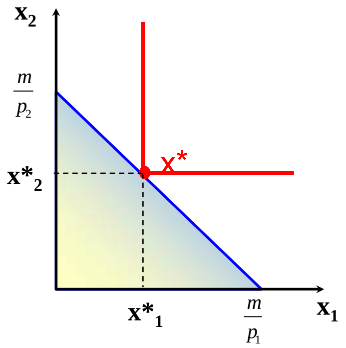
$$x_2^* = \frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2}$$



## 1.2.1.b. Funció demanda: Complementaris

- **Complementaris:** $U(x_1, x_2) = \min\left\{x_1, \frac{x_2}{a}\right\}$

  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$




Funció de demanda del bé 1:

$$x_1^* = \frac{m}{p_1 + a p_2}$$

Funció de demanda del bé 2:

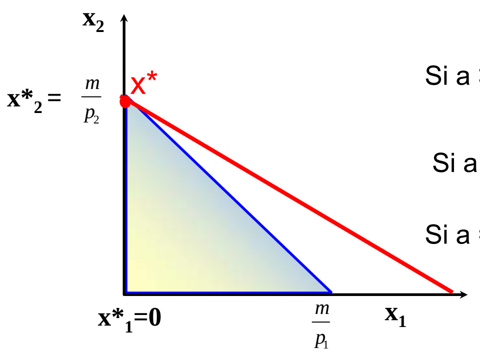
$$x_2^* = \frac{m}{\frac{p_1}{a} + p_2}$$

# 1.2.1.c. Funció demanda: Substitutius

- **Substitutius:**

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2}{a}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$




Si a > ($p_1/p_2$) : $x_1^* = \dfrac{m}{p_1}$ $x_2^* = 0$

Si a < ($p_1/p_2$) : $x_1^* = 0$ $x_2^* = \dfrac{m}{p_2}$

Si a = ($p_1/p_2$) : indeterminat



# 1.2.2. Les elasticitats de la demanda

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$

- **Elasticitat de la demanda:**
  - Ens dóna informació respecte a la direcció i magnitud dels canvis en la quantitat demandada davant de variacions de les variables independents.
  - És una mesura de la **sensibilitat** de la quantitat demandada als canvis en les preus o en la renda.

- **Tipus d'elasticitat de la demanda:**
  - Elasticitat preu de la demanda
  - Elasticitat renda de la demanda
  - Elasticitat encreuada de la demanda

## 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Definició:**
  - Variació percentual en la quantitat demandada dividida per la variació percentual en el preu el mateix bé que l'origina.

- **Càlcul:**
  - Elasticitat arc: $\varepsilon_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta p_i} \dfrac{p_i}{x_i}$
  - Elasticitat punt mig: $\varepsilon_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta p_i} \dfrac{\overline{p}_i}{\overline{x}_i}$
  - Elasticitat punt: $\varepsilon_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i} \dfrac{p_i}{x_i}$



## 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Determinants:**
  - Existència de substitutius
  - Horitzó temporal
  - Definició del bé.

- **Valor i signe:**
  1. Depèn del pendent i del punt → elasticitat ≠ pendent.
  2. Signe en general negatiu → sovint s'expressa en valor absolut.
  3. Es calcula sempre un punt → variarà al llarg corba de demanda.

# 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Valor i signe:**

4. Valors de $\varepsilon_i$ :

∞ perfectament elàstica

>1 elàstica
si Δp donen lloc a ΔE de signe oposat. $\boxed{\frac{dE}{dp} < 0}$
e.g. ↑p provoca ↓E

=1 unitària $\boxed{\frac{dE}{dp} = 0}$

<1 rígida o inelàstica
si Δp donen lloc a ΔE del mateix signe. $\boxed{\frac{dE}{dp} > 0}$
e.g. ↑p provoca ↑ E

0 perfectament inelàstica



# 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Valor i signe:**

4. Valors de $\varepsilon_i$ relacionats amb la despesa (exemple):

Funció de demanda $x = 4 - (1/10)\, p$

Funció de despesa $E = px$

a) En x=1

# 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Valor i signe:**

4. Valors de $\varepsilon_i$ relacionats amb la despesa (exemple):

Funció de demanda $x = 4 - (1/10)\,p$

Funció de despesa $E = px$

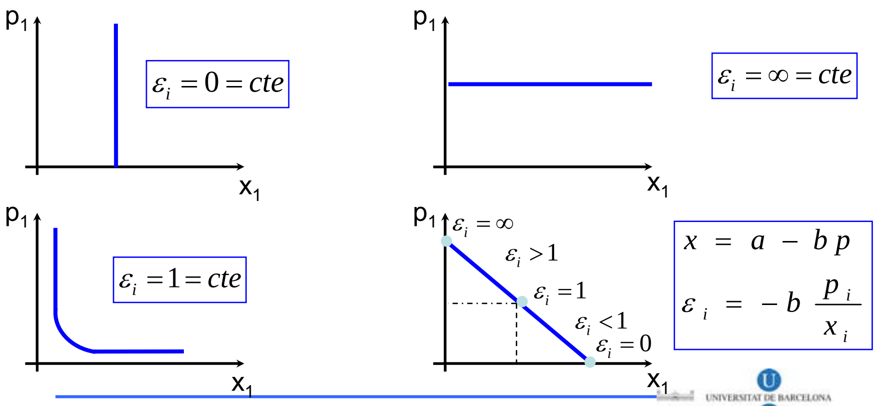
b) En x=3



# 1.2.2.a. Elasticitat preu de la demanda

- **Valor i signe:**

5. Alguns casos especials:



# 1.2.2.b. Elasticitat renda de la demanda

- **Definició:**
  - Variació percentual en la quantitat demandada dividida per la variació percentual en la renda de l'individu.
- **Càlcul:**
  - Elasticitat punt: $\varepsilon_m = \dfrac{\partial x_i}{\partial m}\dfrac{m}{x_i}$
- **Valor i signe:**
  - L'elasticitat renda no és única per un bé, sinó que variarà conforme variï la renda.



# 1.2.2.b. Elasticitat renda de la demanda

- **Valor i signe de $\varepsilon_m$ :**

  <0 bé inferior
  si ↑ m, ↓ E en el bé.

  >0 bé normal
  si ↑ m, ↑ E en el bé.

  <1 bé primera necessitat — si E marginal < E mitjana.

  >1 bé de luxe — si E marginal > E mitjana.

## 1.2.2.b. Elasticitat renda de la demanda

- **Relació $\varepsilon_m$ amb despesa marginal i despesa mitjana:**

$$\varepsilon_m = \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}\frac{p_i}{p_i}$$

$$\varepsilon_m = \left(\frac{\partial x_i}{\partial m}p_i\right)\left(\frac{m}{x_i}\frac{1}{p_i}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial m}p_i\right)}_{\text{Despesa Marginal en } x_i}\underbrace{\left(\frac{p_i x_i}{m}\right)^{-1}}_{\text{Despesa mitjana en } x_i}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\text{E. Marginal}}{\text{E. Mijana}}$$

Mònica Serrano ©

## 1.2.2.b. Elasticitat renda de la demanda

- **Exemple:**

| | Despesa | Despesa mitjana | Despesa | Increment despesa | Despesa mitjana | Despesa marginal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E = p_i x_i$ | $p_i x_i / m$ | $E' = p_i x_i'$ | $p_i \Delta x_i$ | $p_i' x_i / m'$ | $p_i \Delta x_i / \Delta m$ |
| Bé 1 | 20 | 25% | 24 | 4 | 20% | 10% |
| Bé 2 | 60 | 75% | 96 | 36 | 80% | 90% |
| | m=80 | | m=120<br>Δm=40 | | | |

$$\varepsilon_{mB1} = \frac{\text{E. Marginal}}{\text{E. Mijana}} = \frac{10\%}{25\%} = 0.4 < 1 \quad \text{Bé normal}$$

$$\varepsilon_{mB2} = \frac{\text{E. Marginal}}{\text{E. Mijana}} = \frac{90\%}{75\%} = 1.2 > 1 \quad \text{Bé luxe}$$

Mònica Serrano ©

## 1.2.2.c. Elasticitat encreuada de la demanda

- **Definició:**
  - Variació percentual en la quantitat demandada dividida per la variació percentual en el preu d'un altre bé que l'origina.
- **Càlcul:**
  - Elasticitat punt: $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i}$
- **Valor i signe:**

  >0 Substitutius si $\uparrow p_j$, $\uparrow x_i$

  <0 Complementaris si $\uparrow p_j$, $\downarrow x_i$



## 1.2.3. Propietats de la funció demanda ordinària

$$\boxed{x_i = f_i(p_i, p_j, m)}$$

1. **La suma ponderada de les elasticitats renda ha de ser 1:**

$$\sum p_i x_i = m \xrightarrow{\quad implica \quad} \sum w_i \varepsilon_{mi} = 1$$

2. **La suma ponderada de les elasticitats encreuades més la ponderació del bé que canvia el preu ha de ser 0:**

$$\sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j = 0 \xrightarrow{\quad implica \quad} \sum w_i \varepsilon_{ij} + w_j = 0$$

## 1.2.3. Propietats de la funció demanda ordinària

$$\boxed{x_i = f_i(p_i, p_j, m)}$$

3. **La suma <u>no</u> ponderada de les elasticitats encreuades més l'elasticitat renda ha de ser 0:**

$$dx_i = 0 \xrightarrow{\quad implica \quad} \varepsilon_{mi} + \sum \varepsilon_{ij} = 0$$

4. **La funció de demanda ordinària és homogènia de grau 0 en preus i renda.**



## 0. Introducció: Esquema primal-dual

**PROBLEMA PRIMAL**

$$\max_{x_1,x_2} \quad U(x_1,x_2)$$

$$\text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

**DEMANDA ORDINÀRIA (MARSHALIANA)**

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$

Identitat de Roy

**FUNCIÓ D'UTILITAT INDIRECTA**

$$V = V(p_1, p_2, \bar{m})$$

Inversa

**PROBLEMA DUAL**

$$\min_{x_1,x_2} \quad E(x_1,x_2)$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{U} = U(x_1,x_2)$$

**DEMANDA COMPENSADA (HICKSIANA)**

$$x_1^h = h(p_1, p_2, \bar{U})$$

Lema de Shepard

**FUNCIÓ DE DESPESA**

$$E^* = D(p_1, p_2, \bar{U})$$

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- **Funció d'utilitat indirecta (FUI) determina...**

**... Nivell màxim d'utilitat que pot assolir l'individu donats uns preus i una renda.**

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = f_1(p_1, p_2, m) \\ x_2 = f_2(p_1, p_2, m) \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \end{array}} \longrightarrow$$

Màx. U =
= CI més lluny de l'origen

Mònica Serrano ©

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- **Definim la funció d'utilitat indirecta (FUI) U*:**

$$V = V(x_1^*, x_2^*) = V\left[ f_1(p_1, p_2, m), f_2(p_1, p_2, m) \right]$$

$$\boxed{V = V(p_1, p_2, m)}$$

$\uparrow m \Rightarrow \uparrow V$ Excepte si tots els béns són inferiors (això no és possible)

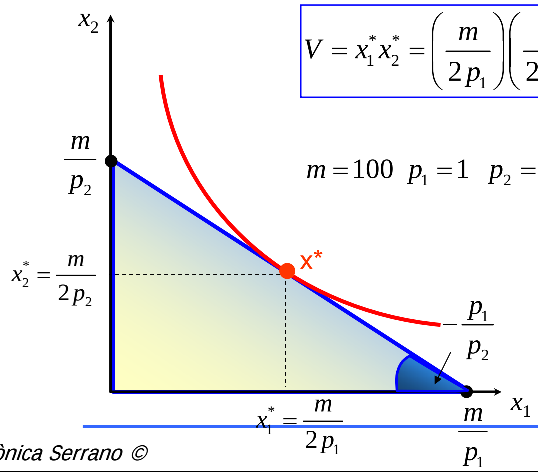
$\downarrow p_i \Rightarrow \uparrow V$ Excepte si tots els béns són Giffen (això no és possible)

Mònica Serrano ©

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- **Exemple amb Cobb-Douglas** $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ :

$$\boxed{V = x_1^* x_2^* = \left(\frac{m}{2p_1}\right)\left(\frac{m}{2p_2}\right) = \frac{m^2}{4p_1p_2}}$$




$$m = 100 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{100^2}{4*1*1} = 2500$$

$$m' = 200 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad V = 10000$$

$$m = 100 \quad p_1' = 0.5 \quad p_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad V = 5000$$



## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- **Aplicació econòmica:**

-El govern necessita recaptar 20M € i s'està plantejant com fer-ho:

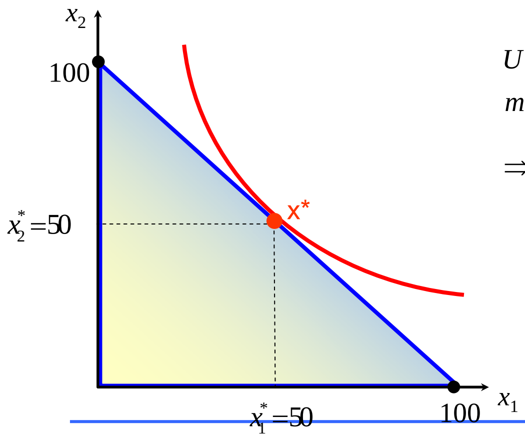
**OPCIÓ 1:** Impost sobre la renda: T=20 i REC=20
**OPCIÓ 2:** Impost sobre el consum del bé 1: t=2/3 i REC=20

-L'objectiu del govern és recaptar però vol afectar el menys possible el benestar de la població.

**Quina de les 2 opcions afectarà menys a la utilitat de l'individu??**

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- Aplicació econòmica: SITUACIÓ INICIAL




$U(x_1,x_2)=x_1x_2$

$m=100 \quad p_1=1 \quad p_2=1$

$\Rightarrow \quad V=\dfrac{100^2}{4*1*1}=2500$

*Mònica Serrano ©*

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- Aplicació econòmica: OPCIÓ 1 IMPOST SOBRE LA RENDA

*Mònica Serrano ©*

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

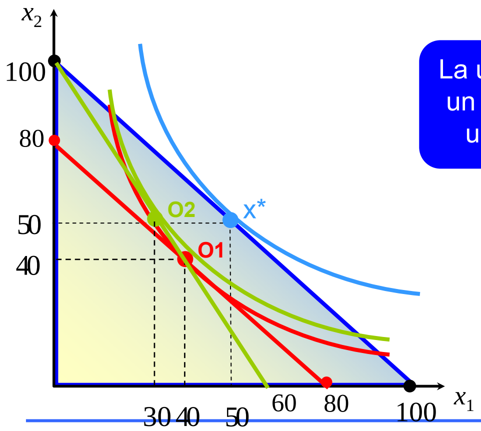
- **Aplicació econòmica: OPCIÓ 2 IMPOST SOBRE CONSUM B1**

*Mònica Serrano ©*

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 1.3.1. Obtenció de la FUI a partir de la FDO

- **Aplicació econòmica: CONCLUSIÓ**




La utilitat es redueix més amb un impost específic que amb un impost sobre la renda.

*Mònica Serrano ©*

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 0. Introducció: Esquema primal-dual

**PROBLEMA PRIMAL**

$$\max_{x_1,x_2} \quad U(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

**DEMANDA ORDINÀRIA (MARSHALIANA)**

$$x_1 = f(p_1, p_2, m)$$

**FUNCIÓ D'UTILITAT INDIRECTA**

$$V = V(p_1, p_2, \bar{m})$$

Identitat de Roy

**Inversa**

Lema de Shepard

**PROBLEMA DUAL**

$$\min_{x_1,x_2} \quad E(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.} \quad \bar{U} = U(x_1,x_2)$$

**DEMANDA COMPENSADA (HICKSIANA)**

$$x_1^h = h(p_1, p_2, \bar{U})$$

**FUNCIÓ DE DESPESA**

$$E^* = D(p_1, p_2, \bar{U})$$

*Mònica Serrano ©*

## 1.3.2. Obtenció de la FDO a partir de la FUI

- **Si les funcions d'utilitat indirecta (FUI) determinen...**

**... El nivell màxim d'utilitat que pot assolir l'individu donats uns preus i una renda...**

**... Sembla coherent que també puguem desfer aquest camí...**

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= f_1(p_1, p_2, m) \\ x_2 &= f_2(p_1, p_2, m) \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1^* \\ x_2^* \end{aligned}} \longrightarrow$$

Màx. U =

= CI més lluny de l'origen

*Mònica Serrano ©*

## 1.3.2.a. El teorema de l'envolupant

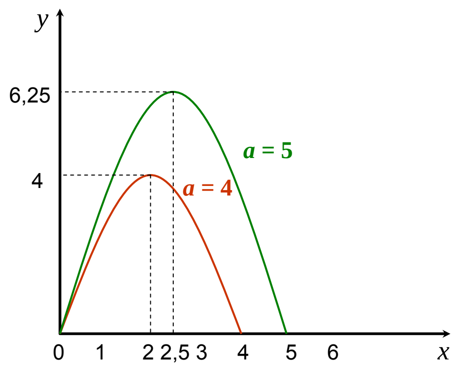
- **Idea:**
  - Veure com varia el valor òptim (*y**) quan varia el valor d'un dels paràmetres (*a*).
- **Formalment:**
  - El teorema de l'envolupant estableix que quan *a* experimenta petites variacions, es possible calcular *dy*/da* mantenint constant la variable *x* en el seu valor òptim (*x**) i derivant la funció objectiu respecte al paràmetre *a*.

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\{x = x^*(a)\}$$

Mònica Serrano ©

## 1.3.2.a. El teorema de l'envolupant

- **Gràficament: exemple** $y = -x^2 + ax$




| Valor de a | Valor de x* | Valor de y* |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 0,25 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1,5 | 2,25 |
| 4 | 2 | 4 |
| 5 | 2,5 | 6,25 |
| 6 | 3 | 9 |

Mònica Serrano ©

## 1.3.2.a. El teorema de l'envolupant

- **Procediment: exemple** $y = -x^2 + ax$

1. Derivem la funció respecte la variable i igualem a 0 (CPO):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + a = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{a}{2}$$

2. Derivem la mateixa funció respecte el paràmetre:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = x$$

3. Substituïm la "x" obtinguda en (2) pel resultat x* obtingut en (1):

$$\frac{\partial y^*}{\partial a} = x^* = \frac{a}{2}$$



## 1.3.2.a. El teorema de l'envolupant

- **Com aplicar el teorema de l'envolupant al programa d'optimització del consumidor??**

1. Escriurem la funció de Lagrange.
2. Derivarem la funció de Lagrange respecte les variables (CPO).
3. Derivarem la funció de Lagrange respecte els paràmetres.
4. Substituirem les "$x_i$" obtingudes en (3) en els resultats de x* de (2):
5. Formalment:

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial L}{\partial a}\left\{x_1^*, \ldots, x_n^*; a_1, \ldots, a_n\right\}$$

## 1.3.2.b. La identitat de Roy

- **Idea:**
  - Permet obtenir les funcions de demanda ordinàries (marshallianes) a partir de la funció d'utilitat indirecta.
  - **Com?** Aplicant el teorema de l'envolupant.

$$\boxed{V = U^* = V(p_1, p_2, m)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = f_1(p_1, p_2, m) \\ x_2 = f_2(p_1, p_2, m) \end{array}}$$

**Pel Teorema de l'envolupant**:
Sabem que el canvi en la funció objectiu [ V($p_1$,$p_2$,m)] avaluada a l'òptim (U*) quan variem els paràmetres és igual a la derivada parcial de la funció de Lagrange respecte els paràmetres.



## 1.3.2.b. La identitat de Roy

- **Deducció de la identitat de Roy:**
  - Funció de Lagrange: $L = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$
  - Derivem respecte als paràmetres:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial p_1} = \dfrac{\partial U^*}{\partial p_1} = \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = -\lambda x_1 & (1) \\ \dfrac{\partial V}{\partial p_2} = \dfrac{\partial U^*}{\partial p_2} = \dfrac{\partial L}{\partial p_2} = -\lambda x_2 & (2) \\ \dfrac{\partial V}{\partial m} = \dfrac{\partial U^*}{\partial m} = \dfrac{\partial L}{\partial m} = \lambda & (3) \end{array}\right\}$$

**Com obtenim la FUNCIÓ DEMANDA bé 1?**

Dividim (1) amb signe - entre (3)

$$\frac{-(1)}{(3)} = \boxed{\frac{-\partial V / \partial p_1}{\partial V / \partial m} = \frac{-\partial L / \partial p_1}{\partial L / \partial m}} = \frac{\lambda x_1}{\lambda} = x_1$$

IDENTITAT DE ROY pel bé 1

## 1.3.2.b. La identitat de Roy

- **Deducció de la identitat de Roy:**
  - Funció de Lagrange: $L = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$
  - Derivem respecte als paràmetres:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_1} &= \frac{\partial U^*}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_1} = -\lambda x_1 \quad (1) \\ \frac{\partial V}{\partial p_2} &= \frac{\partial U^*}{\partial p_2} = \frac{\partial L}{\partial p_2} = -\lambda x_2 \quad (2) \\ \frac{\partial V}{\partial m} &= \frac{\partial U^*}{\partial m} = \frac{\partial L}{\partial m} = \lambda \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

**Com obtenim la FUNCIÓ DEMANDA bé 2?**

Dividim (2) amb signe - entre (3)

$$\frac{-(2)}{(3)} = \boxed{\frac{-\partial V / \partial p_2}{\partial V / \partial m} = \frac{-\partial L / \partial p_2}{\partial L / \partial m}} = \frac{\lambda x_2}{\lambda} = x_2$$

**IDENTITAT DE ROY pel bé2**

Mònica Serrano ©

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 1.3.2.b. La identitat de Roy

- **Exemple:**
  - Quines són les funcions de demanda ordinària (FDO) dels béns 1 i 2, si només coneixem la funció d'utilitat indirecta?
  - Funció d'utilitat indirecta: $V(p_1, p_2, m) = \dfrac{m^2}{4 p_1 p_2}$
  - Apliquem la **IDENTITAT DE ROY** pel bé 1:

$$\frac{-\partial V / \partial p_1}{\partial V / \partial m} = \frac{-\partial L / \partial p_1}{\partial L / \partial m} = \boxed{\frac{m}{2 p_1} = x_1^*}$$

  - Apliquem la **IDENTITAT DE ROY** pel bé 2:

$$\frac{-\partial V / \partial p_2}{\partial V / \partial m} = \frac{-\partial L / \partial p_2}{\partial L / \partial m} = \boxed{\frac{m}{2 p_2} = x_2^*}$$

**FDO de la funció Cobb-Douglas tipus:**

$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Mònica Serrano ©

UNIVERSITAT DE BARCELONA