INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

ELEMENTOS de MATEMATICAS para PROFESORES de E. G. B.

JAVIER BARRAGAN

Septiembre 1972

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

PARA E. G. B.

Profesor:

Javier Barragán Fernández

INTRODUCCION

Este libro pretende ser el fiel reflejo, llevado a imprenta, del cursillo que sobre "Matemática Moderna y Geometría" organizó el I.C.E. durante el curso 1971-72. El método empleado, el estilo de enfocar los temas, los problemas resueltos, quieren ser el método, el estilo y los problemas que durante el cursillo utilizamos. Las preguntas, sugerencias, intervenciones etc., que durante el cursillo realizaron los cursillistas, las hemos tenido presente en todo momento.

Nuestra mayor satisfacción sería que el libro pareciera un "seminario de trabajo", sobre los temas matemáticos. Esto pretendió ser el cursillo. A ello apunta el libro.

Está dividido el programa en dos partes: Una primera en la que se exponen la mayoría de los conceptos que sobre Matemática Moderna son necesarios para la segunda etapa de General Básica. Se insiste en especial en los conceptos de "correspondencia" y sus "representaciones gráficas" por la extensa aplicación que tienen, tanto en los problemas lineales como en el de transformaciones geométricas. También hemos dado especial realce a la "relación de equivalencia" por el gran número de entes que de ella se derivan: el número entero, el racional, los vectores equipolentes, las direcciones, las longitudes de los segmentos... etc.etc. Acaba esta parte con un capítulo dedicado a la resolución de inecuaciones lineales. Hemos creido interesante su introducción pues, por un lado, es una aplicación de la teoría de conjuntos, (en lo referente a las intersecciones de semiplanos), preferentemente geométrica y de dibujo. Ello nos sirve mucho para entrar de lleno en la Geometría, en donde tan importante papel juega el dibujo. Por otro lado las inecuaciones son la base de la "programación lineal" tan de uso hoy día.

En la segunda parte del libro, la Geometría, se abordan los temas de las "transformaciones geométricas" como un caso de "correspondencia" entre conjuntos de puntos. En una palabra, como un ejemplo geométrico de aplicación de los conceptos "modernos". Estas "transformaciones" nos permitirán, dada una figura, "moverla" de una otra posición del plano, e incluso ampliar o reducir su tamaño según una cierta razón o escala.

Finaliza el libro con un capítulo dedicado a los tipos de estructura. Se analizan los grupos, anillos y cuerpos. Se pone de manifiesto como conjuntos tan dispares, en principio, como: los números enteros, los racionales, los vectores, los giros, las homotecias, etc.; respecto de ciertas operaciones, en ellos definidas, tienen una serie de propiedades comunes (asociativa, existencia de neutro, simétrico...). Es decir tienen la misma estructura. Ello nos permite a través de una idea abstracta y muy general, relacionar un sin fin de "compartimentos" matemáticos, que en principio podían parecer estancos. Esta idea de generalidad es tal vez una de las características más importantes de la Matemática Moderna.

En cada uno de los capítulos se han resuelto, a la par de los conceptos surgidos, gran cantidad de ejercicios con objeto de fijar gráficamente los mismos. El lector que asistiera a los cursillos podrá observar como muchos de ellos están sacados de la colección que para "el trabajo en equipo" allí utilizamos. Esto vuelve a incidir en el objetivo pretendido, que indicábamos al principio: dejar escrito lo más fielmente posible, el trabajo por todos allí realizado. Deseamos sea útil al lector.

Javier Barragán

Profesor del Cursillo

C A P Í T U L O   I

ELEMENTOS DE MATEMATICAS PARA E.G.B.

PARTE PRIMERA

I

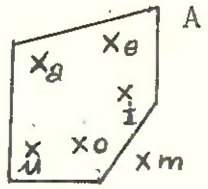
* Conjunto: Definición. Pertenencia y no pertenencia. Símbolos. Diagramas: Venn y lineales.

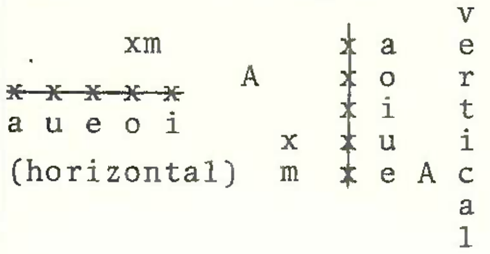
Empezamos la Matemática Moderna. Toda ella gira alrededor del concepto de conjunto. Sin embargo su correcta definición es difícil. Como por otro lado la idea de "conjunto" es por todos conocida, no merece la pena el definirla. Lo importante es distinguir cuando una "cosa" es o no es un conjunto. Para poder asegurarlo, la respuesta a la siguiente pregunta ha de ser categórica: "¿Este elemento (uno cualquiera) pertenece o no pertenece al conjunto?". Si existe incertidumbre, tal cosa no es conjunto, aunque le hayamos puesto el adjetivo de tal. Así p.e. decimos "el conjunto de alumnos de bachiller del año próximo" y nos equivocamos. No es un conjunto pues ante la pregunta anterior nos quedamos sin certeza. ¿Quién puede asegurarnos si un niño en concreto pertenece o no a dicho conjunto? Hay muchas eventualidades que nos impiden contestar, y con lo visto ya hemos hecho aparecer las palabras: elementos, pertenece, no pertenece... Los elementos de un conjunto son los "entes" o individualidades que lo componen, que lo forman. En el conjunto de un equipo de football, son los jugadores. En el de las letras de una palabra, son cada una de ellas; etc. etc.

Indicamos que un elemento pertenece a un conjunto mediante el símbolo $\in$ y que no pertenece mediante $\notin$. Así en el conjunto A de las vocales castellanas, podemos escribir $e \in A$ (e pertenece a A) y $m \notin A$ (m no pertenece a A). Existen dos maneras de dar un conjunto: por extensión o por una propiedad que la cumplan todos sus elementos. Así por extensión: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y por comprensión A = {Conjunto de los nueve primeros números naturales} . El Corchete o paréntesis puede sustituir a la llave.

El empleo de una u otra forma de dar un conjunto depende del número de elementos del mismo. Si hay pocos puede emplearse el de extensión. Cuando haya muchos el de la propiedad.

Mediante dibujos o diagramas sobre el papel, pueden aclararse las cosas antes dichas. Se utilizan los diagramas de Venn para representar un conjunto. Son líneas cerradas dentro de las cuales se colocan los elementos representados por pequeñas aspas o puntos. Si un elemento pertenece al conjunto cae dentro. Si no pertenece estará fuera de la línea cerrada. También se pueden utilizar los diagramas lineales: horizontales o verticales. Consiste en representar el conjunto mediante un segmento y cada uno de los elementos por puntos del mismo. Por ejemplo:





Como se observa en todos los gráficos los elementos pueden escribirse o colocarse en cualquier orden. ¡ Todos tienen la misma categoría ¡. Podemos igualmente escribir: $A = \{a,e,i,o,u\}$ que $A = \{e,o,u,i,a\}$ o $A = \{a,i,u,e,o\}$.

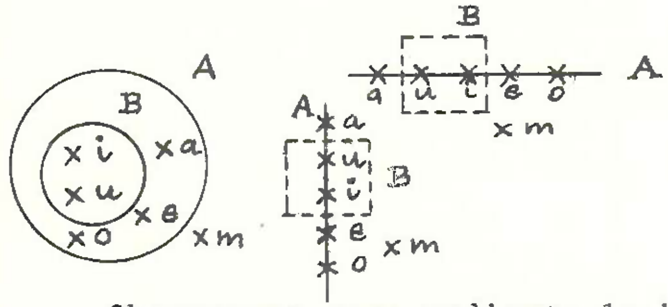
Los diagramas lineales (y una vez habituados) nos servirán como preámbulo de los diagramas rectangulares para llevarnos al final a los sistemas cartesianos de representación.

* <u>Subconjunto o parte</u>. <u>Símbolo de inclusión</u>. <u>Diagramas</u>.

Decimos que un conjunto B es subconjunto de otro A (y se escribe $B \subset A$) cuando todo elemento de B pertenece a A. ¿ Brevemente: $B \subset A$ cuando $\forall a \in A \Longrightarrow a \in B$? Esta expresión simbólica se lee: B es subconjunto de A, cuando "para todo" elemento <u>a</u> "perteneciente" a <u>A</u> "se verifica que" <u>a</u> pertenece a <u>B</u>.

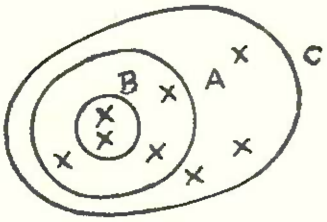
El símbolo $B \subset A$ se puede leer: B subconjunto de A ; B está incluido en A ; A incluye a B ; P.e. $B = \{i,u\}$ es un subconjunto del $A = \{a,i,o,e,u\}$

Con diagrama de Venn y lineales:



Se ve que para los subconjuntos o partes da una mayor claridad el diagrama de Venn.

Observemos como mediante la "inclusión" podemos relacionar conjuntos, diciendo si uno incluye o está incluido en otro. La inclusión tiene las siguientes propiedades: Si un conjunto B está incluido en otro A este A no está incluido en el primero B (antisimétrica). Todo conjunto está incluido en si mismo, o todo conjunto es subconjunto de si mismo (reflexiva). Si B está incluido en A y A está incluido en C, B está incluido en C (transitiva).



Esto nos lleva a establecer que la inclusión es una relación de orden (de los que hablaremos en el próximo capítulo).

<u>Conjunto vacío. Símbolo</u>: Aunque al llegar a la intersección de conjunto daremos otra definición, tal vez más gráfica, sirva por ahora para conjunto vacío: "aquel que no posee elementos" Ejemplos: A = $\{$Provincias españolas con más de 10 capitales$\}$; B = $\{$Ciudades de España con 20 millones de habitantes$\}$ etc. Otras representaciones son:

A = $\{ \ \}$

El símbolo del conjunto vacío suele ser $\emptyset$.

<u>Conjuntos iguales</u>: Decimos que los conjuntos A y B son iguales y escribimos A = B cuando: $\forall a \in A \Longrightarrow a \in B$ y $\forall b \in B \Longrightarrow b \in A$ "Todo elemento <u>a</u> que pertenece a <u>A</u>, pertenece a <u>B</u> y todo elemento <u>b</u> que pertenece a <u>B</u>, pertenece a <u>A</u>."

En realidad se trata del mismo conjunto visto desde dos sitios diferentes. El conjunto de libros de texto de un niño de 2° curso y el conjunto de libros de otro niño de 2° curso, no son 2 conjuntos iguales según esta definición, pues hay 2 libros de Matemáticas, 2 de Lengua etc.... El conjunto de las vocales castellanas y el conjunto $\{a,e,i,o,u\}$ serían iguales.

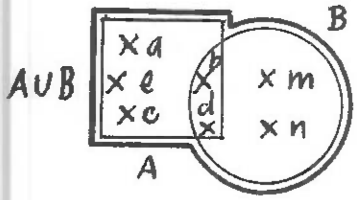
NOTA El símbolo $\forall$ expresa "para todo"
El símbolo $\Longrightarrow$ (implica), nos indica que lo escrito a su izquierda obliga a lo escrito a su derecha.

<u>Reunión de 2 conjuntos</u>. <u>Símbolo</u>. <u>Propiedades</u>. <u>Número de elementos de la reunión</u>.-

La unión o reunión de 2 conjuntos, es otro conjunto tal que sus elementos pertenecen por lo menos a uno de ellos.

El símbolo que se utiliza es: $A \cup B$ y se lee " A unión o reunión B." Por ejemplo dados los conjuntos $A = \{a,b,c,d,e\}$ y $B = \{m,b,n,d,\}$ el conjunto reunión será: $A \cup B = \{a,b,c,d,e,m,n\}$.

Hay que recalcar que los elementos repetidos sólo deben contarlos una vez.



Las más interesantes, en principio, son la commutativa y la asociativa.

$A \cup B = B \cup A$. Se puede cambiar el orden de los conjuntos en la reunión sin que ésta cambie. (Recuérdese que en un conjunto no existe orden entre sus elementos).

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Es lo mismo reunir los 2 primeros conjuntos y el resultado con el tercero, que reunir el primero con el que resulta de reunir el segundo y tercero. (Por la misma razón antes apuntada).

Ejemplo: Sean $A = \{a,e,i,o,u\}$; $B = \{a,m,n,o\}$; $C = \{p,a,q,u\}$ tres conjuntos, que queremos reunir. Tenemos operando con el primer miembro: $A \cup B = \{a,e,i,o,u,m,n\}$ (1)

$(A \cup B) \cup C = \{a,e,i,o,u,m,n,p,q\}$. (1)

Operando con el segundo: $B \cup C = \{a,m,n,o,p,q,u\}$

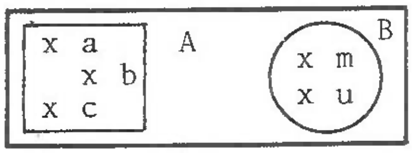
$A \cup (B \cup C) = \{a,e,i,o,u,m,n,p,q\}$ (2). Se observa que (1) y (2) son iguales que es lo que se pretendía justificar.

Es obvio que aunque se ha definido la reunión para dos conjuntos, sirve para cualquier número de éstos.

Nos podemos plantear ahora: ¿Cuántos elementos tiene el conjunto reunión de otros dos A y B ? ¿Mas, igual o menos que entre los dos? La respuesta sería: ¡ depende ¡. Depende de los conjuntos que reunimos. Veamos los tres casos que pueden darse:

(a) A y B no tienen ningún elemento común (conjuntos disjuntos)

Sean n_A los elementos de A , n_B los de B y n_u los de la reunión de A y B. Se verifica que $\boxed{n_u = n_A + n_B}$. Por ejemplo, sean: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{m,n\}$. Su reunión $U = \{a,b,c,m,n\}$. Se observa que $n_A = 3$, $n_B = 2$ y $n_u = 5$ (3 + 2 = 5).



A ∪ B

(b) A y B tienen elementos comunes.

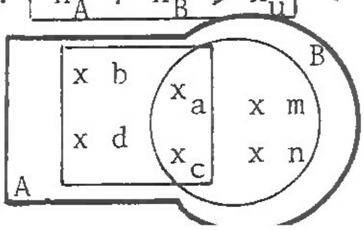
Sean n_A y n_B el número de elementos de A y B respectivamente, y n_u el de la reunión. Se cumple que: $\boxed{n_A + n_B > n_u}$.

Ejemplo: $A = \{a,b,c,d\}$; $B = \{a,m,n,c\}$;

$A \cup B = \{a,b,c,d,m,n\}$ $n_A = 4$; $n_B = 4$;

$n_u = 6$; $4 + 4 > 6$.

A ∪ B



(c) Si A y B tienen todos los elementos comunes, o sea si $A = B$. Siendo ahora $n_A = n_B$ y además $A \cup B = A \cup A = B \cup B = A = B$. Luego $\boxed{n_u = n_A = n_B}$. Ejemplo: $A = \{a,e,i\} = B$; $A \cup B = \{a,e,i\}$

A | x a | B

x e | $A \cup B$

x i

$n_A = 3 = n_B$; $n_u = 3$.

* Contar un conjunto. Número natural ; Si utilizamos los diagramas horizontales para representar los conjuntos y hacemos que los elementos caigan unos debajo de otros (como se ve en la figura para los conjuntos A, B y C), llegamos a la conclusión que: $n_A < n_B$; $n_A > n_C$; $n_B > n_C$. A tiene más elementos que C y menos que B. Y B tiene más que C (ya que al ir emparejando elementos de los dos conjuntos los de C se acaban cuando todavía hay de B).

n_A x x x x x x A

n_B x x x x x x x B

n_C x x x C

Ahora bien, podría ocurrir, al adoptar esta disposición, que no sobraran elementos de ningún conjunto. Es decir que los dos conjuntos que comparamos tuvieran el mismo número de elementos. En estas condiciones se dice que son conjuntos COORDINABLES (veremos que entre este tipo de conjuntos se pueden estatablecer las correspondencias biyectivas). Conjuntos COORDINABLES son pues, los que tienen el mismo número de elementos.

x x x x M

x x x x N

Es evidente que dado un conjunto cualquiera, existirán infinitos conjuntos coordinables con él, que serán todos aquellos que participan de la propiedad de "tener el mismo número de elementos" que aquel. Pues bien, el número NATURAL es: "el símbolo numérico que nos expresa esa propiedad común a los infinitos conjuntos coordinables." Aparece ahora el número natural no como algo intrínseco a un solo conjunto, sino como el número que expresa la propiedad común a los infinitos conjuntos coordinables. Contar un conjunto será determinar su número natural. Será hallar el número de elementos que posee. Ahora bien. ¿Cuántos números naturales habrá?: Tantos como conjuntos con distinto número de elementos. ¿Cómo los podemos obtener, a partir de los conceptos de Matemática Moderna vistos?

Todos los conjuntos siguientes: $\{a\}$; $\{m\}$; $\{z\}$; $\{juan\}$ ----- son conjuntos coordinables de un solo elemento. Esto lo expresamos mediante el número natural 1. Reuniendo ahora 2 conjuntos unitarios (disjuntos) obtendremos los conjuntos con 2 elementos, a todos los cuales les hacemos corresponder el número natural 2.

Ahora podemos reunir un conjunto de dos elementos con otro de uno solo (que sean disjuntos) y obtendríamos los conjuntos de tres elementos a los que correspondería el número natural 3. y así sucesivamente. Es decir a partir de los conjuntos unitarios, y mediante la reunión de conjuntos, vemos aparecer la serie de números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6 ------. Cada número natural tiene un "siguiente", pues basta reunir uno cualquiera de los conjuntos coordinables, representados por el primer número, con un conjunto unitario (disjunto con él) para obtener otro conjunto con un elemento más y cuyo número natural será el "siguiente" buscado.

¿Y qué hacemos con los infinitos conjuntos que no poseen elementos? Por generalización con lo anterior les hacemos corresponder el cero (0). Tienen 0 elementos, o no tienen elementos. Aparece pues el cero, como símbolo numérico de la propiedad, de todos esos conjuntos, "de no tener elementos".

* Intersección de dos o más conjuntos. Símbolo. Propiedades ;

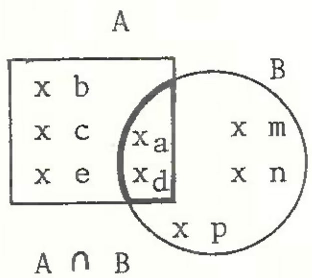
Intersección de varios conjuntos es otro conjunto tal que sus elementos pertenecen a todos ellos simultaneamente.

Se escribe $A \cap B$ y se lee "A intersección B"

" " $A \cap B \cap C$ " " " "A intersección B, intersección C".

Ejemplo: Sea $A = \{a,b,c,d,e\}$ y $B = \{m,a,n,d,p\}$

$A \cap B = \{a, d\}$

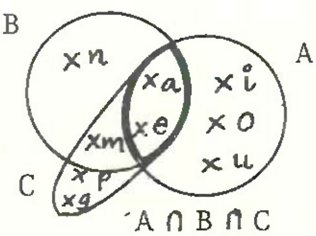


$A \cap B$

Ejemplo:

$A = \{a,e,i,o,u\}$; $B = \{a,e,m,n\}$; $C = \{m,a,p,e,q\}$

$A \cap B \cap C = \{a, e\}$



$A \cap B \cap C$

Entre las propiedades de la intersección de conjuntos tenemos la commutativa y la asociativa; $A \cap B = B \cap A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Comprobémoslas con un ejemplo:

Sean: $A = \{p,q,r,s\}$ $B = \{q,x,y,s,t\}$ y $C = \{r,x,y,s,z\}$

$A \cap B = \{q,s\} = B \cap A$, los mismos elementos pertenecen simultaneamente a A y B que a B y A.

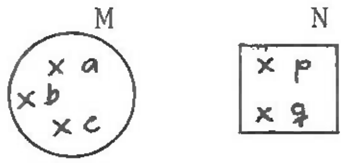
$A \cap B = \{q,s\}$ $(A \cap B) \cap C = \{s\}$ (1)

$B \cap C = \{x,y,s\}$ $A \cap (B \cap C) = \{s\}$ (2)

Vemos como (1) y (2) coinciden. c.q.c.

* Conjuntos disjuntos. Otra definición de conjunto vacío ;

Dos conjuntos que no tengan ningún elemento en común se llaman disjuntos. Su intersección será un conjunto sin elementos: el conjunto vacío.



$M \cap N = \emptyset$

El conjunto vacío es la intersección de dos conjuntos DISJUNTOS.

Esta definición quizás es más gráfica que la dada al principio del tema.

* Propiedad distributiva de la U respecto a la $\cap$ y de la $\cap$ respecto a la U ;

Se expresan así: I) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y leyéndose: A unión, (B intersección C) = (A unión B), intersección, (A unión C)

II) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y se lee: A intersección, (B unión C) = (A intersección B), unión, (A intersección C)

Vamos a comprobarlas mediante un ejemplo:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$; $B = \{a,m,n,c,d,p\}$ y

$C = \{a,q,r,s,d,p,v\}$

I)

$$\underbrace{A \cup (B \cap C)}_{(1)} = \underbrace{(A \cup B) \quad (B \cup C)}_{(2)}$$

$B \cap C = \{a,d,p\}$; $A \cup (B \cap C) = \{a,b,c,d,e,f,g,p\} = (1)$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,m,n,p\} \\ A \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,q,r,s,p,v\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (A \cup B) \cap (A \cup C) = \\ = \{a,b,c,d,e,f,g,p\} = (2) \end{array}$$

vemos como (1) = (2) c.q.c.

II)

$$\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{(3)} = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C)}_{(4)}$$

$B \cup C = \{a,m,n,c,d,p,q,r,s,v\}$; $A \cap (B \cup C) = \{a,c,d\} = (3)$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{a,c,d\} \\ A \cap C = \{a,d\} \end{array}\right\} (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a,c,d\} = (4)$$

Vemos que (3) = (4) c.q.c.

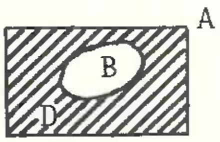
* <u>Diferencia entre dos conjuntos.</u> <u>Casos que se pueden dar</u> ;

Diferencia entre dos conjuntos A y B es otro conjunto D, tal que sus elementos son todos los de A que no pertenezcan a B.

Se expresa: $A - B = D$. A : conjunto minuendo. B : conjunto sustraendo. D : conjunto diferencia.

Pueden darse 3 casos;

a) $B \subset A$ (B subconjunto de A).

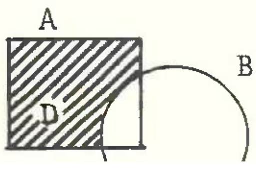


Ejemplo; $A = \{a,e,i,o,u\}$, $B = \{a,o\}$

$D = A - B = \{e,i,u\}$

Este será el caso más utilizado. Nos referiremos siempre a este caso, salvo previo aviso.

b) Si $A \cap B \neq \emptyset$. (Cuando hay intersección entre A y B).

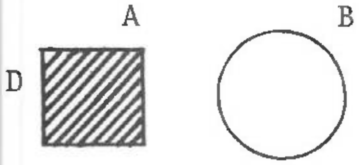


Ejemplo: $A = \{a,e,i,o,u\}$ y $B = \{e,i,m,q\}$

$D = A - B = \{a,o,u\}$

Sólo podemos restarle a A la parte común con B.

c) Si $A \cap B = \emptyset$. (Si A y B son conjuntos disjuntos).



$D = A - B = A$. No podemos restarle nada al A.

Ejemplo: $A = \{a,e,i,o,u\}$ y $B = \{m.n\}$

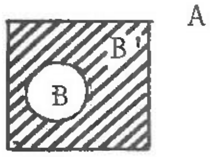
$D = A - B = \{a,e,i,o,u\} = A$

* Conjunto complementario de uno dado. Símbolo. Propiedades. Leyes de Morgan.

El conjunto D, diferencia de los A y B, cuando B es subconjunto de A, $\boxed{A - B = D}$, recibe el nombre de conjunto complementario del B respecto al A (universal o de referencia).

El símbolo más utilizado es: $C_A\, B$ o bien B'.

Observemos que $B \cup B' = A$ y que $B \cap B' = \emptyset$ (son disjuntos)



Otras propiedades fáciles de deducir son:

$B' \cap A = B'$; $\emptyset' = A$; $A' = \emptyset$; $(A')' = A$

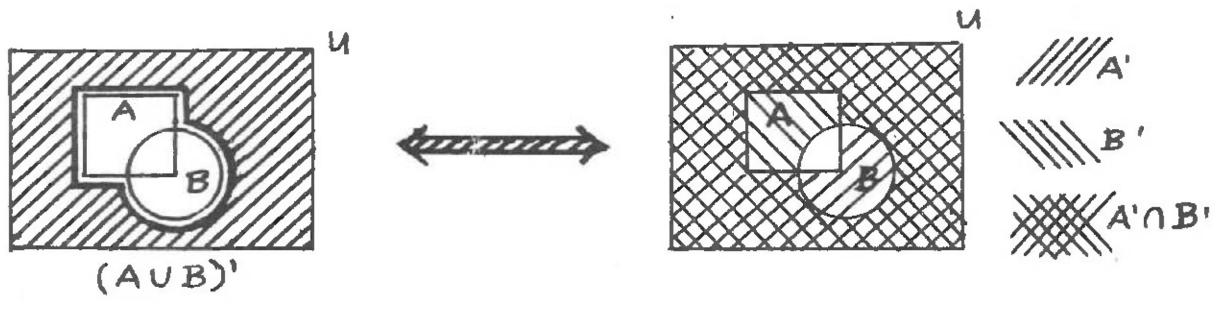
Las leyes de Morgan son: (I): $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(II): $(A \cap B)' = A' \cup B'$

siendo A y B subconjuntos del universal U.

(I): "El conjunto complementario de la reunión de dos conjuntos A y B, es igual a la intersección de los conjuntos complementarios de A y de B."

(II): "El conjunto complementario de la intersección de dos conjuntos A y B, es igual a la reunión de los conjuntos complementarios de A y de B."



Vemos gráficamente la igualdad de los miembros de I.

Comprobaremos ambas leyes con el ejemplo siguiente:

Sea: $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g,m,n,p,q,r,s,v,x,y,z\}$ el universal y $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $B = \{a,m,n,c,d,p\}$ dos subconjuntos de $\mathcal{U}$.

I) $\underbrace{(A \cup B)'}_{(1)} = \underbrace{A' \cap B'}_{(2)}$

$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,m,n,p\}$; $(A \cup B)' = \{q,r,s,v,x,y,z\} = (1)$

$$\left.\begin{array}{l} A' = \{m,n,p,q,r,s,v,x,y,z\} \\ B' = \{b,e,f,g,q,r,s,v,x,y,z\} \end{array}\right\} A' \cap B' = \{q,r,s,v,x,y,z\} = (2)$$

Vemos que $(1) = (2)$ c.q.c.

II) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\quad\quad (3) \quad\quad\quad\quad (4)$

$A \cap B = \{a,c,d,\}$; $(A \cap B)' = \{b,e,f,g,m,n,p,q,r,s,v,x,y,z\} = (3)$

$$\left.\begin{array}{l} A' = \{m,n,p,q,r,s,v,x,y,z\} \\ B' = \{b,e,f,g,q,r,s,v,x,y,z\} \end{array}\right\} A' \cup B' = \{b,e,f,g,m,n,p,q,r,s,v,x,y,z\} = (4)$$

vemos pues $(3) = (4)$ c.q.c.

* Resumen propiedades de la $\cup$ e $\cap$; Para recordar más fácilmente y buscando un paralelismo entre las propiedades de $\cup$ y $\cap$ podemos ponerlas de la manera siguiente:

PROPIEDAD COMMUTATIVA :	$A \cup B = B \cup A$;	$A \cap B = B \cap A$
" ASOCIATIVA :	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
" IDEMPOTENTE :	$A \cup A = A$;	$A \cap A = A$
" DISTRIBUTIVA :	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
" ABSORCION :	$A \cup \emptyset = A$;	$A \cap \emptyset = \emptyset$

* APLICACIONES : Suma de números naturales y m.c.d. de números ;

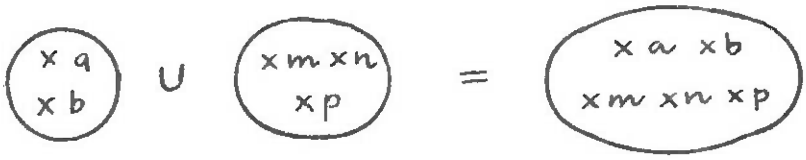
Entre las aplicaciones más interesantes de los conceptos de reunión e intersección de conjuntos tenemos la de suma de números naturales y el cálculo del m.c.d. de varios números.

La suma de números naturales, independiente de otros modos de abordarla, podemos plantearla a partir de la reunión de conjuntos. Hemos dicho que el número natural expresa la propiedad, común a los infinitos conjuntos coordinables, de tener el mismo nº de elementos.

Sumar dos números naturales, (cada uno representativo de una serie de conjuntos coordinables), es hallar el número natural representativo de un conjunto cualquiera, de los que se pueden obtener reuniendo 2 conjuntos disjuntos pertenecientes cada uno de ellos a una de las series antes dichas. Por ejemplo sumar: $2 + 3$ ¿cómo lo planteamos?

El número 2 representa a todos los conjuntos con dos elementos.
El 3 por su lado a todos los de 3 elementos. Sumar 2 y 3 es hallar el número natural del conjunto reunión de otros dos conjuntos disjuntos con 2 y 3 elementos respectivamente.

$$\{a, b\} \cup \{m, n, p\} = \{a, b, m, n, p\}$$
$$2 \quad + \quad 3 \quad = \quad 5$$



En el ejemplo precedente los conjuntos $\{a,b\}$ y $\{m,n,p\}$ son 2 de las infinitas parejas de conjuntos que podíamos elegir.

* <u>M.C.D. de varios números.-</u> Planteemos de entrada el siguiente ejemplo: Hallar el m.c.d. de los números 54, 12 y 9.

El método más conocido de los factores primos nos llevaría:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 54 = 2 \times \underline{3}^3 \\ 12 = 2^2 \times \underline{3} \\ 9 = 1 \times \underline{3}^2 \end{array}\right\}$$

m.c.d. (54, 12, 9) = 3 ("comunes con el menor exponente")

Si pensamos en el "máximo común divisor", vemos la necesidad de hallar primero el conjunto de los divisores de 54, el de 12 y el de 9. Luego hallar el conjunto intersección de los tres. Y por último de este conjunto elegir el elemento mayor. Este será el m.c.d. buscado. Llamamos D(54), D(12) y D(9) al conjunto de los divisores de 54, 12 y 9 respectivamente.

Debe tenerse cuidado, al hallar los divisores de los números, de no dejarse ninguno. La disposición siguiente puede ayudarnos:

$$\begin{array}{r|cccc|} & 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 2) & 2 & 6 & 18 & 54 \end{array} \quad D(54) = \{\underline{\underline{1}}, 2, \underline{\underline{3}}, 6, \boxed{9}, 18, 27, 54\}$$

(ordenados de menor a mayor)

	1	2	2^2
3)	3	6	12

D(12) = $\{\underline{\underline{1}},2,\underline{\underline{3}},4,6,12\}$

	1	3	3^2
1)			

D(9) = $\{\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{3}}, \boxed{9}\}$

Entonces, una vez hallados los 3 conjuntos: D(54) $\cap$ D(12) $\cap$ D(9) = = $\{\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{3}}\}$ Luego el m.c.d. (54, 12, 9) = 3.

Este procedimiento, aunque útil para la práctica de los conceptos de Moderna, parece muy largo. Sin embargo nos da pie para los siguientes razonamientos: Recordemos que :

"Los divisores comunes a dos números, son también comunes a la suma o resta de dichos números". En efecto: Sea m un divisor común a A y B siendo A y B números cualesquiera. Tenemos que:

$A - B = C$; $A = m. k_1$; $B = m. k_2$

$m k_1 - m k_2 = m (k_1 - k_2) = m. K = C$. Luego m es divisor de C.

También podríamos ver que todo divisor común a C y B lo es de A. Pues: $C = n. k_3$; $B = n. k_4$

$A = B + C = n k_3 + n k_4$

$A = n (k_3 + k_u) = n K$

luego n es divisor de A

Comprobémoslo en nuestro ejemplo 54 - 12 = 42

42	2
21	3
7	7

	1	2
3)	3	6
	7	14
7)	21	42

D(42) = $\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

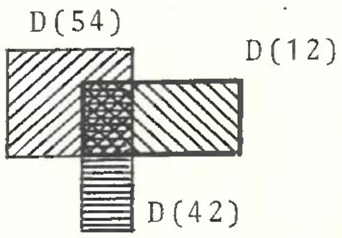
D(54) $\cap$ D(12) = $\{1,2,3,6\}$. Todos ellos están en D(42)

Luego D(54) $\cap$ D(12) = D(54) $\cap$ D(12) $\cap$ D(42) = $\{1,2,3,6\}$

Todo elemento de D(42) $\cap$ D(12) = $\{1,2,3,6\}$, pertenece también a D(54).

Por lo tanto D(42) $\cap$ D(12) = D(54) $\cap$ D(12) = $\{1,2,3,6\}$.

El diagrama de Venn tiene que ser del tipo:



Siguiendo el proceso:

42 - 12 = 30 ;

30	2
15	3
5	5

	1	2
3)	3	6
5)	5	10
	15	30

D(30) = $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

D(30 $\supset$ $\{1,2,3,6\}$

Por tanto: D(54) $\cap$ D(12) = D(42) $\cap$ D(12) = D(30) $\cap$ D(12). y siguiendo el proceso, 30 - 12 = 18

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|lll} & 1 & 3 & 3^2 \\ 2) & 2 & 6 & 18 \end{array}$$

D(18) = $\{1,2,3,6,9,18\}$. Vemos que D(18) $\supset \{1,2,3,6\}$

Luego:

D(54) $\cap$ D(12) = D(42) $\cap$ D(12) = D(30) $\cap$ D(12) = D(18) $\cap$ D(12).

Y siguiendo 18 - 12 = 6 ; $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}$ D(6) = $\{1,2,3,6\}$ que coincide con $\{1,2,3,6\}$ del principio:

D(54) $\cap$ D(12) = D(42) $\cap$ D(12) = D(30) $\cap$ D(12) = D(18) $\cap$ D(12) = D(12) $\cap$ D(6)

Si volvemos a restar 12 - 6 = 6 ; D(6) $\cap$ D(6) = D(6)

¿En definitiva, qué ocurre? Pues que los divisores comunes a 54 y a 12 son los divisores de 6, (número obtenido por restar sucesivas, hasta la igualación del minuendo y el sustraendo). Luego de entre los divisores de 6 cogemos el mayor (o sea el 6) y éste será el m.c.d. de 54 y 12. Esquemáticamente se plantea:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l} 54 & 42 & 30 & 18 & 12 & 6 & \\ \underline{-12} & \underline{-12} & \underline{-12} & \underline{-12} & \underline{-6} & \underline{-6} & \Longrightarrow \text{m.c.d. } (54,\ 12) = 6 \\ 42 & 30 & 18 & 6 & 6 & 0 & \end{array}$$

Pero recordemos que el problema planteado nos pedía el m.c.d. de 54, 12 y 9 y hemos hallado el de (54 y 12). Recordando la propiedad asociativa de la intersección: D(54) $\cap$ D(12) $\cap$ D(9) =

$[$D(54) $\cap$ D(12)$]$ $\cap$ D(9) = $[$D(6)$]$ $\cap$ D(9) = D(6) $\cap$ D(9) y repitiendo el procedimiento de antes: D(6) $\cap$ D(9) = D(6) $\cap$ D(3) = = D(3) $\cap$ D(3) = D(3) = $\{1,2,3\}$ Luego m.c.d. (54, 12, 9) = $\underline{\underline{3}}$

El esquema por diferencias sucesivas sería:

$$\begin{array}{r|r|r|l} 9 & 6 & 3 & \\ \underline{-6} & \underline{-3} & \underline{-3} & \Longrightarrow \text{m.c.d.} = 3 \\ 3 & 3 & 0 & \end{array}$$

Vemos pues que mediante simples diferencias y con los conceptos dados por la "matemática moderna" podemos hallar el m.c.d. de varios números.

El procedimiento de las diferencias aunque sencillo, puede ser largo si los números son muy grandes. Hay otro procedimiento llamado "algoritmo" de Euclides o método de las divisiones, que se

ción conduce más rápidamente al resultado:
"Todo divisor común a dos números A y B, es común al resto de la división R entre dichos números"

$$\begin{array}{l|l} A & \underline{B} \\ R & C \end{array} \Longrightarrow \quad A = B.\ C + R$$

Si m es un divisor común a A y B : $A = m.\ k_1$, $B = m\ k_2$.
Luego $m\ k_1 = m\ k_2\ .\ C + R$

Por tanto: $\dot{m} = \dot{m} + R$, luego $R = \dot{m}$ o sea m divisor de R.

Inversamente todo divisor común a R y a B lo será también de A.

Por tanto $D(A) \cap D(B) = D(B) \cap D(R)$. Y esto podemos repetirlo sucesivamente hasta que salga un resto igual a cero. En este momento el divisor es el m.c.d. buscado. Veámoslo en nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 54 & \underline{12} \\ 06 & 4 \end{array} \qquad D(54) \cap D(12) = D(12) \cap D(6)$$

$$\begin{array}{l|l} 12 & \underline{6} \\ 0 & 2 \end{array} \qquad D(12) \cap D(6) = D(6) \cap D(0) = D(6)\ .$$

(Recuérdese que cualquier número es divisor del cero). Luego m.c.d. (54, 12) = 6

Ahora:

$$\begin{array}{l|l} 9 & \underline{6} \\ 3 & 1 \end{array} \qquad D(9) \cap D(6) = D(6) \cap D(3)$$

$$\begin{array}{l|l} 6 & \underline{3} \\ 0 & 2 \end{array} \qquad D(6) \cap D(3) = D(3) \cap D(0) = D(3)$$

Por tanto el m.c.d. (54, 12, 6) = $\underline{\underline{3}}$

Esquemáticamente para no hacer tantas casillas de división los datos y operaciones se plantean así:

	4	2
54	12	6
06	$\underline{\underline{0}}$	

m.c.d. (54, 12) = 6

	1	2
9	6	3
3	$\underline{\underline{0}}$	

m.c.d. (54,12,9)=3

Resumiendo vemos existen, a parte del conocido método de los factores primos, otros tres métodos para hallar el m.c.d. de varios números: a) Por intersecciones de conjuntos; b) Por diferencias sucesivas; c) Por divisiones sucesivas (Euclides).

C A P Í T U L O   II

II

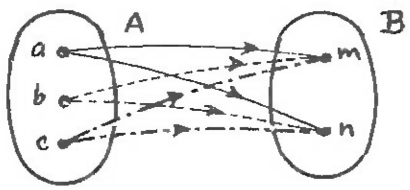
* Producto cartesiano de dos conjuntos. Definición. Representación gráfica.-

Se define como producto cartesiano (A x B) de dos conjuntos dados A y B, al conjunto tal que sus elementos son todos los pases posibles que se pueden formar, de modo que el primer elemento del par pertenezca a A y el segundo a B.

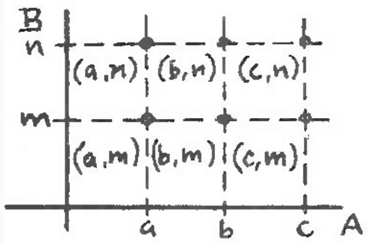
Por ejemplo, sea $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{m,n\}$; el producto A x B será el conjunto: $\{(a,m), (a,n), (b,m), (b,n), (c,m) (c,n)\}$.

Observemos que no es el producto cartesiano un producto conmutativo pues $B \times A = \{(m,a), (m,b), (m,c), (n,a), (n,b), (n,c)\}$. Este conjunto tiene el mismo número de elementos que el A x B (coordinables), pero las parejas son diferentes.

Veamos ahora dos tipos de representación gráfica del producto cartesiano. En primer lugar haciendo uso de diagramas de Venn:



Cada una de las flechas representa una de las parejas del conjunto A x B. El primer elemento del par es del que sale la flecha, y el segundo es a donde llega. Así la flecha que va de <u>a</u> hacia <u>m</u> representa el par (a,m), la que va de <u>c</u> hacia <u>n</u> la (c,n) y así sucesivamente.

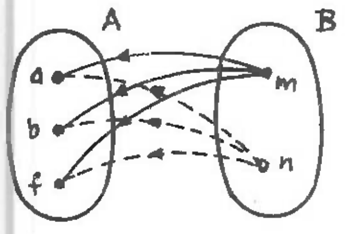


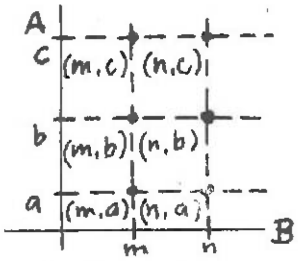
Hay otro tipo de representación a la que podemos llamar "diagrama rectangular". Consta éste de un diagrama horizontal y otro vertical. En el horizontal se colocan los elementos del conjunto A. (primer factor) de izquierda a derecha (a partir del punto de corte de las líneas horizontal y vertical). En el vertical se sitúan los elementos de B (segundo factor del producto cartesiano) de abajo hacia arriba.

Por cada uno de los puntos ocupados por los elementos de A trazamos semirrectas verticales, y por cada uno de los de B horizontales, con lo cual obtenemos una cuadrícula. Cada uno de los vértices de ella nos representa un par. El primer elemento de éste es el de la vertical que pasa por ese vértice, y el segundo el de la horizontal, según se ve en el dibujo.

Lo que en diagramas de Venn eran flechas, son aquí vértices de la cuadrícula, y ambas cosas no son sino representaciones gráde los paréntesis)

Los diagramas de B x A serán:





Observar como las flechas van al revés que en A x B y el cambio de los conjuntos en la cuadrícula. Siempre se pone en el horizontal el primer factor del producto.

Vamos a comprobar ahora una propiedad importante del producto: la distributiva respecto a la reunión de conjuntos. Nos dice que:

$$\underbrace{A \times (B \cup C)}_{(1)} = \underbrace{(A \times B) \cup (A \times C)}_{(2)}$$

Sea por ejemplo: $A = \{a,b,c\}$; $B = \{m,n\}$; $C = \{x,y\}$

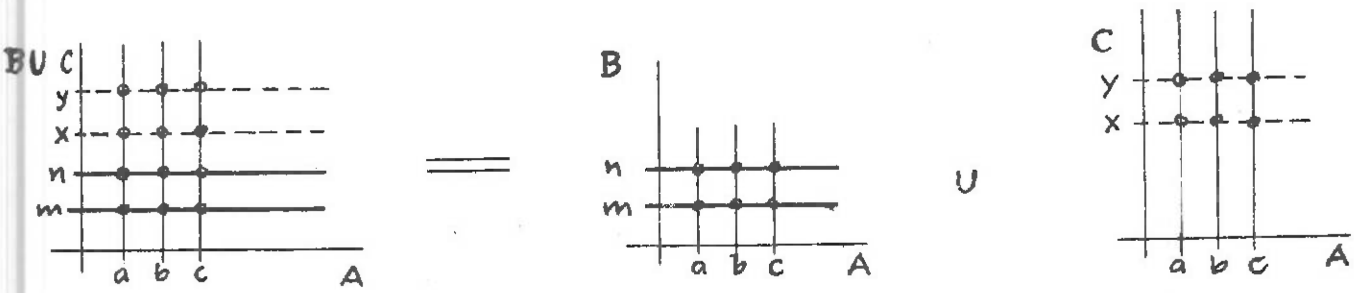
$B \cup C = \{m,n,x,y\}$; $A \times (B \cup C) = \left\{ \begin{array}{l} (a,m),(a,n),(a,x),(a,y),(b,m),(b,n) \\ (b,x),(b,y),(c,m),(c,n),(c,x),(c,y) \end{array} \right\} (1)$

Por otro lado: $A \times B = \{(a,m),\ (a,n),\ (b,m),\ (b,n),\ (c,m),\ (c,n)\}$ y

$A \times C = \{(a,x),\ (a,y),\ (b,x),\ (b,y),\ (c,x),\ (c,y)\}$.

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a,m),(a,n),(b,m),(b,n),(c,m),(c,n),(a,x),(a,y),$
$(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$ (2)

c.q.c. Con diagramas:



A x (B U C) = (A x B) U (A x C)

* Aplicación al producto de números naturales.-

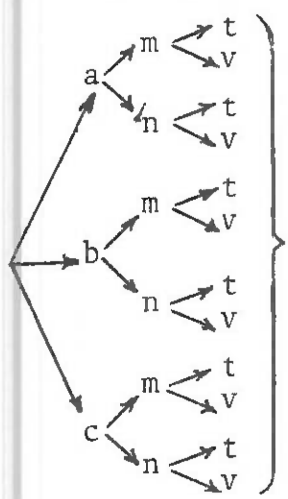
Análogamente a como justificamos la suma de números naturales a partir de la reunión de conjuntos, podemos sacar el producto de números naturales a partir del producto cartesiano de conjuntos. Por ejemplo la multiplicación: 5 x 2, nosotros la planteamos del modo siguiente: El número 5 representa a todos los conjuntos de 5 elementos (coordinables). El 2 a los conjuntos de dos elementos. El número natural que corresponde al conjunto producto cartesiano de dos otro a los de dos, es el producto planteado. Tomando $\begin{cases} A=\{a,b,c,d,e\} \\ B=\{m,n\} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} \{a,b,c,d,e,\} & x & \{m,n\} & = & \{(a,m),(a,n),(b,m),(b,n),(c,m),(c,n), \\ & & & & (d,m),(d,n),(e,m),(e,n)\} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ 5 & x & 2 & = & 10 \end{array}$$

Como a pesar de no ser commutativo el producto cartesiano, permanece inalterable el número de elementos al hacer A x B o B x A, el producto de números naturales es commutativo: 5 x 2 = 2 x 5 = 10

¡Veamos si el producto de números naturales es asociativo¡ Previamente debemos definir el producto cartesiano de tres conjuntos: A x B x C. Será otro conjunto, cuyos elementos son todas las ternas posibles del tipo (x,y,z) de forma tal que $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Por ejemplo si $A = \{a,b,c\}$, $B = \{m,n\}$ y $C = \{t,v\}$ el producto A x B x C será el conjunto de ternas que vamos a obtener mediante un "diagrama en árbol" o "ramificado" para no dejarnos ninguna:

A ; B ; C



A x B x C = {(a,m,t), (a,m,v), (a,n,t), (a,n,v), (b,m,t), (b,m,v), (b,n,t), (b,n,v), (c,m,t), (c,m,v), (c,n,t), (c,n,v)}

Debe tenerse cuidado con el orden, pues alterando el orden de los factores cambian las termas. (No es commutativo).

De todos modos aunque A x B x C $\neq$ A x C x B $\neq$ --- todos estos productos cartesianos son conjuntos coordinables (en el ejemplo con doce elementos todos ellos).

Por otro lado el producto cartesiano es asociativo:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad \text{pues :}$$

A x B = {(a,m), (a,n), (b,m), (b,n), (c,m), (c,n)} y para hallar (A x B) x C debemos añadir a continuación de los paréntesis de A x B los elementos t o v de C. Y por otro lado:
B x C = {(m,t), (m,v), (n,t), (n,v) } y para hallar A x (B x C) debemos añadir delante de cada paréntesis de B x C los elementos a o b o c de A. De una u otra forma sale el mismo conjunto de ternas.

Apoyándonos en esta propiedad asociativa del producto cartesiano, queda justificada la propiedad asociativa de los números naturales, respecto al producto:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (A & \times & B) & \times & C & = & A & \times & (B & \times & C) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (3 & \times & 2) & \times & 2 & = & 3 & \times & (2 & \times & 2) \end{array}$$

$$\underbrace{(3 \times 2)}_{6} \times 2 = 3 \times \underbrace{(2 \times 2)}_{4}$$

$$\underbrace{6 \times 2}_{12} = \underbrace{3 \times 4}_{12}$$

Resumiendo pues, el producto cartesiano no es commutativo, en cambio el producto de números naturales lo es. El producto cartesiano es asociativo y el producto de naturales también lo es.

Por último, recordemos que el producto cartesiano era distributivo respecto de la reunión de conjuntos. Por tanto podemos decir que el producto de números naturales es distributivo respecto de la suma.

Sea $A = \{a,b,c\}$, $B = \{m,n\}$, $C = \{t,v\}$ por ejemplo. Y sus números naturales 3, 2 y 2 respectivamente. Tendremos que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} A & \times & (B & \cup & C) & = & (A & \times & B) & \cup & (A & \times & C) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ 3 & \times & (2 & + & 2) & = & (3 & \times & 2) & + & (3 & \times & 2) \end{array}$$

$$3 \times \underbrace{(2 + 2)}_{4} = \underbrace{(3 \times 2)}_{6} + \underbrace{(3 \times 2)}_{6}$$

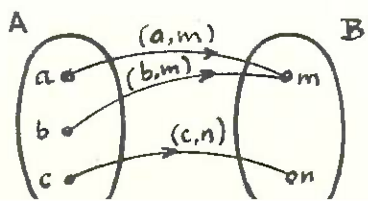
$$\underbrace{3 \times 4}_{12} = \underbrace{6 + 6}_{12}$$

Por tanto sabiendo reunir y multiplicar conjuntos "sabremos" sumar y multiplicar números naturales.

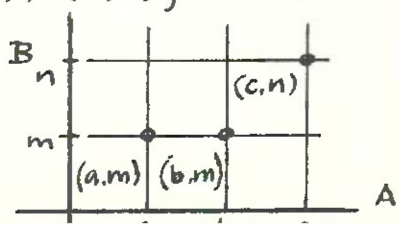
* Correspondencia. Correspondencia Inversa. Representación.-

Todo subconjunto del producto cartesiano lo denominamos correspondencia. Al conjunto A le llamamos "origen" y al B "imagen". Se expresa: $A \longrightarrow B$. De los elementos (a, b) de la correspondencia, al primero llamaremos "origen" y al segundo "imagen" u "homólogo". Recuérdese que $a \in A$ y $b \in B$.

En el ejemplo de la pregunta anterior en que $A \times B = \{(a,m), (a,n), (b,m), (b,n), (c,m), (c,n)\}$, una correspondencia podría ser el subconjunto: $C = \{(a,m), (b,m), (c,n)\}$. Gráficamente vendría dado:

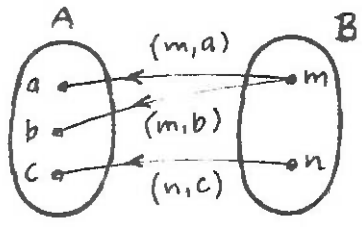


o

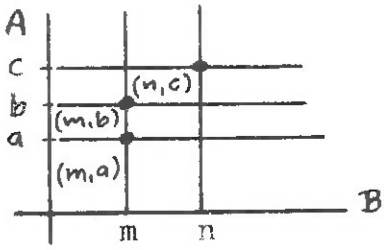


O sea que C es una correspondencia entre los conjuntos A y B . Ahora bien, en ocasiones el cojunto C (correspondencia) se elige mediante un cierto criterio f que se suele expresar:

$A \xrightarrow{f} B$ Si a todos los pares (elementos) de una correspondencia les cambiamos de orden obtendremos un subconjunto de $B \times A$, al que denominaremos correspondencia inversa de la anterior C^{-1}. El criterio del que hablábamos antes será ahora f^{-1}. Se indica $B \xrightarrow{f^{-1}} A$. Los gráficos serían:

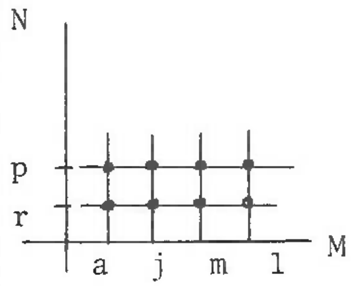


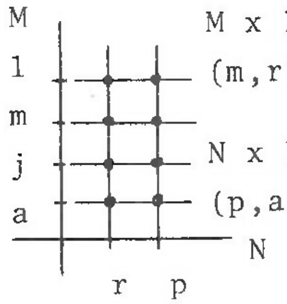
o



En este caso B sería el conjunto origen y A el conjunto imagen. Veamos otro caso: Sea M el cojunto de los niños Antonio, Juan, Marcos y Luis: $\{a,j,m,l\}$ y N el cojuunto de los señores Ruiz y Perez : $\{r,p\}$. Supongamos que Antonio y Marcos son hijos del Sr. Ruiz. Y que Juan es hijo del Sr. Pérez.

Hagamos el producto $M \times N$ y el $N \times M$:



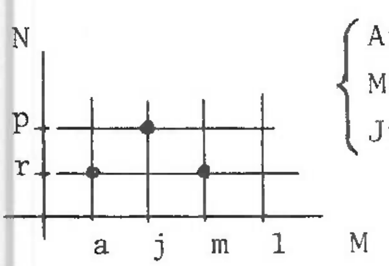


$M \times N = \{(a,r),(a,p),(j,r),(j,p). (m,r),(m,p),(l,m),(l,p)\}$

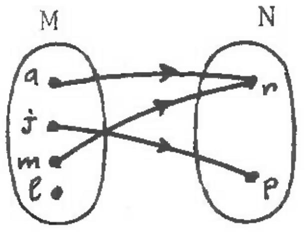
$N \times M = \{(r,a),(r,j),(r,m),(r,l). (p,a),(p,j),(p,m),(p,l)\}$

En el fondo hemos hecho todas las parejas posibles con los niños y los señores. Hay 8 parejas posibles en cada caso $M \times N$ ó $N \times M$.

Vamos ahora a establecer una correspondencia entre M y N . O sea entre c. niños y c. señores. Elegiremos aquellas parejas en que el niño "sea hijo del" señor. Este es pues nuestro criterio (f) . Según él: $C = \{(a,r), (m,r), (j,p)\}$; $\{$(antonio,ruiz), (marcos, ruiz), (juan, perez) $\subset M \times N\}$



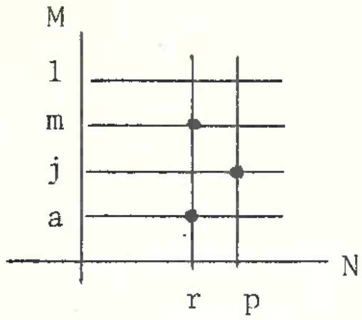
Antonio "es hijo del" señor Ruiz
Marcos " " " " "
Juan " " " " Pérez



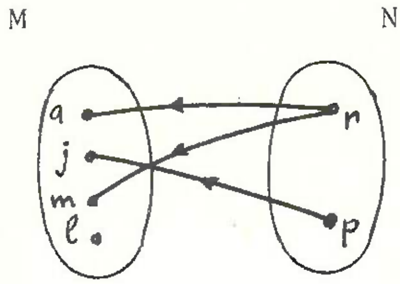
¿Cuál será la correspondencia inversa de f : "ser hijo de" ? Será la f^{-1} : "ser padre de". Con este criterio obtendremos el conjunto $C^{-1} = \{(r,a),\ (r,m),\ (p,j)\} \subset N \times M$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{El señor Ruiz "es padre de"} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Antonio} \\ \text{Marcos} \end{array} \right\} \\ \text{"}\quad\text{"}\quad \text{Pérez}\quad \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} & \text{Juan} \end{array} \right\}$$

Sus diagramas:



ó

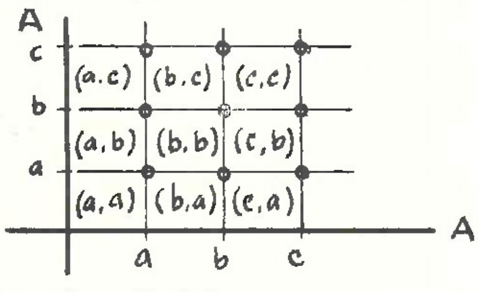


* Producto de un conjunto por si mismo.-

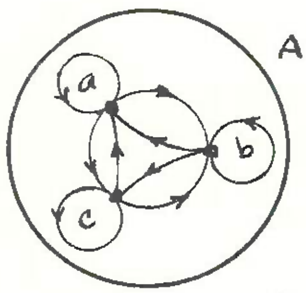
Un caso realmente interesante es el del producto cartesiano cuando los dos conjuntos son iguales. A x A .

Sea $A = \{a,\ b,\ c\}$. Tendremos que $A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),$ $(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

Sus diagramas serían :



bien



Las flechas que salen de un elemento y vuelven a él, representan los pares (a,a), (b,b)....

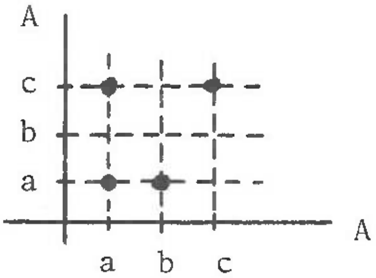
Es de destacar la existencia de las parejas: (a,a), (b,b), (c,c)..... Por otro lado en el diagrama de Venn al coincidir el conjunto origen y el imagen todas las flechas quedan dentro del conjunto A.

* Relación binaria. Diagramas rectangular y de Venn.-

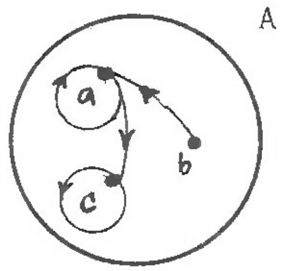
Análogamente a como definimos la correspondencia a partir del producto cartesiano, podemos definir la relación binaria como: "Todo subconjunto del producto de un conjunto por el mismo". Es pues una correspondencia entre A y A .

Si en el ejemplo anterior en que $A = \{a,b,c\}$, tomamos del conjunto A x A, un subconjunto p.e.: $\{(a,a),\ (a,c),\ (b,a),\ (c,c)\}$ esto sería una relación binaria (R.B.). Su nombre viene al quedar relacionados pases de elementos de A .

La $R.B. = \{(a,a),\ (a,c),\ (b,a),\ (c,c)\}$ tendrá las siguientes representaciones gráficas:



o bien



A veces en lugar de utilizar los paréntesis se utiliza: a R a (a relacionado con a) a R c (a relacionado con c) .... Análogamente b $\not R$ b (b no relacionado con b), que equivale a decir que (a,a), (a,c) pertenecen a la R.B. y que por el contrario (b,b) $\notin$ R.B.

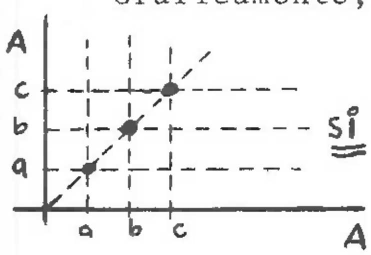
Como dijimos en el caso de las correspondencias, el subconjunto se elige según un cierto criterio f , (generalmente).

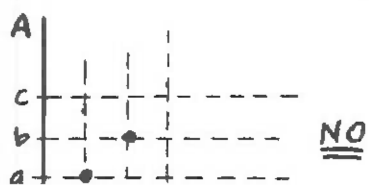
* <u>Propiedades de las relaciones binarias.-</u>

Las relaciones binarias pueden tener algunas de las siguientes propiedades: (a) reflexiva, (b) simétrica, (c) antisimétrica, (d) transitiva.

(a) Decimos que una R.B. tiene la propiedad reflexiva cuando: $\forall a \in A$ es tal que $(a,a) \in$ R.B. O bien cuando: $\forall a \in A$ cumple que a R a . Es decir que todas las parejas del tipo (a,a), (b,b), (c,c) ..... deben pertenecer al conjunto R.B.

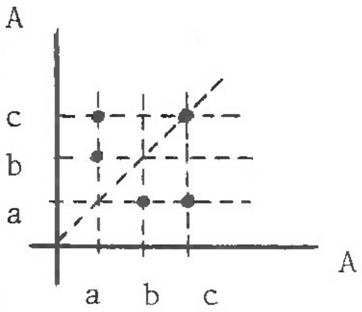
Gráficamente, observaremos si existe o no esta propiedad, mirando si todos los vértices de la "diagonal" (bisectriz) de la cuadrícula están ocupados. En el diagrama de Venn cada elemento debe tener un bucle (una flecha que salga y vuelva al mismo). Basta que fallara un solo elemento, para no tener la propiedad.



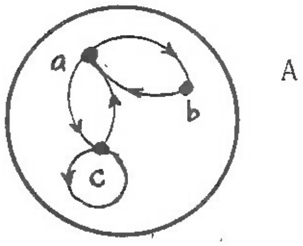


(b) Decimos que una relación binaria tiene la propiedad simétrica cuando: Si $(a,b) \in$ R.B. también "Implica que" $(b,a) \in$ R.B. O bien: Si a R b ; b R a. Hay que fijar la atención en el "si". Es condicional. Si se cumple una cosa, se cumple la otra. ¿Y si no se cumple la primera? No podemos decir nada.

Graficamente se distingue por haber simetría respecto a la diagonal. Cada vértice que pertenezca a la R.B. tiene su simétrico respecto a ella. Si un vértice cae en la diagonal su simétrico será él mismo.



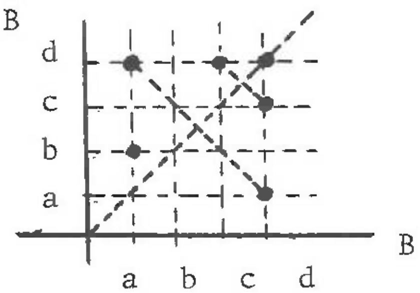
En el diagrama de Venn las flechas son "de ida y vuelta". Si hay una flecha que va de un elemento a otro, y existe simetría, debe haber otra flecha que vaya de este otro al primero.



(c) Decimos que una R.B. tiene la propiedad antisimétrica cuando:

Si $(a,b) \in$ R.B. y $(b,a) \in$ R.B. necesariamente $a = b$. Dicho de otro modo: Si a R b y b R a necesariamente $a = b$.

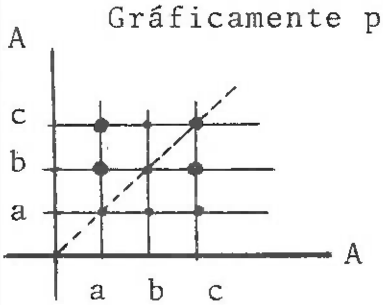
En el fondo nos indica esta propiedad, que cuando hay flechas de ida y vuelta los elementos coinciden (caso contrario habría simetría). Sin embargo si una R.B. no es simétrica puede no ser antisimétrica tampoco. Por ejemplo el del gráfico:



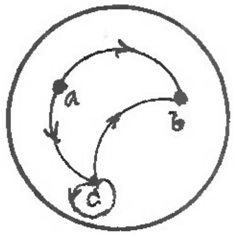
Es una R.B. No es simétrica porque (a,b) R.B. y sin embargo $(b,a) \notin$ R.B.

Tampoco es antisimétrica pues: $(a,d) \in$ R.B. y $(d,a) \in$ R.B. y sin embargo $a \neq d$. Lo mismo pasa con la pareja (c,d).

Gráficamente podemos distinguir esta propiedad, porque todo vértice de la cuadrícula carece de simétrico (salvo los situados sobre la diagonal como el (c,c)). En el diagrama de Venn las flechas serán sólo de "ida". No puede haber de "ida y vuelta".



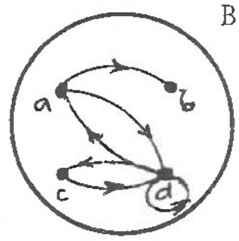
A



En diagrama de Venn el caso anterior, que no era ni simétrica, ni antisimétrica sería:

Como hay flechas "ida y vuelta" no puede ser antisimétrica. Y por haber flechas sólo de "ida" no puede ser simétrica.

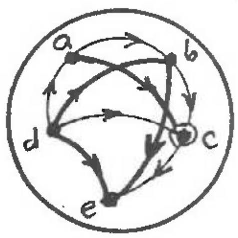
B



(d) Una relación binaria decimos que tiene la propiedad transitiva cuando: Si $(a,b) \in$ R.B. y $(b,c) \in$ R.B. implica que $(a,c) \in$ R.B. O de otro modo: Si a R b y b R c implica que a R c. Lo mismo que la simétrica y antisimétrica es una propiedad condicional "si". Cumpliéndose la primera proposición ha de cumplirse la otra. Pero si no se cumple la primera no podemos decir nada.

En la cuadrícula cuesta bastante de observarse esta propiedad. En los diagramas de Venn se pone en evidencia, si al haber una flecha que va de un elemento a otro y otra que vaya de éste a un tercero, existe otra flecha que una el primero con el tercero. Por ejemplo:

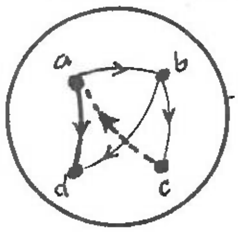
M



Veamos que: a R b y b R c luego a R c

d R a y a R b luego d R b ; d R c y c R e luego d R e ; etc. No sería transitiva por ejemplo la siguiente:

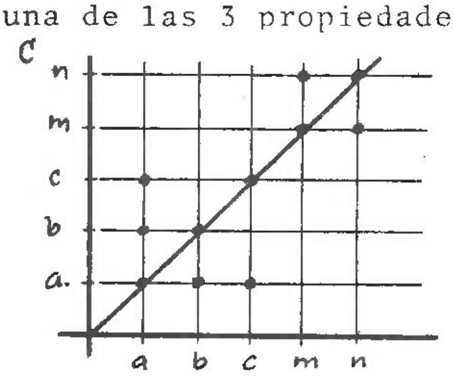
N



Porque: a R b y b R c y sinembargo a $\not R$ c sino c R a.

* <u>Relación de equivalencia.</u> <u>Clases de equivalencia.</u> <u>Partición de un conjunto.</u> <u>Conjunto cociente</u>.-

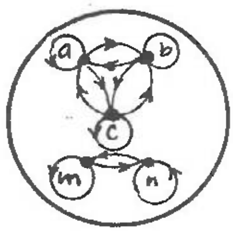
Una relación binaria decimos que es de equivalencia cuando posee las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto su gráfico participa de las condiciones antes dichas para cada una de las 3 propiedades. Será del tipo siguiente:



C

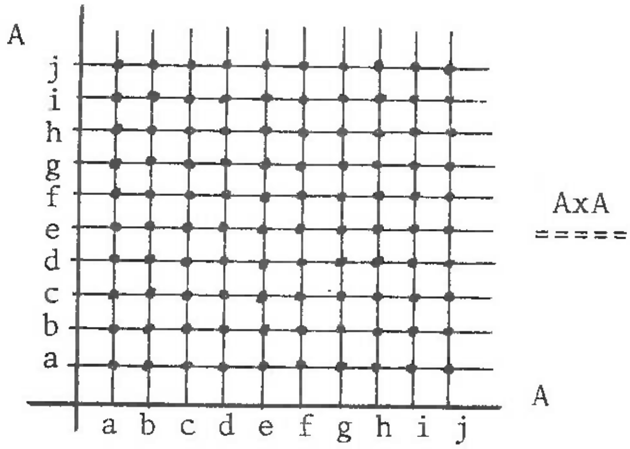
ó

C



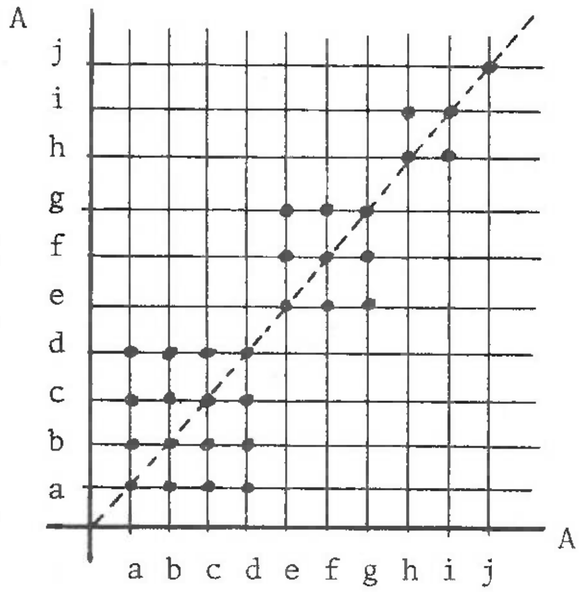
R.E. = $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(c,c),(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$

Veamos un ejemplo: En una clase de 10 niños se dan las siguientes edades: los niños a,b,c,d tienen 8 años. Los niños e,f,g tienen 7 años. Los niños h,i tienen 6 años. Y el niño j tiene 5 años. Llamemos a este conjunto A.



Podemos hacer ahora el producto A x A tal como se ve en la cuadrícula. Tendrá 100 elementos o parejas.

Vamos ahora a elegir un subconjunto del A x A. Lo haremos con el siguiente criterio: "cogeremos aquellas parejas tales, que los niños que la forman tengan la misma edad". Dicho de otro modo: "2 niños están relacionados (pertenece su pareja a la R.B.) cuando tengan la misma edad". De las 100 parejas sólo cogeremos las que cumplan lo anterior, con lo cual nos queda el gráfico siguiente:



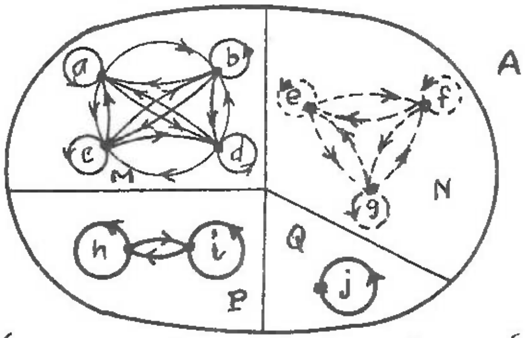
Para hacerlo hemos tenido en cuenta que cada niño tiene su propia edad, luego las parejas (a,a), (b,b),---- pertenecen a la R.B. Por lo tanto (y viendo la diagonal toda ocupada) existe la propiedad <u>REFLEXIVA</u> en esta relación.

Por otro lado vemos que cada vértice tiene su simétrico. Razonándolo: "Si un niño tiene la misma edad que otro, éste tiene la misma edad que el primero". Luego la relación es <u>SIMETRICA</u>.

Por último si: "Un niño tiene la misma edad que otro y éste la misma que un tercero, el primer niño y el último tienen la misma edad". Luego la relación binaria es <u>TRANSITIVA</u>.

Esta relación binaria es pues de <u>EQUIVALENCIA</u>.

Podemos ahora hacer un diagrama de Venn pero poniendo más cercanos los elementos relacionados entre si. De este modo las flechas no se cruzarán y quedará más limpio el dibujo.

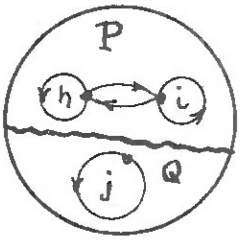


En este diagrama se observa como el conjunto A queda dividido o partido en subconjuntos (4 en este caso), disjuntos entre ellos. Cada uno de ellos contiene a los elementos relacionados entre si. Estos subconjuntos son: $\{a,b,c,d\}$, $\{e,f,g\}$, $\{h,i\}$ y $\{j\}$. Si llamamos M,N,P y Q a cada uno de estos conjuntos, el conjunto $\{M,N,P,Q\}$ formado por estos cuatro elementos recibe el nombre de conjunto cociente o conjunto de las partes (o subconjuntos) de A. Se simboliza por: A/R . A cada subconjunto se le denomina: CLASE de EQUIVALENCIA.
Por tanto el conjunto cociente es el conjunto de las CLASES.

Démonos cuenta de como al aplicar al conjunto A, una relación de equivalencia nos ha quedado dividido o partido en clases de equivalencia. La clase M es la de los niños de 8 años. N será la clase de los niños de 7 años. P la de 6 años y Q la de 5 años.

Este hecho, comprobado con el ejemplo, es general: Siempre que tengamos una relación de equivalencia y la apliquemos a un conjunto, nos lo dividirá o partirá en clases de equivalencia.

Puede ocurrir que el conjunto dado, por tener pocos elementos o por otro motivo, no ponga de manifiesto alguna de las propiedades de la relación de equivalencia. Pero la relación es o no de equivalencia independiente de esto. (Recordemos el "si" condicional de la simetría y transitiva). Así por ejemplo si sólo nos dan el conjunto de los niños: $\{h,i,j\}$.



Aquí no podemos poner de manifiesto la propiedad transitiva, al no haber 3 elementos relacionados. Pero de ello no podemos inducir que no la tenga. Por otro lado si hubiera un niño más con 6 años ya quedaría fijada. Además vemos que el conjunto queda igualmente partido $\{P, Q\}$. Luego es una relación de equivalencia. Como norma es mejor estudiar las propiedades sin pensar en el conjunto en concreto. Una vez establecido si el criterio f, dado para la R.B., es de Equivalencia, se aplica al conjunto.

Veamos otro ejemplo: Establecemos el siguiente criterio para seleccionar las parejas: "Dos números enteros están relacionados cuando dan el mismo resto al dividir por 3". ¿Qué tipo de relación es ésta?

1) Tiene la propiedad reflexiva: $\forall$ a , a R a. Cualquier número entero al dividir por 3 da el mismo resto que él mismo, al dividirlo por

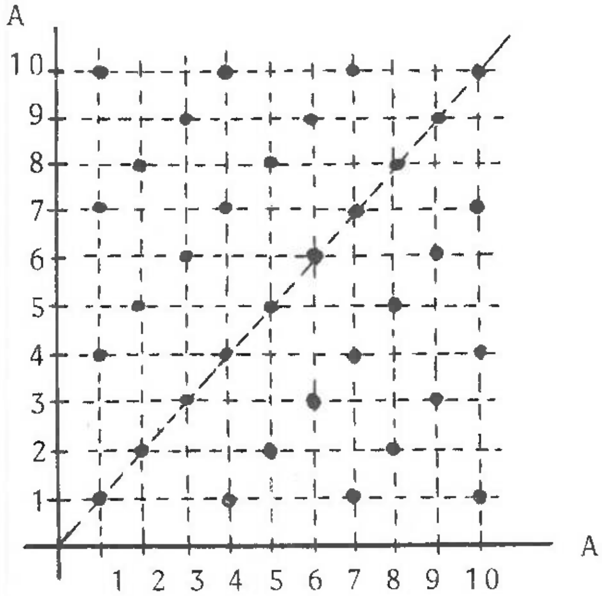
2) Es simétrica: Pues si a R b $\Longleftrightarrow$ b R a. Si un número a da el mismo resto que el b al dividirlos por 3, b dará el mismo resto que a al hacer la división por 3 .

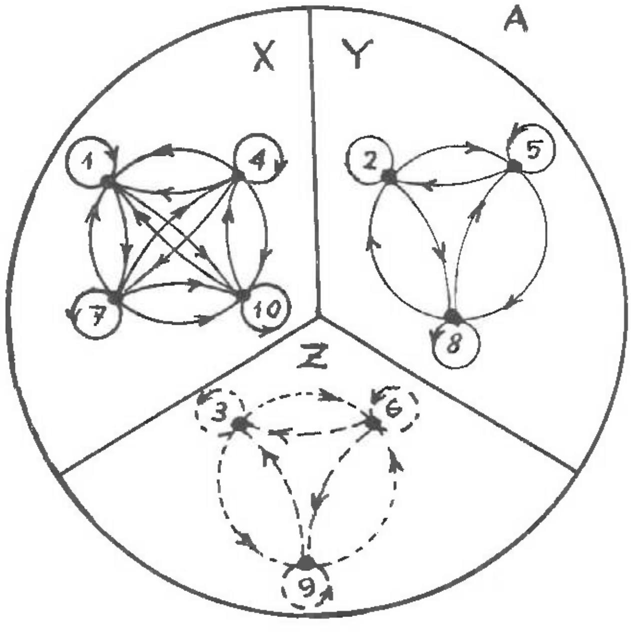
3) También es transitiva: Si a da el mismo resto que b al dividirlos por 3, y b da el mismo que c, es obvio que a y c dan el mismo resto.

Vemos pues que la relación anterior es una relación de equivalencia. Luego si esta relación la tenemos aplicada a un conjunto de números enteros como el A = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ nos lo partirá en clases de equivalencia. Veámoslo:

1 /3 1 0	2 / 3 2 0	3 / 3 0 1
4 /3 1 1	5 / 3 2 1	6 / 3 0 2
7 /3 1 2	8 / 3 2 2	9 / 3 0 3
10 /3 1 3		

Al hacer primero las divisiones ya vemos los números que dan el mismo resto: Resto 1, los números: 1, 4, 7, 10 . Resto 2, los números: 2, 5, 8 . Resto 0, los números: 3, 6, 9. Y no hay más restos posibles. Podemos, por tanto, hacer los gráficos:





Observamos como el conjunto A ha quedado dividido en el conjunto de las clases $\{x, y, z\}$.

Siempre que un conjunto de elementos lo tengamos clasificado o dividido podemos pensar en una relación de equivalencia que lo haya producido. Así por ejemplo el conjunto de las localidades de un "cine", está clasificado en: butacas,primer piso, segundo piso ...... Normalmente el precio de las localidades de cada clase es el mismo.

Luego el conjunto de las butacas del cine queda dividido mediante la relación de equivalencia: "dos butacas están relacionadas si valen lo mismo"

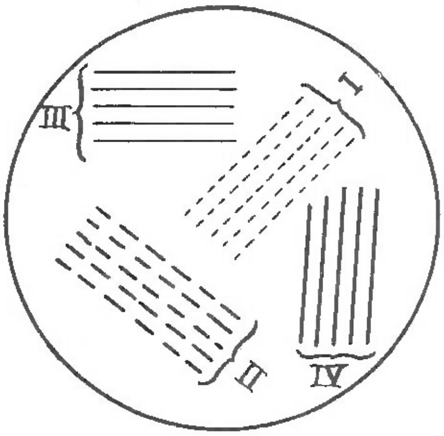
Dentro de un conjunto de personas, las relaciones: "tener la misma edad", "ser tan alto como", "tener el mismo dinero" -------- son relaciones de equivalencia que clasifican el conjunto según la edad, altura, riqueza-----.

No olvidemos que todos los elementos de la misma clase de equivalencia, participan de una misma propiedad (tener la misma edad, dar el mismo resto, tener la misma altura etc. etc.).

* Ejemplos geométricos.- Imaginemos el conjunto de todas las rectas del plano. Este será nuestro conjunto A. Vamos a establecer la relación binaria siguiente: "Dos rectas a y b estarán relacionadas cuando, o coincidan o cuando son paralelas". ¿Qué tipo de relación es ésta?. Veamos:

1) Esta relación es reflexiva, pues toda recta coincide con ella misma.
2) Si una recta es paralela a otra, esta otra es paralela a la primera. Luego la relación es simétrica.
3) También es transitiva, pues si a es paralela a b y b lo es a c , a lo será a c .

Se trata pues de una relación de equivalencia. Por lo tanto clasifica o divide al conjunto A, en clases de equivalencia. ¿Qué elementos estarán en una clase?. Aquellas rectas paralelas entre si.



Luego el conjunto:

$$A = \{I, II, III, IV, ----\}$$

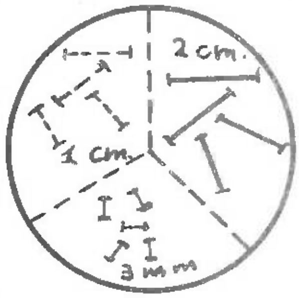
siendo I, II, III, etc. cada una de las clases de equivalencia, que definimos como DIRECCIONES.

Por tanto al aplicar al conjunto de las rectas del plano la R.E. anterior, me lo divide en el conjunto de las "direcciones del plano". Todas las rectas situadas en la misma clase de equivalencia, tienen la misma dirección (son paralelas). Vemos pues aparecer el concepto de "dirección" como la propiedad de la cual participan todos los elementos pertenecientes a la misma clase de equivalencia.

Estudiemos otro caso: Sea B = $\{$segmentos del plano$\}$, y tengamos la relación: "dos segmentos están relacionados, cuando al superponerlos coinciden". (Aceptamos que cada segmento coincida consigo mismo).

Vemos que esta relación tiene las propiedades reflexivas simétrica y transitiva pues: todo segmento coincide consigo mismo. Si un segmento coincide con otro es obvio que éste coincide con el primero. Y si un segmento al superponerlo con otro coincide con él, y lo mismo le sucede a éste con un tercero, el primer y último segmento coincidirán al superponerlos.

Se trata pues de una relación de equivalencia. El conjunto de



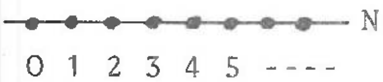
los segmentos del plano quedará dividido en clases de equivalencia, a las que llamaremos: LONGITUDES.

Todos los segmentos (elementos) pertenecientes a la misma clase tienen la misma longitud.

Luego el conjunto de las "longitudes" es el de las clases de equivalencia.

* Número entero y número racional como clases de equivalencia.-

Hasta ahora sólo han aparecido en nuestra "moderna" los números naturales. Nos indicaban algo que tenían en común los conjuntos coordinables: su número de elementos. En un diagrama horizontal se representarían:



Es decir, sobre una semirrecta ocuparían puntos igualmente distantes unos de otros.

A partir de este conjunto veamos como se sacan los números enteros:

Efectuemos el producto interno N x N . Este conjunto tendrá por elementos todos los pares de números naturales incluyendo parejas tales como, (0,0), (2,2), (49,49) ------. Estableceremos ahora la siguiente relación: (a,b) R (c,d) cuando $\boxed{a + d = b + c}$. Dos elementos del conjunto N x N se relacionan sólo si cumplen la condición dicha.

Veamos qué tipo de relación es la anterior. (a) Es una relación reflexiva, pues todo elemento (a,b) está relacionado consigo mismo, pues: $a + b = b + a$ (propiedad conmutativa de los números N).

(b) Es una relación simétrica, pues: Si $(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow (c,d)R(a,b)$

Si (a,b) R (c,d) se cumplirá que $a + d = b + c$. Cambiando los miembros $b + c = a + d$. Y conmutando los sumandos: $c+b = d+a$

(c) Es una relación transitiva. En efecto, si (a,b) R (c,d) y (c,d) R (m,n) $\Longrightarrow$ (a,b) R (m,n).

$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } (a,b)\ R\ (c,d) \text{ se cumple que } a+d = b+c \\ \text{Si } (c,d)\ R\ (m,n) \text{ '' '' '' } c+n = d+m \end{array}\right\}$ Sumando miembro a miembro estas dos igualdades:

$a+d+c+n = b+c+d+m$, quedando, $a+n = b+m$, condición de (a,b) R (m,n).

Por tanto se trata de una relación de equivalencia. Esta relación al aplicarla al conjunto NxN, lo divide en partes o clases de equivalencia.

* <u>Se define como número entero a cada una de estas clases</u>. Nótese que en cada número entero hay infinitas parejas de números naturales, todas ellas equivalentes entre si (por cumplir la condición). En el cuadro siguiente representamos varios números enteros, poniendo en columna las parejas equivalentes entre si:

(0,3)	(0,2)	(0,1)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)
(6,9)	(8,10)	(3,4)	(1,1)	(2 1)	(5,3)	(9,6)
(100,103)	(90,92)	(90,91)	(9,9)	(93,92)	(91,89)	(100,97)
(41,44)	(41,43)	(40,41)	(101,101)	(40,39)	(114,112)	(4,1)
(9,12)	(11,13)	(8,9)	(83,83)	(7,6)	(6,4)	(21,18)

Observemos que cada número entero contiene infinitos pares equivalentes. Dos parejas cualesquiera de un mismo número entero cumplen la condición de la relación. Dos parejas pertenecientes a números enteros diferentes no la cumplen. Por ejemplo (3,4) y (40,41) $\Longrightarrow 3+41 = 4+40$ cumplen. Sin embargo (9,12) y (21,18) $\Longrightarrow$ $9+18 \neq 12+21$ no cumplen.

De las infinitas parejas pertenecientes al mismo número entero, hay una que tiene uno de sus elementos cero. Se suele elegir como representante de la clase (una especie de delegado del grupo) y se le denomina REPRESENTANTE CANONICO.

Dentro de los mismos enteros podemos establecer 3 tipos: (1) Aquellos que tienen el primer elemento del par mayor que el segundo. Son los enteros positivos (o números naturales). Su forma canónica es del tipo (m,o). y el símbolo para representarlos es <u>+m</u>.

Así el (1,0) se simboliza por +1 . El (7,0) por +7 etc. etc.

(2) Aquellos que tienen el segundo elemento del par mayor que el primero. Son los enteros negativos. Su forma canónica es del tipo (o,n). y el símbolo utilizado para representarlos es <u>-n</u>.

(3) Aquellos en que coinciden el primer elemento y el segundo. Su forma canónica es (0,0). Su símbolo 0.

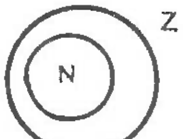
Veamos que el símbolo, lo es del número entero (clase de equivalencia). Luego podemos poner: (2,0) $\in$ +2 ; (5,3) $\in$ +2 ; (103, 101) $\in$ + 2 ; - - - - - - . Análogamente: (1,4) $\in$ -3 ; (2,5) $\in$ -3 ; (91, 94) $\in$ -3 ; - - - - - - . Y también (0,0) $\in$ 0 ; (7,7) $\in$ 0 ; (103, 103) $\in$ 0 ---.

Una vez establecidos estos convenios y simbolismos se podrían definir la adición y multiplicación con números enteros (a partir de las parejas).

Veamos ahora la representación gráfica de los números enteros.

SÍMBOLO:	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	Z
CANÓNICO:	(0,3)	(0,2)	(0,1)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	
	(6,9)	(3,5)	(2,3)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	
	(2,5)	(7,9)	(10,11)	(9,9)	(12,11)	(9,7)	(8,5)	

En la semirrecta opuesta a la que dibujábamos los números naturales (enteros positivos), se pueden dibujar los enteros negativos. Cada punto de los marcados representa un número entero o sea infinitos pares de números naturales. Así como el conjunto de los números naturales se les denomina con N, al conjunto de los enteros se hace con Z. Con el diagrama de Venn:



queda claro el hecho de ser N un subconjunto de Z.

Un ejemplo que nos puede ayudar a entender lo anterior es el siguiente:

Pensemos en un cine y representemos en un paréntesis dos números naturales. El primero nos indica el número de personas que entran. El segundo el de las que salen. Así (3,1) querría decir que entran 3 personas y sale 1. El (8, 12) que entran 8 y salen 12. Una vez establecido esto, pensaremos sólo en el aumento (o disminución) de personas en el local. Así, si hay "5 personas más", es evidente que ha podido producirse este caso de muchos modos: (12, 7), (5, 0), (41,36)... O sea que entren 12 y salgan 7 ; que entren 5 y no salga nadie; que entren 41 personas y salgan 36 ------. De todos modos conseguimos "5 personas más" (el número +5).

Si el caso es "3 personas menos", ha podido producirse por: (0, 3) , (2, 5) , 21, 24) ------. Es decir que se hayan marchado 3 personas; que hayan entrado 2 y marchado 5; que entren 21 y salgan 24 ------. De todas las maneras conseguimos "3 personas menos" (el número menos tres).

(12,7), (5,0), (41,36) ---- son pares equivalentes. Todos indican +5.
(0,3), (2,5), (21,24) ----- " " " . . . -3.

Veamos ahora, como a partir de los números enteros podemos sacar los racionales. Hagamos el producto de $\{Z\} \times \{Z-0\}$ y obtendremos pares ordenados de números enteros. Pero las parejas tal como (a,b) las escribiremos $\frac{a}{b}$ y le damos un significado: "nos indican un cociente". No se realiza la división pero allí está implícita. En una palabra, con todo lo dicho el producto $\{Z\} \times \{Z-0\}$ es el conjunto de todas las fracciones. Se quita, en el segundo conjunto, el 0 porque no se puede dividir por 0. Al primer elemento de cada pareja se llama numerador y al segundo denominador.

Pues bien en este conjunto de las fracciones establezcamos la siguiente relación: $(a,b)\ R\ (c,d) \Rightarrow a.d=b.c$ o bien $\frac{a}{b}\ R\ \frac{c}{d} \Rightarrow$ $\Rightarrow a.d = c.b$. ¿Qué tipo de relación es ésta?. Comprobemos que es de equivalencia. En efecto:

(1) Es reflexiva, pues $\frac{a}{b}\ R\ \frac{a}{b}$ ya que $a.b = a.b$

(2) Es simétrica, pues si $\frac{a}{b}\ R\ \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{m}{n}\ R\ \frac{a}{b}$. Para que $\frac{a}{b}\ R\ \frac{m}{n}$ se debe cumplir que $a.n = m.b$. Transponiendo miembros $m.b = a.n$ lo que justifica que $\frac{m}{n}\ R\ \frac{a}{b}$.

(3) Es transitiva. Si $\frac{a}{b}\ R\ \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}\ R\ \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b}\ R\ \frac{m}{n}$.
Por ser $\frac{a}{b}\ R\ \frac{c}{d}$ se cumple que $a.d = c.b$. Por otro lado si $\frac{c}{d}\ R\ \frac{m}{n}$ se cumplirá que $c.n = m.d$

Multiplicando miembro a miembro las dos igualdades tenemos:

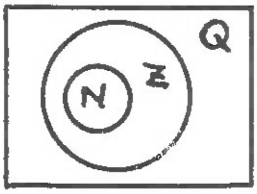
$a.d.c.n = c.b.m.d$. Simplificando, quedará $a.n = b.m$ lo cual implica que $\frac{a}{b}\ R\ \frac{m}{n}$.

Por cumplir (1), (2) y (3) vemos es una relación de equivalencia. Al aplicarla al conjunto $\{Z\} \times \{Z-0\}$ me lo divide en clases de equivalencia. Se define como número racional a cada una de dichas clases de equivalencia. Cada número racional abarca infinitas fracciones o parejas de números enteros, todas ellas equivalentes entre sí. Por ejemplos las fracciones:

$\frac{1}{2}, \frac{-3}{-6}, \frac{5}{10}, \frac{-1}{-2}, \frac{100}{200}$ ------ son todas fracciones equivalentes y pertenecientes al mismo número racional (clase). Lo mismo que vimos en el caso de los números enteros, existe el representante canónico de la clase. Se toma la fracción (de los de la clase) con números más pequeños y que tengan el denominador positivo. En el caso de antes el canónico sería $\frac{1}{2}$. Dado el número racional:

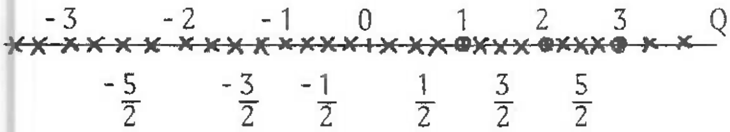
$\left\{\frac{-3}{5}, \frac{6}{-10}, \frac{-9}{15}, \frac{-30}{50} \text{-----}\right\}$ el canónico sería $\frac{-3}{5}$ etc. etc.

Hemos de observar como los números enteros pasan a ser un subconjunto de los racionales, ya que pueden fácilmente ponerse en forma fraccionaria. Así el número entero 3, visto como racional sería $\left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{-3}{-1}, \frac{-12}{-4}, \text{-----}\right\}$ siendo el canónico $\frac{3}{1}$. Como los naturales eran subconjunto de los enteros, nos quedará un diagrama de Venn tal como:



Los números racionales, o mejor su conjunto, se representa por Q. Antes de ver su representación gráfica, comprobemos la llamada "ordenación densa" de los números racionales: "Dados dos números racionales, uno mayor que otro, siempre existe un tercero comprendido entre ambos". Veamoslo con el ejemplo siguiente: $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ Si formo la fracción $\frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$, veo que $\frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$. Si cojo ahora $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ y formo $\frac{3+1}{5+2} = \frac{4}{7}$, veo que $\frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$ (Para verlo más claro reducir a común denominador, o hacer las divisiones indicadas)

Esta propiedad nos lleva a que si al representar sobre una recta los números racionales, elegimos la recta soporte de los números enteros (que también son racionales), entre cada dos que tenemos habrá un tercero. Entre éste y uno de los anteriores, otro. Y así sucesivamente. En una palabra el segmento determinado por dos puntos "está completamente lleno de números racionales". A cada punto le corresponde un número racional y cada número racional tiene por gráfico un punto de la recta. Nos encontramos pues con la recta completamente "llena" de números racionales. El conjunto de puntos de la recta y el conjunto de números racionales seran "coordinables". (Podemos aceptar lo anterior en un principio, aunque prescindimos de los números irracionales).



* Relación de orden. Gráficos. Orden estricto. Orden total y orden parcial.- Una relación binaria que posea las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva decimos es una relación de orden. Si unicamente posee las propiedades antisimétrica y transitiva diremos que es de orden estricto. (No olvidar que toda relación binaria es un subconjunto del producto cartesiano de un conjunto por si mismo).

Las relaciones del tipo: "Tener mas edad que..." "tener la misma o menor altura que...", "tener más dinero que..." ---- son casos típicos de relaciones de orden.

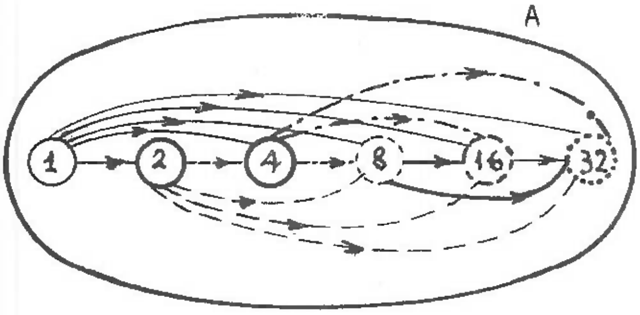
Veamos un ejemplo numérico: En el conjunto $A = \{1,2,4,8,16,32\}$ establecemos la siguiente relación binaria; $(a,b) \in$ R.B. cuando $\underline{\underline{a}}$ divide a $\underline{\underline{b}}$. O de otro modo aRb cuando $\underline{\underline{a}}$ divide a $\underline{\underline{b}}$.

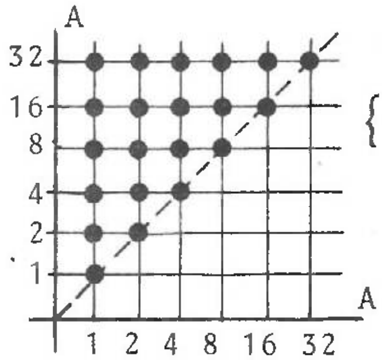
Esta relación vemos que es reflexiva, pues todo número divide a si mismo: $(a,a) \in$ R.B. , siendo a un elemento cualquiera de A.

También es antisimétrica, pues si un número divide a otro, éste no puede dividir al primero: Si aRb $\Rightarrow$ bRa

Por último es transitiva, pues si un número divide a otro y éste divide a un tercero, el primero dividirá al tercero: Si aRb y bRc $\Rightarrow$ aRc.

Se trata pues de una relación de orden (no estricto). Sus gráficos de Venn y rectangulares serán:



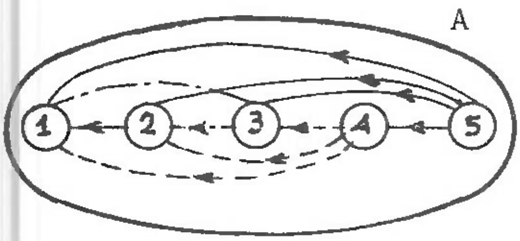


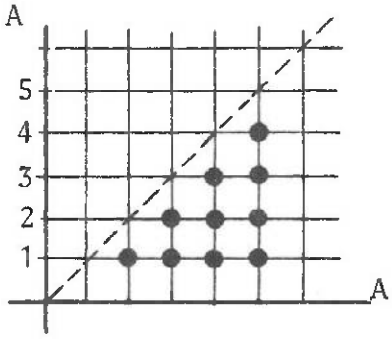
La relación es el conjunto:

$\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,8)---\}$

Veamos otro ejemplo: En el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ establecemos que; "dos números están relacionados cuando el primero sea mayor que el segundo" Es decir aRb $\Rightarrow$ $a > b$.

Vemos que esta relación es antisimétrica y transitiva, pero nó reflexiva porque ningún número es mayor que el mismo. Sus gráficos serán:





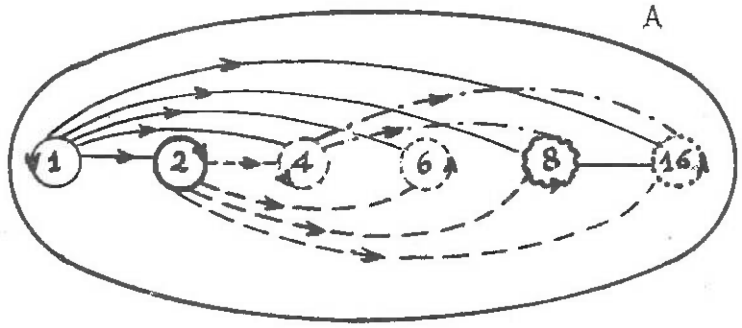
R.O.= $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2)(5,3),(5,4)\}$

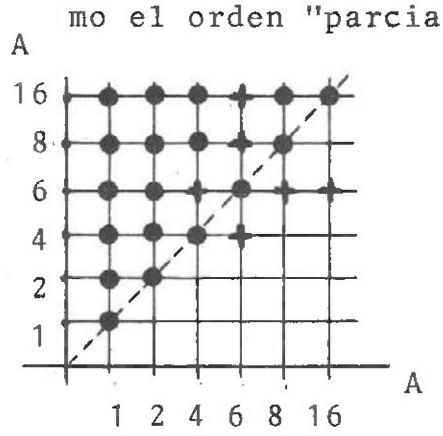
Se trata ahora de una relación de orden estricto.

La relación de orden puede ser parcial o total. Decimos que es total cuando cualquier par $(a,b) \in$ R.O. [bien el (a,b) o el son de orden total.

Veamos un ejemplo de orden parcial: Sea el conjunto $A = \{1,2,4,6,8,16\}$. Tengamos la relación: aRb cuando "a divida a b". Según lo visto antes era reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, "Relación de Orden". Pero hay parejas (6,8) o (8,6) que no están relacionados sus elementos. El orden pues es parcial. Sus gráficos serán:

Se observa perfectamente en este último el orden "parcial".





El conjunto de los números naturales, el de los enteros, y el de los racionales quedan totalmente ordenados mediante la relación "mayor que" o bien la de "menor que". Del caso de los racionales podríamos pasar fácilmente a ver la ordenación de los puntos de una recta.

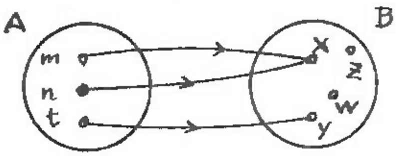
C A P I T U L O   III

(III.)

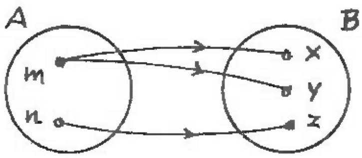
* Aplicaciones: inyectivas, suprayectivas y biyectivas. Representaciones gráficas.-

Dentro de las correspondencias antes mencionadas, existen tipos diferentes. Podemos clasificarlas en aplicaciones y no aplicaciones. Pero ¿qué es una aplicación? Es una correspondencia tal, que todo elemento del conjunto origen tiene una imagen y solo una.

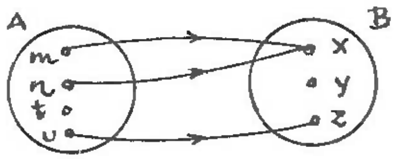
Gráficamente, lo observaremos en el diagrama de Venn, porque de todo elemento de A (conjunto origen) sale una sola flecha. Si de algún elemento salieran más de una flecha o no saliera ninguna, no sería aplicación.



(a)



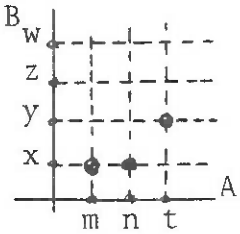
(b)



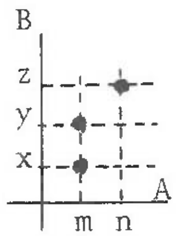
(c)

En el dibujo anterior (a) es aplicación, (b) y (c) no lo son.

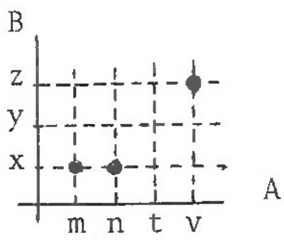
Si utilizamos diagramas rectangulares tendremos para los mismos ejemplos:



(a)



(b)



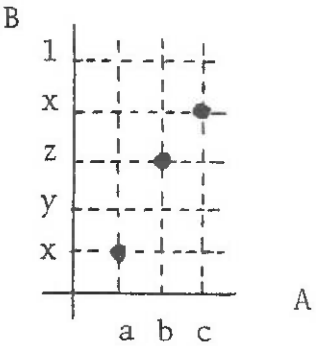
(c)

En estos gráficos distinguiremos las aplicaciones de las que no lo son, observando que en cada linea vertical debe haber un vértice y solo uno, ocupado.

Las aplicaciones a su vez se pueden clasificar en: inyectivas, suprayectivas, biyectivas y otras.

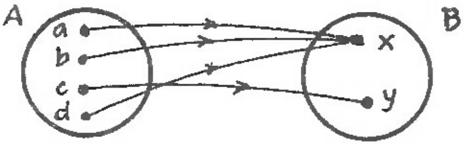
Para analizar cada uno de los casos pensemos que A es el conjunto origen y B el conjunto imagen. Pues bien en estas condiciones decimos que una aplicación es inyectiva cuando todo elemento de B que es imagen de alguno de A, lo es sólo de uno. Gráficamente se observa que ningún elemento de B puede recibir más de una flecha. Pero puede haber elementos que no reciban ninguna.

En el diagrama rectangular se distingue por no existir ninguna



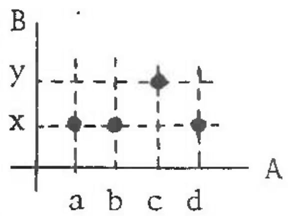
linea horizontal con dos o más vértices, aunque puede haberlas sin ninguno como la de y y la de 1 .

Decimos que una aplicación es suprayectiva o exhaustiva cuando todo elemento de B es imagen, por lo menos, de uno de A. Gráficamente veremos llegar a cada elemento de B una flecha por lo menos.

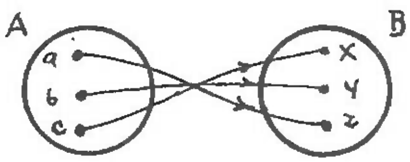


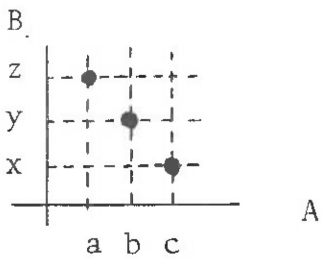
No pueden existir elementos de B sin flecha.

En el diagrama rectangular vemos que toda línea horizontal tiene por lo menos un vértice. Así en el gráfico adjunto la de x tiene tres y la de y uno.



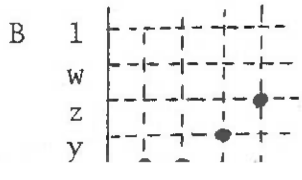
Por último decimos que una aplicación es $\left\{\begin{matrix}\text{o biunívoca}\\ \text{biyectiva}\end{matrix}\right\}$ cuando a la vez es inyectiva y suprayectiva. Por la primera condición (inyectiva) no puede haber elementos en B que reciban más de una flecha. Por la segunda (suprayectiva) no puede haber ni un solo elemento de B que no reciba alguna flecha. Para compaginar ambas cosas todo elemento de B recibirá una sola flecha. Como cada flecha viene de un elemento de A y de éste no puede salir más que una flecha, resulta que A y B han de tener el mismo número de elementos. Serán conjuntos coordinables. Podríamos definir como coordinables aquellos conjuntos entre los que se puede establecer una correspondencia (aplicación) biyectiva o biunívoca. Sus gráficos son por ejemplo:





En cada línea horizontal vemos no puede haber más de un vértice. Y no puede haber líneas horizontales sin vértices en ellas.

Pueden existir aplicaciones que no pertenezcan a ninguno de los tipos anteriores. Por ejemplo:



Un ejemplo nos ayudará a terminar de ver las diferencias entre los tres casos anteriores. Veamos:

Sea A el conjunto de 20 niños de una clase de 5° de G.B. y B el conjunto de las butacas de un cine. Establecemos una correspondencia ("aplicación") entre niños y butacas. (Cada niño sólo puede sentarse en "una" butaca, aunque una butaca puede estar ocupada por más de un niño).

- En primer lugar, si hay más de 20 butacas en el cine, es evidente que sobrarán butacas sentando en cada butaca a un niño. El número de butacas ocupadas serán 20. Esto sería una aplicación inyectiva. (Recuérdese que es aplicación porque un niño no puede ocupar más de una butaca).

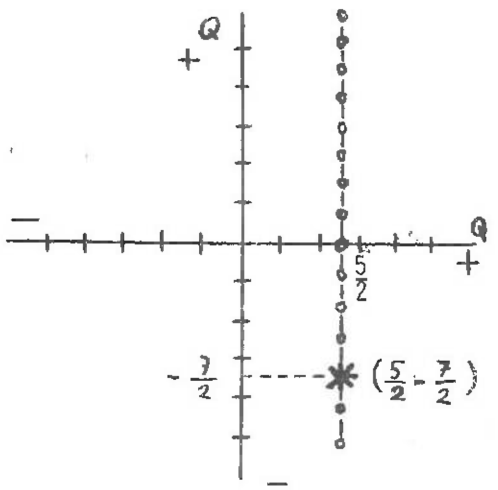
- En segundo lugar, supongamos que el cine tenga menos de 20 butacas. Sentamos a un niño en cada butaca y sobran lógicamente niños. A éstos les hacemos compartir butacas de las ya ocupadas por otros. Nos encontramos con una aplicación (a cada niño una sola butaca) suprayectiva (a cada butaca uno o más niños).

- En tercer lugar, si el cine tiene precisamente 20 butacas y se sienta cada niño en una diferente, ni sobran niños ni butacas. Tenemos pues una aplicación biyectiva.

- Por último pensemos que puede haber más "modos" aunque no sean tan "lógicos" de sentarse, que darán lugar a aplicaciones que no pertenezcan a ningún caso anterior. Así por ejemplo con $\{20 \text{ niños}\}$ y $\{20 \text{ butacas}\}$ pueden sentarse varios niños en la misma butaca y sobrar butacas.

* Producto cartesiano y gráficos.- En puntos anteriores ya hemos hablado del producto cartesiano y de sus diagramas: de Venn y rectangular. También hemos indicado como los números racionales al representarlos sobre una recta la "llenaban" completamente. Una semirrecta la "ocupan" los racionales positivos. La semirrecta opuesta a ésta, los racionales negativos y como punto de separación de ambas el 0 (cero). (Prescindiendo, en principio, de los números irracionales).

Hagamos el producto cartesiano de Q x Q (conjunto de los números racionales por él mismo). Tendremos todas las parejas de n. racionales posibles. Intentemos ahora hacer el diagrama rectangular. En este caso la línea horizontal será toda la recta horizontal, pues cada uno de sus puntos representa un número racional. Lo mismo ocurre con la línea vertical. Para cada elemento del conjunto Q "horizontal" podemos hallar infinitos pares, añadiéndole cada

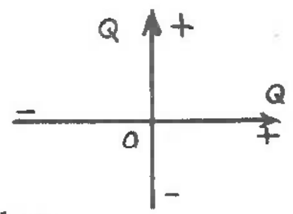


uno de los elementos de Q "vertical". Todos estos paréntesis tienen una representación: una recta vertical pasando por el punto del elemento elegido. (En el dibujo la recta de la derecha (°) representa todas las parejas ($\frac{5}{2}$, m) siendo m cualquier número racional).

Si análogamente a como hemos tomado el $\frac{5}{2}$. tomamos todos los valores posibles y hacemos lo mismo, obtendremos un sin fin de líneas verticales que nos cubrirán el plano. Dicho de otro modo al haber infinitos elementos en el conjunto horizontal y en el vertical la malla de cuadrícula es "finísima" y cualquier punto del plano es un vértice de la misma. Resumiendo pues, el conjunto QxQ (su gráfico) es el plano del dibujo. A todo punto del plano le corresponde un par de números racionales (o elemento de QxQ) y todo elemento de QxQ, o par de racionales, tiene por imagen o representación un punto del plano. Así por ejemplo el marcado por una estrella en la figura es el punto correspondiente al par ($\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$).

* <u>Ejes coordenados</u>. <u>Origen de coordenadas</u>. <u>Coordenadas de un punto</u>.-

Las dos rectas anteriores una vez puestos los números racionales quedan orientadas. Hay una semirrecta positiva (donde situamos los racionales positivos) y otra negativa (donde situamos los negativos). El punto de corte de las rectas sirve de origen para ambas. A las rectas orientadas se les denomina ejes. (El sentido positivo suele indicarse añadiendo una flecha en él). Las anteriores quedarían: ver figura: y las llamaríamos "ejes coordenados" o ejes de coordenadas. Al punto 0 se llama origen de coordenadas.

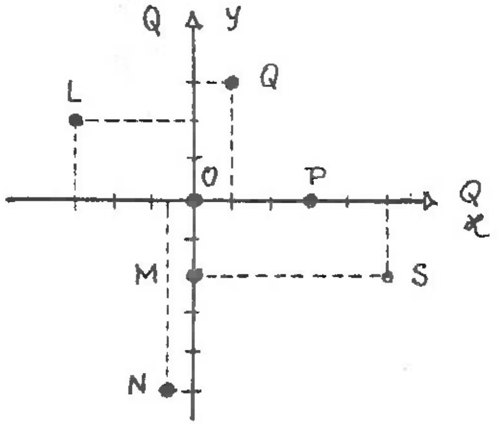


A cada punto del plano hemos dicho le corresponde un par de n.Q. Al primero de ellos se le denomina "abcisa" del punto y al segundo "ordenada". A la abcisa y ordenada de un punto, se les denomina coordenadas del punto. Por ello también suele denominarse eje de abcisas al horizontal y de ordenadas al vertical.

Dado un sistema de ejes coordenados, cualquier punto del plano queda localizado respecto a él, mediante sus coordenadas.

Vamos a dibujar, para fijar ideas, los puntos siguientes:

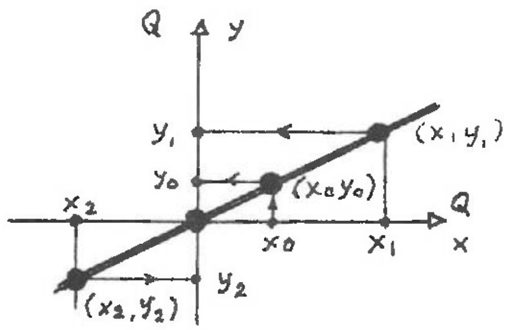
M (0,-2) N (-1[illegible], -5) P (+3, 0) ; Q (1,3) ; L (-3,2) ; S (5,-2) ;



En muchas ocasiones al escribir un par de QxQ se pone (x,y), llamando x a la abcisa e y a la ordenada. Por ello el eje horizontal recibe también el nombre de eje de las x y el vertical de eje de las y . (No olvidar que habrá puntos del plano cuyo par (x,y) tenga números irracionales).

* Aplicación lineal. Ecuaciones lineales.-

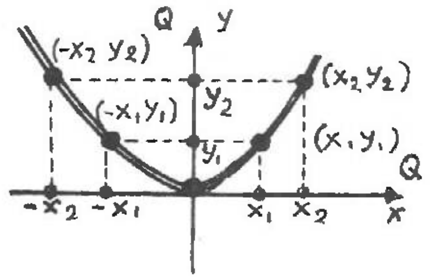
Entre el conjunto Q (horizontal) y el conjunto Q (vertical) vamos a establecer una correspondencia, siguiendo el siguiente criterio: "Trazamos una recta por el origen de coordenadas, y de entre todos los elementos (x,y) del producto QxQ, elegimos para la correspondencia, los que su imagen gráfica cae sobre dicha recta".



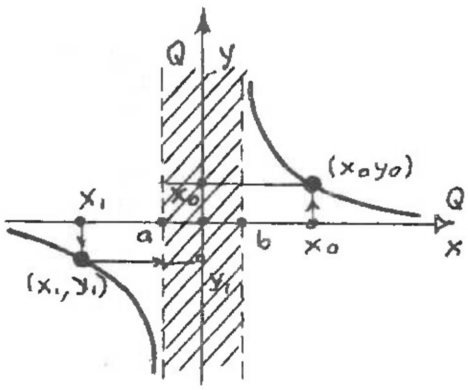
La correspondencia sería el conjunto

$C = \{(x_0\ y_0),\ (x_1\ y_1),\ (x_2\ y_2)\ ------\}$

Observamos que a cada elemento x del conjunto horizontal le hacemos corresponder un elemento y del conjunto vertical, con la condición de que la pareja (x,y) tenga su imagen gráfica sobre una recta dada. Esta correspondencia es una aplicación biyectiva. Además el par (0,0) pertenece al conjunto o aplicación. "Aplicación lineal" se denomina, por la recta que interviene en el criterio para seleccionar pares.



Otro tipo de aplicación podría ser el de la figura. En vez de tomar para el criterio una recta hemos tomado una parábola vertical. Los pares pertenecientes a la correspondencia (aplicación) son aquellos cuyas imágenes gráficas están sobre la parábola. Como un mismo elemento del conjunto imagen (Q vertical) es imagen de dos elementos del conjunto origen (Q horizontal) se trata de una aplicación suprayectiva o exhaustiva. Con diferentes tipos de curvas podríamos obtener diferentes tipos de correspondencias. Así con la hipérbola de la figura, tendríamos una correspondencia, pero no aplicación, pues para todos los valores de $x \in Q$ comprendidos entre a y b

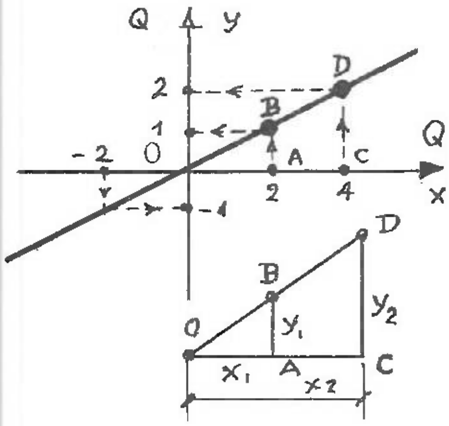


no existe imagen.

Centrando las cosas, vemos: (1) que la aplicación lineal es el conjunto de pares $\{(x_0\ y_0),\ (x_1\ y_1),\ (x_2, x_2) \text{-------}\}$.

(2) Que la representación gráfica de este conjunto de pares es el conjunto de puntos de la recta dada, siendo las coordenadas de los puntos los pares del conjunto aplicación. En una palabra tenemos un conjunto de pares de números racionales (aplicación lineal) y su gráfica (recta).

Cabe expresar este conjunto por "comprensión". Para ello hemos de encontrar una propiedad que verifiquen todos los elementos del conjunto y solo ellos.



Observando la figura y tomando dos puntos cualesquiera de la recta (por ejemplo el B y el D) se nos forman dos triángulos rectángulos semejantes, el $o\overset{\triangle}{B}A$ y el $o\overset{\triangle}{D}C$. Teniendo en cuenta que los lados deben ser proporcionales y siendo (x_1, y_1) las coordenadas de B y (x_2, y_2) los de D tendremos:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \quad \text{o bien} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \ .$$

Tomando uno de estos triángulos y otro tercero tendríamos

$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_3}$. Y en general $\frac{y_1}{y} = \frac{x_1}{x}$ siendo (x, y) un punto cualquiera de la recta. Cambiando elementos tendremos: $\boxed{\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \text{---} = \frac{y}{x}}$

Es decir: "el cociente entre la ordenada y la abcisa de cualquier punto de la recta es cte." Llamando "m" a esta cte. tendremos:

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \text{----} = \frac{y}{x} = \text{cte} = m$ Por lo tanto si un punto está en la recta, (o es imagen gráfica de un elemento de la aplicación), su ordenada dividida por su abcisa debe dar m. Si no lo da, caerá fuera de la recta. ¡Esta es pues la propiedad¡

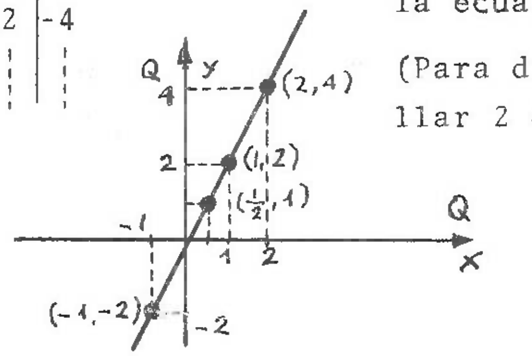
De las igualdades anteriores podemos coger $\boxed{\frac{y}{x} = m}$ y ponerlo $\boxed{y = m\,x}$ que será la forma analítica de expresar la propiedad anterior.

Todo elemento (x,y) de la aplicación debe cumplir que "el pro ducto por m de su primer número racional sea igual al segundo".

Esta última expresión es una igualdad, pero que sólo se verifica para ciertos valores de las letras $\underline{\underline{x}}$ e $\underline{\underline{y}}$, [para aquellos $(x,y) \in$ aplicación]. Luego se trata de una ecuación. Tiene dos incógnitas $\underline{\underline{x}}$ e $\underline{\underline{y}}$. Ecuación que recibe el nombre de lineal porque su solución es una línea recta (o mejor el conjunto de la aplicación lineal). Resolver una ecuación es hallar sus soluciones. En este caso es hallar la aplicación. Como tiene infinitos elementos, lo mejor es dibujar su gráfica y tabular alguno de ellos. Por ejemplo: resolver la ecuación $y = 2x$. Su solución es el conjunto: $\{(0,0),\ (1,2),\ (\frac{1}{2},\ 1),\ (2,4),\ (-1,-2),\ \text{---------}\}$. Para hallar los pares basta dar valores a la x, multiplicarlos por 2 y obtendremos los valores de y. Se pueden poner también en forma de tabla. Y por último podemos hallar la recta solución. Todos los (x,y) que cumplen la ecuación caen sobre la recta.

x	y
0	0
1	2
2	4
-1	-2
-2	-4
⋮	⋮

(Para dibujar rápidamente la recta basta hallar 2 de sus puntos).



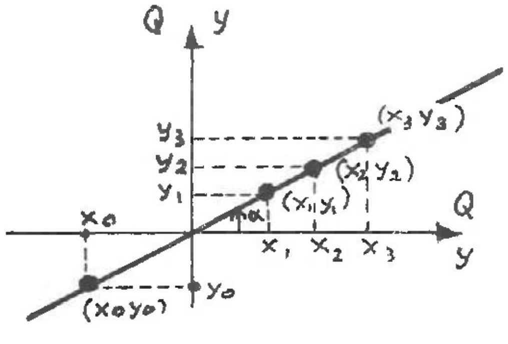
* <u>Proporcionalidad entre los elementos (números racionales) de dos conjuntos. Pendiente de una recta.-</u>

Hemos visto anteriormente como el cociente entre la ordenada y la abcisa de todos los puntos situados sobre una recta era cte. Constante a la que hemos llamado m. Cuando tenemos:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \text{----} = m\ ,$$ se dice que los pares de números

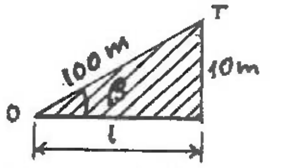
$y_0,\ x_0\ ;\ y_1,\ x_1\ ;\ y_2,\ x_2\ ;\ y_3,\ x_3\ ;$ ------ son proporcionales.

La constante de proporcionalidad es m. Esta m es precisamente lo que se denomina "pendiente" de la recta. Recordando un poco la base de trigonometría es precisamente la $tg\alpha$, siendo α el ángulo formado por la recta y el semi eje positivo de las x. $\boxed{m = tg\alpha}$.



Por tanto la ecuación lineal de una aplicación podría ponerse de la forma: $\boxed{y = tg\alpha\ .\ x}$.

No debe confundirse el concepto de pendiente de una recta, con el de



pendiente de una carretera. P.e. cuando se habla de una pendiente del 10 por ciento, se refiere a que la carretera sube 10m por cada 100 recorridos. Esto en trigonometría lo denominamos sen β; sen $\beta = \frac{10}{100}$. En cambio la tg $\beta = \frac{10}{l}$ sería la pendiente de la recta OT.

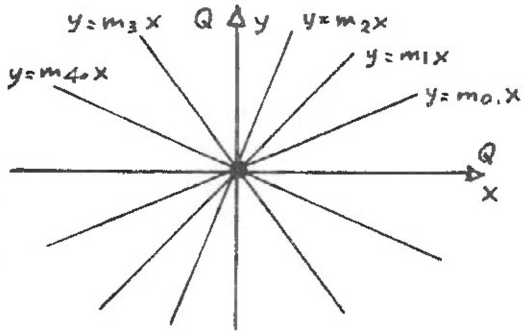
* Propiedades de las aplicaciones lineales.-

Dada la aplicación lineal mediante su ecuación $y = m.x$ podemos indicar dos propiedades importantes de la misma:

(1) Si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son dos elementos de la aplicación, también lo será $(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$. Veámoslo: $y_1 = m.x_1$; $y_2=m.x_2$ Sumando miembro a miembro las dos igualdades $y_1+y_2 = mx_1+mx_2 =$ $= m.(x_1+x_2)$ luego el par $(y_1+y_2,\ x_1+x_2)$ pertenece a la aplicación.

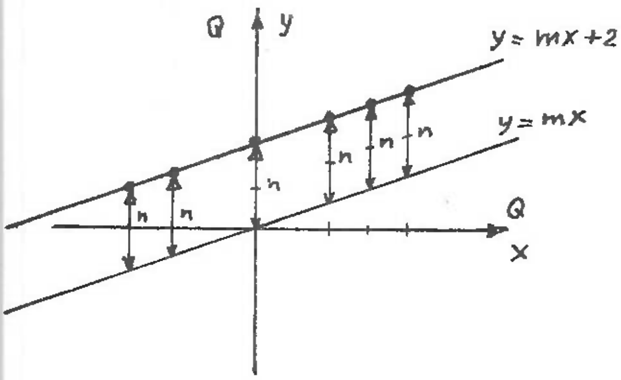
(2) Si el par (x_i,y_i) pertenece a la aplicación, también pertenecerá el $(kx_i,\ ky_i)$, siendo $k \in Q$. Veámoslo: $Y_i = m.\ x_i$. Multiplicando los dos miembros por k : $ky_i = m.kx_i$ luego $(kx_i,\ ky_i)$ $\in$ aplicación.

* Aplicación afin.- Según lo dicho anteriormente al cambiar el valor de m (pendiente) cambia la recta y por tanto la aplicación. Dando

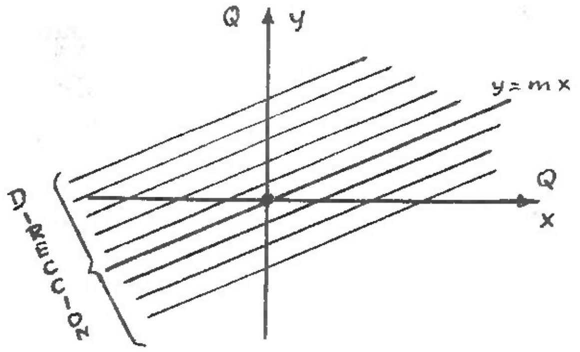


valores a m obtendremos el haz de aplicaciones. El par (0,0) pertenece a todas ellas.

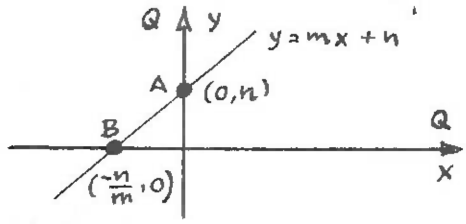
Fijémonos ahora en una cualquiera de ellas por ejemplo la de la figura: $y = mx$. Desplazando verticalmente cada uno de sus puntos una cantidad cte, (en la figura 2 unidades hacia arriba), obtendremos otra recta paralela a la primera. Observamos que tomando esta nueva recta como referencia, a cada punto del eje horizontal podemos hacerle corresponder otro en el eje vertical. Nos encontramos pues ante una nueva aplicación, que nace de la lineal, mediante un desplazamiento vertical de la recta de ésta. A esta nueva aplicación se la denomina "AFIN". Veamos que lo que la diferencia de la



lineal es que el punto (0,0) no pertenece a ella. Su ecuación será $\boxed{y = mx+n}$ siendo n la distancia vertical desplazada. Como n puede ser cualquier número racional, a partir de una aplicación lineal podemos obtener infinitas aplicaciones afines, formando todas ellas una dirección (rectas paralelas entre si).



* Cortes con los ejes.- Entre los puntos de la recta, representación gráfica de la aplicación afin, los más característicos son los de corte con los ejes coordenados. En la figura los puntos A y B .



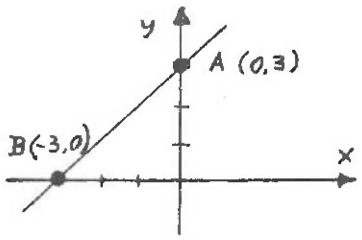
Como una recta queda definida por dos puntos, éstos serán los que normalmente calcularemos para dibujarla.

Para hallar las coordenadas de A, se da a la $\underline{x}$ el valor $\underline{0}$ y se sustituye en la ecuación $y = mx+n$, con lo que $y = 0+n = n$. El punto A será el (0,n)'

Las coordenadas de B las obtenemos haciendo en la ecuación $y = 0$. Tendremos $0 = mx+n$. Despejando la x, $x = -\frac{n}{m}$. Por tanto el punto B es el $(-\frac{n}{m}, 0)$. Haciendo la tablilla:

Ejemplo: $y = x + 3$
Para $x=0 \longrightarrow y=0+3=3$
" $y=0 \longrightarrow 0=x+3;\ x=-3$

A (0,3)
B (-3,0)



x	y
0	n
$-\frac{n}{m}$	0

* Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico de resolución.-

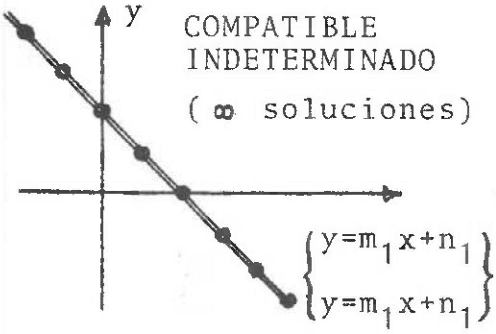
Resolver un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas, es hallar el conjunto de pares (x,y) que verifiquen simultaneamente cada una de las ecuaciones que forman el sistema. Vamos a ver el caso de un sistema con 2 ecuaciones unicamente. Por ejemplo el:

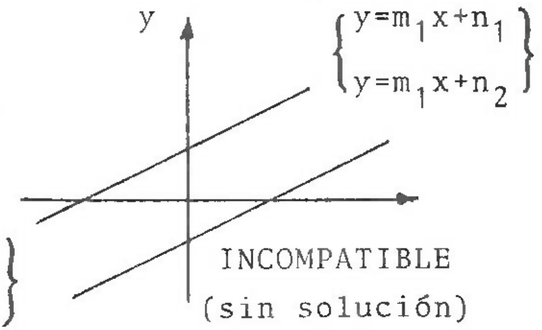
$$\left\{ \begin{array}{l} y = m_1\ x + n_1 \\ y = m_2\ x + n_2 \end{array} \right\}$$

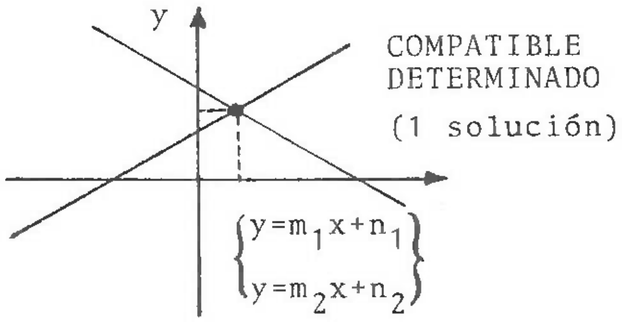
Como cada una de las ecuaciones representa una recta, las soluciones que nosotros buscamos han de ser puntos que pertenezcan, a la vez, a ambas rectas. Luego será el punto de intersección de ambas.

Ahora bien, dos rectas en un plano, o coinciden, o son paralelas o se cortan. Si coinciden la ecuación será la misma y por tanto $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$. La solución del sistema es la solución de una de las ecuaciones. O sea, todos los puntos de la recta son solución (indeterminado). Si las rectas son paralelas, pertenecen a la misma dirección. Provienen pues de la misma aplicación lineal, por tanto $m_1 = m_2$. (Condición de rectas paralelas: "misma pendiente"). No se cortan y por tanto el sistema no tiene solución (incompatible).

Si las rectas se cortan ($m_1 \neq m_2$), el punto de corte el la solución buscada y es única. El sistema es compatible y determinado.







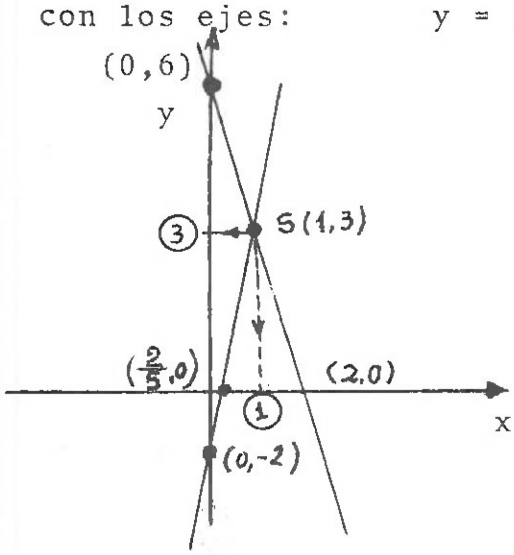
Si las rectas se dibujan sobre papel milimetrado y con cuidado podemos hallar las coordenadas del punto solución con bastante aproximación. Por ejemplo vamos a resolver el sistema $\begin{cases} y=5x-2 \\ y=-3x+6 \end{cases}$

Dibujaremos las rectas, hallando previamente los puntos de corte con los ejes: $y = 5x-2$

x	y
0	-2
$\frac{2}{5}$	0

$y=-3x+6$

x	y
0	6
2	0



Aproximadamente vemos que la solución es S (1,3).

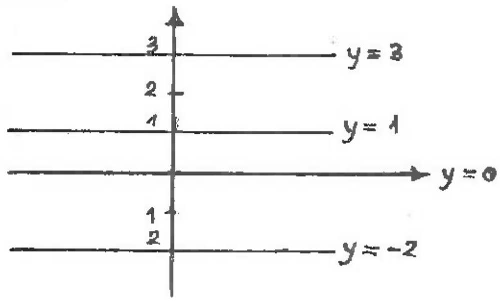
Si no se dispone de papel adecuado, este método unicamente sirve para darnos una idea del problema y habremos de recurrir a la sustitución, igualación, o reducción para obtener con precisión la solución pedida.

* <u>Funciones</u>. <u>Funciones ctes</u>. <u>Función inversa</u>.- Se puede definir una función como "toda aplicación entre dos conjuntos de números". Siendo así, todo lo anteriormente dicho sigue siendo válido cambiando la palabra aplicación (más general) por la de función (caso numérico). Según esto $y = 2x+3$ es una función afin de la función lineal $y = 2x$.

La palabra función indica dependencia. Dependencia existente entre x e y. Efectivamente los valores de <u>y</u> dependen o son función de los valores que hayamos dado a <u>x</u>.

<u>x</u> suele llamarse variable independiente y a
<u>y</u> variable dependiente.

Un caso interesante es el de la función llamada cte. . Así por ejemplo $\boxed{y = n}$. Sus gráficas son rectas paralelas al eje horizontal.



Así la función $y = 3$, para cualquier valor que demos a la <u>x</u> su <u>y</u> será 3. Por tanto los puntos de la recta serán (x,3), siendo <u>x</u> cualquier número racional.

El eje horizontal por tanto será la representación de la función $y = 0$.

Estas funciones constantes son aplicaciones que no contienen el punto (0,0) salvo la $y = 0$. No son ni inyectivas, ni suprayectivas ni biyectivas. Recuérdese que las aplicaciones lineales del tipo $y = mx$ eran biyectivas además de contener el (0,0).

Sabemos que una función es una aplicación. Esta, un caso particular de correspondencia. Dada una correspondencia ya dijimos lo que era su correspondencia INVERSA. Análogamente, dada una función definimos su función inversa. Si tenemos una función cuyos elementos son $(x_o\ y_o)$, (x_1,y_1), $(x_2\ y_2)$ ------ Su función inversa tendrá por elementos (y_o,x_o), (y_1,x_1), (y_2,x_2) (y_3,x_3) ------. Veamos sus ecuaciones y supongamos que la primera función es una lineal del tipo $\boxed{y = mx+n}$:

Para hallar los elementos del conjunto-función damos valores a x y obtenemos los de y. Para hallar los de la función inversa (que son los de la primera invertidos), damos valores a <u>y</u> y hallamos los de <u>x</u>. Por ello es mejor tener despejada la <u>x</u> :

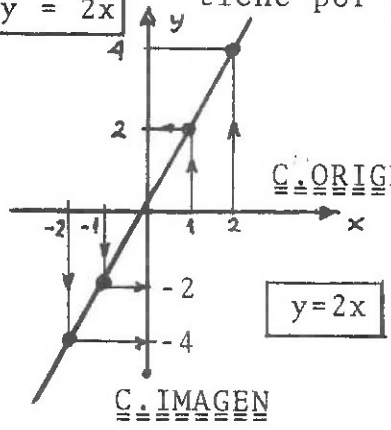
$$\boxed{x = \frac{1}{m} \cdot y - \frac{n}{m}}$$

Esta será la ecuación de la función inversa. Diremos en este caso que "x es función de y".

Los elementos de la primera función son del tipo (x,y). Los de la inversa (y,x).

Veamos un ejemplo: Dada la función $y = 2x - 5$, su función inversa será $x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$, obtenida despejando la x.

En los diagramas cartesianos, tomando como conjunto origen el eje vertical y como conjunto imagen el horizontal, la misma recta de una función sirve para la función inversa. Así por ejemplo la función $\boxed{y = 2x}$ tiene por gráfica la siguiente:

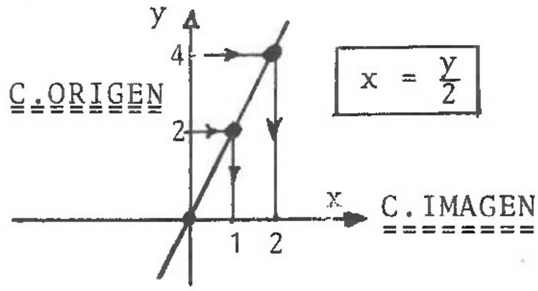


Los elementos del conjunto son:

{---(-2,-4), (-1,-2), (0,0), (1,2), (2,4) ------}

La función inversa tendrá por ecuación $x = \frac{y}{2}$. Sus elementos serán:

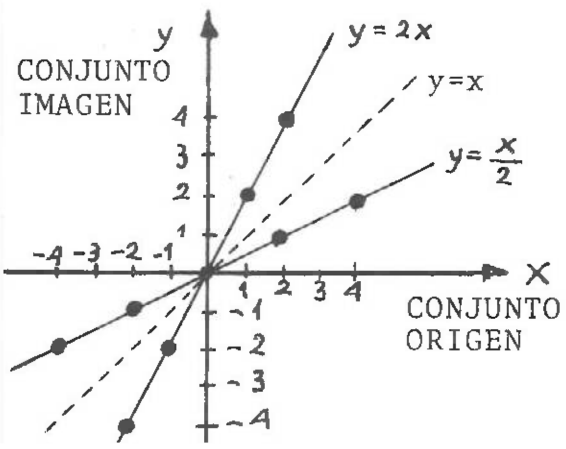
{---(-4,-2), (-2,-1), (0,0), (2,1), (4,2) ---} y su gráfico según lo dicho sería el siguiente:



Hay que tener cuidado, pues aunque la recta es la misma, en el primer caso los elementos son (x,y) y en el segundo (y,x)'

Lo que puede hacer para seguir conservando el eje horizontal como conjunto origen, y el vertical como imagen, es cambiar x por y e y por x, una vez hallada la función inversa.

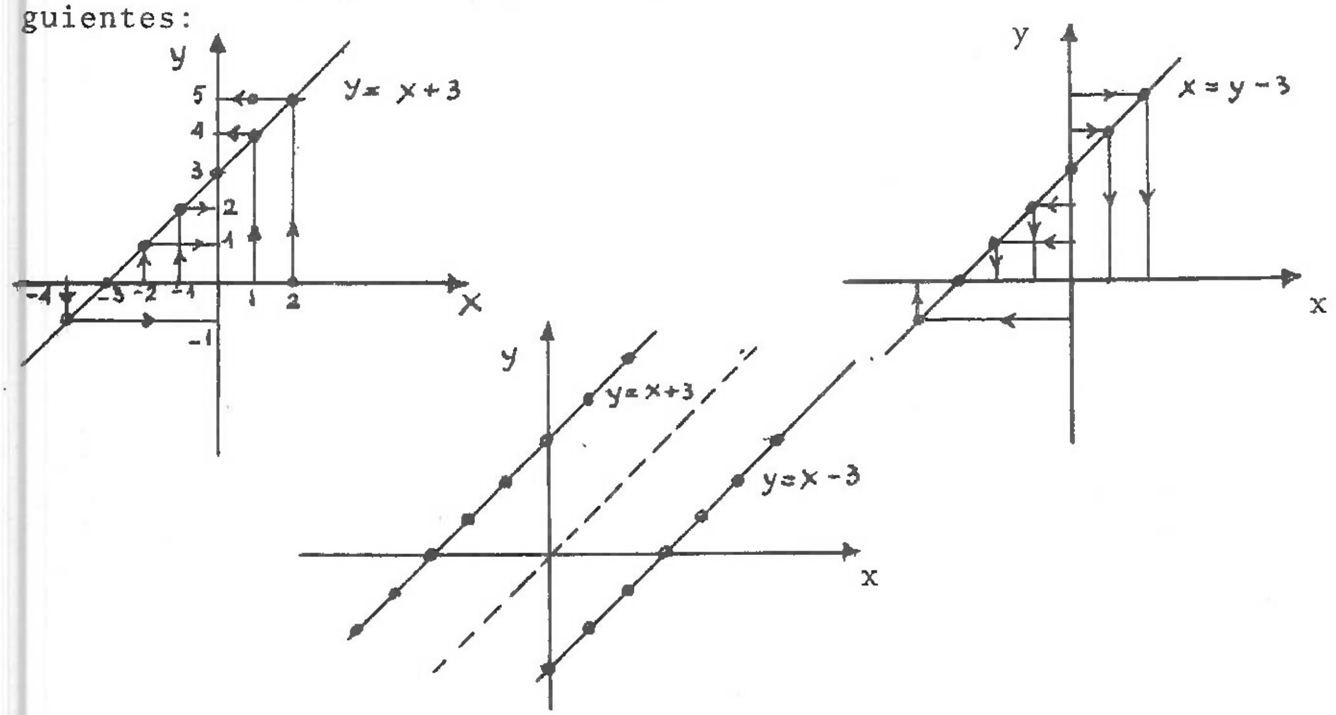
Por ejemplo: $\boxed{y = 2x}$ es la función cuya inversa será: $\boxed{x = \frac{y}{2}}$ Haciendo el cambio queda: $\boxed{y = \frac{x}{2}}$. Los pares ahora vuelven a ser (x,y) (Eje horizontal "origen", eje vertical "imagen") pero están, los elementos del par, invertidos respecto a los de $\boxed{y = 2x}$



y=2x	y=x/2
⋮	⋮
(-2,-4)	(-4,-2)
(-1,-2)	(-2,-1)
(0,0)	(0,0)
(1,2)	(2,1)
(2,4)	(4,2)
⋮	⋮

En este método el conjunto origen e imagen permanecen inalterables pero la recta cambia. Aunque no nos metemos en demostrarlo, obsérvese que el gráfico de una función y el de su inversa son simé tricos respecto de la bisectriz del 1er cuadrante, (de ecuación $y=x$).

Veamos ahora un ejemplo con una función afin: $\boxed{y = x + 3}$. Su inversa será: $\boxed{x = y - 3}$ Los gráficos pueden ser de los modos siguientes:



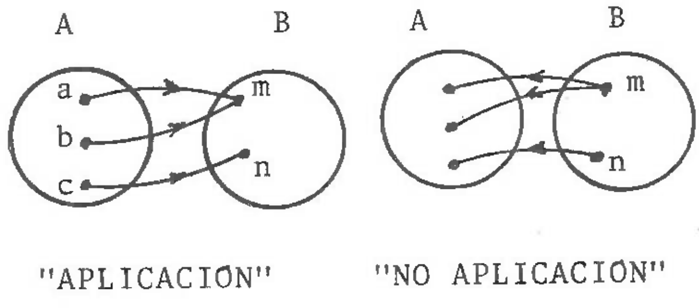
En lo referente a los elementos de ambas funciones veamos que:

$y = x + 3$
(-4, -1)
(-3, 0)
(-2, 1)
(-1, 2)
(0, 3)
(1, 4)
(2, 5)
⋮

$y = x - 3$
(-1, -4)
(o, -3)
(1, -2)
(2, -1)
(3, 0)
(4, 1)
(5, 2)
⋮

Hay que hacer una importante salvedad respecto a las funciones inversas:

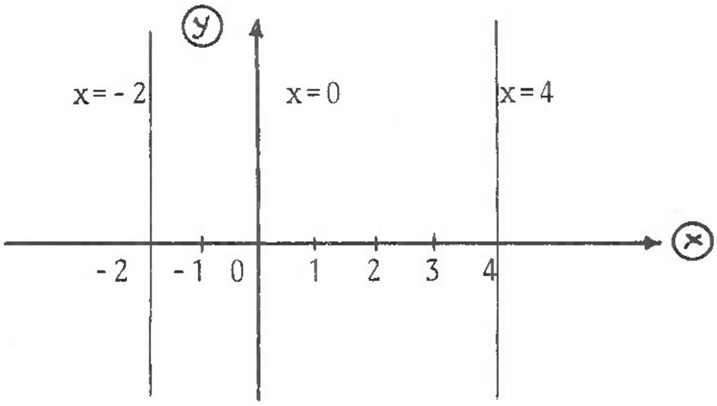
"<u>Si una aplicación no es biyectiva, su inversa no es aplicación</u>". Así p.e.



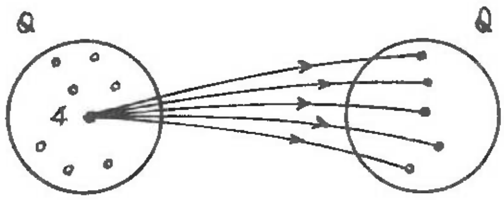
"APLICACION" "NO APLICACION"

Por lo tanto las funciones ctes. tal como $\boxed{y = n}$ no tendrán inversa.

Por último digamos que ecuaciones del tipo $\boxed{x = cte}$ representan rectas paralelas al eje vertical. Por ejemplo $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$, son las ecuaciones de las rectas:



obsérvese que no son aplicaciones estas rectas, pues cualquier elemento del conjunto origen (horizontal), salvo uno solo, se queda sin imagen. El gráfico de Venn para $\boxed{x = 4}$ sería del tipo:



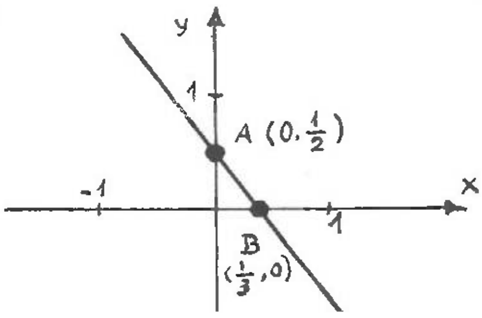
* Funciones explícitas e implícitas.- Las funciones lineales que hemos visto hasta ahora tienen la "y" sólo en un miembro. Se dice que la "y" está despejada, en función de "x". A este tipo de funciones se les denomina explícitas. Por ejemplo: $y=2x -3$; $y = \frac{x}{3} + 1$ ------

Pero aplicando simplemente propiedades de las igualdades, podemos transformar p.e. $\boxed{y = 2x -3}$ en $\boxed{y -2x = -3}$ o bien en $\boxed{y -2x +3 = 0}$ y en el fondo se trata de la misma función aunque puesta de otro modo: Se llaman funciones "implícitas" aquellas en que la "y" no está despejada. Por ejemplo: $3x +2y -1 = 0$

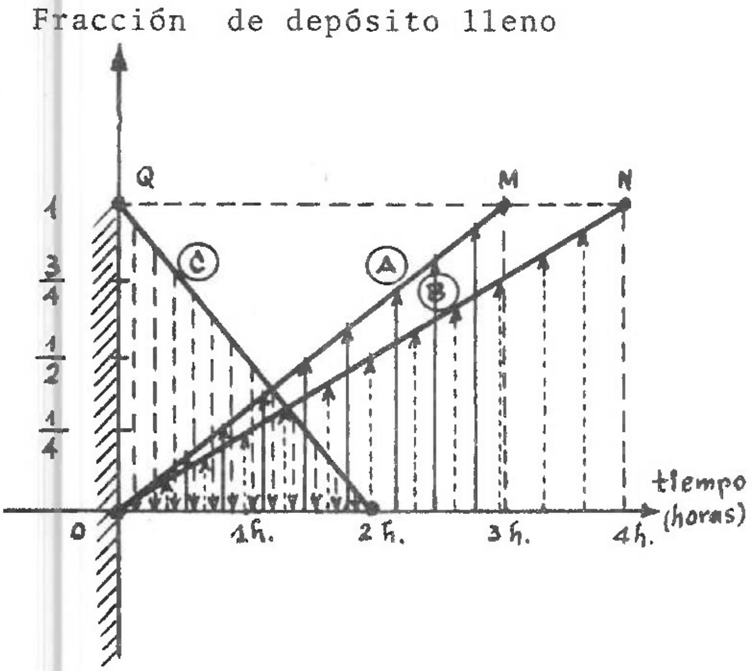
Una función en forma implícita será lineal si al despejar la y queda del tipo: $y = mx + n$. Para ello es necesario que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ no estén elevadas a ninguna potencia mayor que uno.

La función $3x + 2y -1 = 0$ es lineal pues al despejar la y queda: $y = - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2}$; $m = - \frac{3}{2}$ $n = \frac{1}{2}$. Su gráfica es pues una línea recta (aplicación afín). Para dibujarla basta hallar los cortes con los ejes: Para $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. y para $y = 0$, $x = \frac{1}{3}$.

La recta será:



* Aplicaciones lineales-afines y su uso: Problemas de grifos y de cinemática. El problema típico de grifos podemos enfocarlo desde un punto de vista gráfico aprovechando las aplicaciones lineales. Veamos un ejemplo: "Un grifo A llena un depósito en 3 horas. Otro grifo B lo llena en 4 horas. Un desague C, estando lleno el depósito, lo vacía en 2 horas. Funcionando simultáneamente A, B y C ¿cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito?"



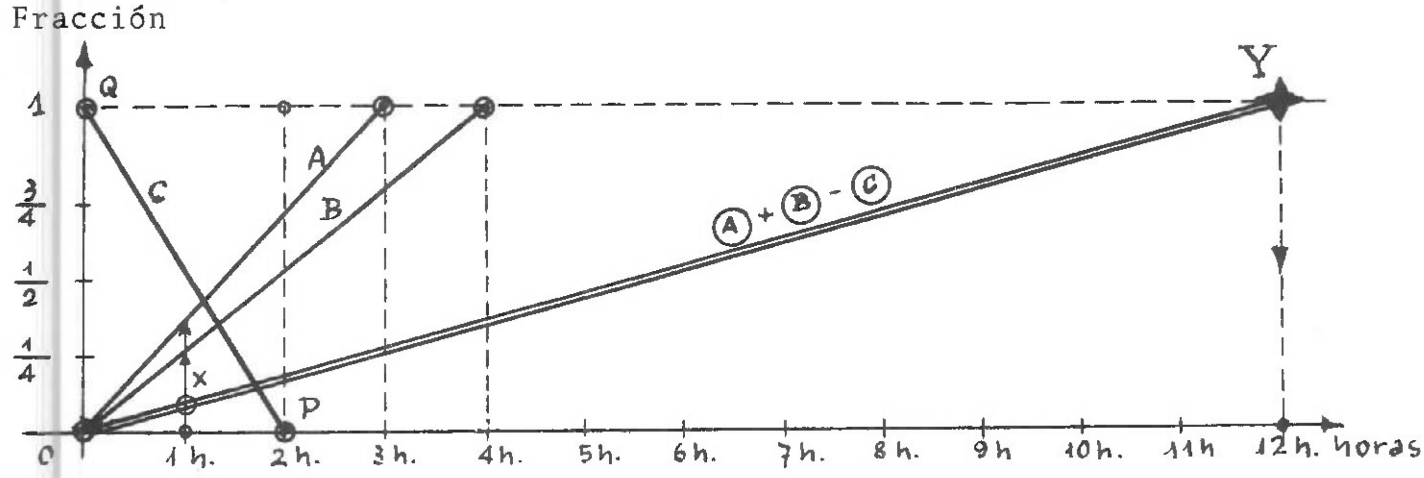
Se supone, lógicamente, que existe proporcionalidad entre los litros de agua y el tiempo empleado. (El grifo mana cantidades iguales en tiempos iguales). Así el depósito estará vacío al abrir el grifo A (punto 0). La cantidad de agua (flecha) irá creciendo linealmente con el tiempo según una función del tipo $\boxed{y = mx}$, siendo -y- los litros de agua, x el tiempo (p.e. en horas) y m el caudal (litros por hora). Así se obtiene el gráfico A de la figura. Se va ascendiendo desde 0 hasta M. Al cabo de 3 horas el depósito estará lleno completamente.

Actuando solo el grifo B, podemos razonar análogamente y obtendríamos la recta ON ; 0 al abrir el grifo, N al llenarse el depósito.

Si el depósito está lleno del todo y abrimos sólo el desagüe C, nos encontramos entonces en el punto Q del dibujo, la cantidad de agua irá descendiendo linealmente hasta llegar al cabo de 2 horas al punto P (depósito vacío).

No perdamos de vista que en realidad, más que aplicaciones, son partes de ellas. Las aplicaciones se representan por rectas y nosotros en el problema sólo utilizamos segmentos de rectas. Ello es debido a que físicamente el tiempo negativo no tiene sentido, por eso a la izquierda del eje vertical no hay gráfico. Por otro lado una vez lleno el depósito se acaba el problema, y por ello las rectas no prosiguen por encima de Q, M o N .

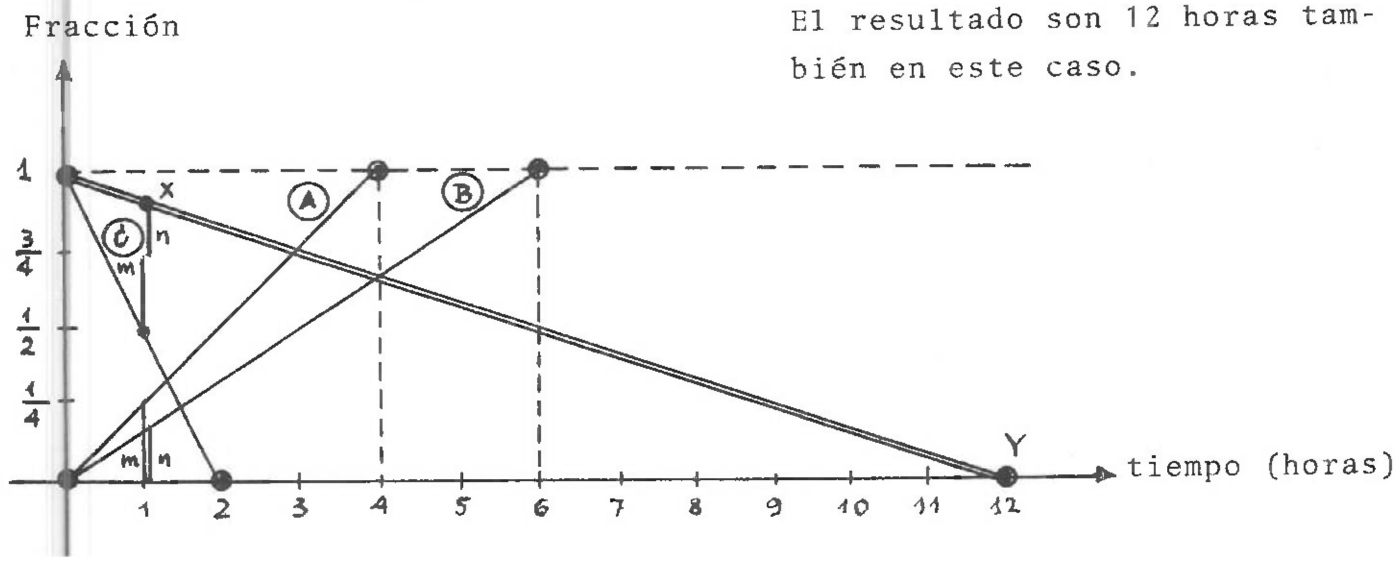
Hasta aquí hemos visto lo que sucede actuando aisladamente A, B, o C. Pero en el problema nos dicen que funcionan simultáneamente. Por tanto, en cualquier momento en el depósito habrá el agua manada por A, más la manada por B, menos la vaciada por C. Analíticamente si $y_1 = m_1.x_1$ es la función de A, $y_2 = m_2.x_2$ la de B y $y_3 = m_3.x_3$ la de C, la total será $y_1 + y_2 - y_3 = m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_3 x_3$ que será también f. lineal (suma de funciones lineales)



Gráficamente basta coger un tiempo cualquiera (p.e. 1 hora) y sumar las ordenadas correspondientes en este punto de A y B restándoles la ordenada de C, obteniendo así un punto x. Uniendo éste con 0 obtenemos una recta 0x (gráfica de $y_1 + y_2 - y_3$) la cual corta a la recta que pasa por Q, M y N en el punto Y. En este momento el depósito estará lleno. La abcisa de Y nos da el tiempo buscado: 12 horas. La precisión de este procedimiento gráfico depende del tipo de papel que dispongamos. Para hallar la cantidad de agua que existe en un momento dado, basta hallar la ordenada de la recta OY en el momento en cuestión.

Si al sumar las ordenadas de A y B y restar la de C saliera negativo, es que desagua C más que lo que llenan A y B. Para que pudiera tener sentido el problema habría que partir del depósito lleno y ver cuanto tiempo tardará en vaciarse. Veamos un ejemplo: "A llena un depósito en 4 horas; B lo llena en 6 horas; C lo vacía en 2 horas. ¿Cuánto tarda en vaciarse?".

El resultado son 12 horas también en este caso.



Analíticamente podemos comprobar los resultados gráficos. Mediante el procedimiento de reducción a la unidad:

1) En una hora entre A,B, y C <u>llenan</u>: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$

Luego en 12 h. llenan el depósito.

2) En una hora entre A,B y C <u>vacían</u>: $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} =$

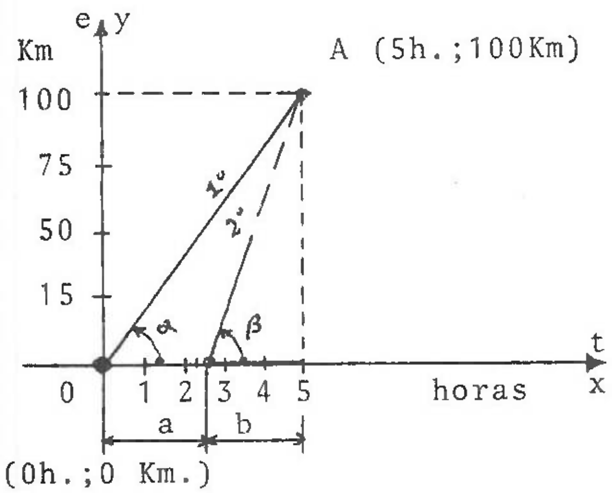
$= \frac{6}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6-3-2}{12} = \frac{1}{12}$

Luego en 12 horas se vaciará del todo el depósito.

Veamos ahora unos ejemplos de cinemática (Parte de la Física que estudia los movimientos):

"Un ciclista ha de recorrer un trayecto de 100 Km. y marcha a una velocidad de $20 \frac{Km}{h}$. ¿Cuánto tiempo después debe salir otro, para que recorriendo el mismo trayecto a la velocidad de $30 \frac{Km}{h}$ lleguen juntos?

Sabemos por Física que velocidad = $\frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$ o bien $e = v.t.$ Como $v = 20 \frac{Km}{h}$; $e = 20.t$. Si llamamos al espacio "y" y al tiempo "x", tendríamos $y = 20.x$. Una aplicación lineal.



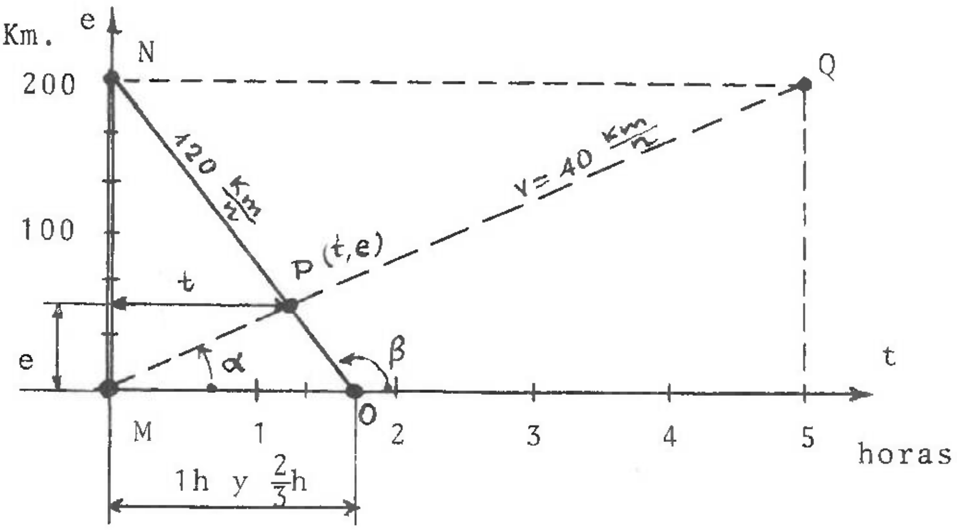
Los espacios y los tiempos son proporcionales, si la velocidad es constante. Ella es la cte. de proporcionalidad (pendiente de la recta).

En el dibujo el segmento $\overline{0A}$ nos marca en cada uno de sus puntos la posición y el tiempo del primer ciclista. El otro ciclista debe llegar a A a la vez que el primero. Como su velocidad es mayor, también lo es su pendiente. Es decir que $\hat{\beta} > \hat{\alpha}$. Como la pendiente es la tg. del ángulo que forma la recta con el eje horizontal, tenemos: $tg\alpha = \frac{100}{5} = 20 \frac{Km}{h}$ $tg\beta = \frac{100}{b} = 30 \frac{Km}{h}$.

Luego $b = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} = \frac{9+1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$. (Tres horas y $\frac{1}{3}$ de hora).

O sea 3 h. 20 m. le cuesta recorrer los 100 Km al segundo ciclista. Luego debe salir 5h. - 3h. 20m. = 1 h. 40m. más tarde que el primero para llegar a la vez.

Veamos otro ejemplo: "Dos coches salen simultáneamente de las ciudades M y N situadas a 200 Km. de distancia. Uno lleva una velocidad de 100 $\frac{Km}{h}$ y el otro de 40 $\frac{Km}{h}$ ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán y qué espacio habrán recorrido cada uno de ellos?"



Lo resolveremos gráficamente. Suponemos que el que sale de M lleva la velocidad de 40 $\frac{Km}{h}$. Al cabo de $\frac{200}{40} = 5$ horas llegaría a N ; en el gráfico ese momento viene representado por el punto Q.

El otro vehículo sale de N y llegará a M al cabo de $\frac{200}{120} = \frac{5}{3}$ h. $= \frac{3 + 2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ hora. Es decir 1h. 40m. después de salir de N. En el gráfico es el punto 0. De este modo ya tenemos los segmentos de recta $\overline{MQ}$ y $\overline{NO}$. Se cortan en P que es el punto representativo del momento de encuentro de los dos coches. La abcisa de P es el tiempo que tardan en encontrarse. La ordenada de P es el espacio recorrido por el de 40 $\frac{Km}{h}$; 100 - e, el espacio del de 120 $\frac{Km}{h}$ de velocidad. En el dibujo, al no estar hecho con mucha precisión sólo observamos que e está comprendido entre 35 y 55 Km y t entre la hora y la hora y 20 minutos.

Veamos con más precisión, mediante un sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} e = 40.t & \text{para el lento} \\ 200-e = 120.t & \text{" " rápido} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} e & \text{espacio recorrido por el lento} \\ t & \text{tiempo que tardan en juntarse} \end{array}$$

Despejando t en la primera y sustituyendo en la segunda, $t = \frac{e}{40}$;

$200 - e = 120.\frac{e}{40}$; $200 - e = 3e$; $200 = 4e$; $e = \frac{200}{4} = \underline{\underline{50 \text{ Km}}}$

y $t = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} = \frac{4+1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{1 \text{ h. } 15\text{m}}}$.

El método gráfico aunque de menor precisión en general, nos da una visión que no la da el método analítico. Así al observar como desciende la recta $\overline{NO}$, sus ordenadas cada vez menores nos indican como el coche más veloz se va acercando a M (origen de referencia). El crecer de las ordenadas de $\overline{MQ}$, nos marcan el alejarse de M del coche lento. Además las velocidades, como siempre, vienen dadas por: $\text{tg}\,\alpha = 40$; $\text{tg}\,\beta = 120$.

C A P Í T U L O IV

IV

* Inecuaciones lineales con una incógnita. Resolución en el conjunto Q. Representación sobre la recta.-

Recordemos que las igualdades se dividen en dos grupos: identidades y ecuaciones. Una "identidad" es aquella igualdad que se verifica para cualquier valor que le demos a las letras o variables que intervienen. Por ejemplo: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2-b^2$; $2a - a = a$; $a.a = a^2$ son casos de identidades.

"Ecuaciones" son igualdades que sólo se verifican para ciertos (no todos) valores que demos a las variables. A estas variables se denominan incógnitas. Resolver la ecuación es hallar estos "ciertos" valores. Ejemplo de ecuaciones son: $3x - 8 = 4$; $x^2-9 = 0$; $2x-y = 1$.

La primera es una ecuación lineal con una incógnita. Su solución es: $3x = 12$; $x = \frac{12}{3}$; $x = 4$. Sólo para $x = 4$ se cumple la igualdad. La ecuación $x^2-9 = 0$ es una ecuación con una incógnita, pero de segundo grado, (pues la x está elevada al cuadrado). Tiene dos soluciones $x = 3$ y $x = -3$ pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$. La ecuación $2x-y = 1$ se puede poner: $y = 2x-1$. Se trata pues de una ecuación lineal con dos incógnitas $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Su solución son todos los pares (x, y) que caen encima de la recta (gráfica de la ecuación).

Pues bien "una INECUACION es la expresión que se obtiene al sustituir en una ecuación el signo = por un signo de desigualdad $>$ o $<$ (mayor o menor)". Resolver una inecuación consiste en hallar los valores de las incógnitas que verifican la desigualdad.

Recordemos que a los dos miembros de una desigualdad puede sumársele o restársele un mismo número conservando la desigualdad su sentido. Lo mismo ocurre si se multiplica o divide por un número positivo. Sin embargo la desigualdad cambia de sentido al multiplicar o dividir por un número NEGATIVO. Comprobemos lo dicho:

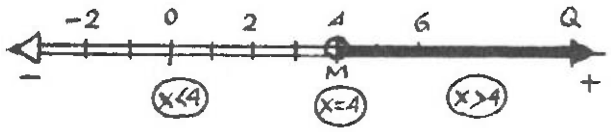
Tenemos $\boxed{5 > 3}$.
p.e.

Sumando a los dos miembros	2 :	$5+2 > 3+2$;	$\boxed{7 > 5}$	cierto
Restando " " "	6 :	$5-6 > 3-6$;	$\boxed{-1 > -3}$	"
Multiplicando " "	3 :	$5x3 > 3x3$;	$\boxed{15 > 9}$	"
Dividiendo " "	2 :	$\frac{5}{2} > \frac{3}{2}$;		"
Multiplicando " "	-4 :	$5.(-4) < 3.(-4)$;	$\boxed{-20 < -12}$	"

Vemos que al multiplicar por -4, ha cambiado de signo la desigualdad pues "de dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto".

Todas estas propiedades de las desigualdades hemos de tenerlas en cuenta al resolver las INECUACIONES.

Empezaremos con el caso de una inecuación lineal con una incógnita. Por ejemplo si en la ecuación $3x=12$, cambiamos el "=" por un ">" tendremos $3x>12$, que es una inecuación lineal con una incógnita. Su solución es el conjunto de valores de x que la cumplen.



(Lo mismo que las ecuaciones con 1 incógnita se resuelven, por ahora, en el conjunto Q de los números racionales, en este mismo conjunto buscaremos la solución de las inecuaciones con 1 incógnita).

La solución de la ecuación de la que deriva, $3x=12$, es $x=4$. En el gráfico el punto M de la recta. De todos los puntos de la recta solamente el que tiene de abcisa 4 (M) cumple.

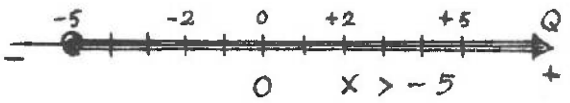
Ahora bien si partimos de $3x>12$ y dividimos por 3 los dos miembros nos queda $x>4$. Y esta condición la cumplen todos los puntos situados a la derecha del 4. La solución es pues una semirrecta.

Si en vez de cambiar el "=" por ">" lo cambiamos por "<", tendremos la inecuación $3x<12$. Dividiendo por 3, $x<4$. Su solución es la semirrecta opuesta a la anterior.

Concretando: Dada una ecuación lineal con 1 incógnita $\boxed{3x=12}$, una vez resuelta, encontramos su única solución cuya imagen es un punto de la recta Q. (Este punto cumple $\boxed{x = 4}$). Este punto divide a la recta en dos semirrectas. La de la derecha tiene la propiedad de que todos sus puntos cumplen $\boxed{x>4}$, y son por tanto la solución de la inecuación: $\boxed{3x>12}$. La de la izquierda, cuyos puntos cumplen $\boxed{x<4}$, es la solución de la inecuación: $\boxed{3x<12}$.

Por tanto, entre la solución de la ecuación y las de las inecuaciones derivadas de ella se cubre completamente el campo Q.

Para resolver una inecuación de este tipo, podemos resolver primero la ecuación de la cual proviene y dibujar el punto. Después elegir una u otra de las dos semirrectas que éste determina. Por ejemplo, para resolver: $2x+10>0$ podemos plantearnos $2x+10 = 0$; resolviendo la ecuación $2x=-10$; $\boxed{x = -5}$. Ahora,



para saber cual de las dos semirrectas es la buscada basta elegir un punto por ejemplo el 0 y ver si satisface la inecuación: $2.0+10>0$, $10>0$. Vemos que si cumple. Luego está en la semirrecta solución. (El origen de la misma no cumple).

También podemos ir aplicando las propiedades de las desigualdades hasta lograr despejar la x . O sea: $2x+10>0$. Restándoles a los dos miembros 10, $2x+10-10>-10$; $2x>-10$. Dividiendo por 2, $\frac{2x}{2}>\frac{-10}{2}$, $\boxed{x>-5}$ (luego es la semirrecta de la derecha).

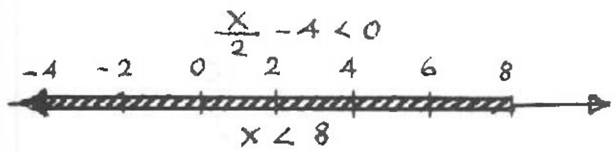
En ocasiones se plantean inecuaciones del tipo $\geqq$ o $\leqq$. En el fondo no hay sino añadir a la semirrecta solución de $>$ o $<$ el punto solución de la $=$.

Así por ejemplo la solución de $2x+10>0$ es 

Sin embargo " " " $2x+10\geqq 0$ será 

o sea la anterior añadiéndole $x=-5$.

Otro caso: Resolver; $\boxed{\frac{x}{2}-4<0}$, sumando 4 a ambos miembros, $\frac{x}{2}<4$. Multiplicando por 2, $\boxed{x<8}$. Luego la solución será:

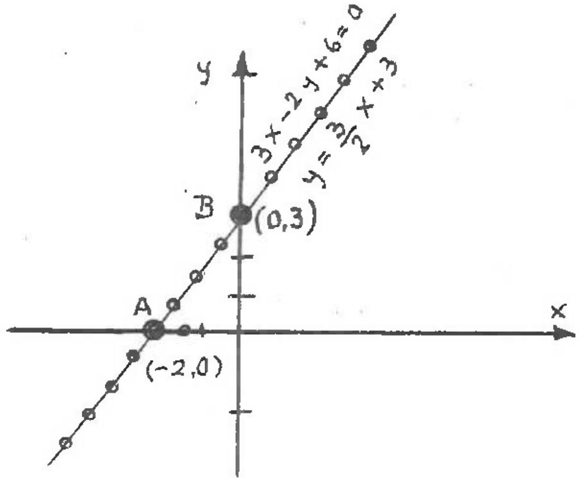


También podíamos haber resuelto primero la ecuación origen: $\frac{x}{2}-4=0$ $\frac{x}{2}=4$, $\boxed{x=8}$ y luego comprobar con un punto, p.e. el 0 : $\frac{0}{2}-4<0$, $-4<0$. Como cumple, dicho punto está en la semirrecta solución. Si no cumpliera la semirrecta solución es la que no lo contiene.

* Inecuación lineal con dos incógnitas. Resolución en el conjunto Q x Q .-

Análogamente a como la inecuación lineal con una incógnita procedía de una ecuación lineal con 1 incógnita, la inecuación lineal con dos incógnitas proviene de la ecuación lineal con dos incógnitas. No hay más que cambiar el signo " = " por "$>$" o "$<$" .

La solución de una ecuación con dos incógnitas x e y es un subconjunto de Q x Q . Lo mismo sucede con las inecuaciones.

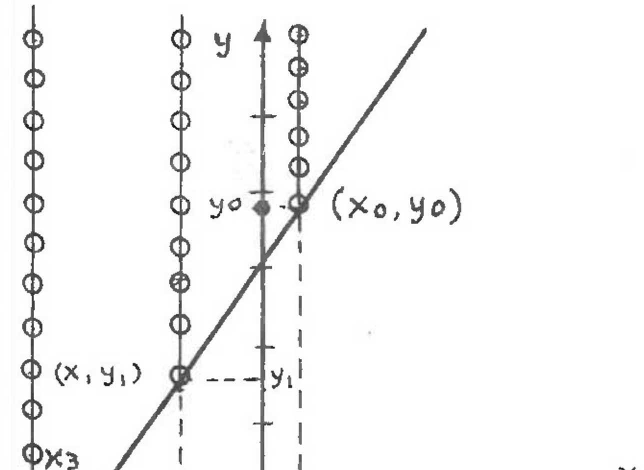


Partamos p.e. de la ecuación $3x-2y+6 = 0$ y dibujemos su solución (una recta). Para ello hallemos los puntos de corte con los ejes. Para $x = 0$;

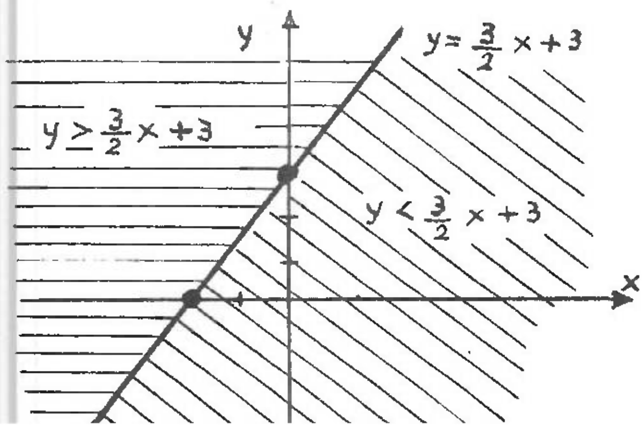
$-2y+6 = 0$, $y = \frac{6}{2} = 3$, B $(0,3)$.

Para $y = 0$; $3x+6 = 0$, $x=-2$, A $(-2,0)$.

Todos los puntos de esta recta satisfacen la ecuación propuesta. Esta recta me divide el plano (Q x Q) en dos semiplanos. Vamos a ver como cada uno de ellos es solución de cada una de las inecuaciones que resultan cambiando el signo de igualdad por el de desigualdad en la ecuación dada. Para mayor claridad pondremos en forma explícita la y . Entonces la ecuación, $y = \frac{3}{2} x + 3$. Si cambiamos $=$ por $>$ tendremos $y > \frac{3}{2} x + 3$.



Para un valor x_o cualquiera de x, $y > \frac{3}{2} x_o + 3$, luego todos los puntos situados en la vertical de x_o y por encima de (x_o, y_o) verifican la inecuación. Para otro valor x_1, sucede lo mismo. Los puntos que satisfacen $y > \frac{3}{2} x_1 + 3$, son los situados en la vertical de x_1 y por encima de (x_1, y_1). Y así sucesivamente. Como a x podemos darle cada uno de los valores del conjunto Q horizontal (eje de las x), la solución de la inecuación $\boxed{y > \frac{3}{2} x + 3}$ será el semiplano situado por encima de la recta.



Cambiando el "igual" por "menor" y razonando análogamente veríamos como el semiplano inferior es la solución de la inecuación

$$\boxed{y < \frac{3}{2} x + 3}$$

Obsérvese que con la solución de la ecuación $3x-2y+6= 0$ y las de $3x-2y+6 > 0$ y $3x-2y+6 < 0$

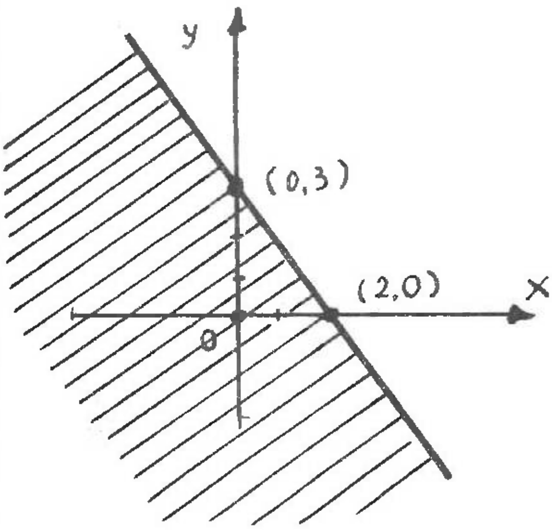
Para resolver pues una inecuación de este tipo el camino a seguir será: (1) Dibujar la recta representativa de la ecuación. (2) Elegir un punto arbitrariamente y comprobar si cumple o no la inecuación dada. Si la verifica, el semiplano solución es el que contiene al punto. Si no verifican, las coordenadas del punto, la inecuación, dicho punto no está en el semiplano buscado sino en el contrario. (3) Rayar el semiplano solución.

Se recomienda probar el punto (0,0) salvo si la recta pasa por dicho punto. Las operaciones se simplifican mucho.

Ejemplo: Resolver $\boxed{3x+2y < 6}$

(1) $3x+2y = 6$. Para $x = 0$, $y = 3$. Para $y = 0$, $x = 2$

x	y
0	3
2	0



(2) Tomamos el punto (0,0) y comprobamos en la inecuación,

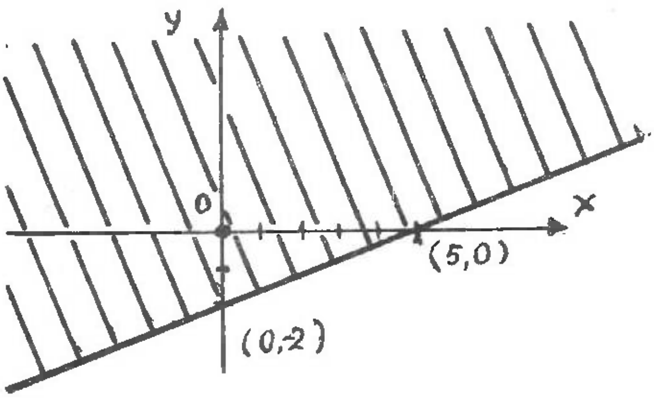
$0 + 0 < 6$, $0 < 6$; es cierto luego el (0,0) cumple la inecuación. El semiplano que contiene a (0,0) será la solución buscada. (La recta no cumple).

(3) Lo rayamos tal como se ve en el dibujo. A la recta que limita el semiplano se denomina "borde" o "frontera".

Otro ejemplo: Resolver $\boxed{2x-5y \leq 10}$. Se diferencia del caso anterior en que los puntos de la recta frontera también son solución de la inecuación.

(1) $2x-5y = 10$. Para $x = 0$, $y = -2$. Para $y = 0$, $x = 5$

x	y
0	-2
5	0

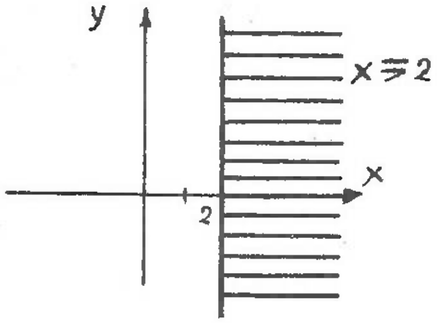


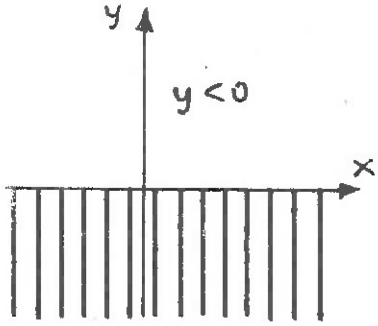
(2) Cogemos el punto (0,0) y comprobamos sus coordenadas en la inecuación,

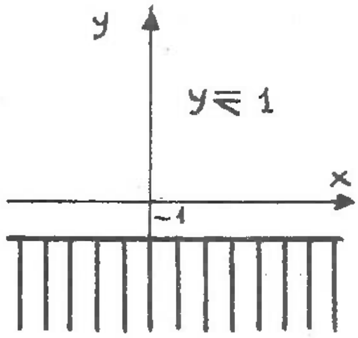
$0 - 0 \leq 10$, $0 \leq 0$ Cierto.

Luego está en el semiplano solución.

Los puntos de la recta cumplen también. Como casos particulares tenemos inecuaciones del tipo $x \geq 2$, $y < 0$, $x \leq 1$, etc. Sus soluciones serán del tipo:







Recordar que en el conjunto $Q \times Q$, $x = 2$, $y = 0$, $y = -1$ son RECTAS.

* <u>Sistemas de inecuaciones lineales.</u> <u>En el conjunto Q y en el QxQ.-</u>

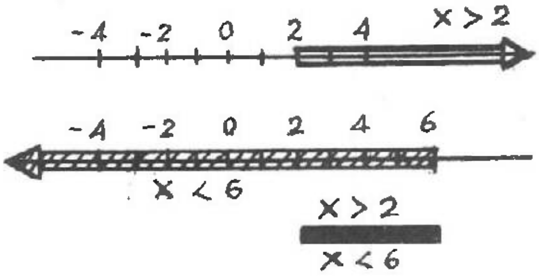
Análogamente al caso de sistemas de ecuaciones, resolver un sistema de inecuaciones es hallar el conjunto de valores de las incógnitas que verifican simultáneamente las mismas.

Veamos primero un sistema en el conjunto Q : Resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 4 > 0 \\ x - 6 < 0 \end{array} \right\}$

Resolvemos por separado cada una de ellas. Después hallamos la intersección de los conjuntos soluciones parciales.

$2x - 4 > 0$, $2x > 4$, $\boxed{x > 2}$

$x - 6 < 0$, $x < 6$, $\boxed{x < 6}$



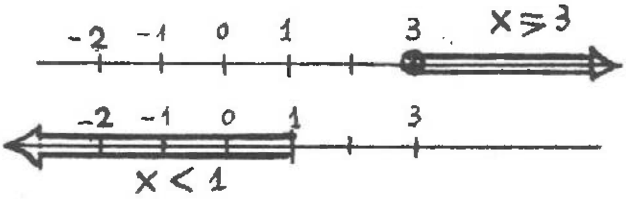
Por un lado tenemos el conjunto de valores de x que cumplen $x > 2$ (es una semirrecta). Por otro el conjunto de los que cumplen $x < 6$ (otra semirrecta). La intersección de ambos conjuntos es el segmento de la figura. (Todos aquellos racionales mayores que 2 y menores que 6)

Se suele indicar así: $6 > x > 2$

Otro ejemplo: Resolver: $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 6 \geqslant 0 \\ x - 1 < 0 \end{array} \right\}$

$2x - 6 \geq 0$, $2x \geq 6$, $\boxed{x \geq 3}$

$x - 1 < 0$, $x < 1$, $\boxed{x < 1}$

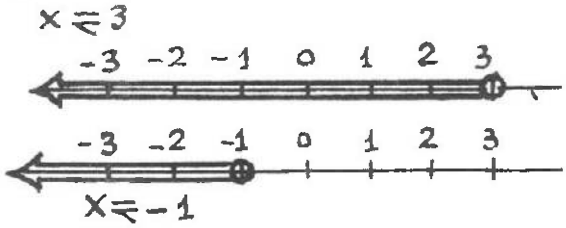


La intersección de los dos conjuntos es el conjunto ∅ (vacío). Luego el sistema no tiene solución.

Otro ejemplo: Resolver $\begin{cases} 3x - 9 \leq 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

$3x - 9 \leq 0$, $3x \leq 9$, $\boxed{x \leq 3}$

$x + 1 \leq 0$, $x \leq -1$, $\boxed{x \leq -1}$



La solución en este caso es una semirrecta.

La solución de los sistemas de inecuaciones en el conjunto Q reciben el nombre de "intérvalos" (conjunto de números comprendidos entre dos). Cuando uno de los extremos es el ∞ se llaman intérvalos infinitos.

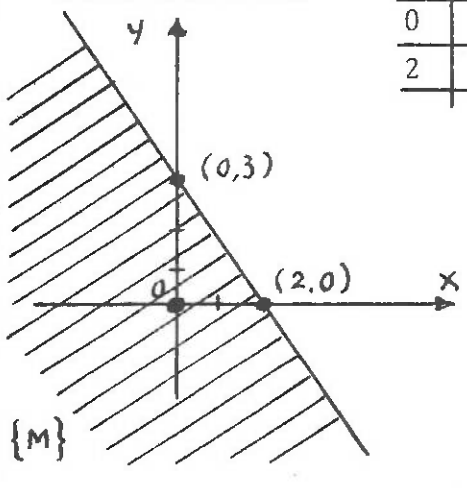
Pueden plantearse sistemas con más de dos ecuaciones. Se resuelven análogamente.

Vamos a ver ahora sistemas de inecuaciones lineales con 2 incógnitas. Se resuelve cada inecuación por separado y luego se halla la intersección de los conjuntos soluciones parciales.

Ejemplo: Resolver $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 6 \\ -2x + 4y \leq -8 \end{array}\right\}$ (1) Hallamos la solución de cada inecuación y rayamos los semiplanos.

$\boxed{3x + 2y \leq 6}$

x	y
0	3
2	0



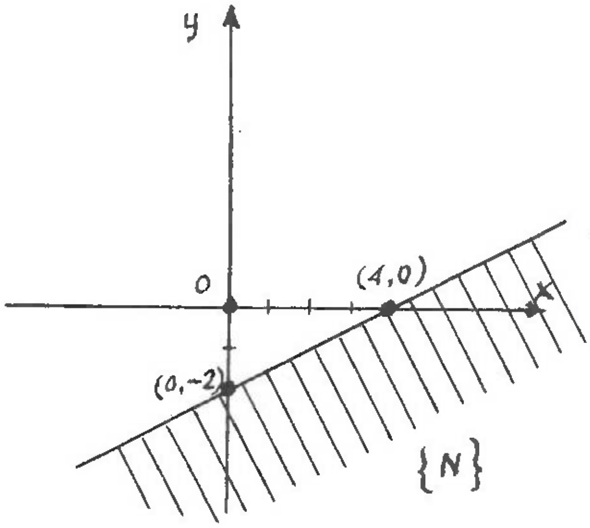
Tomando el punto (0,0) y comprobándolo: $0 + 0 \leq 6$ cumple, luego pertenece al semiplano solución

$\boxed{-2x + 4y \leq -8}$

x	y
0	-2
4	0

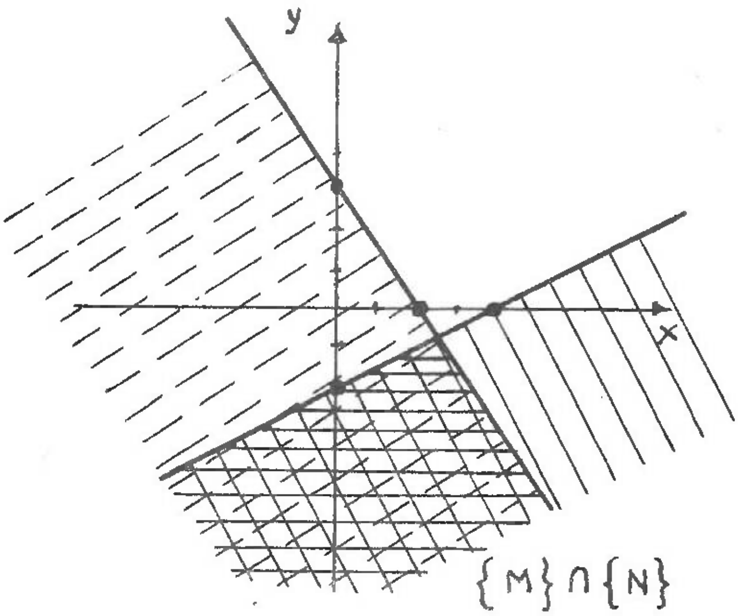
Tomando también el punto (0,0) para comprobar:

$0 + 0 \leq -8$ Es falso.



Luego este punto no pertenece al semiplano solución.

(2) Ahora se halla la intersección de los semiplanos; (si los semiplanos no se solapan la solución será $\emptyset$). Para ello se dibujan juntos y la zona del plano donde haya rayados de los 2 tipos es la solución del sistema. En este caso las fronteras quedan incluidas por estar el " = " en ambas inecuaciones.



Eligiendo convenientemente las inecuaciones se pueden obtener todo tipo de figuras planas.

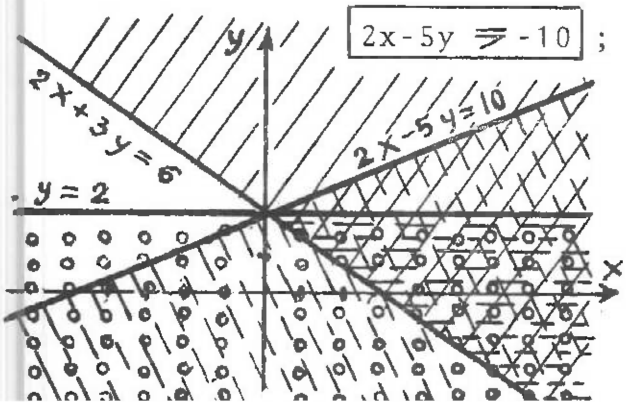
Si en vez de dos inecuaciones hubiera más, se procede de modo análogo. Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y \geq 6 \\ 2x-5y \geq 10 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

$\boxed{2x+3y \geq 6}$; $2x+3y = 6$;

x	y
0	2
3	0

; Tomo (0,0) y compruebo $0+0 \geq 6$ No cumple.



$\boxed{2x-5y \geq -10}$; $2x-5y = -10$;

x	y
0	2
-5	0

; Tomando (0,0) se ve: $0 - 0 \geq -10$ Si cumple.

$\boxed{y \leq 2}$; $y = 2$;

La solución es el ángulo que tiene los tres rayados. Incluidos los lados ya que las inecuaciones tienen el signo " = " .

C A P Í T U L O   V

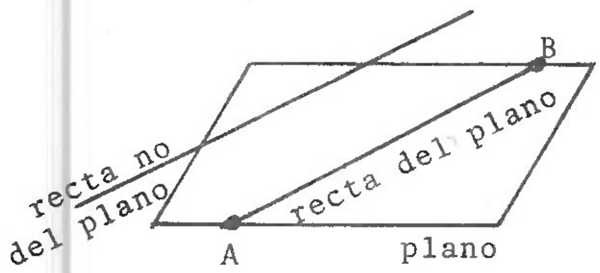
V.- PREAMBULO:

* El plano como conjunto de puntos. Recta. Semiplano.-

Análogamente a como la Matemática moderna gira alrededor del concepto de conjunto, el cual no definimos aprovechando la idea intuitiva que todos teníamos de él; asi mismo toda la Geometría que estudiaremos en este curso se mueve entorno al concepto de punto. El punto es el elemento que forma los planos, rectas etc. Sin embargo hoy día al abordar la tarea geométrica se abandona el método axiomático y se sustituye en parte por los conceptos intuitivos, fáciles de visualizar físicamente, y así las definiciones de plano: "conjunto de puntos" y recta: "subconjunto del plano", de por si incompletas quedan aclaradas por la idea que sobre superficies planas todo el mundo tiene, y lo mismo podríamos decir sobre la linea recta.

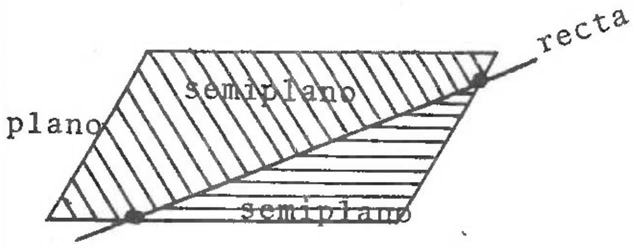
La metodología más eficaz parece ser la de insistir a los alumnos sobre la existencia en el mundo físico de superficies planas (mesas, suelos, paredes...) y líneas rectas (vías de tren, aristas de cuerpos...). Una vez familiarizados con ellos, el "aceptar" que estos conjuntos están formados por infinitos elementos a los que llamaremos puntos, es muy sencillo. En realidad esta metodología pretende desarrollar la visión espacial del niño. De hecho se prefiere que el niño "vea" que un cuerpo está limitado por subconjuntos del plano (caras), y que la intersección de estas caras son las aristas, que el "captar" el punto como elemento constitutivo de las mismas.

Por tanto el punto no lo definimos. El plano lo damos como "conjunto de puntos" (la superficie de una mesa ilimitada por todos sus lados), y la recta como "subconjunto del plano". (La doblez de una hoja de papel, considerada sin fin).



Veamos ahora como se representan estas figuras: El plano, por ser infinito, no puede representarse exactamente. Lo que se hace es dibujar un subconjunto o parte del mismo mediante un paralelógramo. Cuando queramos dibujar figuras en un plano, el papel o la pizarra hacen la vez del paralelógramo. Con la recta sucede lo mismo. No se puede dibujar por entero. Sólo se dibuja una parte finita de ella (segmento). Para indicar que una recta está contenida en un plano basta indicar que dos de sus puntos pertenecen a él. Entonces se marcan fuerte estos dos puntos (p.e. tal como se ve en la figura). Si el plano es la pizarra o el papel y no está el paralelógramo toda recta dibujada estará contenida en el plano. (En realidad el paralelógramo se utiliza para dibujos en el espacio).

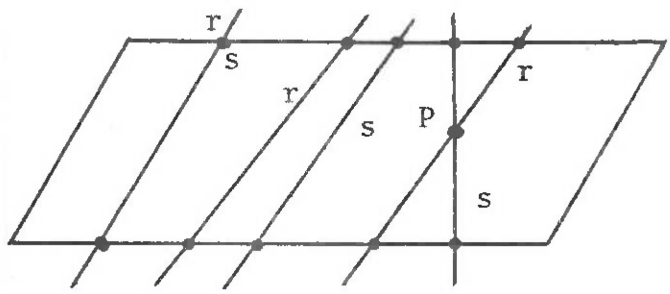
Toda recta contenida en un plano lo divide en dos subconjuntos. A cada uno de ellos se le denomina: semiplano. A la recta en cuestión se le llama frontera o borde del semiplano.



* Dirección. Semirrecta. Segmento.- Dadas dos rectas contenidas en un plano, las posiciones relativas que pueden tener son:

a) que coincidan;
b) que sean paralelas;
c) que se corten.

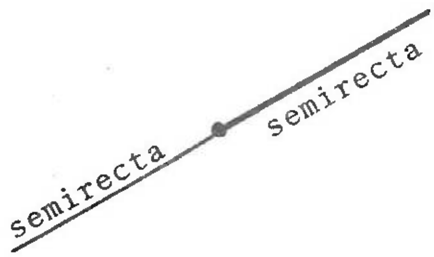
(Recuérdese lo dicho cuando las aplicaciones lineales). Teniendo presente que las rectas son conjuntos de puntos, podríamos poner:



(a) (b) (c)

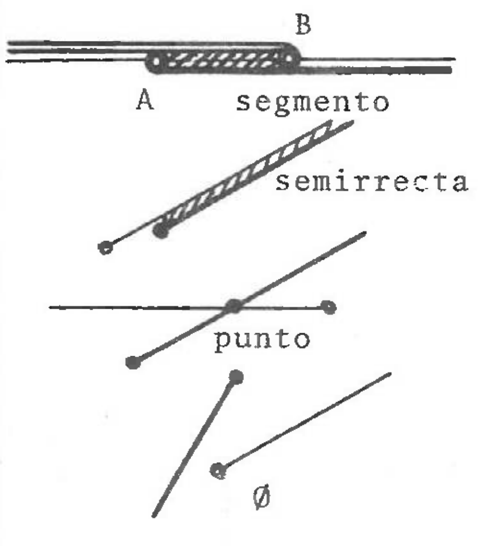
$$(a)\quad r \cap s = r = s\ ;\ (b)\quad r \cap s = \emptyset\ ;\ (c)\quad r \cap s = P$$

Pues bien, todas las rectas paralelas entre si participan como ya vimos de una misma propiedad: tienen la misma dirección.



Dada una recta, todo punto contenido en ella la divide en dos subconjuntos llamados: semirrectas.

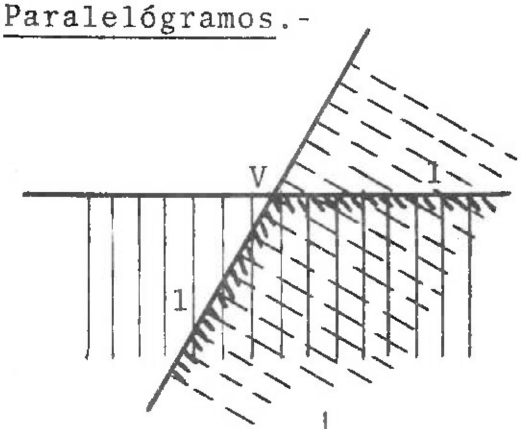
Veamos ahora como a partir de las semirrectas se pueden definir otros entes geométricos. Por ejemplo el segmento, es la intersección de dos semirrectas, en determinadas condiciones. Las condiciones son que las dos semirrectas estén sobre la misma recta y tengan sentidos contrarios (en la figura $\overline{AB}$).



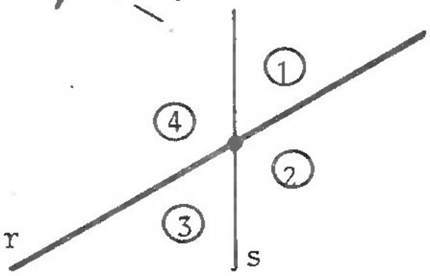
Si están situados sobre la misma recta, pero no tienen sentido contrario, la intersección da otra semirrecta. También pueden dar por intersección un punto o el conjunto vacío. También podríamos definir el segmento como el "conjunto de puntos de una recta comprendidos entre

Se llaman extremos del segmento los puntos que lo limitan, o sea los orígenes de las semirrectas que lo determinan. El símbolo de un segmento de origen A y extremo B, es $\overline{AB}$.

* Angulo como intersección de semiplanos. Otras formas. Bandas. Paralelógramos.-

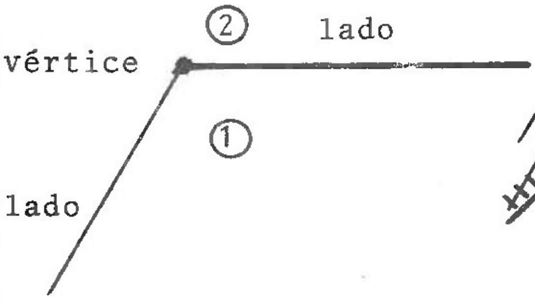


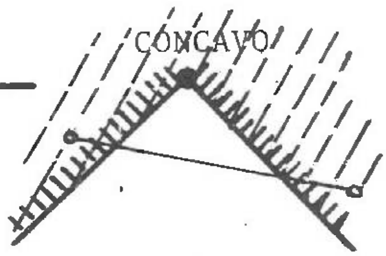
Angulo plano, es la porción (subconjunto) de plano obtenida por intersección de dos semiplanos de bordes que se cortan. El punto de corte de los bordes se denomina "vértice" del ángulo y las semirrectas que limitan el ángulo "lados".

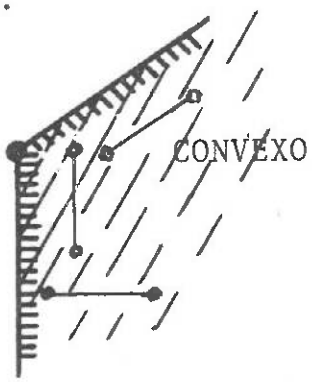


Dadas dos rectas que se corten, dividen al plano en cuatro subconjuntos. Cada uno de ellos es un ángulo plano.

Dos semirrectas de origen común determinan en el plano dos regiones. A cada una de ellas se les denomina: ángulo. El origen común es el vértice del ángulo. Y las semirrectas los lados.



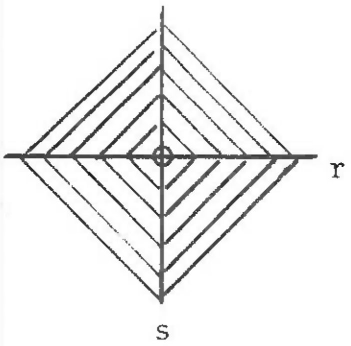




Merece la pena mencionar ahora la clasificación de los ángulos en cóncavos y convexos. Un ángulo es convexo, cuando no existe ningún par de puntos del mismo, tal que al unirlos el segmento que determinan (parte de él) caiga fuera del ángulo.

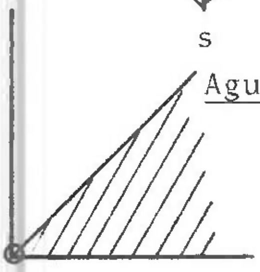
Angulo cóncavo es aquel en que si ocurre. Normalmente hablamos de CONVEXOS.

Otra clasificación que interesa es la de ángulos agudos, rectos y obtusos.

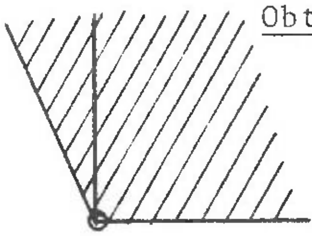


el plano, al cortarse, en cuatro ángulos iguales. A cada uno de estos ángulos se les llama ángulo recto.

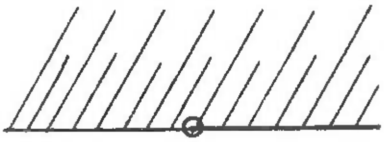
A los ángulos menores que un recto se les denomina agudos. A los mayores que un recto obtusos.



Agudo

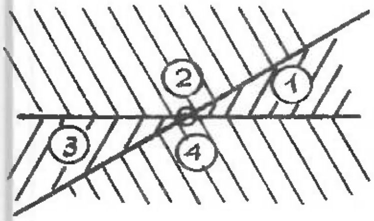


Obtuso

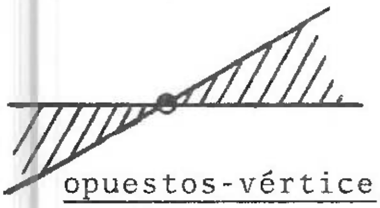


llano

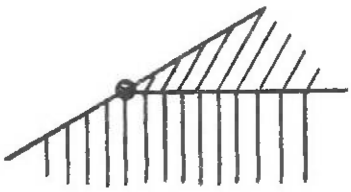
Cuando las semirrectas que determinan el ángulo están en prolongación, se trata del ángulo llano. El ángulo llano marca la frontera entre ángulos cóncavos y convexos. Menores que el llano son los convexos. Mayores son los cóncavos.



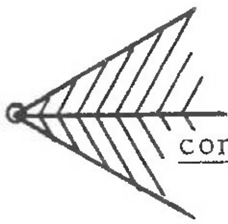
Dos rectas al cortarse hemos dicho determinan cuatro ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$. El $\hat{1}$ y el $\hat{3}$; el $\hat{2}$ y el $\hat{4}$ son "opuestos por el vértice", (tienen el mismo vértice y los lados en prolongación). El $\hat{1}$ y el $\hat{2}$; el $\hat{2}$ y el $\hat{3}$; el $\hat{3}$ y el $\hat{4}$; el $\hat{4}$ y el $\hat{1}$ son "adyacentes", (tienen el mismo vértice, un lado común y los otros en prolongación).



opuestos-vértice

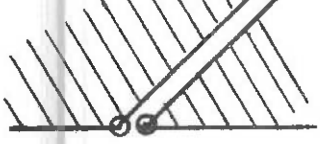


adyacentes

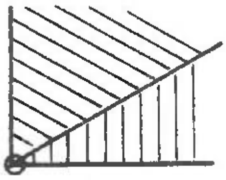


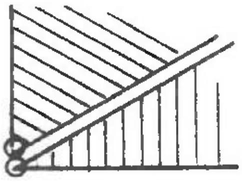
consecutivos

Se llaman ángulos "consecutivos" los que tienen el mismo vértice y un lado común. Por último ángulos "suplementarios" son los que sumados dan un ángulo llano. Y ángulos complementarios los que dan un recto.



suplementarios

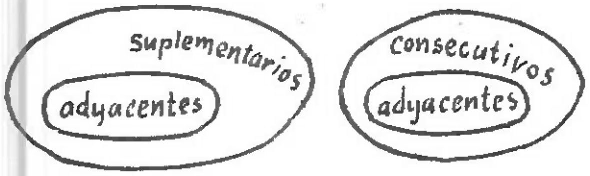




complementarios

Los ángulos adyacentes son suplementarios. Lo contrario no siempre es cierto. Los ángulos adyacentes son consecutivos. Lo contrario no es cierto siempre.

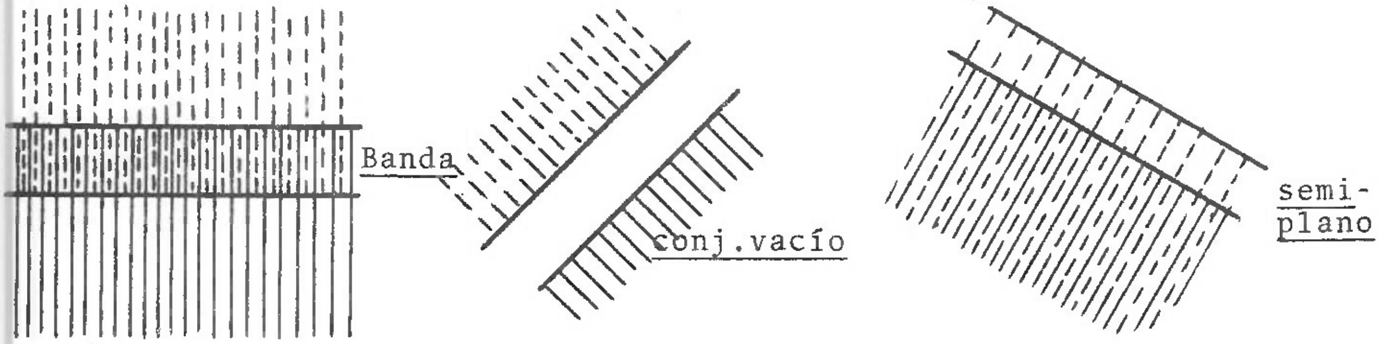
Con diagramas de Venn podíamos poner:



$\{\text{ang.suplementarios}\} \supset \{\text{ang.adyacentes}\}$

$\{\text{ang.consecutivos}\} \supset \{\text{"} \quad \text{"}\}$

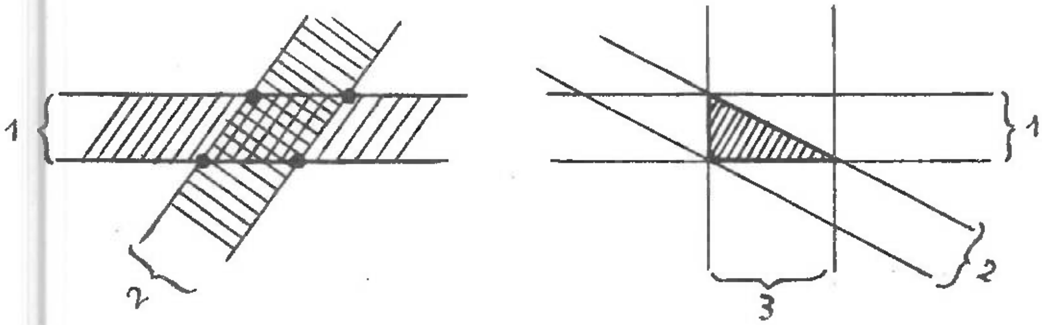
La intersección de semiplanos de bordes paralelos, o da bandas o el conjunto vacío o un semiplano.



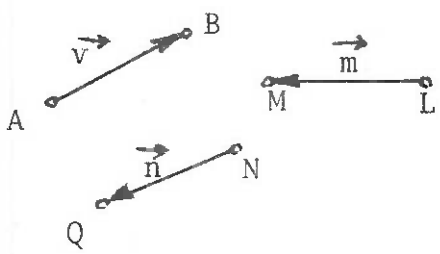
Vemos pues como la banda es la porción de plano limitado por dos rectas paralelas.

Mediante la intersección de bandas puede obtenerse todo tipo de polígono. Precisamente una de las definiciones que se da de polígono es ésta: "intersección de dos o más bandas".

La intersección de dos bandas es el paralelógramo. En el gráfico vemos uno, y un triángulo formado por la intersección de tres bandas.



* <u>Vector: elementos del mismo</u>. <u>Componentes</u>.- Definimos el vector como "par de puntos ordenados". (Nos referimos en todo momento solamente al plano).



Así el par de puntos A y B, en orden, primero el A y después el B sería un vector. Análogamente los L y M etc.

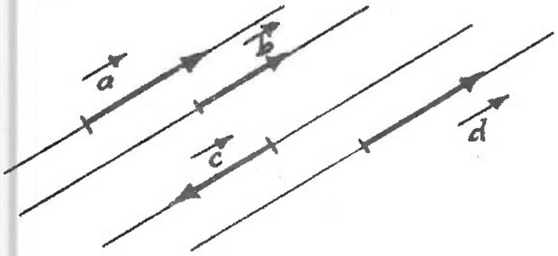
Al primer punto se llama origen del vector y al segundo extremo.

Su nomenclatura es la siguiente: Se representan: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{LM}$, siendo el p. escrito a la izquierda siempre el origen y el de la derecha

A veces se utiliza una letra minúscula con una flecha encima ($\vec{v}$). Un vector consta de: módulo, intensidad o longitud; dirección; sentido. (Si además le ponemos punto de aplicación el vector es ligado. En el caso general, que no tendrá, se llama vector libre).

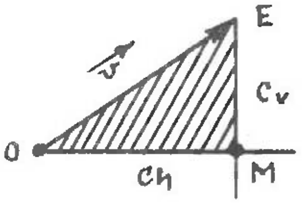
El módulo de un vector es la longitud del segmento que forman los dos puntos. Así el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es $\overline{AB}$. También puede indicarse por $|\overrightarrow{AB}|$ o v. La dirección de un vector es la de la recta que lo contiene. (Las rectas paralelas tienen la misma dirección).

El sentido de un vector, es el de marcha de un móvil que partiendo del origen se dirija al extremo. Se materializa con una punta de flecha.



Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ del dibujo tienen la misma dirección por estar situados en rectas paralelas. El sentido de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el mismo. Sinembargo $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen sentidos contrarios.

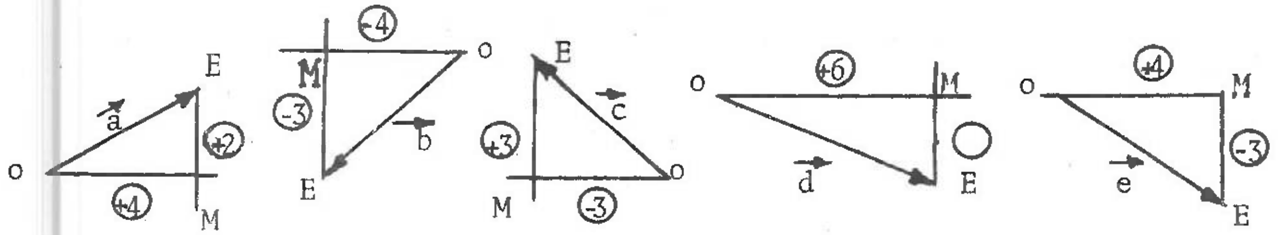
Otros elementos, desde el punto de vista práctico, muy interesantes (en especial utilizando papel cuadriculado para los ejercicios) son "las componentes" de un vector:



Más tarde las definiremos, de un modo preciso, refiriendo el vector a un sistema de coordenadas cartesiano. Sinembargo vamos ahora a expresarlas de un modo, aunque más artificioso, asequible a niveles más bajos. (Método que puede ir muy bien para el 4° o 5° nivel). Veamos:

Dado un vector $\vec{V} = \overrightarrow{OE}$ de origen O y extremo E, trazamos por el origen una semirrecta horizontal y por el extremo una semirrecta vertical hasta que se corten en un punto (M). Las longitudes de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{ME}$ con su signo (según convenio) son las componentes horizontal y vertical respectivamente. Las componentes son pues 2 números racionales (positivos o negativos) asociados al vector. Ahora bien, ¿cuándo son positivas o negativas?. ¡Veamos el convenio¡ :

Partimos siempre del origen O y nos movemos según una horizontal hasta el punto M . Si este movimiento es hacia la derecha la componente horizontal es positiva. Si fuera hacia la izquierda, negativa. Una vez en M nos dirigimos hacia el extremo E según una vertical. Si el movimiento es hacia arriba la componente vertical es positiva. Si el movimiento fuera hacia abajo, negativa. Veamos unos ejemplos:



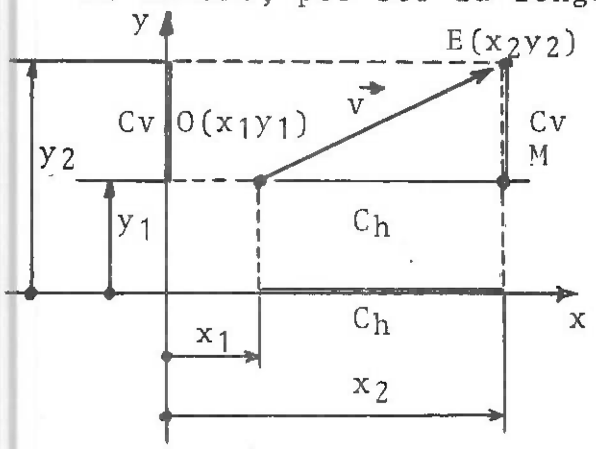
Las componentes suelen escribirse a continuación del vector $\vec{V}$ (Ch, Cv), dentro de un paréntesis, poniéndose primero la horizontal y a continuación la vertical. Así en los ejemplos anteriores podríamos poner:

$\vec{a}\ (4,\ 2)$; $\vec{b}\ (-4,\ -3)$; $\vec{c}\ (-3,\ +3)$; $\vec{d}\ (6,\ -2)$; $\vec{e}\ (4,\ -3)$

Conocidas las componentes, aplicando el teorema de Pitágoras calculamos el módulo del vector. Por ejemplo el vector $\vec{e}$ tiene por módulo:

$$e = |\vec{e}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

El módulo, por ser la longitud de un segmento, siempre POSITIVO.



Otra forma de enfocarlo, refiriéndolo a un sistema cartesiano, (para un 7° nivel) es:

Sea el vector $\vec{v}$ de origen $O(x_1\ y_1)$ y de extremo $E(x_2,\ y_2)$, como se aprecia en el dibujo.

Las componentes horizontal y vertical vemos que valen:

$$\boxed{\begin{array}{l} C_h = x_2 - x_1 \\ \hline C_v = y_2 - y_1 \end{array}}$$

El módulo será:

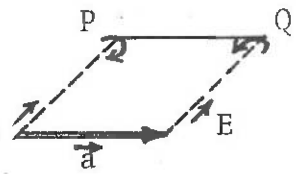
$$\boxed{v = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Aplicando estas fórmulas obtenemos directamente, sin necesidad de convenios para signos, las componentes.

No debe confundirse las componentes de un vector, con las coordenadas del origen o del extremo del mismo. Aunque ambas figuren entre paréntesis, delante del mismo unas llevan el vector, las otras el punto correspondiente. Así p.e.: $\vec{v}$ (Ch, Cv) ; $O(x_1, y_1)$; $E(x_2,\ y_2)$.

* Vectores equipolentes. Varias definiciones.-

Imaginemos el conjunto de todos los vectores del plano $A = \{\vec{a}, \vec{v}, \vec{p} \text{-----}\}$. Establezcamos la siguiente relación: "Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están relacionados, si pueden unirse mediante uno o dos paralelógramos". Veamos que propiedades tiene esta relación:

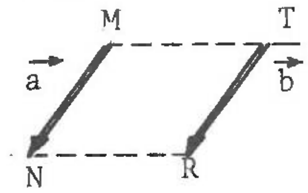


1) Es una relación reflexiva, pues $\forall \vec{a} \;\; \vec{a} \; R \; \vec{a}$. o

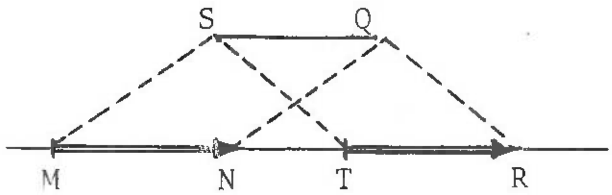
Como se ve en la figura todo vector puede unirse consigo mismo mediante dos paralelógramos en sentidos contrarios.

2) Es una relación simétrica, pues si $\vec{a} \, R \, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \, R \, \vec{a}$.

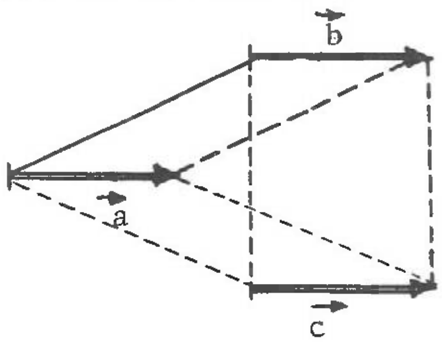
En efecto de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ se pasa mediante el paralelógramo MNRTM y de $\vec{b}$ a $\vec{a}$ mediante el TRNMT.



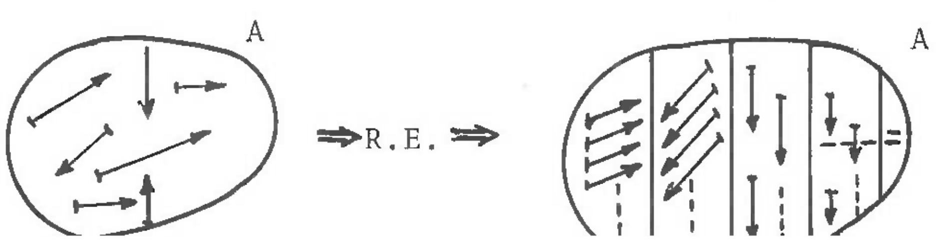
Si los vectores estuvieran sobre la misma recta, necesitaríamos dos paralelógramos para unirlos:



3) Es una relación transitiva, pues si $\vec{a} \, R \, \vec{b}$ y $\vec{b} \, R \, \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \, R \, \vec{c}$, como podemos ver en el gráfico.



Esta relación binaria por ser reflexiva, simétrica y transitiva es una relación de EQUIVALENCIA. Al aplicarla al conjunto de los vectores del plano, nos los divide o clasifica en "clases de equivalencia".

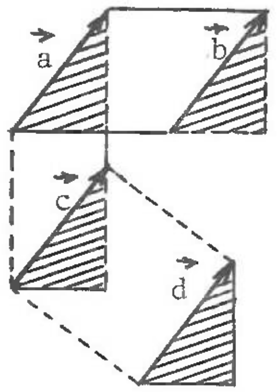


Se denominan VECTORES EQUIPOLENTES todos los que pertenecen a la misma clase de

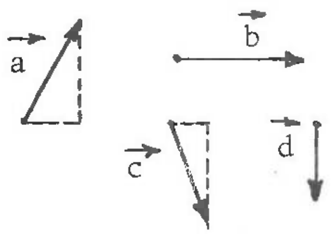
Es decir serán equipolentes los que puedan unirse mediante uno o dos paralelógramos.

Ahora bien, por las propiedades de los paralelógramos y observando las figuras anteriores, podemos decir que vectores equipolentes son los que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Estas propiedades que se deducen de la definición primera, a veces se utiliza como definición de vectores equipolentes.

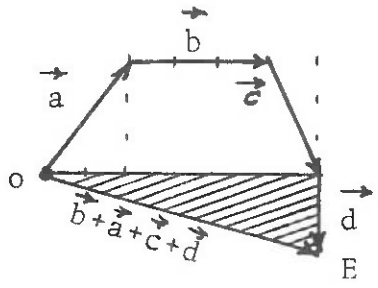
Hay una tercera manera de ver la cuestión, apoyándonos en las COMPONENTES de un vector. Por simple observación nos percatamos que los vectores equipolentes tienen las mismas componentes. Por otro lado, por lados paralelos de paralelógramos tienen "mismo módulo y dirección", y también "mismo sentido". Luego los triángulos rayados han de ser exactamente iguales. Los catetos (componentes) también lo serán.



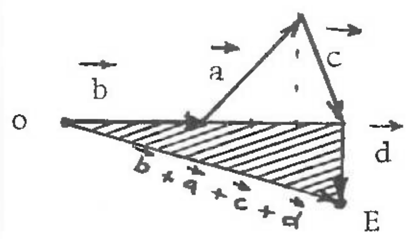
* Suma de vectores. Propiedades. Vector nulo. Vectores opuestos. Resta de vectores.- La definición geométrica de suma de vectores es:



Dados varios vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ --- por un punto cualquiera del plano O, se traza un equipolente a uno de ellos; a continuación y por el extremo de éste un equipolente a otro; y así sucesivamente hasta que no haya más vectores. El vector suma es aquel cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el del último.

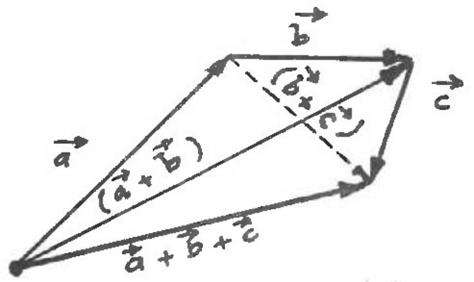


El tomar uno u otro orden de colocación de los vectores no influye, como puede observarse en la figura. Las propiedades que tiene la suma de vectores son las siguientes:



(1) Esta operación de sumar vectores es una "operación interna" dentro del conjunto de vectores. Es decir que sumando dos vectores cualesquiera siempre sale otro vector del conjunto.

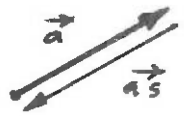
(2) La suma de vectores es asociativa; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ como podemos comprobar geométricamente.

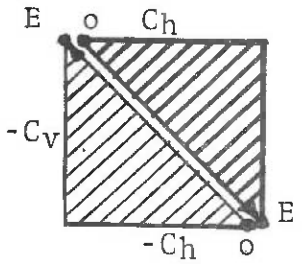


(3) Existe elemento neutro. Es el vector cuyo origen y extremo coinciden. Se trata en realidad de un punto, visto como vector de módulo nulo, sin dirección ni sentido. Se expresa $\vec{0}$

La condición del neutro es que siendo $\vec{v}$ un elemento cualquiera del conjunto: $\vec{v} + \vec{o} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$. El vector nulo es un elemento de A. Las componentes de este vector serán $\vec{0}$ (o,o) .

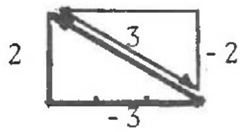
(4) Todo vector tiene su simétrico; que es aquel tal que sumado con el primero dan el vector nulo: $\vec{a} + \vec{a_s} = \vec{0}$. Se denomina también vector opuesto al primero.



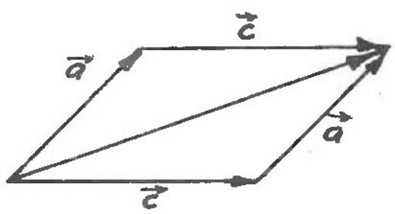


Según la definición que hemos dado de suma de vectores, los opuestos han de tener el mismo módulo y dirección pero sentidos contrarios.

Las componentes de los vectores opuestos son opuestas. (No perder de vista que el origen de uno es el extremo del otro y viceversa). Así por ejemplo el opuesto al vector $\vec{v}$ (-3, 2) será el $\vec{v_s}$ (3, -2) como se ve en la figura:

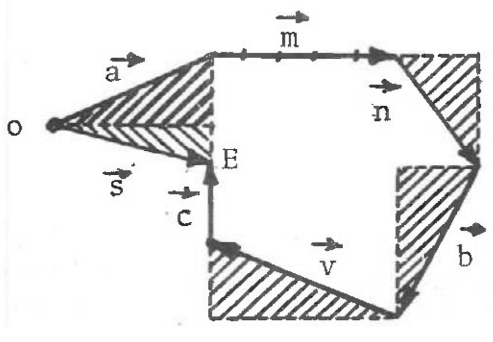


(5) Por último la suma de vectores es conmutativa: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a}$



como apreciamos en la figura.

Otro método de sumar vectores es con sus componentes. El vector suma de varios vectores tiene por componentes, la suma de los componentes de los vectores sumandos. En efecto, veamos con el ejemplo siguiente:



Hallar $\vec{S} = \vec{a} + \vec{m} + \vec{n} + \vec{b} + \vec{v} + \vec{c}$ siendo las componentes de estos vectores;

$\vec{a}$ (4, 2) ; $\vec{m}$ (5, 0) ; $\vec{n}$ (2, -3) ;

$\vec{b}$ (-2, -4) ; $\vec{v}$ (-5, 2) ; $\vec{c}$ (0, 2) ;

vemos como las componentes horizontales y verticales se van sumando algebricamente:

$4 + 5 + 2 - 2 - 5 + 0 = 4 = S_h$ (componente horizontal de $\vec{S}$)

$2 + 0 - 3 - 4 + 2 + 2 = -1 = S_v$ (componente vertical de $\vec{S}$)

	C_h	C_v
$\vec{a}$	4	2
$\vec{m}$	5	0
$\vec{n}$	2	-3
$\vec{b}$	-2	-4
$\vec{v}$	-5	2
$\vec{c}$	0	2
$\vec{S}$	4	-1

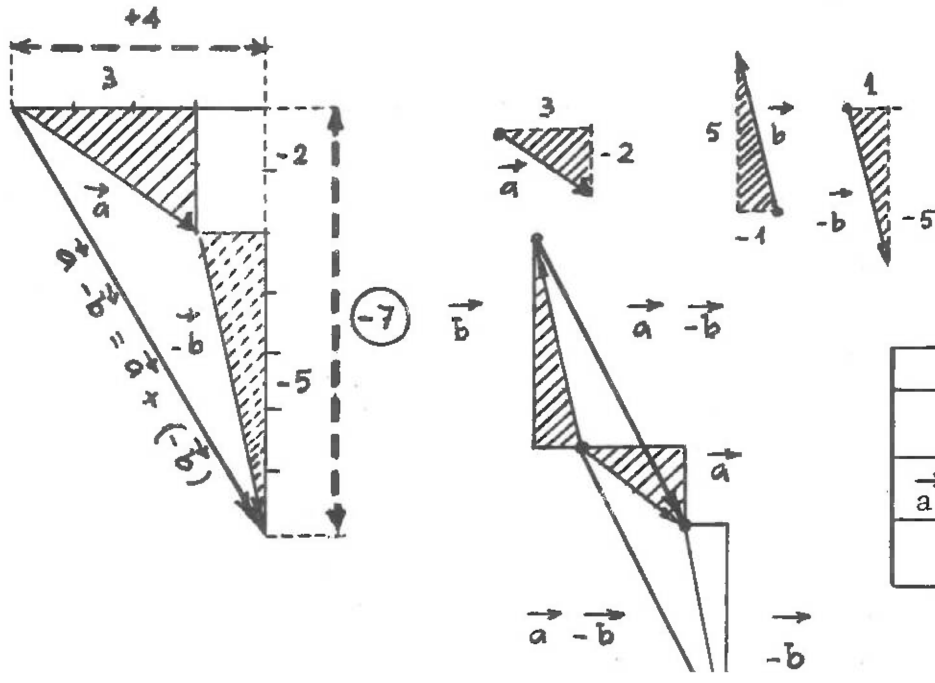
Estas operaciones pueden plantearse de un modo esquemático como èn la figura. Las componentes horizontales quedan en columna y lo mismo las verticales. Así la suma es mucho más sencilla de efectuar.

Veamos ahora la resta de vectores. Se llama diferencia entre dos vectores a (minuendo) y $\vec{b}$ (sustraendo), a otro vector s tal, que sumado al $\vec{b}$ nos de el a . Es decir:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} \Longrightarrow \vec{d} + \vec{b} = \vec{a} .$$

Otro modo: Restar dos vectores es sumarle al minuendo el opuesto al sustraendo; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Para restar mediante componentes, es evidente que se restan las componentes del sustraendo de las del minuendo. Por ejemplo: Hallar $\vec{a} - \vec{b}$; siendo $\vec{a}\,(3, -2)$ y $\vec{b}\,(-1, 5)$; llamando $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$ $d_h = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$ y $-2 - 5 = d_v = -7$. Luego $\vec{d}\,(4, -7)$. Lo comprobaremos gráficamente: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$; $\vec{a}\,(3, -2)$, $\vec{b}\,(-1, 5)$, $-\vec{b}\,(1, -5)$



	C_h	C_v
$\vec{a}$	3	-2
$-\vec{b}$	1	-5
$\vec{a} - \vec{b}$	4	-7

Estamos ya en condiciones de efectuar una combinación de operaciones. Por ejemplo, hallar $S = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} - \vec{e}$, siendo $\vec{a}\ (3, 2)$; $\vec{b}\ (0, 4)$; $\vec{c}\ (-1, 2)$; $\vec{d}\ (8, 0)$; $\vec{e}\ (-1, 3)$.

En primer lugar ponemos S en forma de suma:

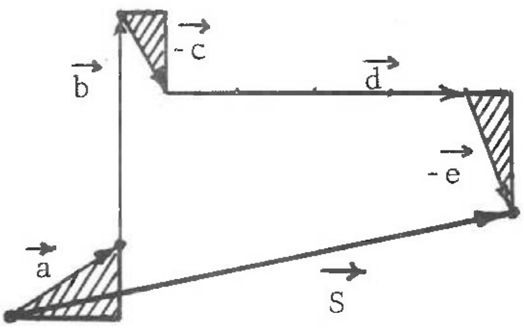
$$S = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) + \vec{d} + (-\vec{e})$$

Ahora hacemos el cuadro de las componentes:

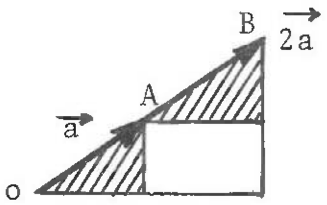
	C_h	C_v
$\vec{a}$	3	2
$\vec{b}$	0	4
$-\vec{c}$	1	-2
$\vec{d}$	8	0
$-\vec{e}$	1	-3
$\vec{s}$	13	1

y así hallamos las componentes de 13 la horizontal y 1 la vertical $\vec{s}\ (13, 1)$.

Por último podemos hacer una figura para visualizar la suma algébrica:

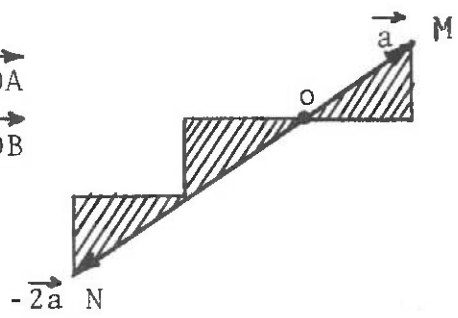


* Producto de un vector por un número racional.- El producto de un vector por un número racional es otro vector de la misma dirección que el primero, del mismo sentido o sentido contrario según el número sea positivo o negativo y cuyo módulo es el del primer vector multiplicado por el número. Veamos algunos ejemplos:



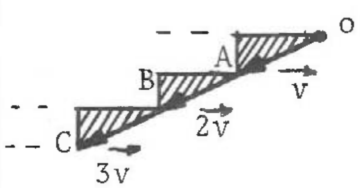
$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$

$2\vec{a} = \overrightarrow{OB}$



$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$

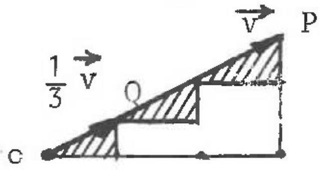
$-2\vec{a} = \overrightarrow{ON}$



$\vec{v} = \overrightarrow{OA}$

$2\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

$3\vec{v} = \overrightarrow{OC}$



$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

$\frac{1}{3}\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$

Por simple semejanza de triángulos se ve que al multiplicar un vector por un número, quedan multiplicadas las componentes por dicho número: Así p.e. $\vec{a}\ (3, 2)$ $2\vec{a}\ (6, 4)$; $\vec{v}\ (-2, -1)$ $3\vec{v}\ (-6, -3)$

Para finalizar este tema sobre operaciones con vectores efectuaremos la operación: $\vec{S} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$ siendo los vectores $\vec{a}(2, 1)$; $\vec{b}(3, 0)$; $\vec{c}(-1, +1)$; $\vec{d}(0, -3)$.

En primer lugar pondremos todo en forma de suma. Es decir:

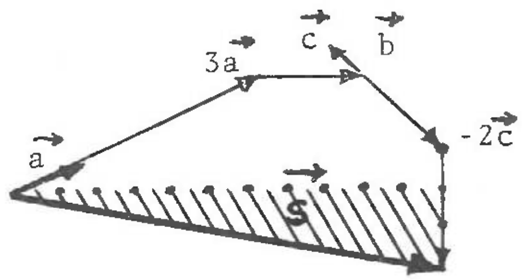
$$\vec{S} = 3\vec{a} + \vec{b} + (-2\vec{c}) + \vec{d}$$

Teniendo en cuenta que si $\vec{a}(2, 1)$, $3\vec{a}(6, 3)$ y que si $\vec{c}(-1, +1)$, $2\vec{c}(-2, +2)$ y $-2\vec{c}(2, -2)$, podemos hacer el cuadro de componentes:

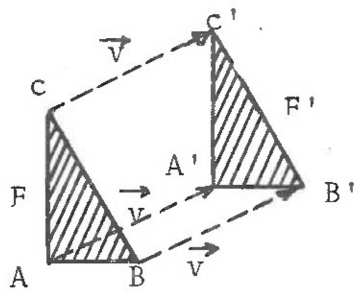
	C_h	C_v
$3\vec{a}$	6	3
$\vec{b}$	3	0
$-2\vec{c}$	2	-2
$\vec{d}$	0	-3
$\vec{S}$	11	-2

$\vec{S}$ tiene de componente horizontal 11, y de vertical -2 . Por tanto $\vec{S}(11, -2)$.

El gráfico será :



* Traslación de figuras según un vector. Figuras origen e imagen. Elementos dobles. Propiedades.- Dada una figura cualquiera en el plano puede interesar pasarla (transformarla) a otra posición. Hay diferentes modos de hacerlo. Uno de ellos: la traslación.



Dada una figura cualquiera F, (nosotros tomaremos un triángulo ABC), llamada figura origen y un vector $\vec{v}$, llamado vector de la traslación; si en cada punto de F ponemos un vector equipolente al $\vec{v}$, los extremos de dichos vectores determinan otra figura F' (imagen), que es la trasladada de F según el vector $\vec{v}$. En el fondo, se establece una correspondencia entre dos conjuntos de puntos el F y el F', con el criterio de que los puntos (elementos) relacionados, al unirlos determinan vectores equipolentes al $\vec{v}$ dado. Así en la figura A y A' , B y B', C y C' ..... están relacionados pues:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$$

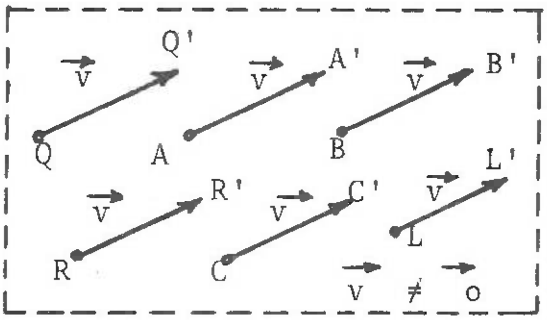
Esquemáticamente se suele poner: $F \xrightarrow{T(\vec{v})} F'$. En el caso del triángulo ABC $\xrightarrow{T(\vec{v})}$ A'B'C' . (El símbolo $T(\vec{v})$ se lee "traslación de vector $\vec{v}$ "). Los puntos A',B',C'.... son los trasladados, homólogos o imágenes de los A,B,C .... respectivamente.

Si la traslación la aplicáramos, en vez de a una figura concreta, a todo el plano, todos los puntos sufrirían la traslación en cuestión y la imagen del plano sería él mismo. Todos los puntos se habrían movido, pero el plano infinito no se habría modificado.

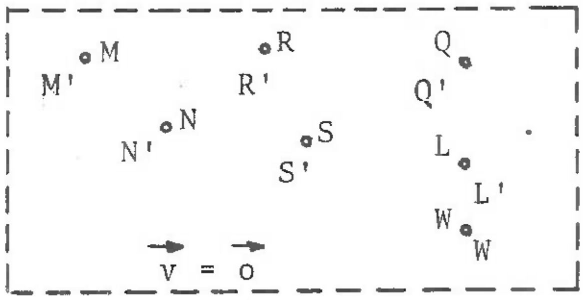
Veamos ahora los elementos dobles o invariantes de una $T(\vec{v})$.

Un elemento decimos que es doble, cuando después de hacerle la transformación se conserva igual que antes. Para su estudio podemos dividirlos en (a) puntos dobles y (b) rectas dobles.

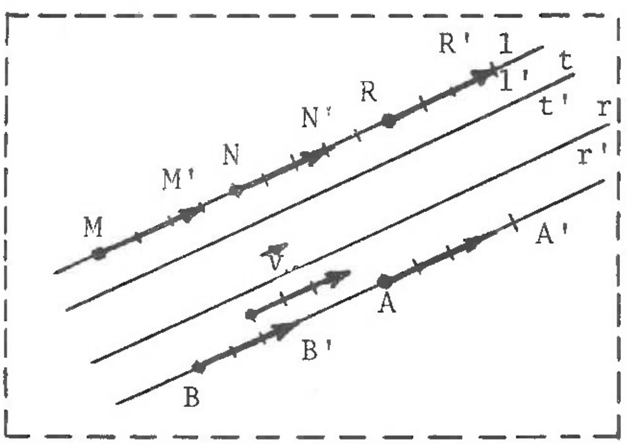
(a) Una traslación, salvo la $T(\vec{o})$, no tiene puntos dobles. En efecto una $T(\vec{v})$ de $v \neq o$, hace que cada punto se desplace para formar con su homólogo un vector equipolente al $\vec{v}$. Luego no puede quedar donde estaba.



Ahora bien si $\vec{v} = o$, todos los puntos permanecerán en su sitio. Todos los puntos son dobles. En este caso la traslación es una "identidad": $T,(\vec{v}) = I$. Aplicada al plano, éste se transforma en si mismo, pero punto a punto.



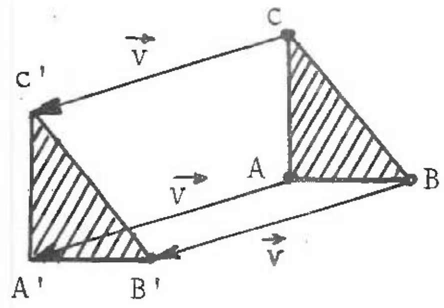
(b) Una $T(\vec{v})$ tiene rectas dobles: Son las paralelas al vector de la traslación.



En efecto, al ser la recta ilimitada, aunque cada punto se traslada vuelve a caer sobre la propia recta. Punto a punto se mueve, pero en conjunto permanece invariable.

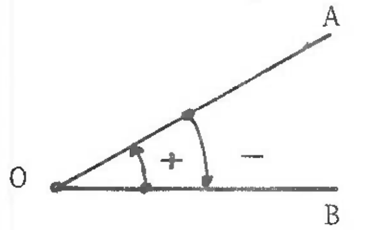
Vamos ahora a ver las propiedades que presenta la traslación: La $T(\vec{v})$ es una transformación isométrica e isogonal. Además conserva el paralelismo.

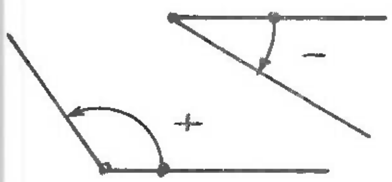
Es isométrica porque conserva la métrica. Es decir segmentos homólogos son iguales ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ------).



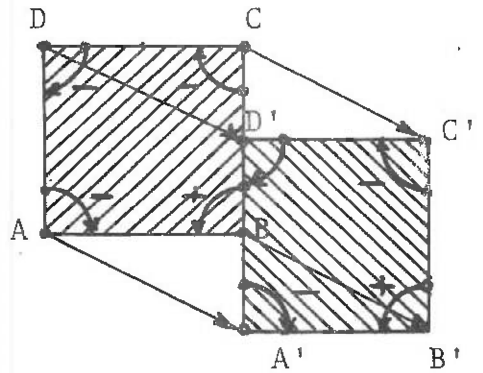
Además por ser paralelógramos las figuras formadas por cada dos segmentos homólogos y los vectores que los unen, los segmentos homólogos son paralelos ($\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$---)

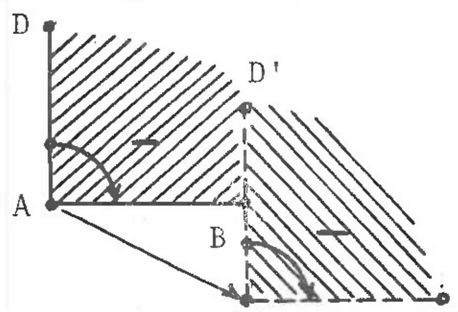
La T ($\vec{v}$) es isogonal o conforme, porque conserva los ángulos en magnitud y signo. Aclaremos esto: Por el paralelismo existente entre segmentos homólogos, es evidente que ang.C = ang.C' ; ang.B = = ang.B' ; ang.A = ang.A' ("ángulos de lados paralelos son iguales"). Esto es en magnitud, pero ¿en signo?. Debemos recordar como en Matemáticas existe un sentido positivo y otro negativo para los ángulos. Un ángulo medido en sentido contrario a las agujas de un reloj es POSITIVO. Medido en el sentido de las agujas es NEGATIVO. Veamos un poco la diferencia a través de un giro: No es lo mismo girar la semirrecta OA, alrededor de O, hasta coincidir con OB; que girar la semirrecta OB, alrededor de O, hasta coincidir con OA. En el primer caso decimos que hemos descrito un ángulo negativo. En el segunto un ángulo positivo.

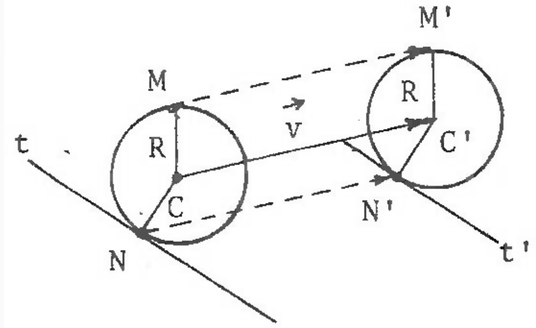




Pues bien; la T ($\vec{v}$) conserva los ángulos también en sentido o signo. Veamos: Dado el cuadrado ABCD y su homólogo, según una T (v) A'B'C'D'; tomamos arbitrariamente el signo de los ángulos en A (-), B (+), C (-) y D (-). Que el ángulo en A sea negativo lo interpretamos girando $\overline{AD}$, alrededor de A, hasta superponerse sobre $\overline{AB}$. Que el ángulo B sea positivo lo vemos girando $\overline{BC}$, alrededor de B, hasta que coincida con $\overline{BA}$. Y así sucesivamente. Fijémonos en uno de ellos, por ejemplo el ángulo en A. Su homólogo ángulo en A', será igual de magnitud (por paralelismo de lados). Para ver su signo, al girar $\overline{A'D'}$ (homólogo de $\overline{AD}$) en el mismo sentido que gira $\overline{AD}$, y alrededor de A', ha de ir a parar a $\overline{A'B'}$ (homólogo $\overline{AB}$). Como así ocurre, vemos que el signo se conserva. Lo mismo podríamos comprobar con los otros tres ángulos. En el dibujo adjunto se observa un detalle de lo dicho para el ángulo en A.







Por tener la propiedad isométrica, la figura trasladada de una circunferencia de radio R será otra circunferencia de radio igual. Para obtenerla nos bastará hallar c' homólogo del centro c. Este c' será el centro de la nueva circunferencia.

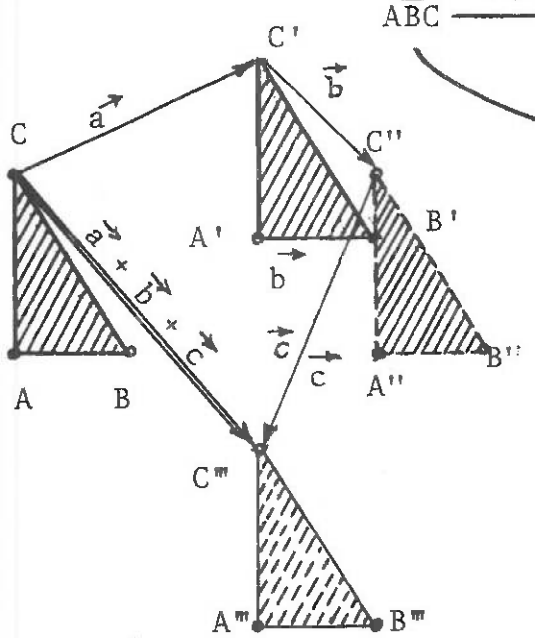
Si trazamos por N una tg. t a la circunferencia, al trasladar según $\vec{v}$ la figura obtendremos t' (paralela a t) y tg a la circunferencia de centro c', en el punto N' (homólogo del N).

Por último digamos, que como el conjunto de vectores planos es infinito, también lo será el conjunto de las traslaciones. Cada vector dará lugar a una $T(\vec{v})$.

* <u>Producto de traslaciones</u>. <u>Propiedades</u>. <u>Neutro</u>. <u>Traslación inversa</u>.-

Aplicar a una figura un producto de traslaciones $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c}) \times$ -----, consiste en aplicar sucesivamente cada una de ellas a la figura. (El orden suele ser de izquierda a derecha). Así aplicarle al triángulo ABC, el producto $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c})$, consiste en aplicarle a $\widehat{ABC}$ la $T(\vec{a})$, al triángulo que se obtenga la $T(\vec{b})$ y al nuevo triángulo obtenido la $T(\vec{c})$. Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd} \widehat{ABC} \arrow[r, "T(\vec{a})"] \arrow[rrr, bend right, "T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c})"'] & \widehat{A'B'C'} \arrow[r, "T(\vec{b})"] & \widehat{A''B''C''} \arrow[r, "T(\vec{c})"] & \widehat{A'''B'''C'''} \end{tikzcd}$$



En realidad, mediante el producto $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c})$ pasamos del triángulo $\widehat{ABC}$ al $A\ \widehat{B}\ C$. (Ver figura). Ahora bien, podemos pasar directamente sin necesidad de pasos intermedios.

La $T(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ nos lo permite, ya que para cualquier punto, C($\overrightarrow{CC'''} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'C''} + \overrightarrow{C''C'''} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$), pasa a ser su homólogo en el producto tras la suma de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

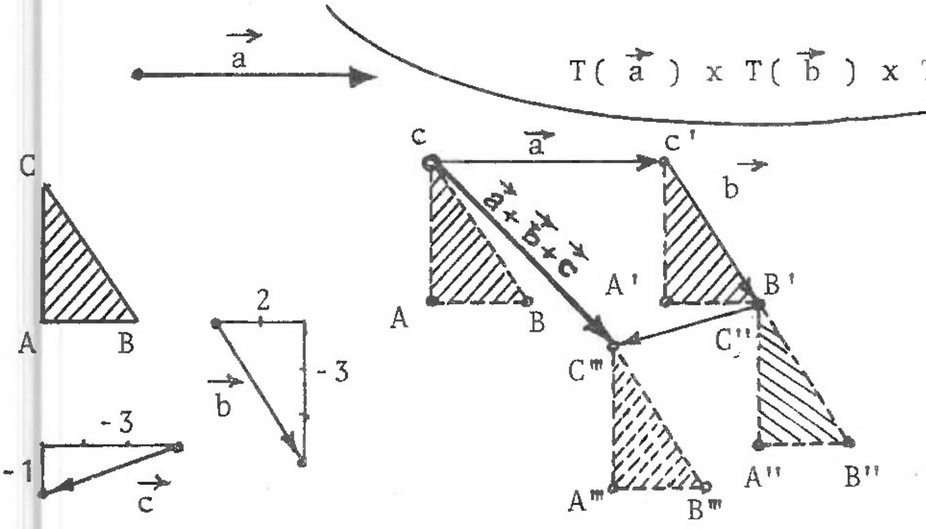
Por tanto: $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c}) = T(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, el producto de varias traslaciones es otra traslación, de vector suma de los vectores de las traslaciones factores. Dentro pues del conjunto de las traslaciones, la operación de multiplicar es una operación interna.

Antes de seguir adelante veamos un ejercicio para concretar lo anterior: Al triángulo rectángulo ABC de la figura someterlo al producto:

$T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c})$, siendo $\vec{a}\,(5, 0)$, $\vec{b}\,(2, -3)$ y $\vec{c}\,(-3, -1)$.

Gráficamente hemos realizado:

$$\begin{tikzcd} \overset{\triangle}{ABC} \arrow[r, "T(\vec{a})"] \arrow[rrr, bend right, "T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) \times T(\vec{c})"'] & \overset{\triangle}{A'B'C'} \arrow[r, "T(\vec{b})"] & \overset{\triangle}{A''B''B''} \arrow[r, "T(\vec{c})"] & \overset{\triangle}{A'''B'''C'''} \end{tikzcd}$$

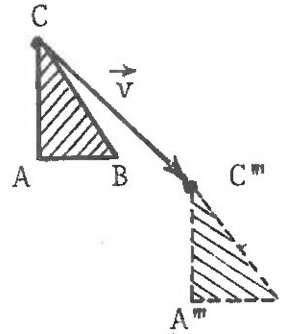


El triángulo $\overset{\triangle}{A'''B'''C'''}$ es el homólogo del $\overset{\triangle}{ABC}$ en el producto.

Ahora bien; según lo dicho antes, es lo mismo aplicarle al triángulo ABC la traslación $T(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$:

	Ch	Cv
$\vec{a}$....	5	0
$\vec{b}$....	2	-3
$\vec{c}$....	-3	-1
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$..	4	-4

Luego aplicando al triángulo la traslación del vector v (4, -4) obtenemos el mismo resultado y con mayor rapidez.



$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Veamos ahora las propiedades del producto de traslaciones:

(1) Es una operación interna. Si $T(\vec{a}) \in$ C.T. y $T(\vec{b}) \in$ C.T.; $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) = T(\vec{a}+\vec{b}) \in$ C.T. . (Siendo C.T. el conjunto de las traslac.)

(2) El producto es asociativo:

$$\left[T(\vec{a}) \times T(\vec{b})\right] \times T(\vec{c}) = T(\vec{a}) \times \left[T(\vec{b}) \times T(\vec{c})\right]$$

En efecto: Por un lado $\left\{\begin{array}{l} T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) = T(\vec{a} + \vec{b}) \\ T(\vec{a}+\vec{b}) \times T(\vec{c}) = T(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \end{array}\right.$ $\Bigg\|$ Por otro: $T(\vec{b}) \times T(\vec{c}) = T(\vec{b} + \vec{c})$ y $T(\vec{a}) \times T(\vec{b} + \vec{c}) = T(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

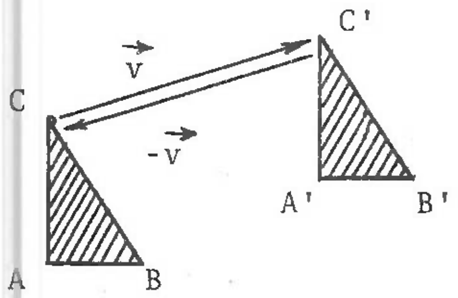
(3) Existe elemento neutro. Es la traslación del vector nulo:

$T(\vec{o}) = I \quad T(\vec{m}) \times T(\vec{o}) = T(\vec{o}) \times T(\vec{m}) =$

$= T(\vec{m} + \vec{o}) = T(\vec{m})$

(4) Todo elemento (traslación) tiene su simétrico. (Al ser un producto al simétrico se llama inverso). La condición que deben cumplir es: $T(\vec{a}) \times T_s = T(\vec{o})$. Luego $\vec{a} + \vec{a}_s = \vec{o}$;

$\vec{a}_s = -\vec{a} \quad T_s = T(-\vec{a})$. Luego la traslación inversa de una dada es aquella que tiene por vector el opuesto a la primera.



La $T(\vec{v})$ siendo $\vec{v}\,(6,\ 2)$ tiene por inversa la $T(-\vec{v})$ siendo $-\vec{v}\,(-6,\ -2)$ el opuesto al $\vec{v}$.

$$\overset{\triangle}{ABC} \underset{T(-\vec{v})}{\overset{T(\vec{v})}{\rightleftarrows}} A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

La traslación inversa de T se representa T^{-1}

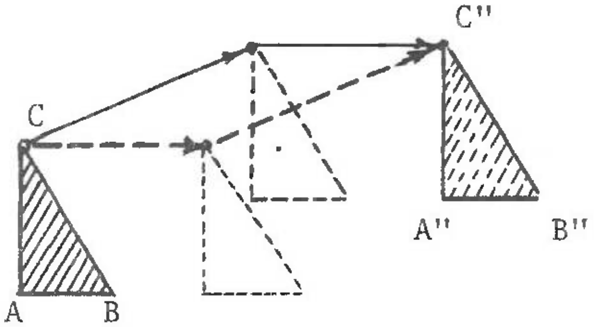
Una traslación transforma $\overset{\triangle}{ABC}$ en $A'\overset{\triangle}{B'}C'$. La traslación inversa de la primera transforma: $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ en $\overset{\triangle}{ABC}$. En definitiva

$T \times T^{-1} = I$

$$\begin{tikzcd} \overset{\triangle}{ABC} \arrow[r, "T(\vec{v})"] \arrow[rr, bend right, "T(\vec{v}) \times T(-\vec{v}) = T(\vec{o})", "I"'] & A'\overset{\triangle}{B'}C' \arrow[r, "T(-\vec{v})"] & \overset{\triangle}{ABC} \end{tikzcd}$$

(5) El producto de traslaciones es conmutativo, pues lo es la suma de vectores: $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) = T(\vec{b}) \times T(\vec{a})$.

En efecto $T(\vec{a}) \times T(\vec{b}) = T(\vec{a} + \vec{b})$; $T(\vec{b}) \times T(\vec{a}) = T(\vec{b} + \vec{a})$. Y como $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{b} + \vec{a})$.

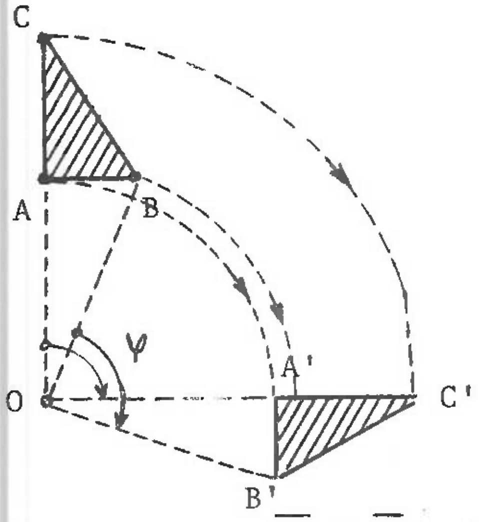


También podemos comprobarlo en el gráfico.

Vemos como la operación de sumar dentro del conjunto de los vectores y la de multiplicar dentro del conjunto de las traslaciones tienen las mismas propiedades. Ya volveremos sobre ello.

* <u>Giros de figuras</u>. <u>Elementos dobles</u>. <u>Propiedades</u>.-

Otro modo de "mover" (o transformar) figuras en el plano es el giro. Pero ¿qué es un giro?: Un giro de centro O y ángulo φ (G_O^{φ}), es una transformación geométrica tal que a cada punto A del plano le hace corresponder otro punto A' (homólogo, imagen o girado del A) de forma tal que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y que ang $(\overline{OA}, \overline{OA'}) = \varphi$. Según esta definición, al girar el plano se transformará otra vez en si mismo. Pero a nosotros nos interesará generalmente sólo parte del plano (alguna figura) F, y al girarla obtendremos otra figura F', cumpliendo las condiciones anteriores. Se tratará pues de una correspondencia entre los puntos (elementos) de F y los de F' según el criterio de: $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y ang $(\overline{OA}, \overline{OA'}) = \varphi$.



Veamos un ejemplo: Sea el triángulo ABC y hagámosle un giro de centro O y ángulo φ (para mayor facilidad de dibujo cogemos un ángulo de 90° y el centro situado sobre la recta $\overline{CA}$). Según las condiciones del giro, se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OA'} \text{ y ang. } (\overline{OA}, \overline{OA'}) = \varphi \\ \overline{OB} = \overline{OB'} \text{ y ang. } (\overline{OB}, \overline{OB'}) = \varphi \\ \overline{OC} = \overline{OC'} \text{ y ang. } (\overline{OC}, \overline{OC'}) = \varphi \end{array}\right\}$$

Fácilmente se deduce que: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

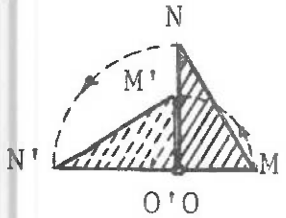
$$\boxed{\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{G_O^{\varphi}} \overset{\triangle}{A'B'C'}}$$

Mirando el dibujo se observa (y por razonamientos goniométricos podría demostrarse) que el ángulo formado por segmentos homólogos es el del giro. O sea:

ang. $(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \varphi$; ang. $(\overline{AC}, \overline{A'C'}) = \varphi$; ang. $(\overline{BC}, \overline{B'C'}) = \varphi$

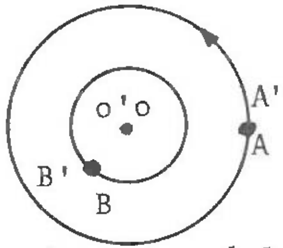
(En la traslación quedaban paralelos y del mismo tamaño).

Veamos los elementos dobles del giro: Puntos dobles sólo tiene uno. El centro del giro. Es el único punto que permanece invariable antes y después del giro. Así en la figura hemos girado el triángulo OMN alrededor de O y hemos obtenido el $\overset{\triangle}{O M'N'}$:

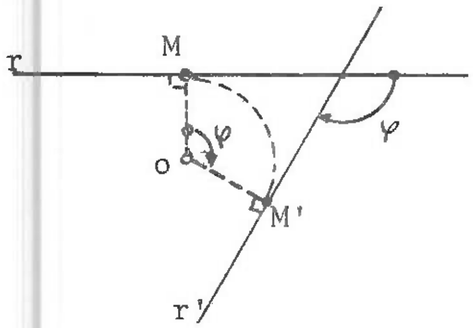


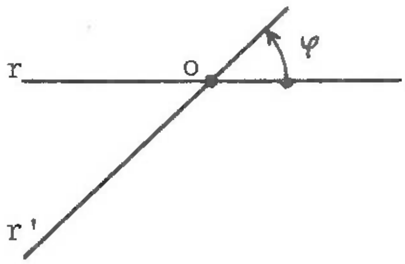
$M \xrightarrow{G_O^{\varphi}} M'$; $N \xrightarrow{G_O^{\varphi}} N'$; $O \xrightarrow{G_O^{\varphi}} O'$

Si el ángulo de giro φ = 360K (múltiplo de 360°) todos los puntos son dobles. Se trata de una identidad: $G_O^{360°K} = I$

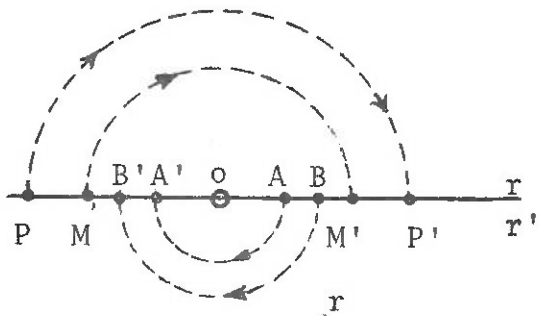


¿y rectas dobles, tiene el giro?: En general NO; pues al girar una recta, el ángulo que forma con su homóloga (según hemos dicho antes) es el del giro, φ . En las figuras vemos dos casos. Uno cuando la recta no contiene al centro del giro y otro cuando si lo contiene.

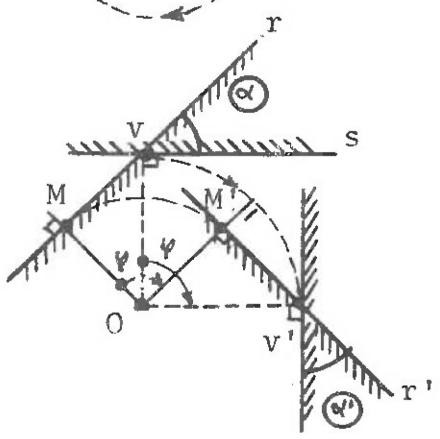




Para girar una recta podemos girar dos de sus puntos y unirlos; o bien, como la distancia del centro o a la recta ha de permanecer constante en todo momento, trazamos el segmento perpendicular $\overline{OM}$ y lo giramos el ángulo φ . Después trazamos la perpendicular a $\overline{OM'}$, por M'. Esta será r' (homóloga de r).

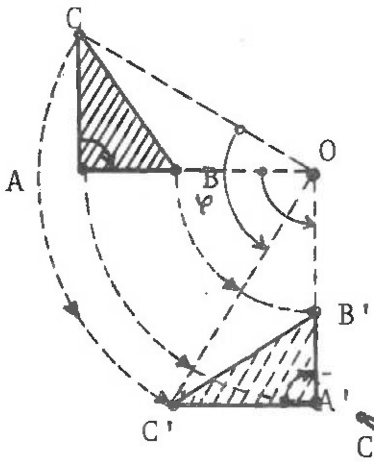


En el caso particular de giros de 180° o múltiplos impares del mismo, las rectas que pasan por el centro de giro, son dobles: La semirrecta de la izquierda se transforma en la de la derecha y la de la derecha en la de la izquierda. Pero en conjunto la recta no se modifica.

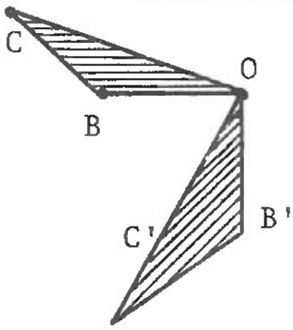


Cuando queramos girar un ángulo, (p.e. el α de la figura), para no confundirse y tomar el opuesto por que forman el ángulo; se giran las dos rectas $\underline{r}$ y $\underline{s}$; se vuelven a rayar los semiplanos homólogos de los rayados al princiío; la intersección de éstos nos dará α . (Para girar las rectas $\underline{r}$ y $\underline{s}$ hemos hecho uso del procedimiento de girar la perpendicular; ($\overline{OV}$ en un caso y $\overline{OM}$ en el otro). En el dibujo hemos tomado $\varphi = -90°$.

Vea mos ahora qué propiedades tiene el giro. Lo mismo que la traslación, el giro es una transformación isométrica e isogonal o conforme. Conserva la métrica o dimensiones de las figuras. También conserva los ángulos en magnitud y signo. Vamos a comprobarlo, según dijimos en las traslaciones, con el ángulo en A. Suponemos que es negativo ($\overline{AC}$ gira alrededor de A hasta superponerse sobre $\overline{AB}$). $\overline{A'C'}$ girando negativamente alrededor de A' se superpone con $\overline{A'B'}$, luego conserva el signo.



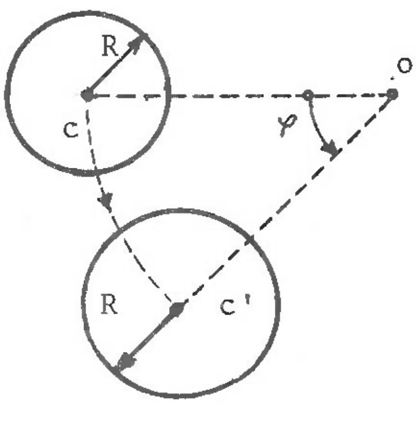
El tamaño también se conserva. Para justificarlo, veamos p.e. que

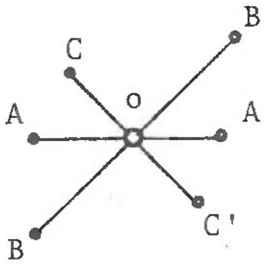


$\overline{OC} = \overline{OC'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, ang.$(\overline{OB},\overline{OC})$ igual al ang.$(\overline{OB'}, \overline{OC'})$. Por lo tanto $\widehat{COB} = C'\widehat{OB'}$, luego $\overline{BC} = \overline{B'C'}$; y lo mismo los demás lados.

Según esto, si quisiéramos girar una circunferencia nos bastaría girar su centro. En el nuevo punto construiríamos otra circunferencia con el mismo radio.

El giro de 180° recibe también el nombre de simetría central. El centro de simetría es el punto medio de todos los segmentos formados por cada par de puntos homólogos:

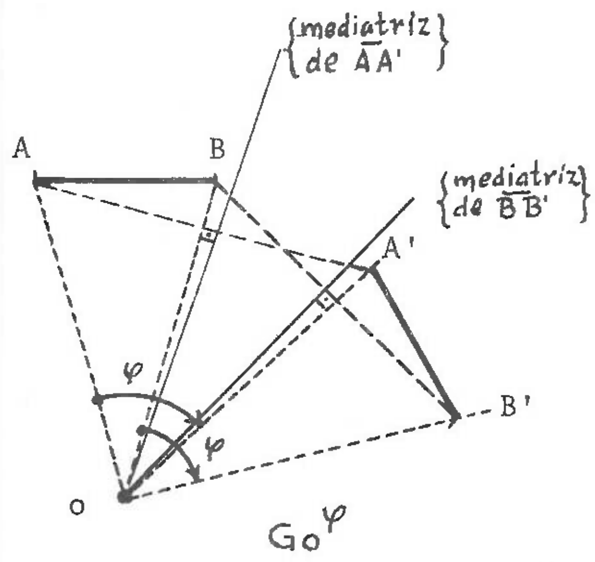




$$G_o^{180°} = S_o$$

Un ejemplo típico de giros es: Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ de la misma longitud, hallar el giro que los hace superponer.

Sean los segmentos los de la figura $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Como A y A'



mediatriz del segmento $\overline{AA'}$, ya que se ha de cumplir que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y ang. $(\overline{OA}, \overline{OA'}) = \varphi$. Análogamente $\overline{OB} = \overline{OB'}$, luego O debe estar en la mediatriz de $\overline{BB'}$.

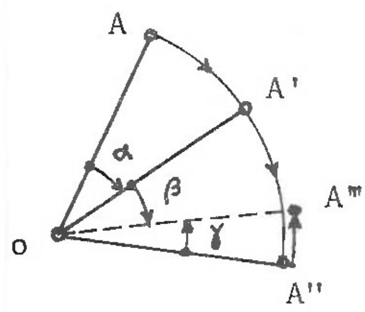
Luego la intersección de estas dos mediatrices nos proporciona el punto O buscado. El ángulo de giro lo obtenemos uniendo con O A y A' o bien B y B'.

---

* Producto de giros del mismo centro. Propiedades. Neutro. Giro inverso.-

El conjunto de los ángulos en el plano tiene infinitos elementos. Tanto positivos como negativos. Cada ángulo nos da lugar a un giro. Por ello el conjunto de los giros en el plano, con un centro O, tiene también infinitos elementos. Vamos a definir en este conjunto la operación de multiplicar: Aplicar a una figura un producto de varios giros con el mismo centro, consiste en aplicar sucesivamente cada uno de ellos en el orden de izquierda a derecha. Así el producto:

$$G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta} \times G_O^{\gamma}$$



aplicado a un punto A cualquiera equivale esquemáticamente a:

$$A \xrightarrow{Go^{\alpha}} A' \xrightarrow{Go^{\beta}} A'' \xrightarrow{Go^{\gamma}} A$$
$$A \xrightarrow{Go^{\alpha} \times Go^{\beta} \times Go^{\gamma}} A$$

Al ser A' girado del A se cumple: $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y ang.$(\overline{OA},\overline{OA'}) = \alpha$

" " A'' " " A' " " : $\overline{OA'} = \overline{OA''}$ y ang.$(\overline{OA'},\overline{OA''}) = \beta$

" " A''' " " A'' " " : $\overline{OA''} = \overline{OA'''}$ y ang.$(\overline{OA''},\overline{OA'''}) = \gamma$

Por lo tanto: $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''} = \overline{OA'''}$; ang.$(\overline{OA}, \overline{OA'''}) = \alpha + \beta + \gamma$, ($\gamma$ es negativo). Para pasar de A a A''' se puede hacer directamente mediante un giro del mismo centro O y ángulo suma de ángulos. Luego podemos escribir: $Go^{\alpha} \times Go^{\beta} \times Go^{\gamma} = Go^{\alpha+\beta+\gamma}$.

El producto de giros es una operación interna en el conjunto de Giros, pues da otro giro.

Si a una figura nos dicen la sometamos al producto siguiente:

$G_O^{90^{\circ}} \times G_O^{-30^{\circ}} \times G_O^{10^{\circ}}$ bastará someterlo a un solo giro. Este será el $G_O^{90^{\circ}30^{\circ}+10^{\circ}} = G_O^{70^{\circ}}$.

Veamos qué propiedades tiene el producto de giros con el mismo centro:

(1) Es una operación interna. (El producto de giros es otro giro)

(2) Esta operación es asociativa: $(G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta}) \times G_O^{\gamma} = G_O^{\alpha} \times (G_O^{\beta} \times G_O^{\gamma})$.

En efecto: $G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta} = G_O^{\alpha+\beta}$; $G_O^{\alpha+\beta} \times G_O^{\gamma} = G_O^{\alpha+\beta+\gamma}$ por un lado.

Y por otro $G_O^{\beta} \times G_O^{\gamma} = G_O^{\beta+\gamma}$; $G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta+\gamma} = G_O^{\alpha+\beta+\gamma}$.

(3) Existe un elemento neutro: $G_O^{\alpha} \times \text{Neutro} = G_O^{\alpha}$. Como el neutro ha de pertenecer al conjunto, ha de ser un giro de centro O. ¿Y el ángulo de este neutro?: $G_O^{\alpha} \times G_O^{n} = G_O^{\alpha}$; $G_O^{\alpha+n} = G_O^{\alpha}$.

Luego n = o° o bien un múltiplo de 360°. Es por tanto la identidad; $G_O^{360k} = I$

(4) Todo elemento tiene su simétrico. El simétrico del G_O^{α} será el $G_O^{-\alpha}$ ya que cumplen la condición $G_O^{\alpha} \times G_O^{-\alpha} = G_O^{0^{\circ}} = I$ (neutro). El ángulo del giro simétrico es el opuesto. Si con el G_O^{α} se lleva el punto M al M', con el $G_O^{-\alpha}$ se lleva el M' al M.

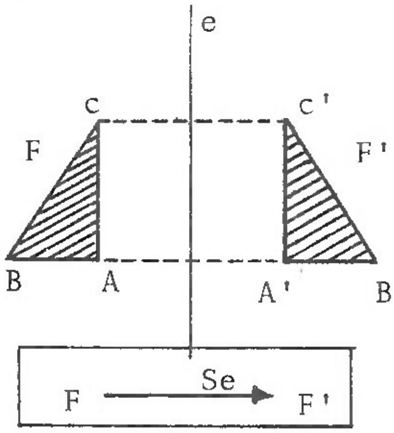
$$M \underset{G_O^{-\alpha}}{\overset{G_O^{\alpha}}{\rightleftarrows}} M'$$

(5) El producto de giros es conmutativo: $G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta} = G_O^{\beta} \times G_O^{\alpha}$

En efecto $G_O^{\alpha} \times G_O^{\beta} = G_O^{\alpha+\beta}$ y $G_O^{\beta} + G_O^{\alpha} = G_O^{\beta+\alpha}$. Y como la suma de ángulos es conmutativa, también lo es el producto de giros. La operación de sumar dentro del conjunto de los ángulos tiene las mismas propiedades que la del producto dentro del conjunto de los giros con el mismo centro. Recuérdese que son las mismas que las de las traslaciones y vectores.

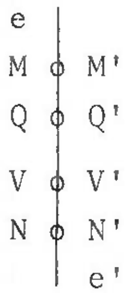
* Simetría axial. Elementos dobles. Propiedades.-

Vamos ahora a ver un tipo de transformación que tiene una propiedad que la diferencia de todas las demás: NO conserva el signo de los ángulos. La simetría respecto a un eje (recta) e, es una transformación geométrica tal que a cada punto A del plano le hace corresponder otro A' (homólogo, imagen o simétrico del A) de forma tal que e sea la mediatriz del segmento $\overline{AA'}$ (Se simboliza por Se).



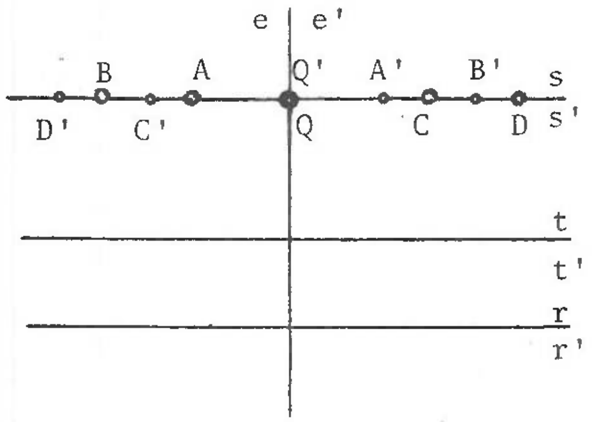
Aplicada esta transformación al plano, el semiplano de la izquierda se transforforma en el semiplano de la derecha y viceversa. Aplicada al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura, se obtiene su simétrico el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, cumpliéndose que e es mediatriz de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ -----, cortando pues a estos segmentos perpendicularmente en el punto medio.

Veamos ahora elementos dobles de la simetría axial: Puntos dobles son todos los del eje, pues si el eje debe ser mediatriz del



segmento uno de cuyos extremos está en el eje, también estará en el eje el otro. Así p.e. el M y M', N y N'------ Rectas dobles hay de dos clases: 1) el eje que es una recta doble con todos sus puntos dobles; 2) las rectas perpendiculares al eje, que son dobles pero con sólo un punto doble:

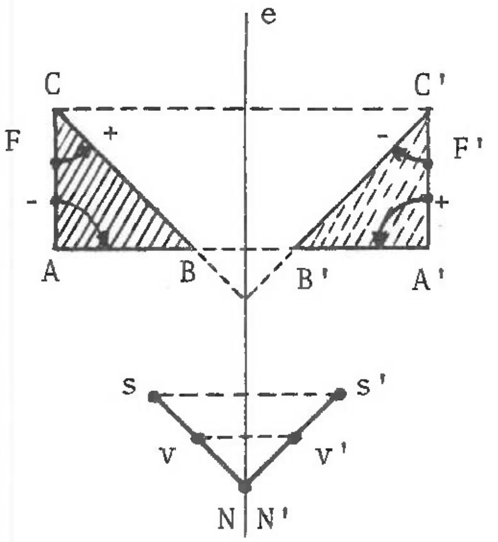
Por ejemplo las rectas s,t,r. La semirrecta de la derecha se



transforma en la de la izquierda y la de la izquierda en la derecha. El único punto doble es el de corte de la recta con el eje.

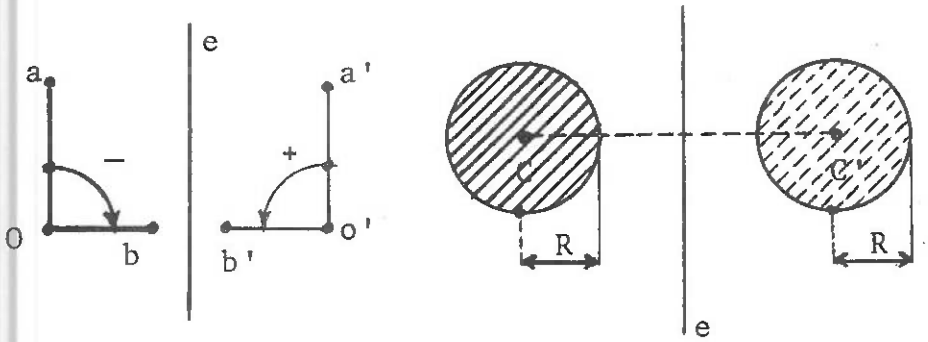
Lógicamente doblando el plano por el eje cada punto caería encima de su simétrico. Por esto si sobre un papel doblado por una recta, marcamos en una de sus caras un dibujo se traspasa al otro lado y al desdoblar aparece la figura simétrica.

Las propiedades de la simetría son: conserva la métrica (transen signo (no es isogonal).



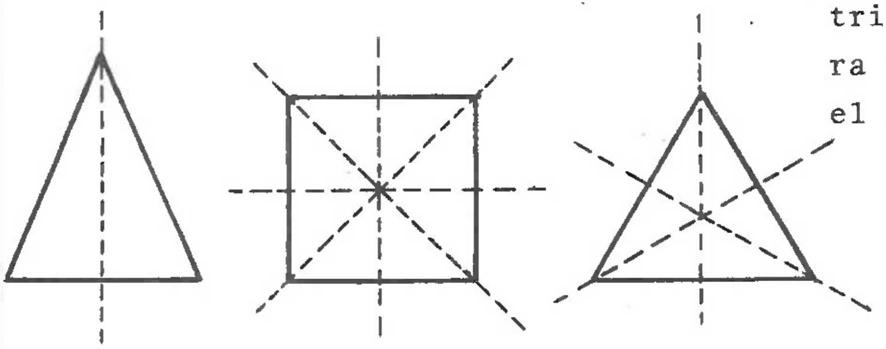
Como e es perpendicular a $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$--- estos segmentos son paralelos. Y por ser e mediatriz se debe cumplir: $\overline{NS} = \overline{N'S'}$, $\overline{NV} = \overline{N'V'}$---- y por tanto $\overline{SV} = \overline{S'V'}$. Es decir segmentos homólogos son iguales (isometría).

Veamos el signo de los ángulos: Supongamos el ángulo en A negativo y el ángulo en C positivo. En el A, girando $\overline{AC}$ a coincidir con $\overline{AB}$ lo hace en sentido agujas reloj. En el A' si $\overline{A'C'}$ gira en sentido contrario agujas reloj coincide con $\overline{A'B'}$. Y lo mismo con C y C'. Luego el signo del ángulo se invierte.



Para hallar la simétrica de una circunferencia, como el radio se conservará, basta hallar el simétrico del centro.

Como casos de ejes de simetrías de polígonos tenemos 1 para el triángulo isósceles, 3 para el equilátero y 4 para el cuadrado.



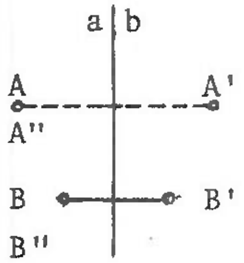
* Producto de 2 simetrías. Propiedades.

En el producto de dos simetrías, Sa x Sb, pueden ocurrir tres casos:

(1) que a y b coincidan. (2) que a y b sean paralelas. (3) que a y b se corten.

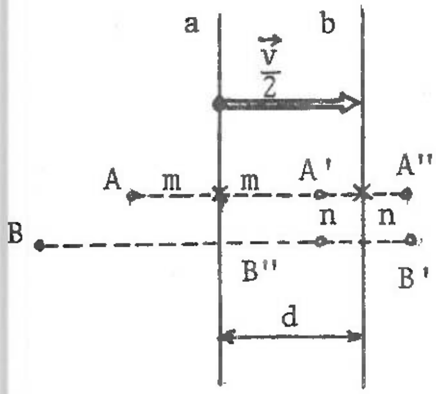
(1) Si $a \cap b = a = b$, Sa x Sb = I ; El producto de dos simetrías

respecto al mismo eje es una identidad.



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Sa"] \arrow[rr, bend right, "Sa \times Sa"'] & A' \arrow[r, "Sa"] & A \end{tikzcd}$$

(2) Si $a \cap b = \emptyset$, $Sa \times Sb$ es una traslación de vector perpendicular a los ejes y cuyo módulo es doble de la distancia entre ellos. El sentido de <u>a</u> hacia <u>b</u>. Veámoslo: Sean a y b los ejes de la figura.



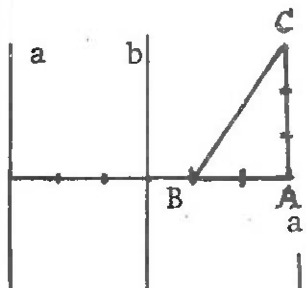
Tomamos un punto A cualquiera y le aplicamos sucesivamente Sa y Sb ;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Sa"] \arrow[rr, bend right, "Sa \times Sb"'] & A' \arrow[r, "Sb"] & A'' \end{tikzcd}$$

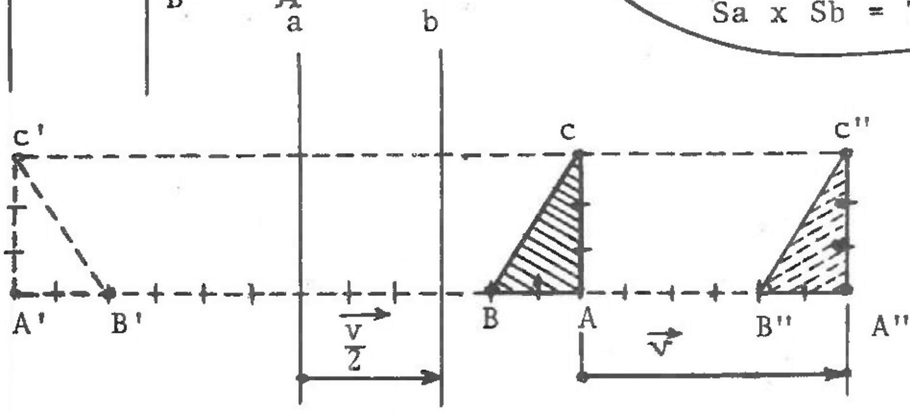
$\overline{AA'}$ es perpendicular a $\underline{\underline{a}}$
$\overline{A'A''}$ " " a $\underline{\underline{b}}$

Luego $\overline{AA''}$ es perpendicular a $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$. Además

$\overline{AA''} = 2m + 2n = 2\,(m+n) = 2d$. Lo mismo razonaríamos para otro punto cualquiera B. Por tanto se trata de una traslación de vector $\vec{v} = 2\vec{d}$ $T\,(\vec{v} = 2\vec{d}\,)$. Veamos un ejemplo: Al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura someterlo a $Sa \times Sb$ siendo $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ los ejes de la figura.



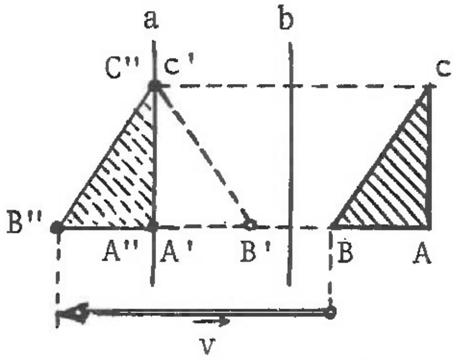
Haremos
$$\begin{tikzcd} \overset{\triangle}{ABC} \arrow[r, "Sa"] \arrow[rr, bend right, "Sa \times Sb = T(\vec{v}\,)"'] & \overset{\triangle}{A'B'C'} \arrow[r, "Sb"] & \overset{\triangle}{A''B''C''} \end{tikzcd}$$



Vemos que al estar separados $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ 3 unidades el vector $\vec{v}$ tiene 6 unidades de componente horizontal.

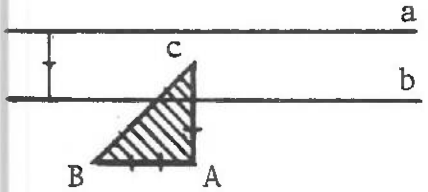
Comprobemos que no es conmutativo este producto: $Sa \times Sb \neq Sb \times Sa$

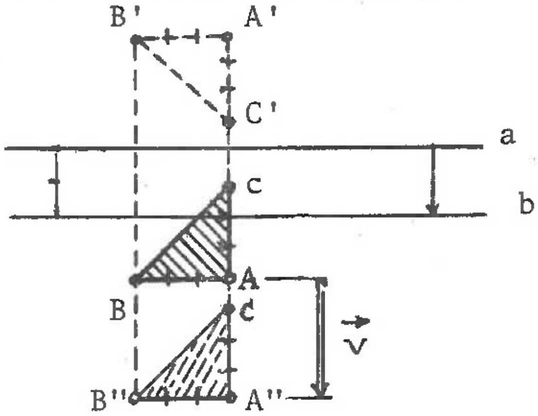
Al cambiar el orden de los factores se invierte el vector de la



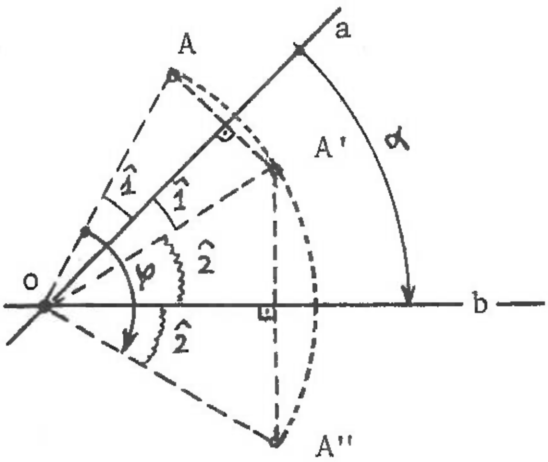
Nótese como el producto de simetrías no es una operación interna, pues da una traslación (que no pertenece al conjunto de las simetrías).

Veamos otro ejemplo con los ejes horizontales y separados dos unidades. Con los datos de la figura, someter al triángulo $\widehat{ABC}$ al producto Sa x Sb :





(3) Si $a \cap b = O$ (punto de corte); El producto de dos simetrías Sa x Sb, respecto de ejes que se cortan, es un giro de centro el punto de corte y cuyo ángulo es el doble del que forman los ejes de simetría. Veámoslo:



Dados los ejes a y b de la figura y un punto cualquiera A sometámosle al producto Sa x Sb ;

$$A \xrightarrow{Sa} A' \xrightarrow{Sb} A''$$

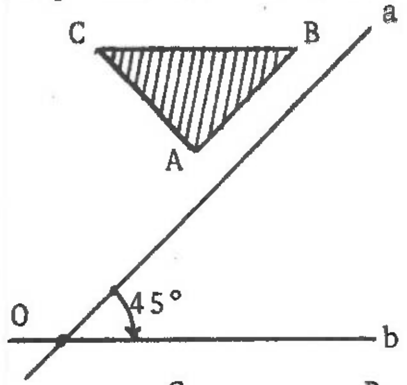
$$\varphi = 2\alpha$$

$$Sa \times Sb = Go$$

Según las propiedades de las simetrías tenemos que: a es mediatriz de $\overline{AA'}$ y b lo es de $\overline{A'A''}$. Como todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos: $\overline{OA} = \overline{OA'}$; $\overline{OA'} = \overline{OA''}$. Luego $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$. Podemos pasar de A a A'' mediante un giro de centro O y ángulo φ . Ahora bien, si en lugar de coger el punto A hubiéramos cogido el B, el ángulo φ del giro ¿sería el mismo? Justifiquemos que si: El ángulo $\varphi = \hat{1}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{2} = 2(\hat{1} + \hat{2}) = 2.\alpha$. :Como α = cte, también lo será φ . Luego se trata de un GIRO.

En el razonamiento anterior debe observarse que los triángulos $\widehat{OAA'}$ y $\widehat{OA'A''}$ son isósceles. Los ejes son bisectrices, y de ahí lo de los ángulos iguales $\hat{1}$ y $\hat{2}$. También en este caso falla lo de operación in-

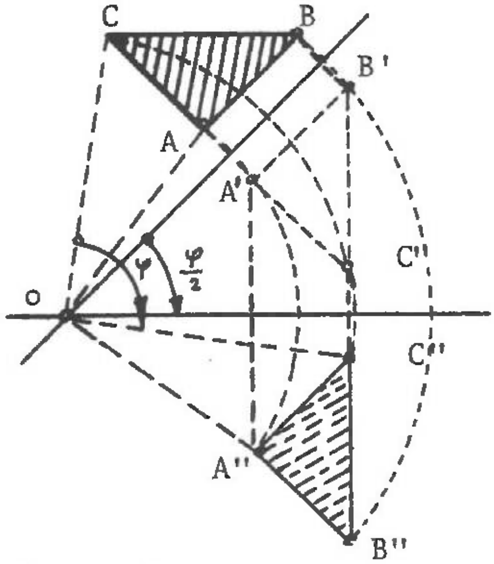
Veamos un ejemplo: Al triángulo ABC de la figura someterlo al producto Sa x Sb , siendo a y b los ejes del dibujo:



Primero le haremos la simetría respecto a y después respecto b :

$$\begin{tikzcd} \triangle ABC \arrow[r, "S_a"] \arrow[rr, bend right, "G_O \; -90^\circ"'] & \triangle A'B'C' \arrow[r, "S_b"] & \triangle A''B''C'' \end{tikzcd}$$

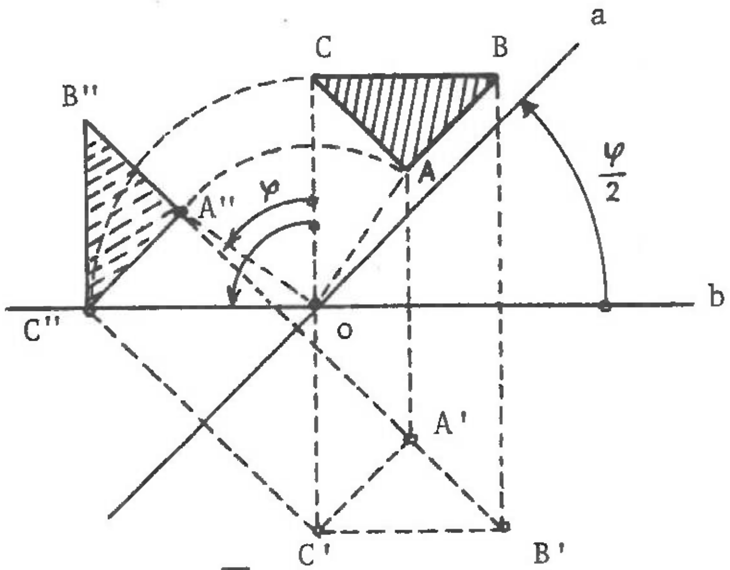
Veámoslo gráficamente.



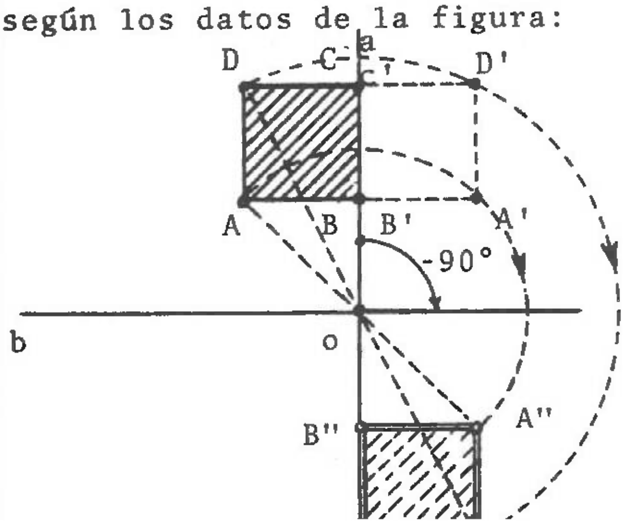
Después de hacerle las dos simetrías, se ve perfectamente que se podía pasar de ABC a A''B''C'' mediante un giro alrededor de O de -90° (doble de -45°).

Tampoco aquí existe la propiedad conmutativa. Veamos que ocurre si con los mismos datos hacemos Sb x Sa ;

Vemos ahora como el giro a invertido su sentido (+90°) aun conservando el centro.



Por último hagámosle al cuadrado ABCD el producto Sa x Sb, según los datos de la figura:



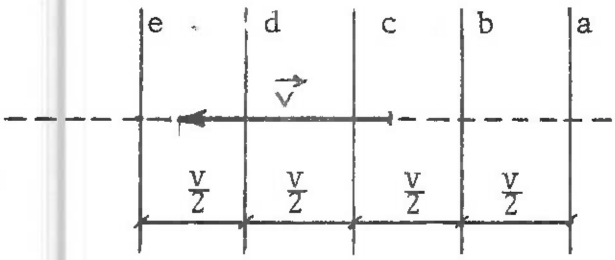
Como el ángulo que forman los ejes es de -90° el giro será de -180° ó + 180° .

C A P I T U L O   VI

* Problema inverso al anterior.-

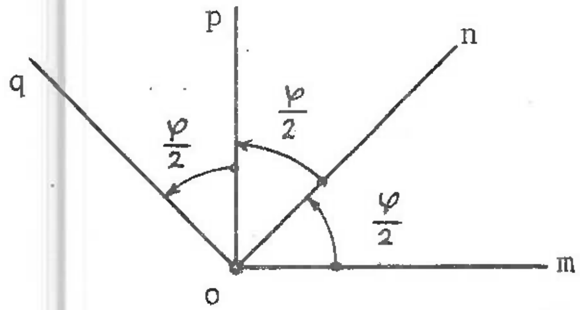
Nos planteamos ahora lo siguiente: Dada una traslación, ¿podemos descompoerla en Sa x Sb ? ¿De cuántas maneras?. ¿Y con un giro?.

Una traslación podemos descomponerla en el producto de dos simetrías, respecto de eje paralelos, perpendiculares a la dirección del vector, y separados una distancia mitad del módulo del mismo. Además existen infinitas parejas de estos ejes. En efecto: La traslación $\vec{v}$ de la figura se puede descomponer en: $T(\vec{v}) = Sa \times Sb = Sb \times Sc = Sc \times Sd = \text{------}$



La distancia entre cada par de ejes es: $d = \frac{v}{2}$

Con el giro sucede lo mismo. Podemos descomponerlo en el producto de dos simetrías, respecto de ejes que se cortan en el centro del giro y que forman un ángulo mitad del del giro. Existen igual que antes infinitos pares de ejes. Veamos:



$G_O^{\varphi} = Sm \times Sn = Sn \times Sp = Sp \times Sq = \text{-----}$

basta que todos los ejes pasen por O y formen un ángulo $\frac{\varphi}{2}$ (mitad del eje giro).

VI.-

* Movimiento. Directo e inverso. Propiedades. Ejemplos.-

Podemos definir como movimiento toda correspondencia, en el conjunto de los puntos del plano, que conserva la métrica. Según esto la $T(\vec{v})$, el G_O^{φ}, la simetría, y el producto de éstos (por conservar la métrica y ser correspondencias) son movimientos. Cada punto del plano tiene un solo homólogo o imagen. Aplicar a una figura un movimiento consiste en hallar la figura cuyos puntos son los homólogos de los de la primera figura.

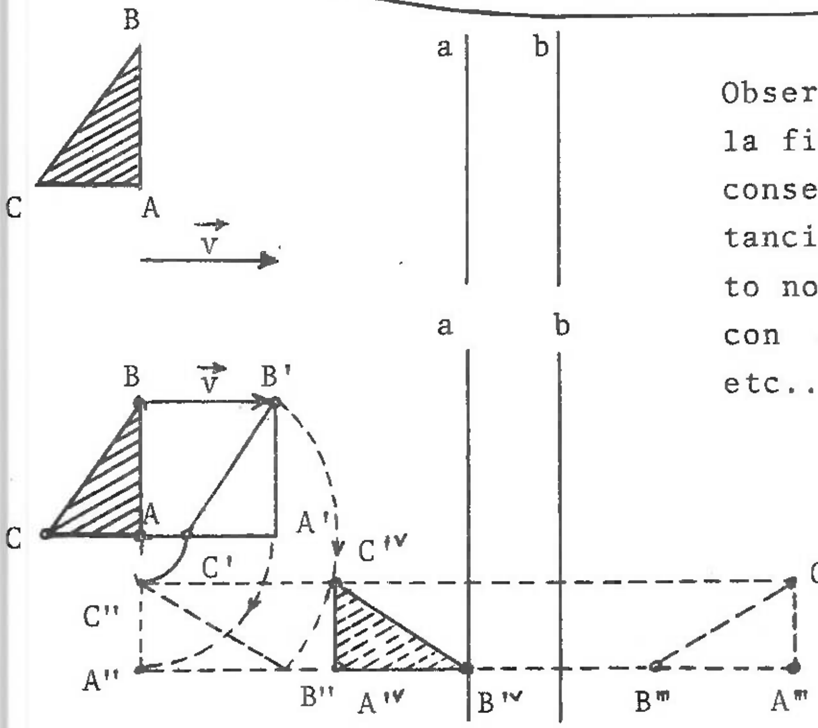
Los movimientos pueden ser directos o inversos. Un movimiento es directo cuando además de la propiedad isométrica tienen la isogorectos: la traslación, el giro, el producto de dos (o número par) de simetrias axiales -----. Y combinaciones de ellos.

Los movimientos inversos son isométricos pero no isogonales. La simetría axial es un ejemplo claro. Podemos definir el movimiento inverso, como el producto de uno directo por una simetría axial.

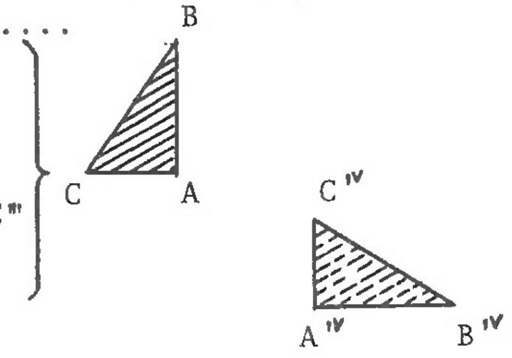
Veamos algunos ejemplos:

1) El producto: $T\left[\vec{v}\,(3,\ 0)\right] \times G_A^{90°} \times Sa \times Sb$, es un movimiento directo pues el producto de $Sa \times Sb$ o es una traslación o un giro y por tanto la propiedad isométrica e isogonal existirán. Comprobémoslo con el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura y los ejes de la misma:

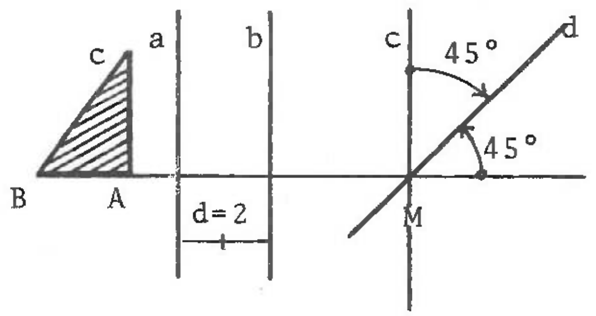
$$\begin{tikzcd} ABC \arrow[r, "T(\vec{v})"] \arrow[rrrr, bend right, "\text{MOVIMIENTO DIRECTO}"'] & \overset{\triangle}{A'B'C'} \arrow[r, "G_A^{90°}"] & \overset{\triangle}{A''B''C''} \arrow[r, "Sa"] & \overset{\triangle}{A'''B'''C'''} \arrow[r, "Sb"] & \overset{\triangle}{A^{IV}B^{IV}C^{IV}} \end{tikzcd}$$



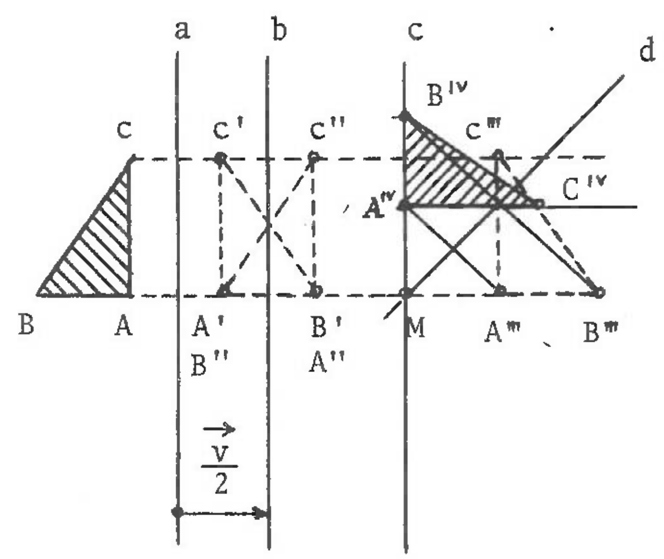
Observando la figura inicial y la final podemos comprobar la conservación de ángulos y distancias. El movimiento directo nos hace corresponder A con A^{IV}, B con B^{IV}, C con C^{IV} etc......



2) El producto $Sa \times Sb \times Sc \times Sd$, siendo los ejes los de la figura, es otro movimiento directo. En efecto: $Sa \times Sb$ equivalen a una traslación y $Sc \times Sd$ a un giro.

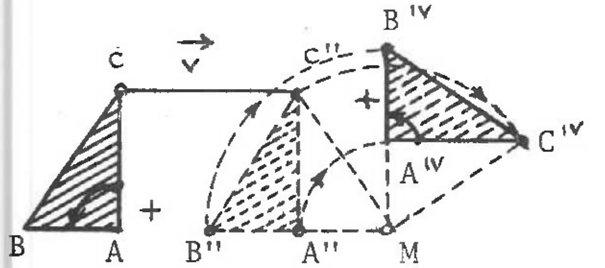


El vector de la traslación es $\vec{v}(4,0)$ y el giro de centro M y ángulo -90° (doble de -45°). Apliquemos este movimiento al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura:



$$\begin{tikzcd} \widehat{ABC} \arrow[r, "Sa"] \arrow[rr, bend right, "T(\vec{v})"'] \arrow[rrrr, bend left, "\text{MOVIMIENTO DIRECTO}"] & A'\widehat{B'}C' \arrow[r, "Sb"] & A''\widehat{B''}C'' \arrow[r, "Sc"] \arrow[rr, bend right, "G_M^{-90^\circ}"'] & A'''\widehat{B'''}C''' \arrow[r, "Sd"] & A^{IV}\widehat{B^{IV}}C^{IV} \end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos pasar de $\widehat{ABC}$ a $A^{IV}\widehat{B^{IV}}C^{IV}$ en dos pasos nada más. Una traslación y un giro:



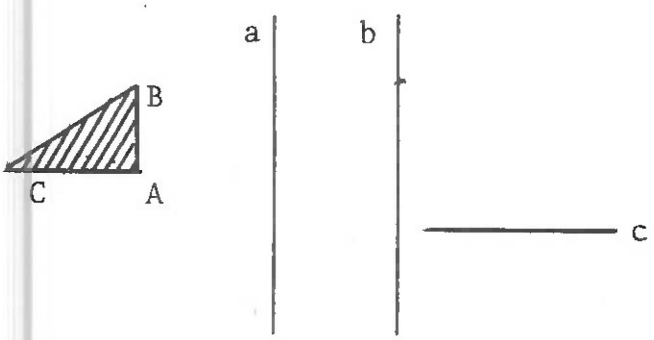
Referente a los ángulos digamos que hay un número par de cambios de signo, lo que deja la figura sin cambio de signo en sus ángulos.

En general, cuando aparezcan número par de simetrías (en el producto) se trata de un movimiento directo. Si el número de simetrías es impar el movimiento será inverso.

3) El producto Sa x Sb x Sc es un movimiento inverso. Comprobémoslo en el caso del triángulo $\widehat{ABC}$ con los datos de la figura:

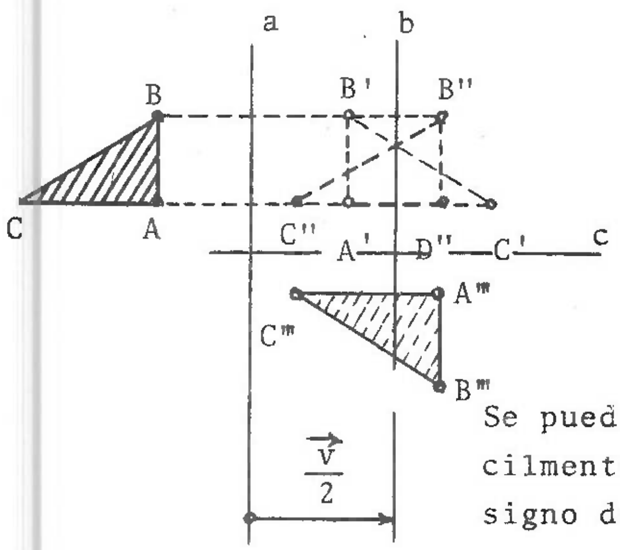
Tendremos:

$$\begin{tikzcd} \widehat{ABC} \arrow[r, "Sa"] \arrow[rr, bend right, "T(\vec{v})"'] \arrow[rrr, bend left, "\text{MOVIMIENTO INVERSO}"] & A'\widehat{B'}C' \arrow[r, "Sb"] & A''\widehat{B''}C'' \arrow[r, "Sc"] & A'''\widehat{B'''}C''' \end{tikzcd}$$

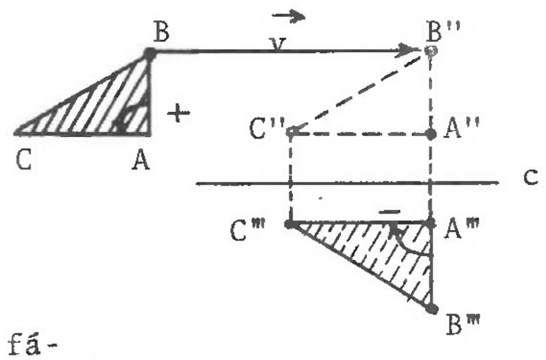


tricas o bien una traslación seguida de una simétrica. La traslación es isagonal, pero la simetría NO. Habrá cambio de signo en los ángulos, luego se trata de un movimiento inverso.

Veámoslo de las dos maneras:



o bien



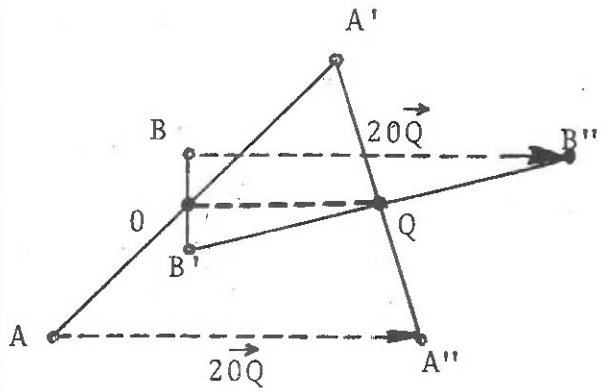
Se puede comprobar fácilmente el cambio de signo de los ángulos.

* <u>Tres casos interesantes de movimiento directo.-</u>

(a) Veamos primero el producto de dos giros de 180°(o simetrías centrales) con diferente centro:

$$\boxed{G_O^{180°} \times G_Q^{180°} \Longrightarrow T\ (\vec{v} = 2\vec{OQ})}$$

equivalen a una traslación de vector doble del que une O con Q.



Sean O y Q de la figura los centros de los giros y tomemos un punto A cualquiera para someterlo al producto. Tendremos:

$$A \xrightarrow{G_O^{180°}} A' \xrightarrow{G_Q^{180°}} A'' ;$$

Debido al giro: $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y $\overline{QA'} = \overline{QA''}$ Luego dividiendo miembro a miembro $\frac{\overline{OA'}}{\overline{QA'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{QA''}}$. El triángulo $\overset{\triangle}{A'AA''}$ y el $\overset{\triangle}{A'OQ}$ son semejantes. OQ es paralelo a $\overline{AA'}$ y la mitad que él. Por tanto para pasar de A a A' podemos hacerlo mediante una traslación de vector $2\,\vec{OQ}$. Si hubiéramos cogido B en lugar de A, podíamos hacer el mismo razonamiento con los triángulos B'BB''

B'OQ que son semejantes y tienen BB" paralelo a OQ e igual a su mitad.

Por tanto se trata de una traslación

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{T(2\vec{OQ})} A'' \\ B \xrightarrow{\phantom{T(2\vec{OQ})}} B'' \end{array}$$

"es un movimiento directo".

(b) "El producto de una traslación por un giro es otro giro con el mismo ángulo de giro pero con diferente centro". (Este nuevo centro se calcula geométricamente según veremos) ;

$$G_O^{\varphi} \times T(\vec{v}) = G_M^{\varphi}$$

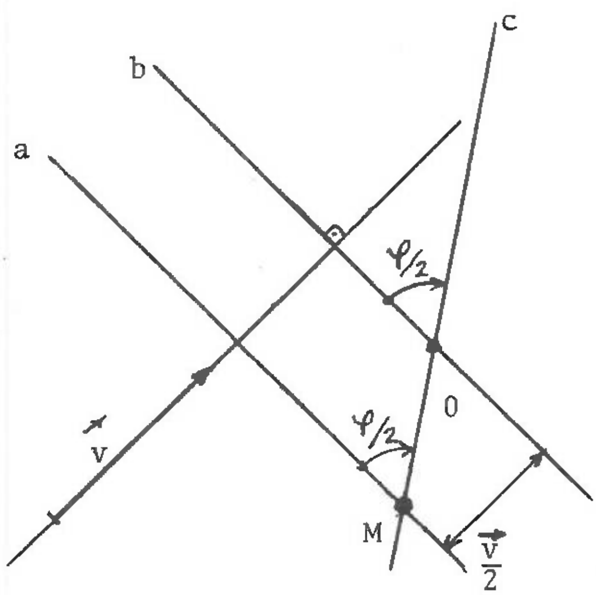
Para hallar el giro solución, descompongamos G_O^{φ} y $T(\vec{v})$ en el producto de dos simetrías, pero de forma que un eje sirva para el giro y para la traslación a la vez. Para que sirva para el giro debe pasar el eje por O (centro del giro). Para servir a la traslación debe ser perpendicular a la dirección del vector $\vec{v}$. Por tanto la recta que pasando por O sea perpendicular a $\vec{v}$ (y sólo hay una) será el eje común b. De este modo tendremos $G_O \times T(\vec{v}) = SaxSbxSbxSc$. El producto de las dos simetrías centrales da la identidad y pueden eliminarse. Nos quedaría pues Sa x Sc. Esto es el producto de dos simetrías respecto de ejes que se cortan; luego es un giro de centro el punto de corte (M), y ángulo el doble del que forman los ejes (o sea φ).

$$\underbrace{T(\vec{v})}_{} \times \underbrace{G_O^{\varphi}}_{}$$

$$Sa \times \underbrace{Sb \times Sb}_{} \times Sc$$

$$\underbrace{Sa \times I \times Sc}_{}$$

$$\underbrace{Sa \times Sc}_{G_M^{\varphi}}$$

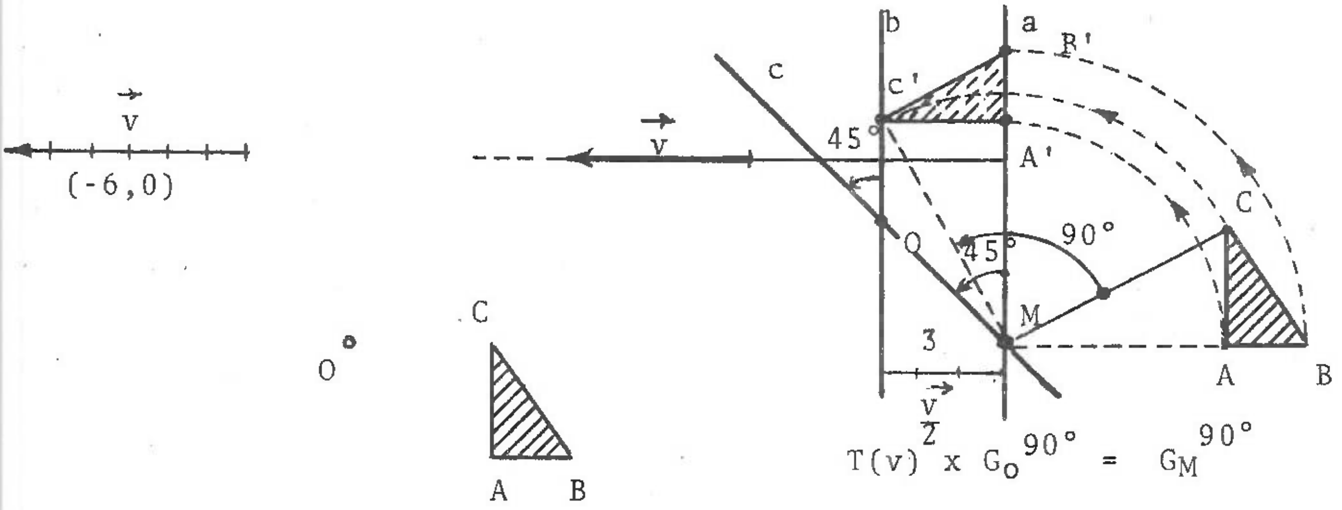


Esquemáticamente el razonamiento es el de la figura.

El primer eje a determinar es el b, trazando una perpendicular por O a la dirección de $\vec{v}$. Después habrá que buscar el a , que es paralelo al anterior y situado a una distancia $\frac{v}{2}$ (por delante del mismo). Por último se busca el eje c , que pasando por O (para que sirva en el giro) formará con b un ángulo mitad de φ .

Donde se corten $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{c}}$ estará el punto M.

Dados los datos de la figura, hallar el giro equivalente de $TxG_O^{\varphi=90°}$ y aplicarlo al triángulo ABC ;

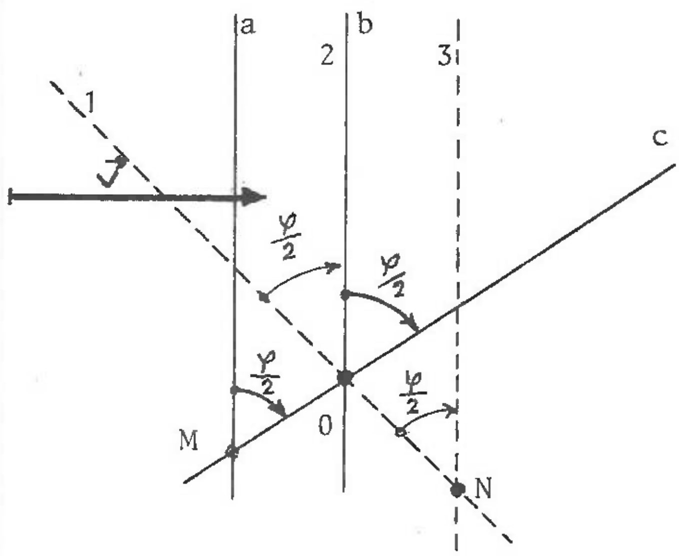


$$T(v/2) \times G_O^{90°} = G_M^{90°}$$

Como el vector tiene una longitud de 6 unidades, los ejes $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ estarán separados por 3 unidades. Además $\underline{a}$ estará a la izquierda de $\underline{b}$ pues el vector va de derecha a izquierda. El eje $\underline{\underline{b}}$ pasara por O y así sirve para el giro. El $\underline{\underline{c}}$ además de pasar por O formará con $\underline{\underline{b}}$ un ángulo de 45° (la mitad del giro). Donde se cortan $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{c}}$ obtenemos el punto M. (centro del nuevo giro). Una vez obtenido M ya podemos girar $\widehat{ABC}$ a su alrededor 90°, obteniéndose el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$.

(c) Veamos que no es conmutativo el producto anterior. Es decir

$$T(\vec{v}) \times G_O^{\varphi} \neq G_O^{\varphi} \times T(\vec{v}).$$

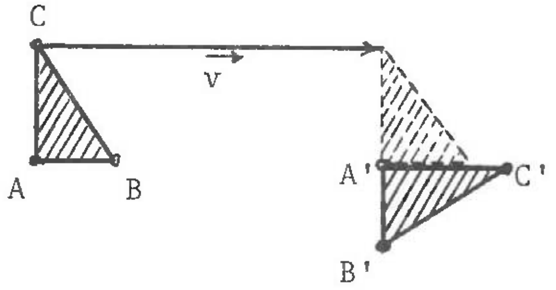


$\underbrace{T(\vec{v})} \times \underbrace{G_O^{\varphi}}$	$\underbrace{G_O^{\varphi}} \times \underbrace{T(\vec{v})}$
$Sa \times \underbrace{Sb \times Sb} \times Sc$	$S_1 \times \underbrace{S_2 \times S_2} \times S_3$
$\underbrace{Sa \times I \times Sc}$	$\underbrace{S_1 \times I \times S_3}$
$\underbrace{Sa \times Sc}$	$\underbrace{S_1 \times S_3}$
G_M^{φ}	G_N^{φ}

En efecto el eje b sirve para los dos casos pero obsérvese en la figura como en un caso, $1 \cap 3 = N$ y en otro $a \cap c = M$, varían los centros del giro producto aun conservándose el ángulo.

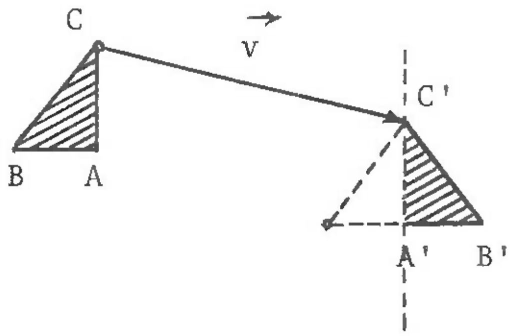
* Figuras directamente iguales e inversamente iguales.-

Si a una figura le aplicamos un movimiento directo se obtiene otra figura directamente igual que la primera. "Moviendo" una de ellas, sin sacarla del plano, podemos llevar a superponerla con la otra (cada punto sobre su homólogo). Así los triángulos de la figura son directamente iguales pues mediante una T($\vec{v}$) y un giro de centro A' y ángulo de $-90°$ llevamos a coincidir A con A', B con B' etc. etc. Si recortáramos las dos figuras y las pusiéramos sobre un plano podríamos superponerlas, sin sacarlas de él, deslizándolas sobre el plano.

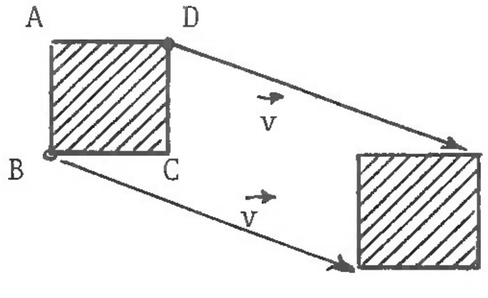


Las figuras directamente iguales tienen iguales los lados homólogos y los ángulos homólogos (en magnitud y signo).

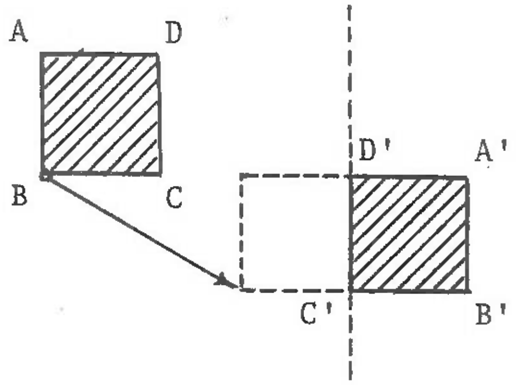
Si a una figura le aplicamos un movimiento inverso, se obtiene otra figura inversamente igual a la primera. Los lados homólogos de estas dos figuras serán iguales y los ángulos homólogos serán iguales en magnitud pero de signo contrario. Por eso es imposible que "moviendo" una de ellas, y sin sacarla del plano, pueda superponerse a la otra. Así los triángulos $A\hat{B}C$ y $A'\hat{B'}C'$ son inversamente iguales. Tienen $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ pero al ser los ángulos de signo contrario no se pueden llevar a superponer, salvo si giramos alrededor del eje $\overline{A'C'}$ (pero eso sería salirse del plano).



En ciertos casos, con polígonos regulares, puede llevarnos a error el no poner las letras. Así el cuadrado ABCD y el otro pueden parecer directamente iguales. Pero si el segundo lo hemos obtenido del primero a través de un movimiento inverso, es imposible superponerlos. Poniendo las letras se disipan las pegas, pues vemos que superponemos elementos NO homólogos. En efecto si recortáramos los 2 cuadrados y puestos en un plano veríamos que con una traslación llevamos D sobre D' y C sobre C'



C A P I T U L O   VII



Luego habría que girar alrededor de C'D' para la total superposición. Y entonces saldríamos del plano.

Las manos de una personal (vistas planas) serían inversamente iguales. Es imposible, puestas sobre una mesa, llevar a superponer cada dedo con su homólogo.

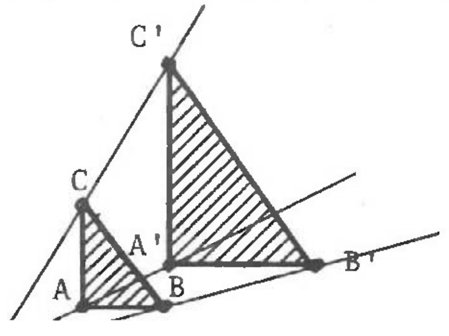
Queremos hacer notar que aunque hemos insistido más en el aspecto gráfico de los movimientos, éstos son correspondencias y por tanto conjuntos de parejas: la A y A' , la B y B' , la C y C' ------ (Cada pareja está formada por un punto y su homólogo en el movimiento). Si una figura F pasa a ser la F' según un movimiento y esta F' se convierte en la F según otro movimiento; este último no es más que la correspondencia inversa de la primera. Las parejas en este caso serían A' y A , B' y B , C' y C ------

---

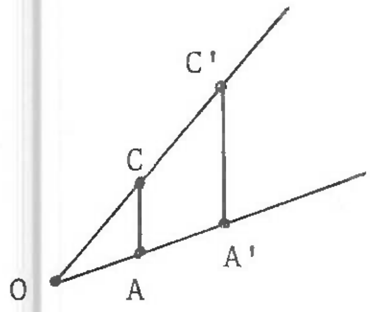
VII.-

* Homotecias. Propiedades. Figuras homotéticas.-

Vamos a ver ahora otro tipo de correspondencia, que es isogonal pero no isométrica: la homotecia. Se simboliza, H_O^k , siendo O el centro de la homotecia y k la razón de la misma. Definámosla: "Se llama H_O^k , a una transformación geométrica tal que a cada punto A del plano hace corresponder otro punto A' tal que estando alineado con O y A verifica: $\boxed{\overline{OA'} = k.\overline{OA}}$". Al punto A' se llama homólogo, imagen u homotético del A. La razón $k \in Q$ (que no sea el cero).

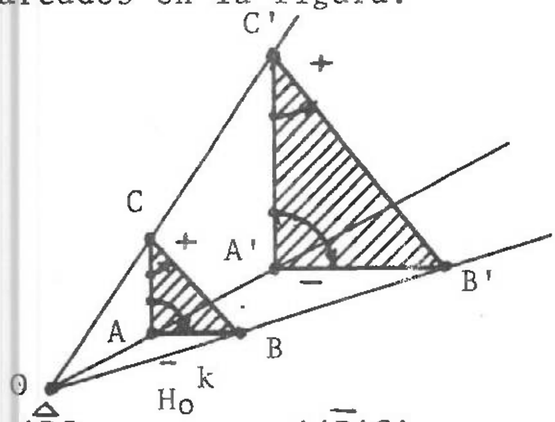


Sea p.e. el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura y apliquémosle una homotecia de centro O y razón k = 2. Se debe cumplir que O, C y C' estén alineados. Lo mismo O, B y B'. Y lo mismo O, C y C'. Por tanto trazamos por O las semitivamente. Sobre ellas estarán los puntos A', B' y C'. Además también debe verificarse que: $\overline{OC'} = 2.\ \overline{OC}$; $\overline{OB'} = 2.\ \overline{OB}$; $\overline{OA'} = 2\ \overline{OA}$. Luego sobre las semirrectas de antes, llevando el duplo de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ tenemos localizados los puntos A', B' y C' y por tanto (uniéndolos) el triángulo homotético del primero.



Si nos fijamos en los triángulos $\overset{\triangle}{OAC}$ y $\overset{\triangle}{OA'C'}$ vemos se verifica, según lo anterior: $\overline{OC'} = 2.\ \overline{OC}$; $\overline{OA'} = 2.\ \overline{OA}$. O bien $2 = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ luego $\dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = 2$. $\overline{C'A'}$ será paralelo a $\overline{AC}$ y estarán en la razón $k = 2$.

Vemos pues que la homotecia conserva el paralelismo entre segmentos homólogos y por tanto los ángulos. Siguiendo el criterio para los ángulos (mencionado cuando hablamos de traslaciones) vemos que éstos se conservan en magnitud y signo. Pueden ustedes comprobar los signos marcados en la figura.



$\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{H_O^k} \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Por tanto las propiedades de la homotecia son:

(1) Isogonalidad.

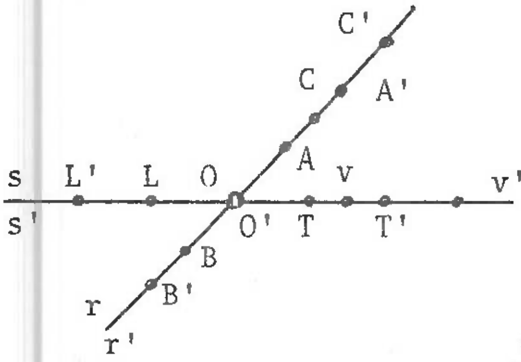
(2) Conserva el paralelismo.

(3) Segmentos homólogos son proporcionales $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$ siendo la cte. de proporcionalidad la razón de la homot.

Veamos ahora elementos dobles de la homotecia: Primero puntos dobles o invariantes. Serán aquellos puntos que: $M \xrightarrow{H_O^k} M$, por tanto deben cumplir $\overline{OM} = k.\overline{OM}$. Como $k \neq 0$ para que sea cierta la igualdad anterior $\overline{OM} = 0$. Luego M debe ser O (centro).

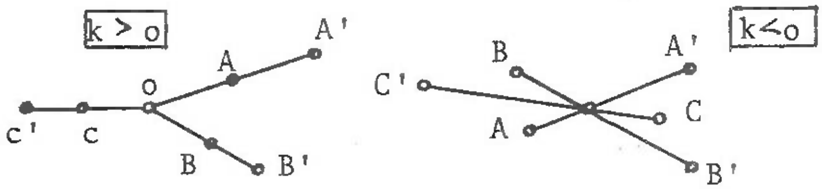
El único punto doble es el centro de la homotecia.

Rectas dobles son todas aquellas que pasan por O. Todos los puntos de ellas, por la condición primera de la homotecia, tendrán sus homólogos sobre ellas mismas, como vemos en la figura.



Vamos a ver diferentes casos según el valor de k.

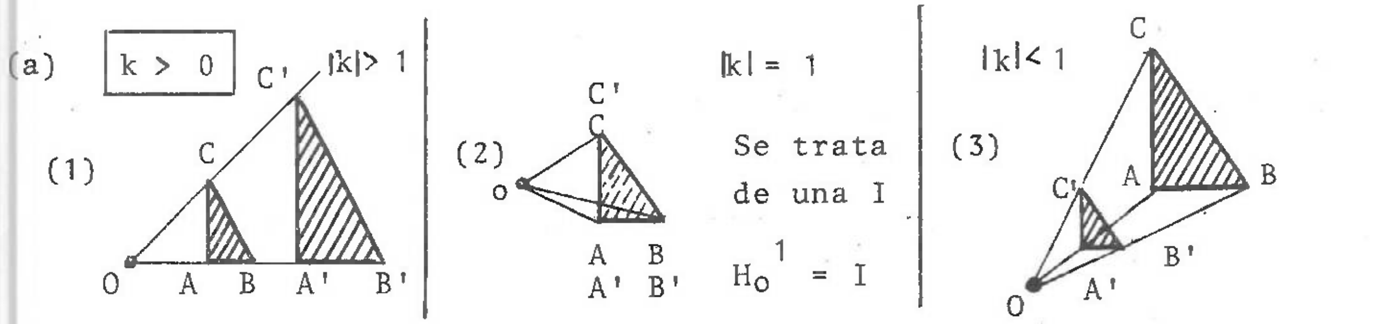
(a) Si k > 0 (homotecias positivas) cualquier punto y su homólogo están en la misma semirrecta de origen 0.



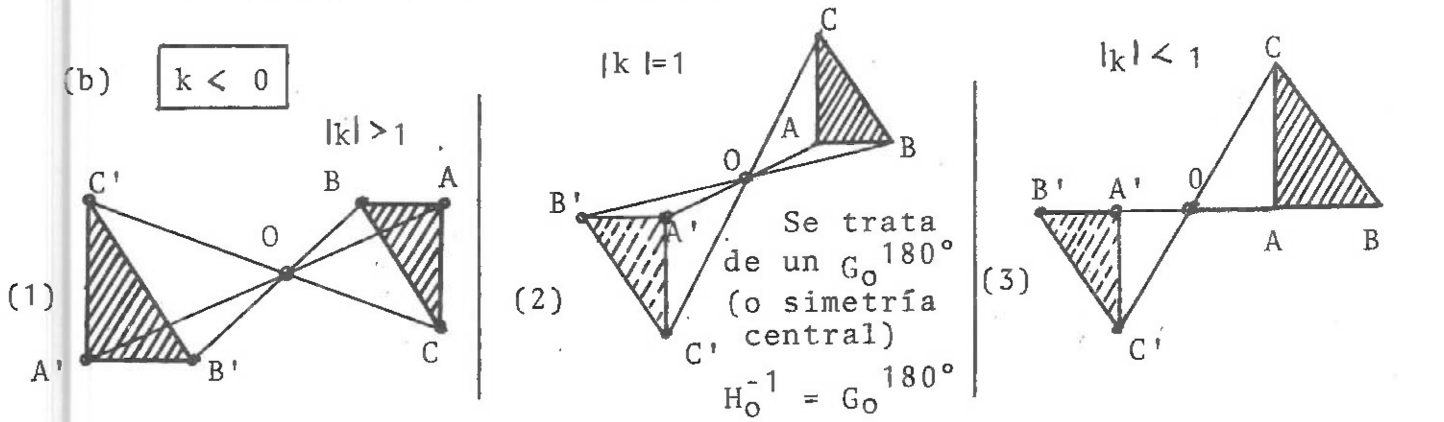
(b) Si k < 0 (homotecias negativas), cada punto y su homólogo se hallan situados en semirrectas opuestas de origen 0.

Además, dentro de cada uno de los grupos anteriores, el valor absoluto de k puede ser mayor que 1, igual a 1, o menor que 1. Y al aplicarlo a una figura pasará a ser mayor, quedará igual de tamaño, o reducirá su tamaño.

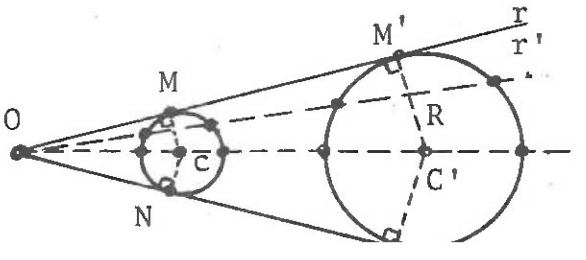
Vamos a aplicar al triángulo ABC cada una de estas homotecias:



AUMENTA EL TAMAÑO SE MANTIENE EL TAMAÑO DISMINUYE EL TAMAÑO



Veamos ahora el caso de una homotecia aplicada a una circunferencia: Sea la circunferencia de la figura de centro C y apliquémosle una homotecia H_O^k, siendo 0 exterior a la circunferencia y

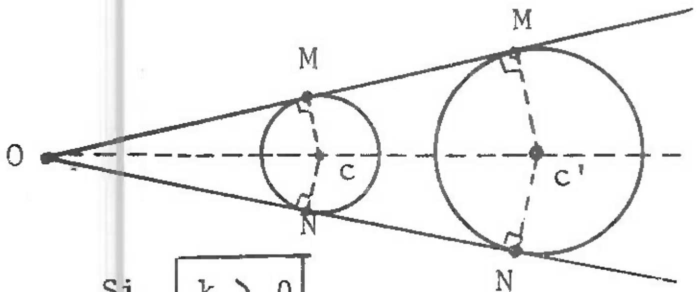


el homólogo de C, $\overline{OC'} = k.\overline{OC}$. Así tendremos el centro de la circunferencia homotética. Después, trazamos las tangentes a la circunferencia por 0 y hallamos los homólogos de M y N. ($\overline{OM'} = k\,\overline{OM}$ y $\overline{ON'} = k\,\overline{ON}$). De las igualdades anteriores $k = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$. Luego $\frac{\overline{C'M'}}{\overline{CM}} = k$. Y lo mismo $\frac{\overline{C'N'}}{\overline{CN}} = k$. Es decir, $\frac{R}{r} = k$, los radios de las circunferencias homotéticas están en la misma relación que la k.

La tangente r a la primera circunferencia es una recta doble, (lo mismo que la s). Sólo tiene un punto común (M) con la circunferencia. Sobre ella (la recta) tiene que caer el homólogo de este (M'). Y sólo habrá este punto. Luego la recta es también tangente a la nueva circunferencia, pues se han de conservar los ángulos. Análogamente sucede con S.

Veamos los cuatro casos que pueden darse variando la k y dejando quieto el centro de la homotecia 0, para una circunferencia que no contenga a 0.

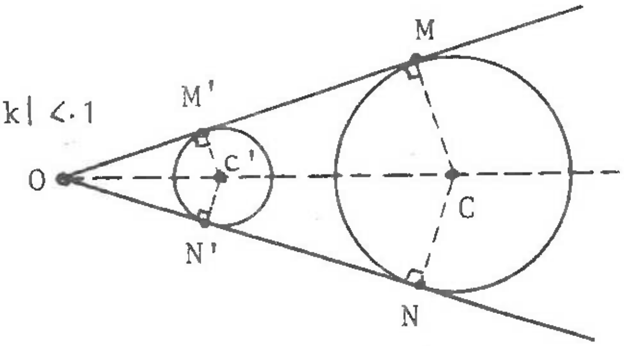
Los ángulos en M, M', N, N' han de ser RECTOS.



Si $\boxed{k > 0}$

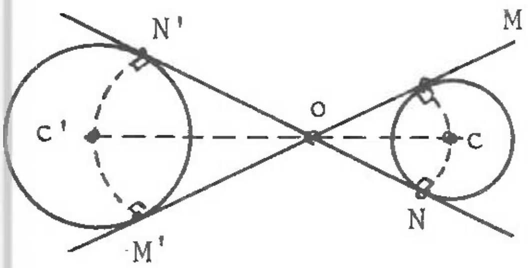
(1) $|k| > 1$

(2) $|k| < 1$

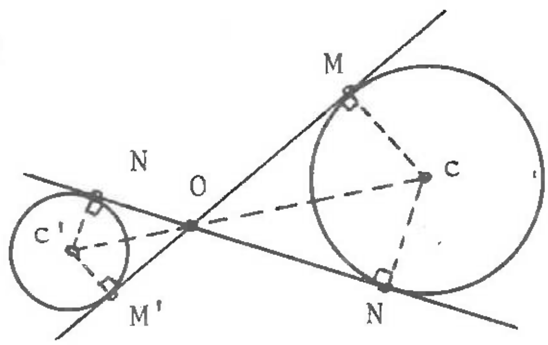


Si $\boxed{k < 0}$

(1) $|k| > 1$



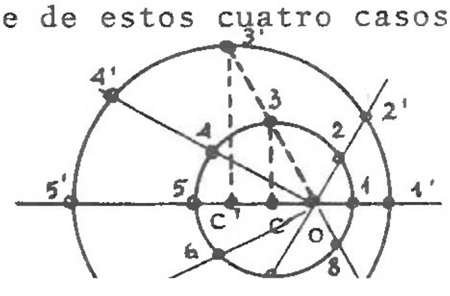
(2) $|k| < 1$



Aparte de estos cuatro casos están los de k = 1 (Identidad) y k =-1 (giro). Veamos ahora un caso de Ho^k con el centro O dentro de la circunferencia: Nos basta hallar el homólogo del centro C': $\overline{OC'} = k.\overline{OC}$. Análogamente

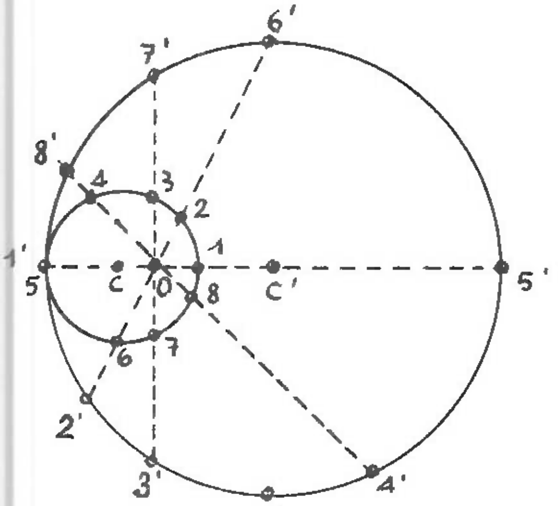
$k > 0$

$|k| > 1$



$k = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{O3'}}{\overline{O3}} = \dfrac{\overline{3'C'}}{\overline{3C}} = \dfrac{R'}{R}$; $R' = k.R$. Teniendo el centro y el radio es fácil construir la circunferencia homotética de la primera.

Si $k < 0$ y $|k| > 1$, tendremos por ejemplo el caso de la figura siguiente:



$C \xrightarrow{Ho^k} C'$

$1 \xrightarrow{Ho^k} 1'$

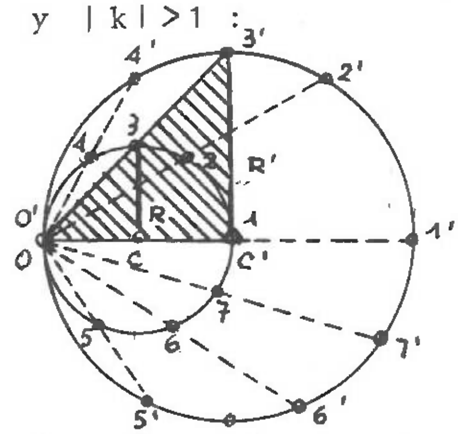
$2 \xrightarrow{Ho^k} 2'$

Vamos a analizar lo que sucede al aplicar a una Circunferencia una homotecia con centro en uno de sus puntos:

Si $k > 0$ y $|k| > 1$:

Siempre vemos que:

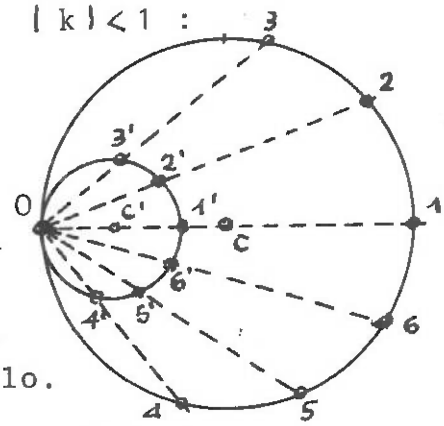
$$\boxed{\frac{R'}{R} = k}$$



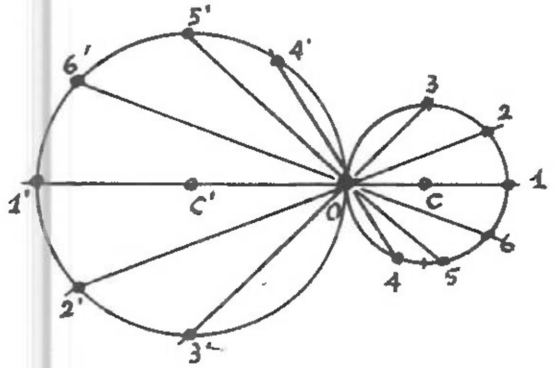
Las circunferencias son tangentes en 0. (interiormente)

Si $k > 0$ y $|k| < 1$:

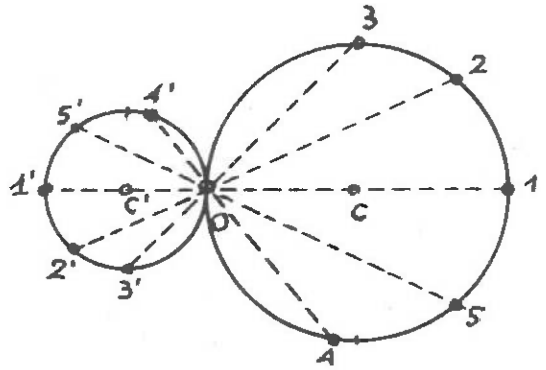
Muy parecido al anterior, sólo que la circunferencia C, reduce su tamaño en vez de aumentarlo.



Si $k < 0$ y $|k| > 1$:

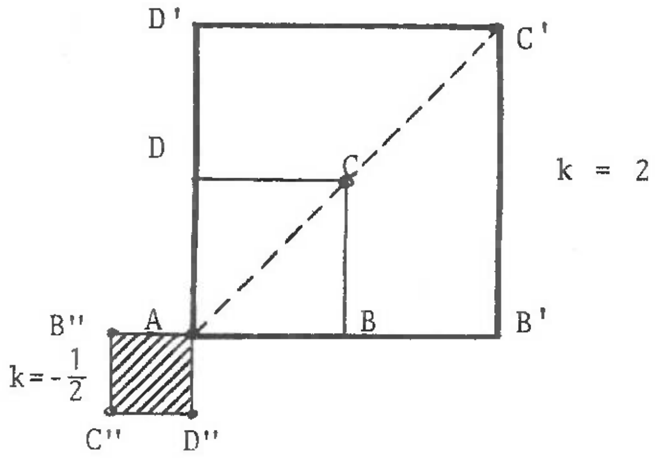


Si $k < 0$ y $|k| < 1$



Las circunferencias son tangentes (exteriormente) en 0.

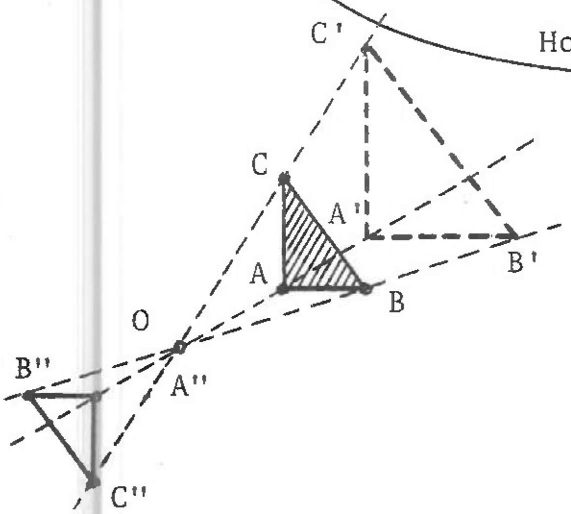
Por último vamos a aplicar una homotecia de centro A y razón 2 por un lado y otra de centro A y razón de $-\frac{1}{[illegible]}$ al cuadrado $\overset{\square}{ABCD}$ de la figura :



Hagamos notar como la homotecia tiene de común con los movimientos la conservación de ángulos pero NO conserva la métrica como ellos.

* <u>Producto de homotecias con el mismo centro</u>. <u>Propiedades</u>. <u>Neutro</u>. <u>Homotecia inversa.-</u> Aplicar a una figura un producto de homotecias consiste en aplicarle sucesivamente cada una de ellas. Así aplicar a la figura F el producto $Ho^{k_1} \times Ho^{k_2} \times Ho^{k_3}$ esquemáticamente consiste en:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "Ho^{k_1}"] \arrow[rrr, bend right, "Ho^{k_1} \times Ho^{k_2} \times Ho^{k_3}"'] & F' \arrow[r, "Ho^{k_2}"] & F'' \arrow[r, "Ho^{k_3}"] & F''' \end{tikzcd}$$



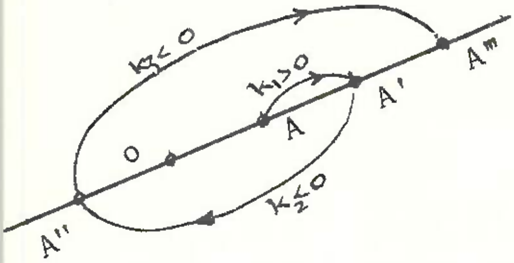
Así en la figura hemos aplicado al triángulo $\hat{ABC}$ el producto de dos homotecias de centro 0. La primera de $k > 0$ y $|k| > 1$ ha hecho aumentar la figura. La segunda de $k < 0$ y $|k| < 1$ disminuye el tamaño y lo pasa al otro "lado" de 0. Esquemáticamente tendremos:

$$\begin{tikzcd} \hat{ABC} \arrow[r, "Ho^{k_1}"] \arrow[rr, bend right, "Ho^{k_1} \times Ho^{k_2}"'] & A'\hat{B'}C' \arrow[r, "Ho^{k_2}"] & A''\hat{B''}C'' \end{tikzcd}$$

Analicemos lo que ocurre con un punto A cualquiera al aplicar el producto de homotecias con el mismo centro:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Ho^{k_1}"] \arrow[rrr, bend right, "Ho^{k_1} \times Ho^{k_2} \times Ho^{k_3}---"'] & A' \arrow[r, "Ho^{k_2}"] & A'' \arrow[r, "Ho^{k_3}"] & A''' \text{ ------} \end{tikzcd}$$

El punto A, A' y 0 deben estar alineados por ser homólogos. Lo mismo sucede con A', A'' y 0 ; y lo mismo con A'', A''' y 0. En definitiva A, A''' y 0 están alineados.



Por otro lado y por la segunda condición de la homotecia: $\overline{OA'} = K_1 . \overline{OA}$; $\overline{OA''} = K_2 . \overline{OA'}$; $\overline{OA'''} = K_3 . \overline{OA''}$ --------

Sustituyendo valores: $\overline{OA'''} = K_3 . (K_2\ \overline{OA'}) = K_3 . K_2 . K_1 . \overline{OA}$.

Es decir A, A''' y 0 están alineados y además $\overline{OA'''} = K . \overline{OA}$, (siendo $k = K_1 . K_2 . K_3$) . Se trata pues de una homotecia de centro 0 y razón el producto de las razones: $A \xrightarrow{Ho^{k_1 k_2 k_3}} A'''$

Si pensamos en el conjunto de las homotecias de centro 0, $\{Ho^k\}$. (Bastará dar a k valores del conjunto Q). Hemos definido en este conjunto una operación interna: el producto. Es interna porque al multiplicar homotecias sale una nueva homotecia que $\in \{Ho^k\}$.

Las propiedades que tiene esta operación respecto al conjunto $\{Ho^k\}$ son:

(1) Ser interna.

(2) Ser asociativa; $(Ho^{k_1} \times Ho^{k_2}) \times Ho^{k_3} = Ho^{k_1} \times (Ho^{k_2} \times Ho^{k_3})$.

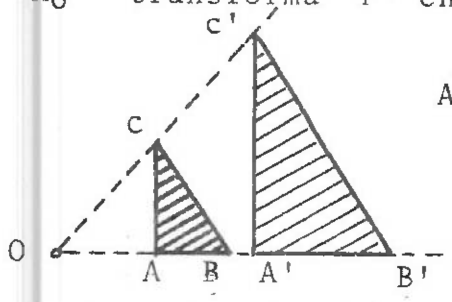
Efectivamente: $Ho^{k_1} \times Ho^{k_2} = Ho^{k_1 \cdot k_2}$, $Ho^{k_1 . k_2} \times Ho^{k_3} = Ho^{k_1 k_2 k_3}$ por un lado. Por otro $Ho^{k_2} \times Ho^{k_3} = Ho^{k_2 . k_3}$, $Ho^{k_1} \times Ho^{k_2 . k_3} =$ $= Ho^{k_1 k_2 k_3}$. Vemos sale lo de antes. Luego queda justificada la propiedad.

(3) Existe elemento neutro. Es la $Ho^1 = I$. En efecto cumple la condición de neutro: $H_0^k \times H_0^1 = H_0^{k.1} = H_0^k$. (Es la identidad, o transformación idéntica, vista como homotecia).

(4) Toda homotecia tiene su simétrica, (también se puede llamar inversa). Cumplen: $H_0^k \times H(simetr) = H_0^1 = I$; $H(simétr.) = H_0^{\frac{1}{k}}$. Es la homotecia del mismo centro y razón la razón inversa de la primera.

Si la H_0^k transforma F en F', la inversa

$H_O^{\frac{1}{k}}$ transforma F' en F . En esquema:



$$\overset{\triangle}{ABC} \; \underset{H_O^{1/k}}{\overset{H_O^{k}}{\rightleftarrows}} \; \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

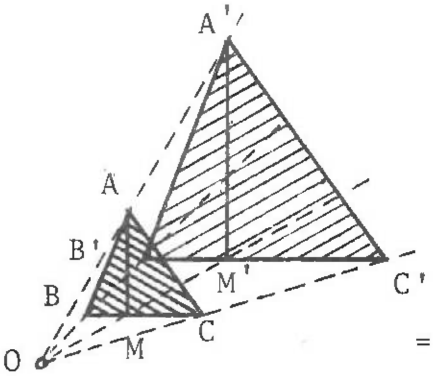
* <u>Razón entre las áreas de figuras homotéticas.-</u>

La razón o cociente entre las áreas de dos figuras homotéticas es igual al cuadrado de la razón de la homotecia.

Veamos la justificación de lo dicho en el caso de un triángulo, de un rectángulo y de un círculo;

<u>TRIANGULO</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Area del } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}.\overline{BC}\;.\;\overline{AM} \\ \text{Area del } \overset{\triangle}{A'B'C'} = \frac{1}{2}.\overline{B'C'}.\overline{A'M'} \end{array}\right\}$$



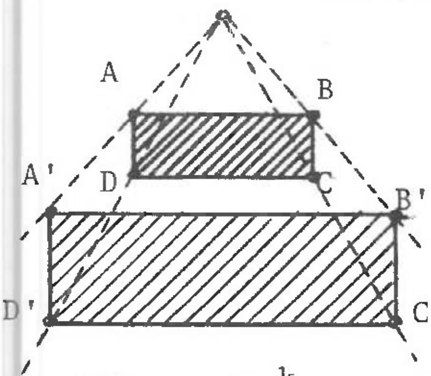
$$\frac{A(\overset{\triangle}{ABC})}{A(\overset{\triangle}{A'B'C'})} = \frac{\frac{1}{2}\;.\;\overline{BC}\;.\;\overline{AM}}{\frac{1}{2}\;.\;\overline{B'C'}\;.\;\overline{A'M'}} =$$

$$= \frac{\overline{BC}\;.\;\overline{AM}}{\overline{B'C'}.\overline{A'M'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\;.\;\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{1}{K}\;\frac{1}{K}\;\frac{1}{K^2}$$ pues

$\overline{A'M'} = K.\overline{AM}$ y $\overline{B'C'} = K.BC$. Por tanto: $\boxed{\dfrac{\text{Area }(\overset{\triangle}{A'B'C'})}{\text{Area }(\overset{\triangle}{ABC})} = K^2}$

<u>RECTANGULO</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Area de } \overset{\square}{ABCD} = \overline{DC}\;.\;\overline{CB} \\ \text{Area de } \overset{\square}{A'B'C'D'} = \overline{D'C'}.\overline{C'B'} \end{array}\right\} \frac{A(\overset{\square}{ABCD})}{A(\overset{\square}{A'B'C'D'})} = \frac{\overline{DC}\;.\;\overline{CB}}{\overline{D'C'}.\overline{C'B'}} =$$

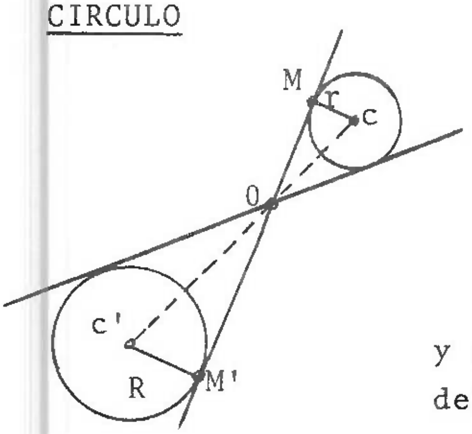


$$= \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}}\;.\;\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \frac{1}{K}\;.\;\frac{1}{K} = \frac{1}{K^2}$$; Invirtiendo los términos:

$$\boxed{\frac{A\;(\overset{\square}{A'B'C'D'})}{A\;(\overset{\square}{ABCD})} = K^2}$$

$$\overset{\square}{ABCD} \xrightarrow{H_O^{k}} \overset{\square}{A'B'C'D'}$$

CIRCULO



$$\frac{\text{Area (círculo C)}}{\text{Area (circular C')}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 = \left(\frac{1}{K^2}\right)$$

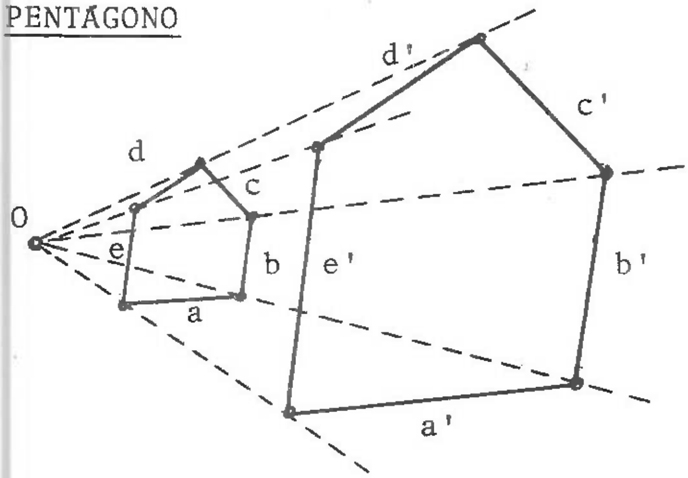
$$\boxed{\frac{\text{A (círculo C')}}{\text{A (círculo C)}} = K^2}$$

No olvidar que $\frac{R}{r} = k$

y en general esta ley es válida independientemente del tipo de figura que tengamos.

Otra propiedad interesante de las figuras homotéticas es' "La razón del perímetro de dos figuras geométricas homotéticas, es igual a la razón de la homotecia". Veámoslo para un pentágono y una circunferencia:

PENTÁGONO

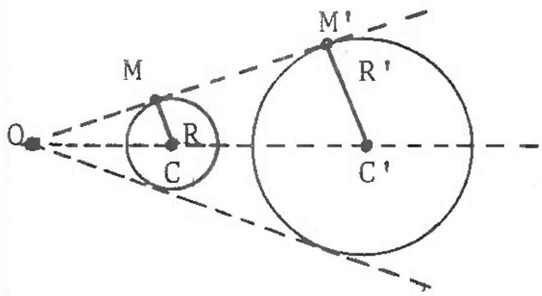


Sea un pentágono de lados a',b',c',d',e' homólogo del de lados a,b,c,d,e, en una H_O^k.

Por las propiedades de la homotecia se cumple que: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = K$. Sumando antecedentes y consecuentes persiste el cociente:

$$\boxed{k = \frac{a'+b'+c'+d'+e'}{a+b+c+d+e} = \frac{\text{perímetro}}{\text{perímetro}}}$$

CIRCUNFERENCIA



$$\frac{\text{Longitud c'}}{\text{Longitud c}} = \frac{2\pi R'}{2\pi R} = \boxed{\frac{R'}{R} = K}$$

Esta es una propiedad general.

* Semejanza. Definición. Propiedades. Figuras semejantes.-

Se define la semejanza como el producto de un movimiento por una homotecia: $\boxed{\text{semejanza} = \text{Movimiento} \times H_O^k}$. Si el movimiento es directo se trata de una semejanza directa. Si el movimiento es inverso es zón de semejanza".

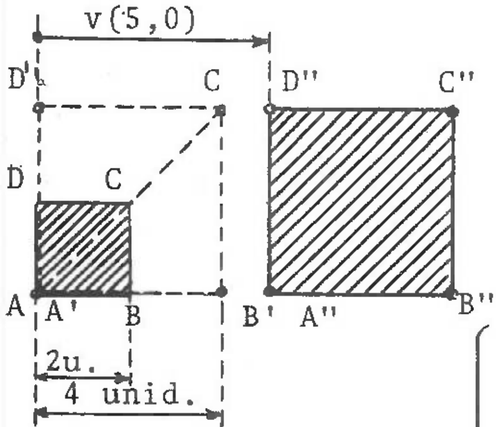
Dada una figura F, si le aplicamos un movimiento seguido de una homotecia (o al revés), obtendremos otra figura F'. Las figuras F y F' son figuras semejantes. Como el movimiento y la homotecia conservan los ángulos (por lo menos en magnitud), F y F' tendrán iguales ángulos homólogos. Además, como el movimiento es isométrico y la homotecia da proporcionalidad entre segmentos homólogos, los segmentos homólogos de figuras semejantes son proporcionales. En síntesis: "Angulos iguales y lados proporcionales" son las condiciones de polígonos o figuras semejantes.

La razón de las áreas de dos figuras semejantes será el cuadrado de razón de semejanza. (Recordar que el movimiento no altera el área de una figura. Sólo lo hace la homotecia).

La razón de los perímetros de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.

Veamos algún ejemplo de semejanza:

1) Si al cuadrado $\overset{\square}{ABCD}$ le aplicamos: $H_A^2 \times T[\vec{v}\,(5,\,0)]$, obtendremos otro cuadrado $\overset{\square}{A'B'C'D'}$ semejante al primero;



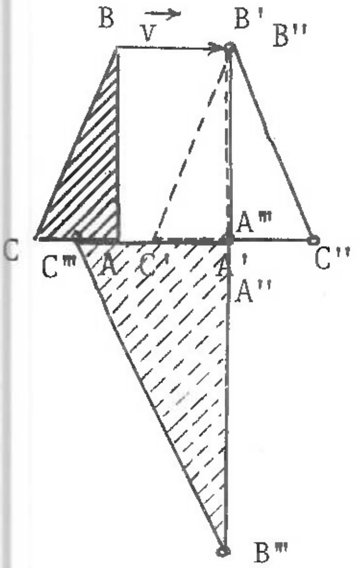
$$\begin{tikzcd}
\overset{\square}{ABCD} \arrow[r, "H_A^2"] \arrow[rr, bend right, "\text{Semej. Directa}"'] & \overset{\square}{A'B'C'D'} \arrow[r, "T(\vec{v})"] & \overset{\square}{A''B''C''D''}
\end{tikzcd}$$

Se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\text{perímetro})''}{\text{perímetro}} = \dfrac{16 \text{ unidades}}{8 \text{ unidades}} = 2 = k \\[2ex] \dfrac{(\text{Superficie})''}{\text{superficie}} = \dfrac{16 \text{ unidades}^2}{4 \text{ unidades}^2} = 4 = k^2 \end{array} \right\}$$

2) Si el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ le aplicamos: $T[\vec{v}\,(3,\,0)] \times S_{\overline{A'B'}} \times H_{A''}^{-2}$, obtendremos otro $\overset{\triangle}{A'''B'''C'''}$ semejante al primero ;

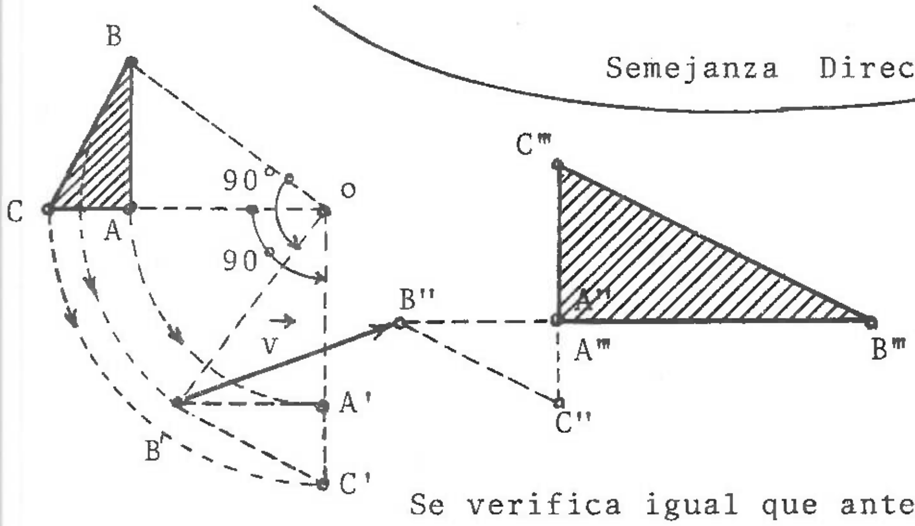
$$\begin{tikzcd}
\overset{\triangle}{ABC} \arrow[r, "T(\vec{v})"] \arrow[rrr, bend right, "\text{Semejanza Inversa}"'] & \overset{\triangle}{A'B'C'} \arrow[r, "S_{\overline{A'B'}}"] & \overset{\triangle}{A''B''C''} \arrow[r, "H_{A''}^{-2}"] & \overset{\triangle}{A'''B'''C'''}
\end{tikzcd}$$



Se verifica que $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\text{perímetro})'''}{\text{perímetro}} = 2 = K \\[2ex] \dfrac{(\text{superficie})'''}{\text{superficie}} = 2^2 = K^2 \end{array} \right\}$

3) Vamos a ver otro ejemplo de semejanza directa: Al triángulo $\widehat{ABC}$ le aplicamos: $G_O^{90°} \times T\left[\vec{v}\,(6,\ 2)\right] \times H_{A''}^{2}$ y obtenemos el $\widehat{A'''B'''C'''}$, semejante al primero.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \widehat{ABC} \arrow[r, "G_O^{90°}"] \arrow[rrr, bend right, "\text{Semejanza Directa}"'] & \widehat{A'B'C'} \arrow[r, "T(\vec{v})"] & \widehat{A''B''C''} \arrow[r, "H_{A''}^{2}"] & \widehat{A'''B'''C'''} \end{tikzcd}$$



DATOS $\left\{ \begin{array}{l} \overline{CA} = 2 \text{ unidades} \\ \overline{AB} = 4 \text{ unidades} \\ \overline{AO} = 5 \text{ unidades} \end{array} \right\}$

Se verifica igual que antes que:

$$\frac{(\text{perímetro})'''}{\text{perímetro}} = \frac{\overline{A'''B'''} + \overline{A'''C'''} + \overline{C'''B'''}}{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CB}} = \frac{8 + 4 + \sqrt{8^2 + 4^2}}{4 + 2 + \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12 + \sqrt{80})}{6 + \sqrt{20}} =$$

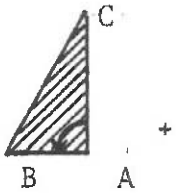
$$= \frac{12 + 2\sqrt{20}}{6 + \sqrt{20}} = \frac{2(6 + \sqrt{20})}{6 + \sqrt{20}} = 2 = K .$$ (Hemos aplicado Pitágoras para hallar las hipotenusas de los triángulos)

$$\frac{(\text{Superficie})'''}{\text{Superficie}} = \frac{\dfrac{\overline{A'''B'''} \cdot \overline{A'''C'''}}{2}}{\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}} = \frac{\overline{A'''B'''}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A'''C'''}}{\overline{AC}} = K \cdot K = K^2 = \frac{8}{4} \cdot \frac{4}{2} =$$

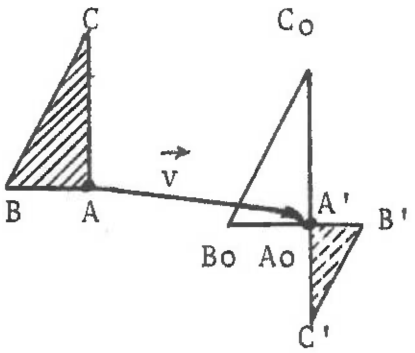
$$= 2 \cdot 2 = 4 .$$

4) Dados los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, queremos comprobar si son o no semejantes. Podemos comprobar (midiendo) la igualdad de sus ángulos y la proporcionalidad de sus lados homólogos. Otro procedi-

miento, puramente geométrico, consiste en aplicar un movimiento y una homotecia (o al revés) y ver si con ello pueden llevarse a superponer las dos figuras. Veámoslo siendo los triángulos los de la figura:



Angulos iguales y del mismo signo



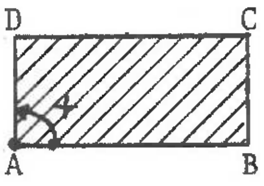
$\vec{v}\ (6, -1)$

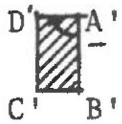
Llevamos a coincidir mediante una traslación dos puntos homólogos cualesquiera (por ejemplo A y A') . Así obtenemos el triángulo $\overset{\triangle}{AoBoCo}$. Observando que $\overline{AoCo}$ y $\overline{A'C'}$; $\overline{AoBo}$ y $\overline{A'B'}$ están en prolongación y unos son dobles de los otros, mediante una homotecia de centro A' y razón $-\frac{1}{2}$ podemos llevar Co sobre C' , B_o sobre B', que es lo que se pretendía. Luego son semejantes.

$$\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{T(\vec{v})} \overset{\triangle}{AoBoCo} \xrightarrow{H_{Ao}^{-\frac{1}{2}}} \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

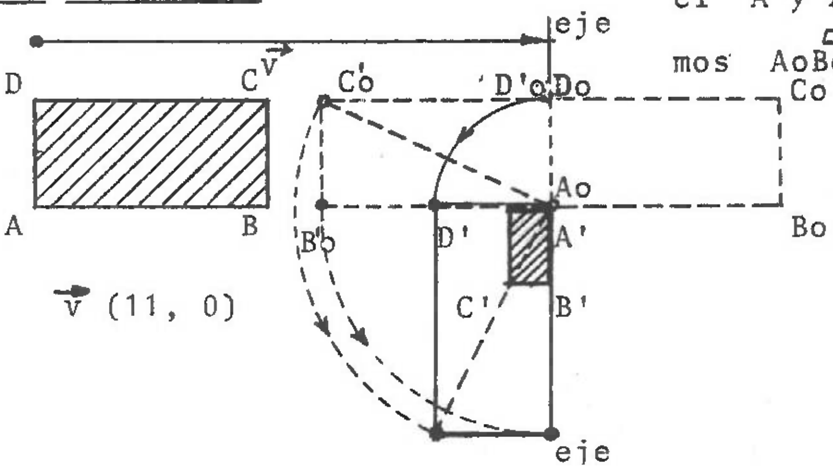
Semej. Directa

5) Dados los rectángulos $\overset{\square}{ABCD}$ y $\overset{\square}{A'B'C'D'}$ de la figura, comprobar si son semejantes ;





Angulos iguales pero signos contrarios



$\vec{v}\ (11, 0)$

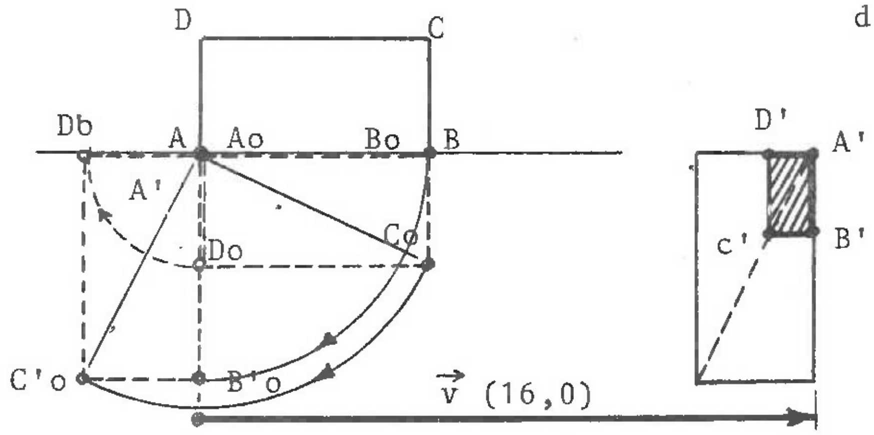
Al ser los ángulos opuestos la semejanza (si existe) será inversa.

Llevemos mediante una traslación a coincidir dos puntos homólogos, el A y A' por ejemplo. Obtenemos $\overset{\square}{AoBoCoDo}$. A continuación hacemos una simetría respecto a $\overline{AoDo}$ para cambiar el signo de los ángulos. Después un giro alrededor de Ao o A' y después una homotecia de centro A' y razón $\frac{1}{3}$.

C A P I T U L O   VIII

$$\begin{tikzcd} \square\, ABCD \arrow[r, "T(\vec{v})"] \arrow[rrrr, bend right, "\text{SEMEJANZA INVERSA}"'] & AoBoCoDo \arrow[r, "S_{\overline{AoDo}}"] & \square\, A'oB'oC'oD'o \arrow[r, "G_{A'}^{90^\circ}"] & H_{A'}^{\frac{1}{3}} \arrow[r] & \square\, A'B'C'D' \end{tikzcd}$$

Otra forma sería: $S_{\overline{AB}} \times G_A^{-90^\circ} \times T(\vec{v}) \times H_{A'}^{\frac{1}{3}}$ según se ve en el dibujo



A partir de lo dicho podría fácilmente deducirse los casos de semejanza de triángulos.

En realidad, el problema de cambio de escala de un dibujo es un problema de semejanza. La escala es la razón de semejanza. Esta es una de las aplicaciones más interesantes en dibujo, de la semejanza.

VIII

* Estructura de semigrupo, de grupo y de subgrupo.-

a) Se dice que un cierto conjunto A respecto a una operación * (estrella) tiene estructura de semigrupo cuando esta operación es interna y además asociativa.

Si también tiene la propiedad conmutativa, el semigrupo es abeliano o conmutativo.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales N respecto la operación de sumar, tiene estructura de semigrupo abeliano. (En este caso la operación estrella es una suma). En efecto: La suma de dos números naturales siempre da un número natural (interna). Además la suma es asociativa y conmutativa ; $(a + b) + c = a + (b + c)$;

b) Se dice que un cierto conjunto A respecto a una operación $*$ tiene estructura de grupo cuando cumple estas cuatro condiciones:

1) La operación es interna. O sea si $\left\{\begin{matrix} a \in A \\ b \in A \end{matrix}\right\}$; $a * b = c \in A$

2) Tiene la propiedad asociativa. Es decir $(a * b) * c = a * (b * c)$

3) Existe elemento neutro $\underline{n}$, dentro de A. El elemento neutro verifica, siendo m un elemento cualquiera de A, que: $m * n = n * m = m$

4) Todo elemento de A tiene su simétrico. Un elemento y su simétrico verifican que: $a * a_s = n$, (siendo a_s el elemento simétrico de a). Tanto $a \in A$, como $a_s \in A$.

5) Si además de las cuatro anteriores, cumple esta quinta de ser esta operación conmutativa, el grupo es conmutativo o abeliano. (Obsérvese por lo dicho, que todo grupo es a su vez semigrupo).

Ejemplo de grupos ya hemos visto varios en geometría aunque no les dimos ningún nombre. Así el conjunto de los vectores respecto de la operación de sumar ; el conjunto de traslaciones respecto a la operación de multiplicar; el de los ángulos respecto a la suma; el de los giros respecto al producto; el de las homotecias respecto al producto. Todos cumplían las condiciones anteriores. Y estos ejemplos, sólo en la parte geométrica. Veamos ahora grupos en conjuntos numéricos:

El conjunto de los números enteros Z respecto de la suma (+) : Esta operación es interna y asociativa. Elemento neutro es el 0 : $m + o = m$. El simétrico de cualquier número p, es su opuesto -p : $p + (-p) = 0$. Además es conmutativa la suma. Luego es grupo abeliano.

En cambio el conjunto Z respecto de la multiplicación NO es grupo. El neutro aquí sería el 1 : $m \times 1 = m$. Sin embargo el simétrico de un elemento m sería : $m \times m_s = 1$, $m_s = \frac{1}{m} \notin Q$ (No pertenece al conjunto de los números enteros). Al fallar una de las condiciones, no puede ser grupo.

Lo mismo ocurre con N respecto de la suma o del producto. No son grupos pues los simétricos caen fuera del conjunto (en la suma son números negativos y en el producto fraccionarios).

El conjunto Q de los números racionales es grupo abeliano respecto de las operaciones de sumar y de multiplicar. En efecto, en la suma el simétrico de $\frac{p}{m}$ será $-\frac{p}{m} \in Q$; y en el producto el simétrico de $\frac{p}{m}$ será $\frac{m}{p} \in Q$. Y las otras condiciones también los cumple. Así el neutro de la suma es el $0 \in Q$. El neutro del producto es el $1 \in Q$. Etc. etc.

Es curioso observar como conjuntos tan dispares en principio, como vectores, giros, homotecias, números racionales ...... respecto a operaciones determinadas tienen la misma estructura interna. Son grupos todos ellos. Por eso puede estudiarse en abstracto este ente de "grupo" para luego verter todas sus conclusiones a muchos campos diferentes. Con esta sola idea: grupo, abarcamos varias cosas a la vez. Luego su estudio en abstracto nos sintetiza la cuestión. Es una especie de esqueleto o estructura básica de los diferentes pisos o compartimentos que en él se apoyan.

c) Todo subconjunto de un grupo que a su vez sea grupo, recibe el nombre de subgrupo. Por ejemplo el conjunto $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ respecto de la suma es un subgrupo. ($B \subset Z$). Tiene neutro, 0 . Además el simétrico de cualquier elemento de B está en B. El conjunto $M = \left\{G_O^{-30°} ; G_O^{-20°} ; G_O^{-10} ; G_O^{0°} ; G_O^{10°} ; G_O^{20°} ; G_O^{30°}\right\}$ respecto del producto también es un subgrupo. (M C conjunto de los giros) .

* Estructura de anillo. Estructura de cuerpo.-

Se dice que un conjunto A tiene estructura de anillo respecto de las operaciones * y 0 (estrella y círculo), cuando verifican las propiedades siguientes :

(1) A es grupo conmutativo respecto de la operación * .

(2) La operación o tiene la propiedad asociativa. Es decir que:

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(3) La operación o tiene la propiedad distributiva respecto de la * por la derecha y por la izquierda. Es decir que:

$$\begin{cases} a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \\ (b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a) \end{cases}$$

Veamos algún ejemplo: El conjunto de los números racionales Q, respecto de las operaciones de sumar y multiplicar.

También el conjunto de los números enteros respecto de la suma y el producto cumplen las condiciones de ser anillo.

anterior que se cumplía. Por otro lado las (2) y (3) también son ciertas pues el producto es asociativo y distributivo respecto de la suma:

$$\left\{\begin{array}{l}(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \\ a \times (b + c) = (a \times b)+(a x c) \\ (b + c) \times a = (b \times a)+(c x a)\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}\right) \times \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \times \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) \\ \frac{m}{n} \times \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{m}{n} \times \frac{r}{s}\right) \\ \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) \times \frac{m}{n} = \left(\frac{p}{q} \times \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{r}{s} \times \frac{m}{n}\right)\end{array}\right\}$$

Si en un anillo la operación o es conmutativa, el anillo se denomina anillo conmutativo. (Los ejemplos anteriores son de este tipo). Si en el anillo existe el elemento neutro de la operación o, recibe el nombre de anillo unitario. (Los anteriores).

* Estructura de cuerpo.-

Se dice que un conjunto A, tiene estructura de cuerpo, respecto de las operaciones * y o cuando se verifican las propiedades siguientes:

(1) El conjunto A es grupo abeliano respecto * .

(2) El conjunto A (quitando el neutro de *), es grupo respecto o .

(3) La operación o tiene la propiedad distributiva respecto de la * por la derecha y por la izquierda.

Vemos que esta estructura incluye la de anillo. Todo cuerpo será anillo.

Un cuerpo es conmutativo, cuando la operación o sea conmutativa. Un ejemplo de cuerpo lo tenemos en el conjunto Q respecto de la suma y del producto. (Recuérdese era grupo respecto de las dos operaciones). El quitar el neutro de la suma al conjunto, en la (2) condición, es porque este neutro (que es el 0) no tiene simétrico respecto del producto: $0 \times s = 1$; $s = \frac{1}{0} = \infty$. Sale ∞ , que no podemos incluirlo en Q ya que es un límite y no un número. Al quitar el 0, todos los demás elementos, si tienen simétrico y puede cumplirse la condición (2).

La condición (3) ya la hemos visto se cumplía, en la pregunta anterior . Hagamos un esquema indicando cada una de estas estructuras:

Conjunto	Operaciones	Estructura	Condiciones
S	*	Semigrupo	- Operación interna. - Asociativa.
G	*	Grupo	- Operación interna. - Es asociativa. - Existe neutro. - Todo elemento tiene su simétrico.
A	* y o	Anillo	- Grupo abeliano respecto * . - La operación o es asociativa. - También es distributiva respecto de * por { la derecha y por la izquierda.
C	* y o	Cuerpo	- Grupo abeliano respecto de * . - {C - o} grupo respecto de o . - La operación o distributiva respecto * por { derecha e izquierda

NOTAS : { C - o } indica el conjunto C quitándole el o (neutro de la operación * en general.

"*" y "o" en nuestros ejemplos han sido "sumar" y "multiplicar". En general pueden ser todo tipo de operaciones.

Si a las condiciones anteriores se añade (como vimos anteriormente) la propiedad conmutativa, obtenemos los grupos, anillos o cuerpos conmutativos o abelianos.

====================

INDICE GENERAL

Página

CAPITULO IV

S E G U N D A   P A R T E

Capítulo V

= = = = = = = = = = =