Análisis Dinámico: Ecuaciones diferenciales

Jesús Getán y Eva Boj

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Marzo de 2014

Introducción

Con objeto de establecer un marco de trabajo adecuado a nuestro estudio, primero haremos las siguientes definiciones

Definición

Una **ecuación diferencial** es aquella que relaciona una o varias variables independientes, una función suya (incógnita) y sus derivadas hasta un cierto orden y la denotaremos

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{n)}\right) = 0.$$

i.e. la ecuación $2x + 3y + 5y' - 2y'' = 0$.

Cuando la función incógnita depende de varias variables tenemos una **ecuación diferencial en derivadas parciales** y la denotaremos

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,y\left(x_1,\ldots,x_n\right),\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n},\ldots\right)=0.$$

Cuando la función incógnita depende de una variable real se dice que la **ecuación diferencial es ordinaria** y la denotaremos

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{n)}\right) = 0.$$

Llamamos **orden** de una ecuación diferencial al de la derivada más elevada que en ella aparece.

i.e. la ecuación $2x + 3y + 5y' - 2y'' = 0$ tiene orden 2.

La expresión **normal** de una ecuación diferencial es

$$y^{n)} = F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{n-1)}\right).$$

i.e. la ecuación $y' + yx = 0$ la forma normal es $y' = -yx$

i.e. la ecuación $y'' = 2x + 3y + 5y' - 2$ viene dada en forma normal.

En lo que sigue estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias (en corto EDO) de orden 1

Observaciones sobre las soluciones de una EDO

Dada una ecuación del tipo $F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{n)}\right) = 0$, en general resulta fácil comprobar si una función $y = y\left(x\right)$ es solución de dicha ecuación, basta con sustituir en dicha ecuación la función y las derivadas de ella hasta el orden de la ecuación.

Comprobar si la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$ tiene a la función $y = e^{2x}$ como solución.

Efectivamente, si calculamos hasta la derivada segunda y sustituimos en la ecuación obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} y = e^{2x} \\ y' = 2e^{2x} \\ y'' = 4e^{2x} \end{array}\right\} \text{luego, sustituyendo en la ecuación obtenemos}$$

$$4e^{2x} - 5\left(2e^{2x}\right) + 6e^{2x} = (4 - 10 + 6)\, e^{2x} = 0e^{2x} = 0,$$

para todo valor x dado que la función exponencial es siempre positiva.

Por otra parte, la función $y = e^{3x}$ también es solución de la ecuación, como veremos a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} y = e^{3x} \\ y' = 3e^{3x} \\ y'' = 9e^{3x} \end{array}\right\} \text{luego, sustituyendo en la ecuación obtenemos}$$

$$9e^{3x} - 5\left(3e^{3x}\right) + 6e^{3x} = (9 - 15 + 6)\, e^{3x} = 0e^{3x} = 0.$$

para todo valor x dado que la función exponencial es siempre positiva.

Además podemos decir que la combinación lineal de las dos

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ también es solución de la ecuación.

La ecuación diferencial más simple es

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

que, recordando lo estudiado en integración, se resuelve

$$y = \int f(x)\, dx + c \text{ o bien } y = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

donde t es una variable auxiliar y x_0 es un valor inicial. En un caso existen infinitas soluciones o integrales y en otro sólo una. Por tanto podemos distinguir

Solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas sus soluciones.

Solución particular de una ecuación diferencial es cualquiera de sus soluciones.

En general, la solución general depende de unos parámetros cuya determinación a partir de unas condiciones iniciales da lugar a una solución particular.

EDO de primer orden y de variables separables

En general, es muy difícil resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden. Incluso la ecuación $y' = f(x, y)$, que aparentemente es simple, no puede resolverse por un procedimiento general ya que no existen fórmulas para todos los casos.

Estudiemos un tipo de ecuación que sí tiene solución.

Resolver $xy' - 2y = 0$

Podemos escribir $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$.

Separando variables $\dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x}$,

Resolviendo $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y| = 2\ln|x| + C$.

Al despejar resulta: $y = e^{2\ln|x|+C} = e^{C} e^{\ln x^2} = Cx^2$.

La solución general es: $y = Cx^2$.

Veamos el método genérico:

Sea la EDO de primer orden $y' = F(x, y)$, y hacemos

$$\begin{array}{ccc} y' = F(x,y) & \Rightarrow & y' = f(x)\,g(y), \\ \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) & \Rightarrow & \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx, \\ \text{al integrar} & \Rightarrow & \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx. \end{array}$$

Resultando un procedimento general.

Ejemplos

Resolver $y'y + x = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}y + x = 0 \quad &\Rightarrow \quad ydy = -xdx, \\ \int ydy = -\int xdx \quad &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \\ & \qquad y^2 + x^2 = C. \end{aligned}$$

Resolver $y' = ky$ donde $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = ky \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = kdx, \\ \int \frac{dy}{y} = \int kdx \quad &\Rightarrow \quad \ln|y| = kx + C, \\ &\quad y = e^{kx+C} = e^{kx}e^{C}, \\ &\quad y = Ce^{kx}. \end{aligned}$$

(Sydsaeter) Sea $C = C(t)$ el saldo de una cuenta corriente que evoluciona con el tiempo y $r = r(t)$ una tasa de interés continuo y C_o el saldo en el tiempo $t = 0$.

El modelo es $C' = r(t)\, C(t)$, que se resuelve por separación de variables.

$$
\begin{array}{rcc}
\frac{dC}{dt} = r(t)\, C(t) & \Rightarrow & \frac{dC}{C} = r(t)\, dt, \\
\int \frac{dC}{C} = \int r(t)\, dt & \Rightarrow & \ln|C| = \int r(t)\, dt, \\
\ln|C| = R(t) + K & \Rightarrow & C = e^{R(t)+K}, \\
 & & C = Ke^{R(t)}.
\end{array}
$$

En el tiempo $t = 0$ tenemos que C_o el saldo inicial, por tanto

$$C_o = Ke^{R(0)} \Rightarrow K = C_o e^{-R(0)}$$

y al sustituir en la solución general resulta

$$C = C_o e^{R(t)} e^{-R(0)} = C_o e^{R(t)-R(0)}.$$

Recordando que $R(t) - R(0) = \int_0^t r(s)\,ds$ donde s es una variable auxiliar, obtenemos

$$C(t) = C_o e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Resolver $\quad y' = x^3 - x.$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} dy &= \left(x^3 - x\right) dx, \\ y &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

EDO de primer orden y lineales

Las EDO de primer orden son de la forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,, \tag{1}$$

donde $P(x), Q(x)$ son funciones reales continuas.

Si $Q(x) = 0$ a la ecuación (1) se le llama lineal homogénea.

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea forman un espacio vectorial de dimensión uno.

Las soluciones de la ecuación lineal se obtienen sumando a una solución particular de la misma, la solución general de la lineal homogénea asociada.

Solución de la ecuación homogénea

La EDO lineal homogénea es de la forma

$$y' + P(x)\,y = 0.$$

Para encontrar la solución teórica haremos la siguiente prueba tentativa:

Consideramos $u(x) = y(x) \cdot v(x)$ en corto $u = yv$.

Al derivar se obtiene $u' = y'v + yv'$.

Si $u' = 0$ entonces $u = C$ donde C es una constante.

Por tanto tenemos que $0 = y'v + yv'$ al reorganizar, obtenemos

$$y' + \frac{v'}{v} y = 0.$$

Comparando con la EDO lineal homogénea, resultando

$$\frac{v'}{v} = P(x)$$

y seguidamente integramos la ecuación

$$\ln v = \int P(x)\, dx \Rightarrow v = e^{\int P(x) dx}$$

por tanto, de $C = yv$

$$C = ye^{\int P(x) dx}$$

que al reorganizar resulta

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}.$$

Que es la solución general de la EDO lineal homogénea.

Búsqueda de la solución particular

El método que utilizaremos es el de variación de constantes. Dada

$$y' + P(x)\, y = Q(x),$$

con la solución de la homogénea asosiada

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Ensayamos una solución particular de la forma

$$y = C\left(x\right) e^{-\int P(x)dx},$$

observando que

$$C = C\left(x\right),$$

es decir la constante la convertimos en una función de x, de ahí el nombre del método.

Derivamos,

$$y' = C'(x)\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)\, e^{-\int P(x)dx}\,(-P(x))$$

y sustituimos en la ecuación completa, resultando

$$C'(x)\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)\, e^{-\int P(x)dx}\,(-P(x)) +$$

$$P(x)\, C(x)\, e^{-\int P(x)dx} = Q(x)\,,$$

que al simplificar resulta

$$C'(x) = Q(x)\, e^{\int P(x)dx},$$

de donde, al integrar

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx.$$

Por tanto, la solución particular será

$$y = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Solución general

Siguiendo la nota inicial, la solución general será la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada y la solución particular encontrada, resultando

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + \int Q\left(x\right) e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Ejemplos

Resolver

$$y' - y = e^x.$$

La ecuación homogénea asociada es $\qquad y' - y = 0.$

La solución de la homogénea es $\qquad y = Ce^{-\int -dx} = Ce^x.$

Proponemos como solución particular

$$y = C(x)\, e^{x}.$$

Derivamos y obtenemos

$$y' = C'(x)\, e^{x} + C(x)\, e^{x}.$$

Sustituimos y e y' en la ecuación completa

$$C'(x)\, e^{x} + C(x)\, e^{x} - C(x)\, e^{x} = e^{x},$$

Simplificamos y resolvemos la ecuación diferencial resultante

$$C'(x)\,e^{x} = e^{x} \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x.$$

Por tanto, la solución particular es

$$y = xe^{x}.$$

La solución completa es

$$y = Ce^{x} + xe^{x}.$$

Resolver $\quad y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$

Solución de la homogénea: $\quad y' + 2xy = 0.$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \quad & \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2xdx, \\
\int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx \quad & \Rightarrow \quad \ln|y| = -x^2 + C \\
& \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}.
\end{aligned}
$$

Solución particular $y = C(x)\, e^{-x^2}$,

derivando $y' = C'(x)\, e^{-x^2} - 2xC(x)\, e^{-x^2}$

y sustituyendo en la ecuación resulta:

$$C'(x)\, e^{-x^2} - 2xC(x)\, e^{-x^2} + 2xC(x)\, e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

que al simplificar, queda $C'(x) = 2x$.

Resolviendo $C'(x) = 2x$ tenemos que $C(x) = x^2$,

por tanto, la solución particular es: $y = x^2 e^{-x^2}$.

La solución general es

$$y = Ce^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}.$$

Aplicaciones económicas

Ejercicio 1: (Sydsaeter) Sea $C = C(t)$ el saldo de una cuenta corriente que evoluciona con el tiempo y $r =$ una tasa de interés constante y C_o el saldo en el tiempo $t = 0$.
El modelo es $C' = rC(t)$, que se resuelve por separación de variables.

$$
\begin{array}{rcr}
\frac{dC}{dt} = rC(t) & \Rightarrow & \frac{dC}{C} = rdt, \\
\int \frac{dC}{C} = r\int dt & \Rightarrow & \ln|C| = r\int dt, \\
\ln|C| = rt + K & \Rightarrow & C = e^{rt+K}, \\
 & & C = Ke^{rt}.
\end{array}
$$

En el tiempo $t = 0$ tenemos que C_o el saldo inicial, por tanto

$$C_o = Ke^0 \Rightarrow K = C_o$$

y al sustituir en la solución general resulta

$$C = C_o e^{rt}.$$

Sustituyendo y simplificando obtenemos la fórmula general

$$C = C_o e^{r(t-t_o)}.$$

Ejercicio 2: El ingreso marginal de una empresa es proporcional a su gasto, con constante de proporcionalidad 5. Su gasto marginal es constante e igual a 4. Determinar el beneficio de la empresa en función de la cantidad producida si inicialmente no hay ingresos ni gastos.

El problema se modeliza mediante la ecuación $B(q) = I(q) - G(q)$.

Calculamos el gasto: $\dfrac{dG}{dq} = 4$ con $G(0) = 0 \Rightarrow G(q) = 4q$.

Calculamos el ingreso: $\dfrac{dI}{dq} = 20q$ con $I(0) = 0 \Rightarrow I(q) = 10q^2$.

Por tanto $B(q) = 10q^2 - 4q$.

Ejercicio 3**:** Determinar la función de demanda de un bien $Q = f(p)$ si sabemos que la elasticidad puntual de la demanda respecto del precio es $-\dfrac{3p^2+2p}{Q}$ y que cuando el precio es de 2 um la demanda asciende a 100 um.

Recordamos la fórmula de la elasticidad $\varepsilon = \dfrac{dQ}{dp}\dfrac{p}{Q}$.

Por tanto, $\dfrac{dQ}{dp}\dfrac{p}{Q} = -\dfrac{3p^2+2p}{Q} \Rightarrow dQ = -\dfrac{3p^2+2p}{p}dp$.

La solución es $Q = -\dfrac{3}{2}p^2 - 2p + C$ y con $Q(2) = 100$ tenemos que $Q = -\dfrac{3}{2}p^2 - 2p + 110$.

Ejercicio 4: El coste marginal de un producto en función de la cantidad producida viene dada por la función $q^3 + 2q$. Determínese la función de coste del producto, sabiendo que cuenta con un coste fijo de 5 euros.

$\dfrac{dC}{dq} = q^3 + 2q \Rightarrow C = \dfrac{1}{4}q^4 + q^2 + k.$
Con $C(0) = 5 \Rightarrow k = 5$
por tanto

$$C = \frac{1}{4}q^4 + q^2 + 5.$$

Ejercicio 5**:** La evolución de las ventas de cierto producto en el tiempo es proporcional a la función $f(t) = e^{2t-100}$. Si la constante de proporcionalidad es $1/3$, estudiar la trayectoria de la función de ventas.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}e^{2t-100} \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{6}e^{2t-100} + C.$$

Las ventas crecerán a medida que el tiempo pase.

Ejercicio 6: Dadas las funciones de oferta y demanda $S = -5 + p$ y $D = 10 - 3p$ en un mercado en competencia, calcular la expresión temporal del precio, sabiendo que el ritmo de variación del precio en el tiempo es proporcional al exceso de demanda sobre la oferta, siendo la constante de proporcionalidad $1/2$ y el precio inicial 20 euros.

Tenemos que $S = -5 + p$ y $D = 10 - 3p$.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}\left((10 - 3p) - (-5 + p)\right) \Rightarrow p = \frac{15 - Ce^{-2t}}{4}.$$

Si $p(0) = 20 \Rightarrow 20 = \dfrac{15 - Ce^{0}}{4} \Rightarrow C = -65$. Luego

$p = \dfrac{15 + 65e^{-2t}}{4}$ y $p_e = \lim_{t \to \infty} \dfrac{15 + 65e^{-2t}}{4} = \dfrac{15}{4}$.

Ejercicio 7: La tasa de nacimientos en una ciudad es de 3.5% anual y la tasa de mortandad es de 2% anual. También existe un movimiento neto de población que se va de la ciudad a una razón constante de 3.000 personas por año.Escribir la ecuación diferencial del modelo y dar una solución para una población actual de 100.000 de habitantes.

La ecuación que modeliza la situación es
$P' = (0.035 - 0.02)\,P - 3000.$
Tenemos que $P' - 0.015P = -3000 \Rightarrow$
Solución de la homogénea $P = ke^{0.15t}$.
Solución particular $P = 200.000$.
Solución general $P = ke^{0.05t} + 200.000$, la particula para $P(0) = 100.000$ es $P = -100.000e^{0.05t} + 200.000$.

Solución general $P = ke^{0.05t} + 200.000$,

la particular para $P(0) = 100.000$ es

$$P = -100.000e^{0.05t} + 200.000.$$

Ejercicio 8**:** Una cuenta bancaria tiene 20.000 euros ganando 5% de interés compuesto continuamente. Un pensionista utiliza la cuenta para pagarse a sí mismo una anualidad de 2.000 euros ¿cuánto tiempo hará falta para que el saldo de la cuenta sea cero?

La ecuación diferencial que modeliza la situeción es
$c' = 0.05c - 2000$.
Tenemos que $c' - 0.05c = -2000 \Rightarrow$
Solución de la homogénea $c = ke^{0.05t}$.
Solución particular $c = 40.000$.
Solución general $c = ke^{0.05t} + 40.000$, la particula para $c(0) = 20.000$ es $c = -20.000e^{0.05t} + 40.000$.
Por consiguiente si $c = 0$ tenemos
$0 = -20.000e^{0.05t} + 40.000 \Rightarrow t = 13,863$ años.

Ejercicio 9**:** Suponer que una vez que una planta de girasol ha empezado a crecer, la razón de crecimiento en cualquier tiempo es proporcional al producto de su altura con la diferencia de su altura en la madurez menos su altura actual. Dar una ecuación diferencial que $h(t)$, la altura al tiempo, la satisfaga.

El modelo es

$$\frac{dh}{dt} = kh(H - h)$$

con $k > 0$ y H la altura en la madurez.

Ejercicio 10: Sea $\dfrac{dV}{dp} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V}{p+3}\right)$ un modelo que describe las relaciones entre el precio y las ventas semanales de cierto producto, donde V el el volumen de ventas y p el precio del producto. Encontrar el volumen de ventas en función del tiempo si sabemos que la semana anterior se tuvo un volumen de ventas de 7.000.000 de euros y el precio de venta fue de 6 euros.

Sea $\dfrac{dV}{dp} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V}{p+3}\right)$. Por tanto

$$\frac{V'}{V} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{p+3} \Rightarrow V = C(p+3)^{\frac{-1}{2}}.$$

Como $V(6) = 7 \Rightarrow C = 21$, por tanto $V = 21(p+3)^{\frac{-1}{2}}$.

Ejercicio 11: Determinar la tendencia del beneficio de una empresa sabiendo que la tasa instantánea de variación de los ingresos es proporcional al beneficio inicial, y la de los gastos proporcional al beneficio existente en cada momento. Los ingresos y los gastos iniciales son 5 y 1 millones de euros y las constantes de proporcionalidad de 1/2 y 2.

$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\left(I_o - G_o\right) = \frac{1}{2}\left(5-1\right) \Rightarrow I = 2t + C.$

Como $I\left(0\right) = 5 \Rightarrow C = 5$. Por tanto, $I = 2t + 5$.

$\frac{dG}{dt} = 2\left(2t + 5 - G\right) \Rightarrow G' + 2G = 4t + 10 \Rightarrow G = Ce^{-2t} + 2t + 4.$

Como $G\left(0\right) = 15 \Rightarrow C = -3$. Por tanto, $G = -3e^{-2t} + 2t + 4$.

El beneficio se puede expresar como

$B(t) = 2t + 5 - \left(-3e^{-2t} + 2t + 4\right).$

Observa que $\lim_{t\to\infty} B(t) = 1$.