UTILIZACION DE MODELOS MATEMATICOS EN PSICOLOGIA

JAIME ARNAU GRAS

Departamento de Psicología Experimental
Universidad de Barcelona

Psicología matemática es un término de uso creciente en escritos y textos de Psicología, pese a que su identidad es todavía confusa. En los últimos años se han publicado gran número de trabajos cuyo objetivo ha sido la elaboración de un *modelo matemático*. Esto ha dado lugar si no a la creación de una nueva especialidad dentro de la Psicología, sí a un nuevo campo que atrae cada vez con mayor fuerza el interés de numerosos investigadores.

La Psicología matemática, a diferencia de las restantes áreas de investigación psicológicas, no pone su énfasis en el contenido de los fenómenos que centran su atención, sino, como veremos más adelante, en la descripción de los datos experimentales obtenidos en sus estudios. Ésta constituye, en definitiva, una de sus características definitorias.

Remontándonos en sus orígenes, puede decirse que la Psicología matemática está compuesta por cuatro ramas (Greeno, 1972). Dos de ellas, la Psicometría y los Diseños experimentales, son áreas tradicionales dentro del enfoque matemático. Las otras dos, Modelos matemáticos y Simulación de procesos psicológicos, son resultado de desarrollos recientes.

El origen inicial de la Psicología matemática tuvo lugar dentro del área de la Psicometría, al tratar de hallar sistemas de medición para los atributos psicológicos (inteligencia, actitudes, utilidad, etc.). Posteriormente, el estudio de los presupuestos básicos para la utilización de escalas de medida (Stevens, 1951) potenció la utilización de estructuras o modelos matemáticos. También, los Diseños experimentales, íntimamente ligados con la Psicometría, propició la investigación del tipo de inferencias válidas que pueden obtenerse a partir de los datos. Su desarrollo impulsó la creación de modelos matemáticos, ya que los Diseños sólo pueden ser usados en función de los presupuestos básicos subyacentes en dichos modelos (Winer, 1971).

El área relativa a la «elaboración y aplicación de los modelos matemáticos ha irrumpido con gran fuerza dentro del campo de la Psicología actual. Este nuevo enfoque de la Psicología matemática tiene su origen en la «Teoría estadística del aprendizaje» propuesta por Estes (1950). A partir de esta fecha, se han elaborado gran cantidad de modelos cuya aplicación abarca numerosas áreas (percepción, decisión, aprendizaje de pares asociados, identificación de conceptos, aprendizaje serial, detección de señales, etc.). En la mayoría de estos modelos se utiliza la teoría de la probabilidad, por lo que también se les conoce con el nombre de «modelos estocásticos».

La rama más moderna de la Psicología matemática está integrada por estudios sobre «simulación» de los procesos psicológicos, empleándose para ello, computadoras electrónicas. Mediante la simulación por computadora, sobre la base de complejos modelos matemáticos, pueden derivarse predicciones experimentales empíricas, lo cual propicia la planificación de experimentos cuyo único objetivo es buscar el valor de los parámetros que figuran en las ecuaciones derivadas de los modelos.

Como hemos afirmado, la elaboración de «modelos matemáticos» constituye un paso previo tanto para la aplicación de medidas como para la utilización de diseños o el estudio de los procesos de simulación. Este hecho es causa de que entre esas cuatro ramas exista un progresivo acercamiento.

El «modelo matemático» no sólo es el aglutinante de los diversos desarrollos de la Psicología matemática, sino que es su primordial objetivo. Desde esta perspectiva podemos decir que la Psicología matemática es aquella parte de la Psicología que se ocupa de la *elaboración, desarrollo y aplicación de los modelos matemáticos*. En virtud, pues, de su propio carácter, la Psicología matemática presenta su interés más teórico que empírico (Miller, 1964), centrándose no en sus contenidos, sino en la temática metodológica. Su particular concepción ha determinado la ejecución de un tipo de experimentos completamente diferentes de los que suelen realizarse cuando lo que se trata de analizar es el contenido psicológico de los fenómenos. La principal preocupación de esta nueva clase de trabajos es la búsqueda de pruebas que confirmen las derivaciones hechas a partir de los modelos. Para la Psicología matemática la experimentación es un auténtico campo de pruebas de los modelos. Y es precisamente esta clara preocupación teórica lo que determina la selección de las áreas que mejor se ajustan a la verificación de los modelos. Esta elección, repetimos, no viene determinada en función de intereses puramente psicológicos, se debe, más bien, a motivos de carácter metodológico. Como señala Restle (1971), el hecho de que la Psicología matemática pueda cambiar rápidamente de un campo a otro demuestra que «no es el contenido lo que primordialmente atrae su atención».

La presentación de una serie de ejemplos nos va a permitir comprobar que el interés de la Psicología matemática se centra en la efectividad de los modelos y no en los datos en sí mismos. Consideremos una investigación sobre la motivación animal. Un enfoque experimental tradicional puede plantearse el estudio del posible efecto de la «complejidad estimulativa sobre la conducta exploratoria» (Arnau y col., 1975). En esta misma temática, la Psicología matemática se interesaría, más bien, por el carácter probabilístico de las conductas en relación a las correspondientes pautas estimulativas. Para ello se elaboraría un modelo previo asignándose a cada una de las condiciones experimentales una determinada probabilidad de elección. En este segundo caso, el objetivo del experimento sería comprobar si las probabilidades predichas por el modelo se confirma o no. Fijémonos en un segundo ejemplo. Underwood, Ham y Ekstrand (1962) realizaron un experimento en el que se intentaba medir el posible efecto del significado en un tipo de aprendizaje de pares asociados, para lo cual se diseñó una investigación en la que el primer elemento del par (estímulo-señal) variaba de acuerdo con la dimensión «significado». En este mismo estudio la Psicología matemática trataría de averiguar si los «componentes de estímulo» (el primer elemento del par) se muestrean independientemente (modelo lineal), o bien en configuraciones muestreadas de ensayo a ensayo (modelo patrón).

En el grado en que los modelos matemáticos se utilizan para la descripción y predicción de los fenómenos psicológicos, las matemáticas constituyen el único procedimiento para derivar una serie de enunciados empíricos que deben ser probados experimentalmente. Esto ha obligado a los psicólogos a formular las teorías de forma clara y precisa, de modo que permitan análisis y tratamientos en términos matemáticos. Así pues, la Psicología matemática no sólo ha determinado la elaboración de teorías «lógicamente claras y coherentes», sino que ha contribuido a perfeccionar y desarrollar teorías que aún no habían sido formalizadas.

PAPEL DE LOS MODELOS MATEMATICOS

Durante la década de los 50, la gran preocupación de los psicólogos matemáticos se orientó hacia «los teoremas más que hacia los conceptos y axiomas básicos» (Estes, 1972). La novedad del uso de modelos matemáticos en Psicología, junto con el atractivo que ejercía la utilización de herramientas de trabajo que hasta entonces se habían considerado privativas de las ciencias físicas fueron la causa de que los investigadores se dedicaran a acumular datos sobre el funcionamiento de dichos modelos.

El uso de las matemáticas dentro de la Psicología suponía la realización de viejos anhelos. Ebbinghaus (1885) y Thorndike (1898) habían ya propugnado su utilización. Cincuenta años más tarde, Hull (1943) dio un impulso definitivo a la Psicología matemática al desarrollar una teoría totalmente formalizada. Su pretensión, intentar reducir la Psicología a un conjunto de principios y postulados expresados matemáticamente, fue demasiado ambiciosa, pues las predicciones derivadas a partir de sus postulados no pudieron verificarse numéricamente. Su proyecto fue excesivamente amplio, ya que los conocimientos experimentales no eran, ni son todavía, lo suficientemente abundantes como para dar origen a síntesis totalizadoras de carácter matemático. Sólo a partir de modelos matemáticos, a mitad de camino entre la teoría y el mundo físico se pueden llegar a inferir predicciones, con un mínimo margen de error, sobre aspectos psicológicos muy específicos.

Ahora bien, si se pretende establecer la función del modelo de un modo preciso, es necesario hacer una distinción entre teoría y modelo.

Toda teoría requiere el enunciado de un conjunto de términos conocidos, frecuentemente, con el nombre de «términos primitivos». A continuación se definen el tipo de relaciones que se establecen entre dichos términos convirtiéndose en los «axiomas de la teoría». A partir de los términos primitivos y de los axiomas se derivan una serie de teoremas (proposiciones empíricas) mediante un procedimiento deductivo. El carácter básico de toda teoría que pretende tener una coherencia interna es la imposibilidad de derivar dos deducciones que sean contradictorias. Y puesto que, por otra parte, un conjunto de axiomas, de determinada complejidad, permite obtener un gran número de deducciones que no siempre pueden llegar a enunciarse totalmente, se puede constatar la consistencia interna de una teoría «mostrando que existe un modelo». Según Atkinson, Bower y Crothers (1965) un modelo es considerado «como un caso especial de una teoría». Las teorías contienen formulaciones lo suficientemente generales como para ser aplicadas a más de una clase de fenómenos. La restricción o acotación de una teoría y su referencia a una situación concreta la convierte en un modelo. De ahí, como afirma Atkinson y otros, el modelo constituye un caso especial de una teoría por cuanto la teoría, a través de este modelo, es aplicada a una situación experimental particular. En suma, las teorías suelen probarse a través de los modelos.

PROPIEDADES DE LOS MODELOS MATEMATICOS

Los modelos, especialmente los matemáticos, parten de suposiciones altamente específicas que han sido establecidas para caracterizar situaciones empíricas muy concretas. En ello radica uno de los aspectos cruciales que diferencia el modelo de la teoría. Así, por ejemplo, si las teorías psicológicas suelen referirse a aspectos muy generales de la memoria, aprendizaje, percepción o motivación, los modelos presentan una relación explícita a aspectos muy concretos de cada una de las temáticas psicológicas. A título de ejemplo, dentro del área de la percepción, se han propuesto modelos muy concretos como el del «Nivel de adaptación» de Helson (1964), o el de la «Detección de señales» de Tanner y Swets (1954); en el área del aprendizaje, podemos citar los modelos matemáticos de Estes (1950) y Bush y Mosteller (1951), que han potenciado la creación y desarrollo de gran cantidad de modelos matemáticos; en el área de la memoria, se puede citar el modelo de «Memoria a corto y largo plazo» de Atkinson y Shiffrin (1964), y el de «Aprendizaje de pares asociados» de Atkinson y Estes (1963); por último, en el área de la motivación, tenemos el modelo de «Decisión» de Siegel (1959), y el de «Elección» de Luce (1959). Todos estos modelos son matemáticos, altamente específicos, y pueden considerarse como teorías particularizadas que se aplican a contextos muy concretos.

De otro lado, los modelos matemáticos utilizan, en la derivación de los enunciados empíricos (teoremas), el cálculo matemático; en especial, la teoría de la probabilidad. En virtud del tratamiento matemático de los postulados del modelo y de la derivación de una serie de expresiones cuantitativas exactas, el modelo matemático permite la predicción, con un pequeño margen de error, de las posibles relaciones que suelen presentar los datos experimentales. Así, mediante el modelo se puede obtener una estimación teórica de las características y ordenamientos que presentan los datos producidos secuencialmente. En el grado, pues, que el modelo permita una correcta predicción de un determinado estadístico y éste coincida con la estimación del mismo a partir de los datos, se concluye que el modelo es una buena descripción de la situación experimental.

Por último, el modelo matemático, a diferencia de la teoría, suele presentar una estrecha vinculación con los datos empíricos. De esta forma el modelo se convierte en una herramienta teórica de fácil manejo que permite la introducción de reajustes a fin de describir adecuadamente los datos experimentales. Por esta razón, no es nada sorprendente encontrar que dos o más modelos se ajustan con éxito a una misma situación. Concretamente, Yellott, Jr. (1969), ha publicado un trabajo en el que se comparan dos modelos matemáticos: el modelo patrón de N elementos (Atkinson y Estes, 1963), y el modelo lineal (Bush y Mosteller, 1955). Yellot constata que cuando ambos modelos son aplicados a una situación de Aprendizaje de probabilidad no contingente presentan una misma efectividad predictiva. En cambio, al ser aplicados a una nueva situación —Programa de refuerzo de éxitos no contingente— se da una diferencia entre ambos. Así para un tipo concreto de probabilidad, $\delta = 0{,}8$, el modelo patrón de N elementos es superior al modelo lineal. Cuando, por el contrario la probabilidad es $\delta = 1{,}0$, ninguno de los dos modelos es capaz de proporcionar predicciones válidas de los resultados.

Es aún prematuro, dado el estado actual de la Psicología matemática, hacer un balance de la potencia predictiva de los modelos matemáticos. Se puede incluso constatar la existencia de una relativa rivalidad entre diferentes modelos en relación a una mejor descripción de los datos experimentales.

Existe, por otra parte, un evidente esfuerzo, por parte de los psicólogos matemáticos, en ampliar el campo de aplicación de los modelos con objeto de garantizar su validez. Esto, junto a la alta especialización de los modelos, contribuye a que todavía no se pueda contar con una «teoría matemática que englobe a todos los modelos». «Tan poderosa teoría no se encuentra aún en la escena contemporánea y con toda probabilidad no lo hará durante algún tiempo. Sin embargo, la actividad teórica a nivel inferior continúa a marcha estable» (Bower, 1973).

ESTRUCTURA DE LOS MODELOS MATEMATICOS

Si los modelos matemáticos están formados por un conjunto de símbolos y operaciones matemáticas que permiten deducir una serie de consecuencias verificables a partir de las suposiciones básicas, los datos obtenidos de los experimentos son los encargados de confirmar o falsear dichas consecuencias. Es, por tanto, conveniente que se analicen los aspectos más importantes que concurren en todo modelo matemático:

a) Deben establecerse de un modo claro y preciso los términos primitivos y axiomas (reglas sintácticas).

b) Tienen que definirse, de forma concisa, las reglas de aplicación del modelo a una situación experimental. Es decir, todo modelo deberá tener una referencia explícita a una situación experimental concreta (reglas de correspondencia).

c) Las deducciones hechas a partir de los axiomas del modelo han de realizarse de acuerdo con el cálculo matemático. Sólo así puede llegarse al enunciado de expresiones cuantitativamente exactas.

d) Toda expresión numérica derivada del modelo debe ser verificada mediante los datos obtenidos por procedimiento experimental.

Coombs, Raiffa y Thrall (1954), representan la función del modelo matemático de acuerdo con el esquema siguiente: (Fig. 1)

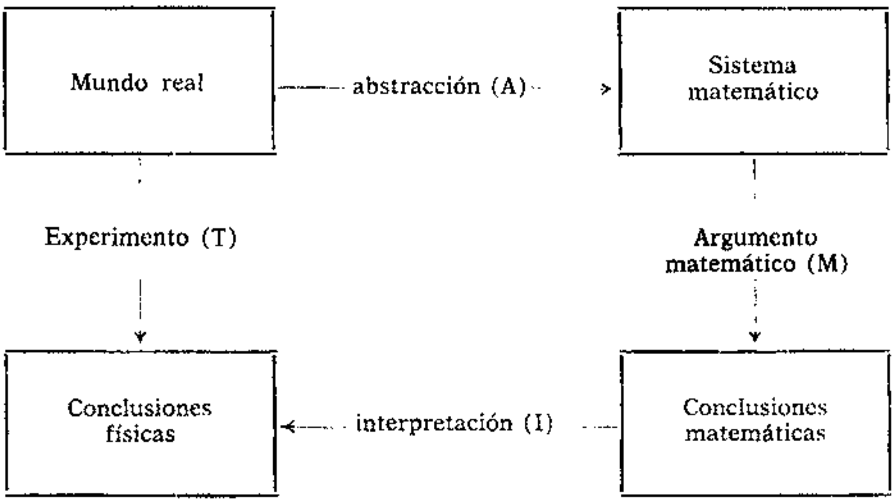

FIG. 1. Función del modelo matemático según Coombs, Raiffa y Thrall (1954, p. 133).

Según dicho esquema, el científico debe partir siempre del mundo real o físico, del que abstrae una descripción numérica o matemática del mismo (modelo matemático). La manipulación matemática del modelo permite llegar a una serie de conclusiones, conclusiones físicas, a través del proceso de interpretación. Estas conclusiones físicas sólo pueden verificarse en el caso que sea posible llevar a cabo un plan de verificación experimental. Sólo así se puede tener una prueba del modelo.

Sería tema de discusión si los modelos surgen de una consideración prevía de una secuencia física a partir de la cual, por medio de un proceso de abstracción (A), se llega a la formulación de un modelo, o bien, si se debe partir de un modelo ya elaborado para aplicarlo, mediante las correspondientes reglas de referencias, a una situación real. Dejando aparte la discusión sobre el posible origen de los modelos, su estructura sigue siendo la misma.

> «Los modelos matemáticos de los fenómenos empíricos permiten el desarrollo de una ciencia cuando ha sido acumulada una suficiente cantidad de información cuantitativa. Esta acumulación puede utilizarse para señalar la dirección en la que los modelos deberían ser construidos y para probar la adecuación de tales modelos en sus estados intermedios» (Bush y Mosteller, 1951, p. 313).

DESCRIPCION DE DOS MODELOS MATEMATICOS

El objetivo de los modelos matemáticos consiste en predecir con exactitud los datos numéricos que proporciona una situación experimental. Aunque los modelos matemáticos poseen un amplio campo de aplicación, es en el área del aprendizaje donde se han aplicado con mayor frecuencia. Dentro del campo del aprendizaje se han utilizado, fundamentalmente, dos modelos cuyas propiedades se ajustan mejor a esta situación. Por una parte, tenemos el modelo de «tamaño fijo de muestra» de Estes basado en su teoría estadística del aprendizaje, y por otra, el modelo «lineal» propuesto por Bush y Mosteller.

El modelo de tamaño fijo de muestra se deriva, como ya hemos indicado, de la teoría estadística del aprendizaje de Estes (1950) y se fundamenta en el carácter probabilístico de los «elementos de estímulo» que son muestreados, en cada ensayo, de la población de elementos de estímulo que constituye la variable o señal manipulada por el experimentador. Estas subpoblaciones de estímulos son muestreadas según una proporción constante. Dada la especial concepción que este modelo tiene con respecto al estímulo, ha recibido el nombre de «modelo de muestreo del estímulo».

Bush y Mosteller (1951) han elaborado un modelo que no parte de las suposiciones que sobre el estímulo establece Estes. Según el modelo de Bush y Mosteller el cambio en la probabilidad de ocurrencia de la conducta del organismo de un ensayo a otro se puede estimar de forma aproximada; es decir, se puede obtener una aproximación de tales cambios mediante transformaciones lineales. Ésta es la razón por la que este modelo recibe el nombre de «modelo lineal» o «modelo estocástico del aprendizaje».

Modelo de tamaño fijo de muestra

El modelo de tamaño fijo de muestra parte del supuesto que toda situación experimental (o variable experimental) está formada por muchos aspectos elementales (elementos de estímulo), cuya suma constituye la población total o *N*. De esta población se muestrea, en cada ensayo, un determinado número de elementos, *s*. Según el modelo, cada individuo, como resultado de una experiencia a lo largo de una serie de acontecimientos, «forma en su memoria un conjunto de tendencias elementales predictivas... que sirven de base para emitir una predicción» (Estes, 1972, p. 83).

Los axiomas básicos del modelo son los siguientes:

a) Todas las muestras de tamaño *s* (tamaño fijo) son equiprobables.

b) En cualquier fase del proceso de aprendizaje, cada elemento de la población se halla asociado con uno de los resultados del ensayo.

c) En cada ensayo, todos los elementos muestreados se asocian con el resultado del mismo (según la ley del todo o nada). Por tanto, si en el ensayo *n* ocurre el resultado *i*, la proporción de elementos asociados con el resultado *i* viene dada, para el ensayo siguiente, por la ecuación:

$$p_{i,n+1} = p_{i,n} + \vartheta\,(1 - p_{i,n}) \qquad (1)$$

siendo ϑ igual a s/N, o fracción de elementos muestreados.

d) La probabilidad que tiene un individuo de anticipar o predecir el resultado *i* en el ensayo *n* es «$p_{i,n}$». Se considera $p_{i,n}$ como una medida de la cantidad de información que tiene el sujeto en relación a la probabilidad de ocurrencia de un determinado resultado *i*.

En principio, este modelo se puede aplicar a cualquier tipo de aprendizaje, ya que constituye un modelo general de aprendizaje expresado en términos matemáticos. Para ello es suficiente definir las «reglas de corrspondencia» a fin de que el modelo tenga una referencia explícita a un tipo concreto de situación de aprendizaje.

Por otra parte, la estructura del modelo es simple. Se establece que la probabilidad que un sujeto tiene de «predecir o emitir» (según la clase de experimento) un tipo de respuesta en el ensayo siguiente ($p_{i,n+1}$) depende, por una parte, de la probabilidad que tiene de emitir dicha respuesta en el ensayo anterior ($p_{i,n}$). No obstante, dicha probabilidad puede aumentar, disminuir o quedar inalterada, según lo que ocurra en el ensayo. Es decir, según ocurra un evento reforzante o no. Se produce un evento reforzante cuando la respuesta del sujeto coincide con el resultado del ensayo. De acuerdo con este principio, el modelo puede interpretarse de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
p_{i,n+1} &= p_{i,n} + \vartheta\,(1 - p_{i,n}) \\
&= p_{i,n} + \vartheta - \vartheta\, p_{i,n} \\
&= (1 - \vartheta)\, p_{i,n} + \vartheta. \qquad \text{(1a)}
\end{aligned}
$$

Partiendo de una situación experimental de aprendizaje discriminativo, la ocurrencia de un evento reforzante, E_i, toma el valor *1*, y la no ocurrencia el valor 0. Los posibles estados del sujeto en el proceso de aprendizaje serán los siguientes:

a) El sujeto recibe un evento reforzante (E_i) en el ensayo *n*. La probabilidad de emisión de la respuesta *i* en el ensayo siguiente será:

$$p_{i,n+1} = (1 - \vartheta)\, p_{i,n} + \vartheta \cdot 1 \qquad (2)$$

en donde $E_i = 1$.

b) El sujeto recibe un evento reforzante $E_j \neq E_i$. La probabilidad de emisión de la respuesta *i* decrece en relación a su antiguo valor:

$$p_{i,n+1} = (1 - \vartheta)\, p_{j,n} + \vartheta \cdot 0 \qquad (3)$$

en donde $E_I = 0$.

c) Cuando ocurre un evento reforzante nulo (E_0), no se opera ningún cambio en el condicionamiento de los elementos muestreados:

$$p_{i,n+1} = p_{i,n} \qquad (4)$$

De acuerdo con el modelo es evidente que si un resultado de un ensayo al que va asociado la consecuencia reforzante E_i, ocurre indefinidamente a lo largo de toda la serie de ensayos, la probabilidad de la respuesta «*i*» alcanzará, en alguno de los ensayos, la asíntota *1*. Por otra parte, la rapidez con que la probabilidad $p_{i,n}$ alcance dicha asíntota depende, lógicamente, del valor ϑ (o tasa constante de crecimiento). Dicho valor debe inferirse empíricamente a partir de los datos.

Modelo lineal

El modelo lineal, propuesto inicialmente por Bush y Mosteller (1951) para describir el «condicionamiento operante» (condicionamiento instrumental o de tipo R) ha tenido una amplia aplicación a los experimentos de predicción binaria con «eventos reforzantes controlados por el experimentador» (Bush y Mosteller, 1955).

Consideremos un tipo de experimento en que el sujeto tiene que predecir cuál de dos luces va a encenderse (derecha/izquierda). La aparición o encendido de la luz izquierda (E_i) incrementa la probabilidad, p_n, de que el sujeto presione el botón izquierdo hasta alcanzar el punto límite $\lambda=1$. El encendido de la luz derecha reduce p_n hasta el punto límite $\lambda=0$.

En el modelo lineal se presupone que los eventos son complementarios y que, por tanto, los parámetros tienen igual tasa ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha$), siendo complementarios los puntos límites $\lambda_1=1-\lambda_2$.

Los operadores y reglas de aplicación del modelo son:

$$P_{n+1} \begin{cases} Q_1p_n=\alpha p_n+(1-\alpha)\lambda & \text{si } \lambda=1 \\ Q_2p_n=\alpha p_n & \text{si } \lambda=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Combinando la ecuación (5) se obtiene la siguiente expresión general:

$$P_{n+1}=\alpha p_n+(1-\alpha)\lambda \qquad (6)$$

Según este modelo, todo cambio que se produce en la probabilidad de respuesta de un individuo se puede estimar aproximativamente mediante una transformación lineal. Esta idea queda reflejada con la utilización de la noción matemática de «operador» que aplicado a p_n produce una nueva cantidad. Así, para cada posible combinación de una respuesta emitida por el sujeto y el resultado del ensayo, hay definida una ecuación lineal de diferencia.

El modelo lineal ha sido aplicado sistemáticamente en experimentos de aprendizaje y Estes (1972), mediante la introducción de una serie de restricciones, lo utiliza, de acuerdo con la teoría estadística del aprendizaje, bajo el nombre de «modelo lineal simple».

NECESIDAD DE LOS MODELOS MATEMATICOS EN PSICOLOGIA

La Psicología experimental tiene como objetivo básico la prueba de los enunciados teóricos y de las suposiciones hechas sobre la conducta. Una de las dificultades más importantes que encuentra la metodología experimental es la correcta derivación, a partir de estos supuestos, de una serie de enunciados que permitan la comprobación fáctica de la teoría. Esta dificultad ha llevado a extremos tales como el que unos mismos resultados hayan podido ser interpretados en función de hipótesis totalmente opuestas (recuérdese la famosa controversia del aprendizaje latente). Abundando en esta idea Estes (1959), afirma que:

> «Los intentos de decidir entre los postulados o principios establecidos cualitativamente sobre el refuerzo, la contigüedad o teoría de la expectancia han alcanzado un virtual impase.» (Estes, 1959, p. 386.)

Todo ello ha creado la necesidad de llevar a cabo una efectiva comprobación de los postulados teóricos, de una formulación de hipótesis mucho más rigurosa y la utilización de unos procedimientos de derivación más efectivos. En este sentido los modelos matemáticos ofrecen al quehacer psicológico un horizonte nuevo. Evidentemente se han dado los primeros pasos, pero queda todavía mucho camino por recorrer.

En los modelos matemáticos contamos con un riguroso procedimiento de derivación, así como con una forma segura para verificar los postulados teóricos. En el grado que el cuerpo de conocimientos psicológicos puedan ser verificados mediante este tipo de procedimiento, nuestra ciencia ocupará el lugar que le corresponde dentro del ámbito de las ciencias positivas.

RESUMEN

En este escrito se plantea el problema de la Psicología matemática y la tendencia actual de concebirla como aquella rama de la Psicología que trata de la elaboración, desarrollo y aplicación de los modelos matemáticos. Se analiza también la estructura y principales propiedades de los modelos matemáticos en psicología. Al mismo tiempo se destaca que la principal función de los modelos matemáticos es la descripción de áreas psicológicas muy restringidas, lo que sitúa al modelo matemático a mitad de camino entre la teoría y el experimento. Por último, se presentan los modelos matemáticos de Estes, y Bush y Mosteller, que dada su importancia han desempeñado un papel decisivo para la potenciación y desarrollo de esta nueva rama de la Psicología científica.

RÉSUMÉ

L'article pose le problème de la psychologie mathématique et de la tendance actuelle à la concevoir comme étant la branche de la psychologie qui traite de l'élaboration, le développement et l'application des modèles mathématiques. Sont également analysées la structure et les caractéristiques principales des modèles mathématiques en psychologie. En même temps l'auteur souligne la fonction primordiale des modèles mathématiques qui consiste en la description de champs psychologiques très restreints, ce qui place le modèle mathématique entre la théorie et l'expériment. L'article conclut en présentant les modèles mathématiques d'Estes, ainsi que ceux de Bush et Mosteller, dont l'importance a joué un rôle décisif dans l'essor et le développement de cette nouvelle branche de la psychologie scientifique.

SUMMARY

This article studies the problem of mathematical psychology and the present tendency to understand it as that branch of psychology concerned with the elaboration, development and application of mathematical models. The structure and principal characteristics of the mathematical models in psychology are equally analyzed. At the same time, the article underlines the main function of the mathematical models, which consists in describing very limited psychological areas; a function which places the mathematical model midway between theory and experiment. The article concludes with a presentation of the mathematical models of Estes, and Bush and Mosteller which, owing to their importance have played a decisive part in developing and strenghtening this new branch of scientific psychology.

BIBLIOGRAFIA

ARNAU, J.; AGULLÓ, R.; GRANDE, A., y SOLER, D.: *Reactividad emocional y conducta exploratoria.* Universidad de Barcelona. Dpto. de Psicología Experimental, 1975.

ATKINSON, R. C.; BOWER, G. H., y CROTHERS, E. J.: *An introduction to mathematical learning theory.* J. Wiley. Nueva York, 1963.

ATKINSON, R. C., y ESTES, W. K.: Stimulus sampling theory. En R. D. Luce, R. A. Bush y E. Galanter (Eds.) *Handbook of mathematical psychology.* Vol. II. 121-168. Wiley. Nueva York, 1963.

ATKINSON, R. C., y SHIFFRIN, R. M.: *Mathematical models for memory and learning.* Reporte técnico n.° 9. Instituto de Estudios matemáticos en ciencias sociales. Stanford University, 1965.

BOWER, G. H.: Teoría matemática del aprendizaje. En E. R. Hilgard y G. H. Bower (Eds.) *Teorías del aprendizaje.* 370-418. Trillas. México, 1973.

BUSH, R. R., y MOSTELLER, F.: A mathematical model for simple learning. *Psychol Rev. 58,* 313-323 (1951).

BUSH, R. R. y MOSTELLER, F.: *Stochastic models for learning.* Wiley. Nueva York, 1955.

COOMBS, C. H.; RAIFFA, H., y THRALL, R. M.: Some views on mathematical models and measurement theory. *Psychol. Rev. 61,* 132-144 (1954).

GREENO, J. G.: Mathematics in Psychology. En P. C. Dodwell (Ed.) *New Horizons in Psychology.* 86-104. Penguin. Middlesex, 1972.

ESTES, W. K.: Toward a statistical theory of learning. *Psychol. Rev. 57,* 94-107 (1950).

ESTES, W. K.: The statistical approach to learning theory. En S. Koch (Ed.) *Psychology: A study of a science.* Vol. II. 380-491. McGraw-Hill. Nueva York, 1959.

ESTES, W. K.: Research and theory on probability learning. *J. amer. statis. Assoc. 67.* 81-102 (1972).

EBBINGHAUS, H.: *Memory.* 1885. Trad. inglesa: Columbia Univ. Nueva York, 1913.

HELSON, H.: *Adaptation-level theory.* Harper y Row. Nueva York, 1964.

HULL, C. L.: *Principles of behavior.* Appleton C. C. Nueva York, 1943.

LUCE, R. D.: *Individual choice behavior: a theoretical analysis.* J. Wiley Nueva York, 1959.

MILLER, G. A.: *Mahtematics and psychology.* J. Wiley. Nueva York, 1964.

RESTLE, F.: The selection of strategies in cue learning. *Psychol. Rev. 69.* 329-343 (1962).

RESTLE, F.: *Mathematical models in psychology.* Penguin. Middlesex, 1971.

SIEGEL, S.: Theoretical models of choice and strategy behavior. *Psychometrika. 24.* 303-316 (1959).

STEVENS, S. S.: Mathematics, measurement and psychophysics. En S. S. Stevens (Ed.) *Handbook of experimental psychology.* 1-49. J. Wiley. Nueva York, 1951.

TANNER, W. P., y SWETS, J. A.: decision making theory of visual detection. *Psychol. Rev. 61.* 401-409 (1954).

UNDERWOOD, B. J.; HAM, M., y EKSTRAND, E.: Storage and verification stages in processing concepts. *J. of cognit. Psychol.* 2. 239-289 (1971).

THORNDIKE, E. L.: Animal intelligence: An experimental study o fthe associative processes in animal. *Psychol. Rev., Monogr. Suppl. 2*, 8: (1898).

WINER, B. J.: *Statistical principles in experimental desing*. McGraw Hill. Nueva York, 1971 (2.ª ed.).

YELLOTT, J. I., JR.: Probability learning with non contingent success. *J. Mat. Psychol. 6*. 541-575 (1969).