Universitat de Barcelona

Facultat d'Economia i Empresa

APUNTS DE MATEMÀTIQUES I

Gonzalo Rodríguez

Departament de Matemàtica Econòmica,

Financera i Actuarial

Graus d'ADE i d'Economia

PRÒLEG

Aquests breus apunts, estructurats en forma de "fitxes", estan pensats per a ser desenvolupats a les classes presencials de l'assignatura de Matemàtiques I dels graus d'Administració i Direcció d'Empreses (ADE) i d'Economia, que s'imparteixen a la Facultat d'Economia i Empresa de la UB, durant el primer semestre del primer curs. Per tant, s'han de prendre com un ajut, una guia, i no pas com a substitut d'elles.

El contingut s'ha estructurat seguint ben de prop el programa que hom troba al Pla Docent de l'assignatura. Aquest pla contempla dos blocs temàtics: en el primer (Bloc I d'*Àlgebra*), dedicat a estudiar alguns dels conceptes més importants de l'àlgebra lineal, posem l'atenció en els espais vectorials (tema 1) i espais vectorials euclidians (tema 2) on s'introdueixen les nocions mètriques indispensables per a abordar amb cert rigor els continguts dels temes següents; en el segon bloc (Bloc II de *Càlcul*) es desenvolupa àmpliament el concepte de funció escalar real (tema 3), així com els mètodes analítics que ens permeten trobar els "màxims" i "mínims" d'aquestes funcions –òptims "lliures"- (tema 4). Aquest darrer tema prepara el terreny pel que ha de venir a l'assignatura Matemàtiques II que s'impartiex al llarg del segon semestre del primer curs.

Val a dir que la majoria dels conceptes exposats aquí venen acompanyats d'exemples il·lustratius amb la idea de facilitar la seva comprensió. En aquest sentit també estan pensats els exercicis que s'enuncien al final de cada tema i que demanen ser resolts i comentats en el decurs de les classes presencials. Així mateix, i al final del document, hom troba una ressenya bibliogràfica i un glossari de termes a fi i efecte d'ajudar en la cerca dels conceptes més importants inclosos en aquest manual.

Per últim indicar que aquest document ha estat acceptat i arxivat en el Dipòsit Digital de la UB dins la col·lecció OMADO:

http://hdl.handle.net/2445/30762

i que tant el seu contingut, així com les possibles errades que hom hi pugui trobar, són responsabilitat única i exclusiva de l'autor.

Gonzalo Rodríguez Pérez

ÍNDEX

BLOC I: Àlgebra

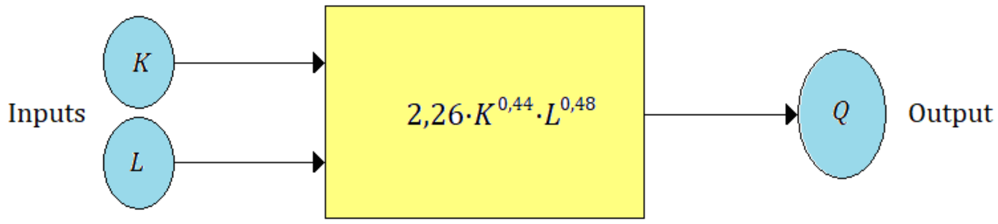
1. L'ESPAI VECTORIAL REAL

1.1. Espai vectorial real i definicions bàsiques

Les magnituds numèriques amb les que treballa la ciència solen ser de dos tipus: "escalars" o "vectorials". Les escalars són les que venen determinades per un únic valor numèric com, per exemple, el pes d'un cos, el preu d'un bé econòmic o els tipus d'interès bancari. Per contra, les magnituds de tipus vectorial necessiten més d'un valor numèric per ser definides; pensem, per exemple, en el vector-força de la Física on cal conèixer, a part de la seva intensitat, la direcció i el sentit cap a on va dirigida. En Economia, les magnituds vectorials apareixen freqüentment com a variables independents de funcions escalars.[1] Com a exemple il·lustratiu tenim la funció de producció: [2]

$$Q = 2{,}26 \cdot K^{0{,}44} \cdot L^{0{,}48}$$

on l'output $Q > 0$ denota la quantitat de llagostes capturades en una certa pesquera mentre que els inpunts $K > 0$ i $L > 0$ són, respectivament, la reserva de llagostes i el treball invertit. Esquemàticament:



En aquest cas, diríem que la producció Q depèn funcionalment del "vector" bidimensional dels inputs (K, L) i ho simbolitzaríem per $Q = Q(K, L)$.[3] Doncs bé, la noció d'espai vectorial recull les propietats més importants de la "suma" i del "producte extern" dels vectors.[4]

[1] Estudiem les funcions escalars en el Bloc II.
[2] Exemple 15.3 de la plana 391 de Sydsaeter. K i Hammond, P. J. (1996).
[3] $Q = Q(K, L)$ és un exemple de funció escalar amb dues variables, i és un cas especial de funció econòmica de "Cobb-Douglas".
[4] El "producte extern" és el producte d'un vector per un número.

1.1.1. *Espai vectorial real, vectors i escalars*

Definició: Un **espai vectorial real** ve definit per:

1. Un conjunt de **vectors**: [5]
$$\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n): x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$
2. Una **suma interna** de vectors:
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
3. Un **producte extern** de vectors:
$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n), \text{ per a tot } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Als elements del conjunt $\mathbb{R}$ dels números reals els hi direm **escalars.**[6]

A partir d'ara, i si no hi ha ambigüitat, notarem el **vector nul** de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ de la forma:[7]

$$\vec{0} = \left(\overbrace{0, \dots 0}^{n}\right) \dots n.$$

Per un altre cantó, i per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, el seu vector **oposat** serà:

$$-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}.$$

En tot espai vectorial $\mathbb{R}^n$ caldrà considerar, entre d'altres, les següents propietats:

Propietats: En tot espai vectorial real tenim:

1. $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ implica: $\lambda = 0$ ó $\vec{x} = \vec{0}$.
2. $-(\lambda \cdot \vec{x}) = (-\lambda) \cdot \vec{x}$.
3. $\vec{x} = \vec{y}$ és equivalent a: $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$.

Tots els conceptes relatius als espais vectorials reals que apareixen en aquest tema es fonamenten en el de "combinació ineal de vectors" que donem a continuació.

---

[5] $\mathbb{R}$ denota el conjunt dels números reals.

[6] Per a una definició d'espai vectorial més general hom pot veure qualsevol dels manuals d'àlgebra lineal que apareixen en la bibliografia. Per exemple, els polinomis de grau $n \in \mathbb{N}$ a coeficients reals formen un espai vectorial real on els vectors són, precisament, els polinomis.

[7] És l'element "neutre" de la suma interna de vectors que no hem de confondre amb l'escalar 0.

1.1.2. *Combinació lineal de vectors*

Per a començar tenim que, per exemple, el vector $(3,-1,7)$ és combinació lineal dels vectors $(1,0,4)$ i $(-1,1,1)$ ja que es pot escriure de la forma:

$$(3,-1,7)=2\cdot(1,0,4)+(-1)\cdot(-1,1,1).$$

Així doncs:

<u>Definició</u>: Un vector $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ és **combinació lineal** de k vectors $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k\in\mathbb{R}^n$ en el cas que existeixin k scalars $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ amb la condició:

$$\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\cdots+\lambda_k\cdot\vec{x}_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\vec{x}_i\,.$$ [8]

<u>Exemple</u>: Prova que el vector $(-1,9,4)$ és combinació lineal dels vectors $(1,2,0)$ i $(-4,3,4)$. Passa el mateix amb el vector $(7,3,4)$?

SOLUCIÓ:

En aquest cas cal raonar que l'equació "vectorial":

$$(-1,9,4)=\lambda_1\cdot(1,2,0)+\lambda_2\cdot(-4,3,4)=(\lambda_1-4\lambda_2,2\lambda_1+3\lambda_2,4\lambda_2)$$

té solució en les "variables" λ_1 i λ_2, és a dir, que haurem de provar que el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}-1=\lambda_1-4\lambda_2\\ 9=2\lambda_1+3\lambda_2\\ 4=4\lambda_2\end{array}\right\}$$

té solució.[9] Degut a que aquest sistema és compatible, deduïm que λ_1 i λ_2 existeixen i que, per tant, existeix la combinació lineal.[10] Tanmateix aquest no és el cas amb el vector $(7,3,4)$ ja que el sistema d'equacions lineals associat:

$$(7,3,4)=\lambda_1\cdot(1,2,0)+\lambda_2\cdot(-4,3,4)\text{ equivalent a: }\begin{cases}7=\lambda_1-4\lambda_2\\ 3=2\lambda_1+3\lambda_2\\ 4=4\lambda_2\end{cases}$$

és incompatible■

[8] El número k de vectors no té perquè coincidir amb el número n de components dels vectors.
[9] Cal tenir present que tota equació vectorial és equivalent sempre a un sistema d'equacions lineals.
[10] Els valors dels dos escalars són $\lambda_1=3$ i $\lambda_2=1$. Val a dir que no és necessari trobar aquests valors per a provar l'existència de la combinació lineal.

1.1.3. *Dependència i independència lineal de vectors*

Com hem vist, el vector $(-1,9,4)$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $(1,2,0)$ i $(-4,3,4)$. En aquest cas direm que els tres vectors:

$(-1,9,4)$, $(1,2,0)$ i $(-4,3,4)$ són "linealment dependents".

Per contra, això no passa amb el vector $(7,3,4)$; en aquesta tessitura direm que els tres vectors:

$(7,3,4)$, $(1,2,0)$ i $(-4,3,4)$ són "linealment independents".

Per definició:

Definició: Diem que k vectors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ són:

1. **Linealment dependents** si al menys un d'ells, $\vec{x}_i$ per exemple, es pot expressar com a combinació lineal dels altres. Formalment:
$$\vec{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \lambda_j \cdot \vec{x}_j.$$
2. **Linealment independents** en cas contrari, és a dir, quan cap dels k vectors es pot expressar com a combinació lineals dels altres.

El teorema següent ens caracteritza la independència lineal de vectors a partir de les combinacions lineals "nul·les" de vectors:[11]

Teorema: k vectors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si tota combinació lineal nul·la entre ells té els corresponents escalars iguals a zero. És a dir:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{x}_k \text{ implica: } \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Evidentment, un conjunt de vectors seran linealment dependents si i només si existeix alguna combinació lineal nul·la entre ells amb algun dels escalars diferent de zero.

[11] Una combinación lineal "nul·la" de vectors és tota combinación lineal igual al vector nul.

1.1.3.1. Independència/dependència lineal y combinacions lineals nul·les de vectors

El teorema anterior és adient per a estudiar aquells casos en que les components dels vectors són desconegudes. Considerem el següent exemple:

Exemple: Prova que:

1. Tot conjunt de vectors d'un espai vectorial que incolgui el vector nul és un conjunt de vectors linealment dependents.
2. Si tres vectors $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ són linealment independents, també ho són els vectors:
$$\vec{u} = \vec{x}, \vec{v} = \vec{x} + \vec{y} \text{ i } \vec{w} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

SOLUCIÓ: (1) Considerem k vectors de $\mathbb{R}^n$ juntament amb el vector nul $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$:
$$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{0}.$$
D'acord amb el teorema anterior, caldrà construir una combinació lineal nul·la entre aquests $k + 1$ vectors, amb algun dels escalars diferent de zero, per a provar que són linealment dependents. En efecte, la combinació lineal nul·la:
$$0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_k + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$
n'és una. Per tant, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ són linealment dependents■

(2) Considerem una combinació lineal nul·la entre els vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$:
$$\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w}.$$
Per a provar que són linealment independents haurem de veure que:
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
tenint en compte que, per hipòtesi, els vectors $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ ho són. Primer de tot, notem que la combinació lineal nu·la es pot escriure com a combinació lineal nul·la de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned} \vec{0} &= \lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} = \\ &= \lambda_1 \cdot \vec{x} + \lambda_2 \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + \lambda_3 \cdot (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \vec{x} + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot \vec{y} + \lambda_3 \cdot \vec{z}. \end{aligned}$$
Ja que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ són linealment independents, aquests darrers escalars han de ser zero:
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = 0.$$
Ja que aquest sistema d'equacions lineals homogeni té com a única solució la trivial:
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
hom dedueix que els vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ són també linealment independents■

1.1.3.2. Relació entre independència lineal de vectors i rang d'una matriu

Si recordem que el rang d'una matriu és l'ordre més gran possible entre les seves submatrius quadrades amb determinant no nul, la relació entre dependència/independència de vectors i el rang d'una matriu es materialitza en el teorema de caracterització que afirma que:

Teorema: $k > 0$ vectors de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si la matriu que formen (ja sigui per files o per columnes) té rang k.[12]

Vegem un exemple d'aplicació:

Exemple: Prova que els vectors:

1. $(1, -1,3,7)$, $(5,2,4, -2)$ i $(0, -6,0,1)$ són linealment independents.
2. $(2, -2,8)$, $(5,1,3)$ i $(4,2, -1)$ són linealment dependents.

SOLUCIÓ:

(1) La matriu que aquests tres vectors formen per files és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ja que aquesta matriu té un menor d'ordre 3 diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -66 \neq 0$$

deduïm, gràcies al teorema anterior, que són vectors linealment independents■

(2) En aquest cas, el determinant de la matriu que aquests vectors formen per files és zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Conseqüentment, tenim tres vectors linealment dependents ja que el rang d'aquesta matriu és inferior a 3■[13]

---

[12] Conseqüentment, el rang d'una matriu serà el nombre màxim de vectors fila (o columna) linealment independents. És evident que si el rang de la matriu que forma un conjunt de vectors és menor que el seu nombre, els vectors seran linealment dependents.

[13] De fet és igual a 2.

1.1.4. *Sistema de generadors d'un espai vectorial*

Un tercer concepte fonamental és el de sistema de generadors d'un espai vectorial. Per exemple, els tres vectors:

$$(1,0,0),\ (0,1,0) \text{ i } (0,0,1)$$

formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ ja que, de forma trivial, qualsevol vector d'aquest espai vectorial es pot escriure com a combinació lineal d'ells. En efecte:

$$(a,b,c) = a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c\cdot(0,0,1).$$

Definició: Un conjunt de vectors d'un espai vectorial forma un **sistema de generadors** si qualsevol vector de l'espai vectorial es pot expressar com a combinació lineal d'ells.

En aquest context caldrà tenir present la propietat de caracterització següent:

Teorema: Un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$ forma un sistema de generadors si i només si la matriu que formen (ja sigui per files o per columnes) té rang n.

Vegem un exemple:

Exemple: Prova que els quatres vectors $(1,0,0)$, $(2,3,-1)$, $(5,11,-4)$ i $(-4,5,0)$ formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$.
SOLUCIÓ:
En aquest cas la matriu que formen per files els quatre vectors és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 11 & -4 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ja que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ implica: } \operatorname{rang} A = 3$$

deduïm, pel teorema anterior, que aquests quatre vectors formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ ■

1.2. Base i dimensió d'un espai vectorial

Una base d'un espai vectorial és un sistema de generadors format per un nombre "mínim" de vectors. En concret:

Definició: Diem que un conjunt de vectors d'un espai vectorial forma una **base** si:

1. Formen un sistema de generadors
2. Són linealment independents.

Vegem un exemple important de base:

Exemple: Els n vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(1, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}\right), \dots, \left(\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, 1\right)$$

formen una base de $\mathbb{R}^n$, l'anomenada **base canònica**.

De la definició de base es desprèn directament que totes les bases d'un espai vectorial $\mathbb{R}^n$ tenen el mateix nombre de vectors, n. En efecte:

Teorema: [14] Totes les bases d'un mateix espai vectorial tenen el mateix número de vectors. En particular, les bases de $\mathbb{R}^n$ tenen n vectors.

Així doncs:

Definició:[15] La **dimensió** d'un espai vectorial és el nombre de vectors de les seves bases.[16]

---

[14] Teorema de Steinitz.

[15] Per tant, en un espai vectorial $\mathbb{R}^n$, el número de vectors que formen una base i el número de coordenades dels vectors són el mateix.

[16] Val a dir que existeixen espais vectorials de dimensió "infinita". Per exemple, els polinomis d'una variable $p(x)$ a coeficients reals formen un espai vectorial de dimensió infinita i els monomis $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ en formen una base.

1.2.1. *Relació entre base d'un espai vectorial i determinant d'una matriu*

La següent propietat de caracterització, que és una conseqüència directa de resultats anteriors, ens permetrà comprovar en la pràctica si un conjunt de vectors d'un espai vectorial és o no una base.

<u>Propietat</u>: Un conjunt de vectors d'un espai vectorial forma una base si i només si la matriu que formen (ja sigui per files o per columnes) és quadrada i amb determinant no nul.[17]

<u>Exemple</u>:

1. Comprova que els vectors $(1,-1,0)$, $(2,3,-1)$ i $(-1,3,5)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.
2. Troba els vectors de la forma $(k^2, k, 0)$, amb $k \in \mathbb{R}$ paràmetre, que juntament amb els vectors $(3,-1,1)$ i $(-3,1,2)$ formin una base de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓ:

(1) Com que la matriu que aquests tres vectors formen per files:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

és quadrada amb determinant diferent de zero:

$$|A| = 27 \neq 0$$

deduïm que formen una base de $\mathbb{R}^3$ ■[18]

(2) Aquests tres vectors formaran una base si el determinat de la matriu A que formen és diferent de zero. Ja que:

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} k^2 & k & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3k^2 - 9k = -3k(k+3) \text{ implica: } k = 0 \text{ ó } k = -3$$

hom dedueix que els tres vectors formaran base si i només si:

$$k \neq -3 \text{ i } k \neq 0 \blacksquare$$

[17] Com a conseqüència, tot sistema de generadors d'un espai vectorial conté sempre una base. De fet, els sistemes de generadors d'un espai vectorial que no són base no són més que bases "ampliades" amb més vectors.

[18] Això vol dir que tot vector de $\mathbb{R}^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors linealment independents $(1,-1,0)$, $(2,3,-1)$ i $(-1,3,5)$.

1.2.2. *Vector de components d'un vector en una base*

Un darrer concepte relatiu a les bases d'un espai vectorial és el de vector de components d'un vector en una base donada.

<u>Definició</u>: Si:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n$$

és l'expressió del vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en la base $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$, direm que el vector que té per components els escalars de la combinació lineal:

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n$$

és el **vector de components** de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en aquesta base.[19]

Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: Troba el vector de components de (2,5,1) en la base de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors:

(2,0,5), (3,3,1) i (0,0,1). [20]

SOLUCIÓ:

El vector de components $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ del vector (2,5,1) en aquesta base, i per la definició anterior, ha de satisfer l'equació vectorial:

$$(2,5,1) = \lambda_1 \cdot (2,0,5) + \lambda_2 \cdot (3,3,1) + \lambda_3 \cdot (0,0,1)$$

és a dir, que ha de ser la solució del sistema de Cramer:[21]

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 5 &= 3\lambda_2 \\ 1 &= 5\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}\right\} \text{implica: } \lambda_1 = -\tfrac{3}{2}, \lambda_2 = \tfrac{5}{3} \text{ i } \lambda_3 = \tfrac{41}{6}.$$

Per tant, el vector de components que ens demanen és:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{41}{6}\right) \blacksquare$$

[19] Aquest vector és únic (exercici 8 de la plana 16).
[20] Cal tenir present que (2,5,1) és el vector de components de (2,5,1) en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
[21] Els sistemes d'equacions lineals que s'obtenen al calcular els vectors de components són sempre sistemes de Cramer.

1.3. Subespai vectorial

Un subespai vectorial és un subconjunt no buit de vectors d'un espai vectorial que és "tancat" per les operacions suma i producte extern, la qual cosa fa que sigui un espai vectorial més "petit" que l'inicial i amb les mateixes operacions.

Definició: Un subconjunt no buit $S \subset \mathbb{R}^n$ és un **subespai vectorial** de $\mathbb{R}^n$ si:

1. La suma de dos vectors de S és un vector de S:
$$\vec{x}, \vec{y} \in S \text{ implica: } \vec{x} + \vec{y} \in S$$
2. El producte d'un vector de S per un escalar és un vector de S:
$$\vec{x} \in S \text{ i } \lambda \in \mathbb{R} \text{ implica: } \lambda \cdot \vec{x} \in S.$$

Exemple: Prova que el conjunt:
$$S = \{(a, b, 0): a, b \in \mathbb{R}\}$$
és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓ:

Cal veure que la suma de dos vectors de S i el producte d'un escalar per un vector de S pertanyen sempre a S. En efecte:
$$(a, b, 0) + (c, d, 0) = (a + c, b + d, 0 + 0) = \{0 + 0 = 0\} = (a + c, b + d, 0) \in S$$
i:
$$\lambda \cdot (a, b, 0) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot 0) = \{\lambda \cdot 0 = 0\} = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, 0) \in S \blacksquare$$

En aquest context pot ser d'interès considerar la propietat de caire general que ens diu que:

Propietat: Tot subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ conté el vector nul $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Així doncs, i com a conseqüència, si un subconjunt d'un espai vectorial no conté el vector nul no pot ser mai un subespai vectorial.[22]

---

[22] En particular, $\mathbb{R}^n$ i $\left\{\left(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n}\right)\right\}$ són els subespais vectorials anomenats "impropis" de $\mathbb{R}^n$ que són, respectivament, el subespai vectorial més gran i més petit de $\mathbb{R}^n$.

1.3.1. *Subespai vectorial generat per un conjunt de vectors*

Com tot subespai vectorial és, en particular, un espai vectorial en sí mateix, admetrà bases i dimensió. D'aquí que aparegui de forma natural el concepte de subespai vectorial generat:

Definició: El **subespai vectorial generat** per un conjunt finit de vectors d'un espai vectorial és el conjunt format per totes les combinacions lineals d'aquests vectors.

Vegem un exemple:

Exemple: Determina una base, la dimensió i l'expressió analítica o conjuntista del subespai vectorial:

$$S = \{(a, b, 0): a, b \in \mathbb{R}\}.$$

SOLUCIÓ:

Ja que, per a tot vector $(a, b, 0) \in S$ hom té que:

$$(a, b, 0) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (0,1,0)$$

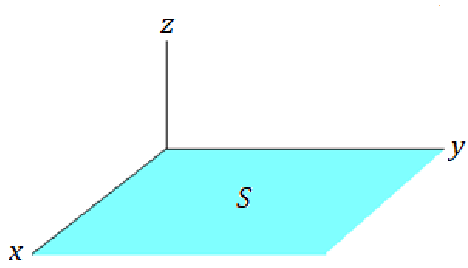
deduïm que S està generat pels vectors:

$$(1,0,0) \text{ i } (0,1,0)$$

i com que aquests dos vectors són linealment independents, formen una base de S i la dimensió de S és 2. Finalment, pel que fa a l'expressió analítica d'aquest subespai vectorial, notem que els seus vectors són els vectors que tenen la tercera component nul·la. Per tant:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 0\} \blacksquare$$ [23]

Gràficament:



[23] Un resultat interessant sobre subespais vectorials ens diu que tot subespai vectorial está format pels vectors que són solució d'un sistema d'equacions lineals homogènies. Per tant, una manera de veure que tenim un subespai vectorial sense aplicar la definición és comprobar que les equacions que el defineixen són equacions lineals homogènies, és a dir, amb els termes independents nuls.

1.4. Exercicis

1. Troba els valors de paràmetre $k \in \mathbb{R}$ de manera que el vector $(-2,-1,5,0)$ es pugui expressar com a combinació lineal dels vectors $(2,4,7,6)$ i $(k,2,-1,k)$.
2. Prova que els vectors $(-1,0,5)$ i $(6,5,0)$ són linealment independents i troba els valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$ de manera que $(-1,0,5)$, $(6,5,0)$ i $(0,k,k^2)$ siguin linealment dependents.
3. Troba els vectors (a,b,c) que són combinació lineal dels vectors $(3,5,-1)$ i $(6,0,-2)$.
4. Prova que, per a tot $k \in \mathbb{R}$, els vectors $(1,0,-3)$, $(5,-1,0)$, $(3,-k,k)$ i $(0,1,k)$ formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$.
5. Prova que, independentment del valor del paràmetre $m \neq 0$, els vectors $(-m,3,5)$, $(0,11,-9)$ i $(0,1,m^2)$ formen sempre una base de $\mathbb{R}^3$.
6. Troba el vector de components de $(2,1,2)$ en la base $(2,0,3)$, $(2,-2,5)$ i $(0,1,2)$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Troba els valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$ tal que els vectors $(k,0,-3)$, $(2,-k,5)$ i $(0,1,k)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$ i determina el vector de components de $(1,1,1)$ en aquesta base quan $k=0$.
8. Demostra que el vector $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ de les components d'un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en una base $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ és únic.
9. Determina una base i la dimensió dels subespais vectorials:
    a. $S=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y=0, x-2z=0\}$.
    b. $S=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$.
10. Determina una base, la dimensió i l'expressió analítica o conjuntista del subespai vectorial generat pels vectors $(4,0,-1)$, $(3,5,2)$ i $(11,5,0)$.

SOLUCIONS:

1. $k = 2$.
2. $k = 0$ ó $k = 6$.
3. El rang de la matriu que formen els vectors és 3, independentment del valor de $k \in$ R.
4. Són els vectors (a, b, c) que satisfan l'equació $a + 3c = 0$.
5. La matriu que formen els vectors és regular.
6. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.
7. $k \neq -1$ i $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.
8. Cal demostrar que si un vector té dos vectors de components en una base, aquests vectors són el mateix aplicant les propietats que caracteritzen el concepte de base.
9.
   a. La dimensió és 1 i una base podria ser el vector $\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$.
   b. La dimensió és 2 i una base podria ser $(-2,1,0)$ i $(-3,0,1)$.
10. La dimensió és 2 i una base podria ser $(4,0,-1)$ i $(3,5,2)$. Finalment, l'expressió analítica o conjuntista de S és:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x - 11y + 20z = 0\}.$$

2. L'ESPAI VECTORIAL EUCLIDIÀ

2.1. Espai vectorial euclidià i definicions bàsiques

2.1.1. *Producte escalar i espai vectorial euclidià*

Com veurem a continuació, el concepte algebraic de producte escalar ens permet introduir nocions "mètriques" en un espai vectorial real com són, a tall d'exemple, la grandària d'un vector, l'angle i la distància entre dos vectors.

<u>Definició</u>: El **producte escalar** (**habitual** o **estàndard**) entre dos vectors $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ és l'escalar (número real) definit per:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \in \mathbb{R}.$$ [24]

<u>Exemple</u>:

1. Calcula el producte escalar dels vectors $\vec{u} = (1,0,-5)$ i $\vec{v} = (5,-2,1)$.
2. Troba els valors del paràmetre $k \in \mathbb{R}$ tal que el producte escalar del vector $\vec{u} = (1,0,4)$ amb el vector $\vec{v} = (1,1,k^2)$ sigui igual a 10.

SOLUCIÓ:

(1) El producte escalar és 0 ja que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,0,-5) \cdot (5,-2,1) = 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 = 0 \blacksquare$$ [25]

(2) Ja que:

$$10 = \vec{u} \cdot \vec{v} = (1,0,4) \cdot (1,1,k^2) = 1 + 4k^2$$

i que:

$$10 = 1 + 4k^2 \text{ implica: } k^2 = \frac{9}{4} \text{ implica: } k = \pm\frac{3}{2}$$

el producte escalar dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és 10 si i només si $k = \pm\frac{3}{2}$ $\blacksquare$

---

[24] Notem que el producte escalar entre dos vectors és sempre un escalar i d'aquí li ve el nom. Per una altra banda, un **espai vectorial euclidià** és, per definició, un espai vectorial amb un producte escalar.

[25] Fixem-nos que el producte escalar entre dos vectors no nuls pot ser 0.

2.1.1.1. Exemple d'aplicació econòmica del concepte de producte escalar

Exemple:

1. Si $p_1, \dots, p_n > 0$ denoten els preus de venda unitaris de $n > 0$ bens de consum $A_1, \dots, A_n$ prova que l'ingrés obtingut per la venda de $q_i \geq 0$ unitats de A_i coincideix amb el producte escalar del vector dels preus $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ amb el vector de les quantitats $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$.
2. Com a aplicació, si 5, 2 i 3 u.m. són,[26] respectivament, els preus de venda unitaris de tres productes, determina la quantitat a vendre de cadascun d'ells si volem aconseguir uns ingressos de 105 u.m. sabent que la quantitat subministrada del 2on. producte és la meitat de la del 1er., i que la del 3r. coincideix amb la suma de la dels altres dos.

SOLUCIÓ:

(1) L'ingrés total obtingut per la venda dels productes és igual a la suma dels ingressos obtinguts amb les vendes de cadascun d'ells. Per tant, si la venda de $q_i \geq 0$ unitats de A_i genera un ingrés de:

$$p_i \cdot q_i \text{ u.m.}$$

l'ingrés total serà el producte escalar dels vectors dels preus amb el de les quantitats ja que:

$$I = p_1 \cdot q_1 + \cdots + p_n \cdot q_n = (p_1, \dots, p_n) \cdot (q_1, \dots, q_n) = \vec{p} \cdot \vec{q} \blacksquare$$

(2) En el cas particular que:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (5,2,3) \text{ i } I = 105 \text{ u.m.}$$

tindríem:

$$105 = I = \vec{p} \cdot \vec{q} = (5,2,3) \cdot (q_1, q_2, q_3) = 5q_1 + 2q_2 + 3q_3.$$

Ja que, segons l'enunciat:

$$q_2 = \frac{q_1}{2} \text{ i } q_3 = q_1 + q_2 \text{ implica: } q_3 = q_1 + q_2 = \frac{3}{2} \cdot q_1$$

deduïm que:

$$105 = 5q_1 + 2q_2 + 3q_3 = 5q_1 + 2 \cdot \left(\frac{q_1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot q_1\right) = 10{,}5 \cdot q_1 \text{ implica: } q_1 = 10.$$

Així doncs, cal vendre 10 unitats de A_1, 5 de A_2 i 15 de A_3 per a obtenir uns ingressos totals de 105 u.m.■

[26] u.m. denota "unitats monetàries".

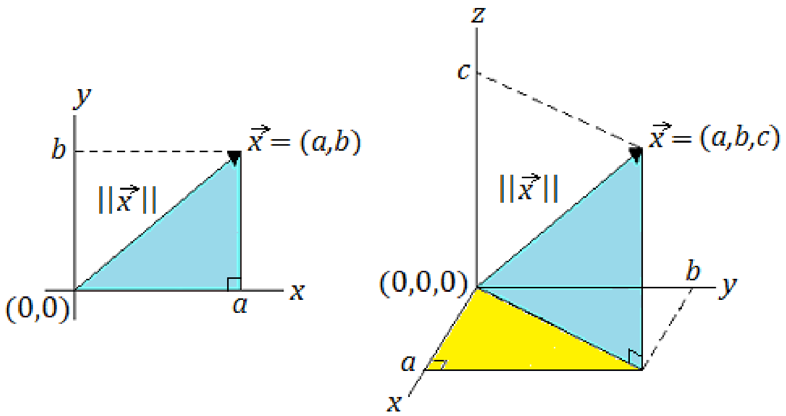
2.1.2. *Norma d'un vector i propietats*

Estem en ja condicions d'introduir alguns dels conceptes geomètrics bàsics en un espai vectorial euclidià. D'entrada tenim el de norma o grandària d'un vector:

Definició: La **norma** euclidiana del vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és igual a l'arrel quadrada del producte escalar del vector per sí mateix:

$$||\vec{x}|| = +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = +\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$ [27]

De fet, la norma d'un vector "reprodueix" en $\mathbb{R}^n$ el teorema de Pitàgores. En el cas del pla i de l'espai tenim:



Propietats: En general:

1. $||\vec{x}|| \geq 0$. A més, $||\vec{x}|| = 0$ és equivalent a $\vec{x} = \vec{0}$
2. "Desigualtat triangular": $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$. [28]
3. "Desigualtat de Schwarz": $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$. [29]
4. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, el vector $\vec{u} = \frac{1}{||\vec{x}||} \cdot \vec{x}$ és un vector **unitari**, és a dir, un vector de norma igual a 1.

[27] La norma d'un vector rep també el nom de *mòdul*.
[28] Aquesta propietat està relacionada amb el fet que la longitud d'un costat d'un triangle és menor o igual a la suma de les longituds dels altres dos, i d'aquí li ve el nom.
[29] La desigualtat de Schwarz ens permet definir formalment la noció d'angle entre dos vectors en qualsevol espai vectorial euclidià (plana 22).

2.1.2.1. Exemple d'aplicació de la norma d'un vector

Exemple:

1. Calcula el vector unitari associat al vector $\vec{x} = (1,0,-5)$.
2. Troba els valors de $k \in \mathbb{R}$ tal que el vector $(\sqrt{k}, 1, -k)$ sigui unitari.

SOLUCIÓ:

(1) Ja que:

$$\|\vec{x}\| = +\sqrt{1^2 + 0^2 + (-5)^2} = +\sqrt{26}$$

el vector unitari $\vec{u}$ associat a $\vec{x}$ és:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot (1,0,-5) = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, 0, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right) \blacksquare$$

(2) Ja que:

$$1 = \left\|(\sqrt{k}, 1, -k)\right\| =$$

$$= +\sqrt{\left(\sqrt{k}\right)^2 + 1^2 + (-k)^2} =$$

$$= +\sqrt{k + 1 + k^2}$$

i que:

$$1 = 1^2 = \left(\sqrt{k + 1 + k^2}\right)^2 = k + 1 + k^2$$

implica:

$$0 = k + k^2 = k \cdot (1 + k) \text{ implica: } k = -1 \text{ ó } k = 0$$

deduïm que:

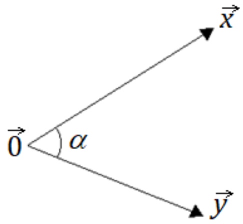
$$k = 0$$

és l'únic valor tal que el vector $(\sqrt{k}, 1, -k)$ és unitari$\blacksquare$[30]

[30] El valor $k = -1$ no és una solución posible ja que $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

2.1.3. *Angle entre vectors. Vectors ortogonals*

Un dels conceptes cabdals en geometria mètrica és el de l'angle α que formen dos vectors:



Definició: L'**angle** α que formen dos vectors $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ no nuls és el que té per cosinus el quocient entre el seu producte escalar i el producte de les normes associades. És a dir:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

Per tant, dos vectors no nuls seran **ortogonals** o **perpendiculars** (és a dir, formaran un angle recte de 90° ó $\pi/2$ radians) si el seu producte escalar és zero: [31]

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

El cosinus ens permet "redefinir" el producte escalar en funció de les normes dels vectors:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha.$$ [32]

Exemple: Troba:

1. L'angle α que formen els vectors $\vec{x} = (1,1,0)$ i $\vec{y} = (2,9,6)$.
2. El valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que els vectors $\vec{u} = (k, 1, -2)$ i $\vec{v} = (5, -k^2, 0)$ siguin ortogonals.

SOLUCIÓ: (1) Ja que el cosinus de l'angle α que formen és igual a:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{(1,1,0) \cdot (2,9,6)}{\|(1,1,0)\| \cdot \|(2,9,6)\|} = \frac{11}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{121}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

deduïm que:

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ implica: } \alpha = \cos^{-1}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45° \text{ ó } \alpha = \tfrac{\pi}{4} \text{ radians} \blacksquare$$

(2) Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar és zero. Per tant:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = (k, 1, -2) \cdot (5, -k^2, 0) = 5k - k^2 = k \cdot (5 - k) \text{ implica: } k = 0 \text{ ó } k = 5 \blacksquare$$

[31] Un "radian" és l'angle que determina un arc de circumferència igual al radi, val aproximadament 57,295° i no depèn de la grandària del radi.

[32] D'aquí que el producte escalar mesuri la "tendència" de dos vectors a apuntar en la mateixa direcció.

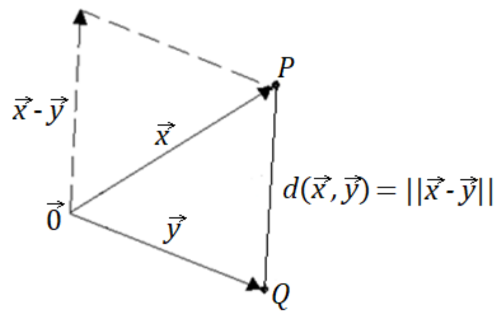
2.1.4. *Distància entre vectors*

Un altre dels conceptes mètrics fonamentals és el de distància entre vectors. De fet, si anomenen **punt** d'un espai euclidià a l'extrem de qualsevol vector que tingui per origen l'origen de coordenades,[33] es podria parlar també de distància entre punts.

<u>Definició</u>: La **distància** entre dos vectors $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ve definida per la norma de la seva diferència, és a dir:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Gràficament, la distància entre dos vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ (o, alternativament, entre els dos punts-extrems associats P i Q) seria:



<u>Exemple</u>: (1) Calcula la distància entre els vectors: $\vec{x} = (3, -2,0,1)$ i $\vec{y} = (1, -4,0,2)$.
(2) Troba els valors de $k \in \mathbb{R}$ tal que la distància entre $\vec{u} = (k, -k, 0)$ i $\vec{v} = (0,3, -k)$ sigui 9.
SOLUCIÓ: (1) En aquest cas, la distància que ens demanen és:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(2,2,0, -1)\| = +\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = +\sqrt{9} = 3\blacksquare$$ [34]

(2) Ja que:

$$9 = d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(k, -k - 3, k)\| = +\sqrt{k^2 + (-k - 3)^2 + k^2} = +\sqrt{3k^2 + 6k + 9}$$

llavors:

$$81 = 9^2 = 3k^2 + 6k + 9 \text{ implica: } 3k^2 + 6k - 72 = 0 \text{ implica: } k = -6 \text{ ó } k = 4\blacksquare$$

[33] Aquest vector seria el **vector-posició** del punt en qüestió. Dir que els punts i els vectors-posició associats "comparteixen" les mateixes coordenades.
[34] Conseqüentment, la distància entre els punts $P = (3, -2,0,1)$ i $Q = (1, -4,0,2)$ és igual a 3.

2.2. Introducció a la topologia de l'espai euclidià

2.2.1. *Bola oberta d'un espai euclidià*

Precisament el concepte mètric de distància entre dos vectors (o punts)[35] fonamenta el de bola oberta, la primera de les nocions topològiques que haurem de considerar.

<u>Definició</u>: La **bola oberta** de centre un punt o vector $P \in \mathbb{R}^n$ i de radi $r > 0$ és el conjunt format pels punts o vectors de $\mathbb{R}^n$ que es troben a una distància de P mes petita que $r > 0$.[36]

Vegem un exemple d'aplicació:

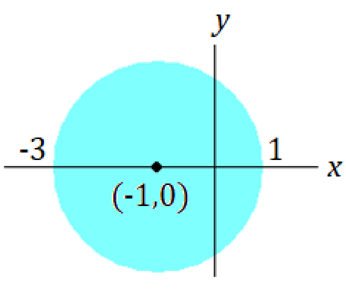
<u>Exemple</u>: Determina la bola oberta del pla de centre el punt $P = (-1,0)$ i radi $r = 2$.
SOLUCIÓ:
Com que:

$$d\big((x,y),(-1,0)\big) = \|(x,y) - (-1,0)\| = \|(x+1,y)\| = +\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

i:

$$+\sqrt{(x+1)^2 + y^2} < r = 2 \text{ implica: } (x+1)^2 + y^2 < 2^2 = 4$$

deduïm que la bola oberta de centre $P = (-1,0)$ i de radi $r = 2$ és el cercle de centre aquest punt i de radi 2. Gràficament:[37]



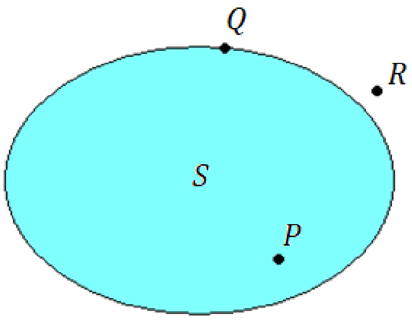
■

---

[35] A partir d'ara no farem distinció entre punts P i vectors-posició $\vec{a}$ associats (és a dir, entre vectors amb origen l'origen de coordenades i els punts extrems associats).
[36] Si la desigualtat fos no estricta parlaríem de la **bola tancada**.
[37] La bola oberta està formada pels punts que omplen la superfície blava. Es pot demostrar que totes les boles obertes del pla són cercles com aquest i sense la circumferència associada, i que totes les boles obertes de l'espai són esferes sense la superfície esfèrica associada.

2.2.2. *Punt interior i punt frontera d'un conjunt*

Notem que, en general, un punt d'un espai euclidià es pot relacionar de tres maneres diferents respecte qualsevol subconjunt de l'espai. Gràficament:

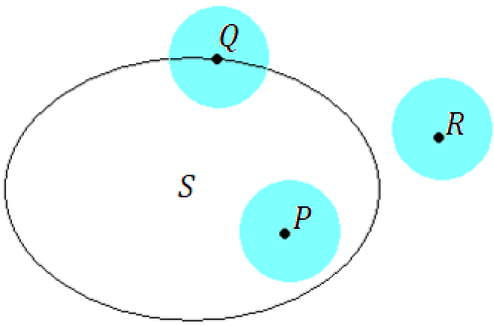


En aquest cas direm que P és un punt interior, Q un punt frontera i R un punt exterior de S. Així doncs, i en general:[38]

Definició: Un punt és un:

1. Un punt $P \in \mathbb{R}^n$ és un **punt interior** d'un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ si existeix una bola oberta de centre $P \in \mathbb{R}^n$ continguda en $S \subset \mathbb{R}^n$. [39]
2. Un punt $Q \in \mathbb{R}^n$ és un **punt frontera** d'un conjunt de $S \subset \mathbb{R}^n$ si qualsevol bola oberta de centre $Q \in \mathbb{R}^n$ conté punts de $S \subset \mathbb{R}^n$ i punts que no hi pertanyen.[40]

Gràficament:



Com podem veure, el punt P és un punt interior, el punt Q és un punt frontera del conjunt S.

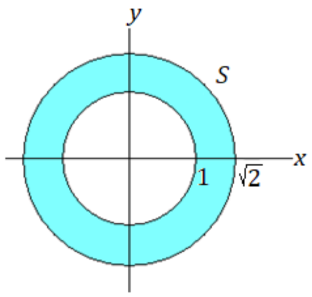
[38] Els punts exteriors no els considerarem.
[39] El radi d'aquesta bola oberta pot ser tant petit com calgui.
[40] Val a dir que un punt frontera d'un conjunt pot no pertànyer al conjunt!

2.2.2.1. Exemple d'aplicació dels punts interiors i frontera d'un conjunt

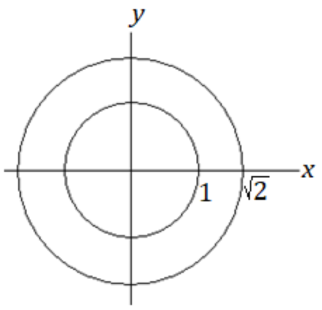
Exemple: Determina gràficament els punts interiors i frontera del conjunt:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}.$$

SOLUCIÓ: En aquest cas, el conjunt S està format pels punts que es troben entre els cercles de centre (0,0) i de radis $r_1 = 1$ i $r_2 = \sqrt{2}$ (és una "corona circular"), incloent-hi les dues circumferències ja que les desigualtats no són estrictes. Gràficament:

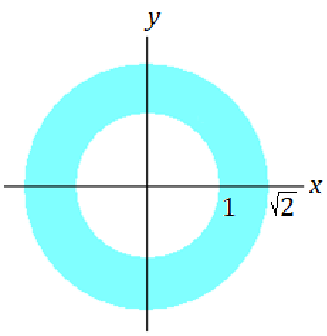


Així doncs, i com a conseqüència de la definició, la "frontera" de S (els punts frontera de S) està formada per les dues circumferències.[41] Gràficament:



■

I el "interior" de S (els punts interiors de S) és, precisament, la corona circular sense tenir en compte les dues circumferències:[42]



■

[41] Totes les boles obertes centrades en punts de les dues circumferències tenen intersecció no buida amb S i amb l'exterior de S.

[42] Qualsevol punt de la zona blava admet una bola oberta totalmente continguda en ella.

2.2.3. *Conjunt obert i conjunt tancat*

En general poden haver-hi punts de la frontera d'un conjunt que pertanyin i d'altres que no. Com a casos "extrems" tenim els conjunts oberts i tancats.

<u>Definició</u>: Un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt:

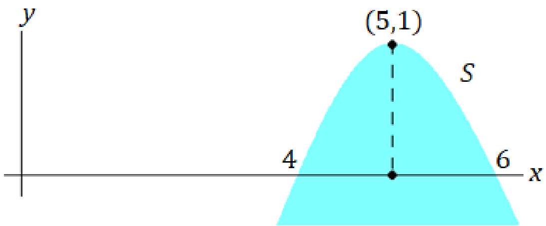
1. **Obert** si no conté cap punt de la seva frontera.
2. **Tancat** si els conté tots.

<u>Exemple</u>: Determina gràficament, si són oberts o tancats, els conjunts:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + y < 1\}$.
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

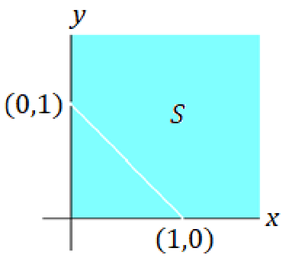
SOLUCIÓ:[43] (1) S és tancat ja que, com veiem en l'exemple anterior, conté la seva frontera∎

(2) Com que $y = -(x - 5)^2 + 1$ és l'equació d'una paràbola amb vèrtex màxim (5,1) tenim:



S és un conjunt obert ja que no conté la seva frontera que és la paràbola∎

(3) La representació gràfica del conjunt S és ara:



Per tant, S no és ni obert ni tancat ja que no conté tota la seva frontera∎.[44]

---

[43] El fet que un conjunt sigui tancat o obert depèn de la seva frontera. Per tant, aquests exemples s'han de resoldre determinant prèviament la frontera dels conjunts que hi están implicats.

[44] Falta el segment d'extrems (0,1) i (1,0) que és part de la frontera de S. En aquest cas, la frontera està formada pels semieixos positius i aquest segment. La definició de segment es troba a la plana 29.

2.2.4. *Conjunt acotat i conjunt compacte*

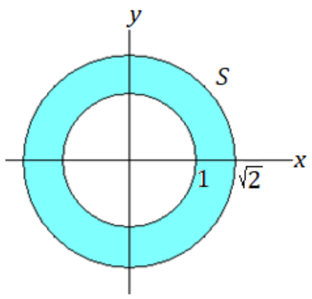
<u>Definició</u>: Un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt:

1. **Acotat** si existeix una bola oberta que el conté.
2. **Compacte** si, a més d'acotat, és tancat.

<u>Exemple</u>: Determina gràficament si són acotats i compactes els conjunts:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + y < 1\}$.
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}$.

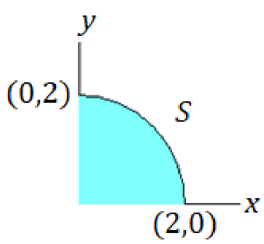
SOLUCIÓ: (1) Recordem que aquest conjunt era la corona circular:



És evident que S és un conjunt compacte ja que és acotat[45] i és tancat■

(2) Com que aquest conjunt no està contingut en cap bola oberta i és obert,[46] no és ni acotat ni, òbviament, compacte■

(3) Ja que S està format pels punts del cercle tancat de centre $(0,0)$ i de radi $r = 2$ en el primer quadrant que no estan sobre els eixos coordinats:



deduïm que és acotat però no és compacte ja que no és tancat■.[47]

[45] Està inclòs, per exemple, en la bola oberta de centre $P = (0,0)$ i de radi $r = 2$.
[46] Veure la plana anterior.
[47] S no conté el segment d'extrems $(0,0)$ i $(2,0)$, ni el d'extrems $(0,0)$ i $(0,2)$ que formen part de la seva frontera.

2.2.5. *Segment entre dos punts i conjunt convex*

Queda per introduir, finalment, la noció de conjunt convex que és clau en l'àmbit de la "optimització" matemàtica.[48] Aquesta noció està íntimament relacionada amb la de segment entre dos punts:

Definició: El **segment** d'extrems els punts $P, Q \in \mathbb{R}^n$ és el conjunt de punts de la recta que passa per P i Q, i que es troben entre ells.

Així doncs:

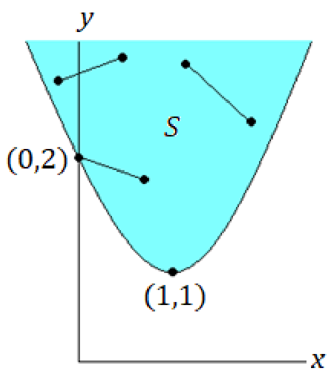
Definició: El conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és **convex** si "conté" tots els seus segments.

En la pràctica, nosaltres estudiarem la convexitat d'un conjunt a partir de la seva representació gràfica. Vegem un exemple:

Exemple: Prova que el conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 2x \geq 2\}$ és convex.
SOLUCIÓ: Com que:

$$y = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

és l'equació de la paràbola de vèrtex mínim en el punt (1,1) i que talla a l'eix d'ordenades en el punt (0,2), deduïm que S és, gràficament:



Notem que S és convex ja que tots els seus segments hi estan inclosos∎.[49]

[48] L'estudi dels màxims i mínims de funcions.
[49] Quan ens referim als segments de S ho estem fent als segments que tenen per extrems punts de S.

2.3. Formes quadràtiques i classificació

El interès que tenen per nosaltres les formes quadràtiques rau en la condició suficient d'existència d'òptims de les funcions escalars reals; per tant, és un interès "tècnic" per dir-ho així.[50] Per exemple, l'aplicació entre $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}$ definida per:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 7x_2^2 + 0'5x_3^2 + 6x_1x_2 - 5x_2x_3 \in \mathbb{R}$$

és una forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^3$.[51] Ara, si considerem la matriu simètrica:[52]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

que té per elements de la diagonal a_{ii} els coeficients de x_1^2, x_2^2 i x_3^2, i per terme a_{ij} el coeficient del producte $x_i \cdot x_j$, en aquest ordre, està clar que:[53]

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -2,5 \\ 0 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 - 7x_2^2 + 0'5x_3^2 + 6x_1x_2 - 5x_2x_3 = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Doncs bé, en aquest cas, diem que la forma quadràtica té per matriu simètrica associada la matriu A. En general: ·

Definició: Una **forma quadràtica** és una aplicació entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$ del tipus: [54]

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

és una matriu a coeficients reals quadrada i simètrica, és a dir, amb la condició que:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

[50] Aquesta qüestió s'estudia a l'últim tema del Bloc II.
[51] Notem que en l'expressió de la forma quadràtica les variables apareixen multiplicades dos a dos.
[52] Cal recordar que una matriu quadrada és simètrica si coincideix amb la seva transposada.
[53] Notem que els coeficients dels termes "creuats" s'han de dividir per la meitat abans d'introduir-los dins la matriu.
[54] Una forma quadràtica és un cas particular de funció escalar. Veure la definició de funció escalar de la plana 37.

2.3.1. *Signe d'una forma quadràtica*

El que ens interessa de les formes quadràtiques és, bàsicament, el seu signe i, en aquest sentit, cal considerar la definició següent:

<u>Definició</u>: Una forma quadràtica $Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots, x_n)$ és:

1. **Definida positiva** si $Q(\vec{x}) > 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nul**.**
2. **Definida negativa** si $Q(\vec{x}) < 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nul.
3. **Semidefinida positiva** si $Q(\vec{x}) \geq 0$, per a tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ i $Q(\vec{y}) = 0$ per un cert vector no nul $\vec{y} \neq \vec{0}$**.**
4. **Semidefinida negativa** si $Q(\vec{x}) \leq 0$, per a tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ i $Q(\vec{y}) = 0$ per un cert vector no nul $\vec{y} \neq \vec{0}$**.**
5. **Indefinida** altrament, és a dir, quan existeixin $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q(\vec{x}) < 0 < Q(\vec{y})$. [55]

<u>Exemple</u>: Demostra que la forma quadràtica:

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 0'5z^2 - 2xy$$

és semidefinida positiva.

SOLUCIÓ:

Aquesta forma quadràtica sempre és positiva ja que:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= x^2 + y^2 + 0'5z^2 - 2xy = \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) + 0'5z^2 = \\ &= (x - y)^2 + 0'5z^2 \geq 0 \end{aligned}$$

i com que, per exemple, la imatge del vector no nul (1,1,0) és zero:

$$Q(1,1,0) = (1 - 1)^2 + 0'5 \cdot 0^2 = 0$$

deduïm que es tracta d'una forma quadràtica semidefinida positiva■

En general, determinar el signe d'una forma quadràtica (classificar-la) a partir de la pròpia definició és complicat i, per aquest motiu, veurem ara un mètode de classificació alternatiu.

---

[55] Notem que el signe d'una forma quadràtica no depèn de la imatge en el vector zero $\vec{0}$ ja que sempre és igual a 0. Per tant, i a efectes de signe, no cal tenir-lo en compte.

2.3.2. *Classificació d'una forma quadràtica per menors principals*

El teorema que enunciem tot seguit caracteritza completament el signe d'una forma quadràtica a partir dels "menors principals" de la matriu simètrica associada.[56]

<u>Teorema</u>: Una forma quadràtica $Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots, x_n)$ de matriu simètrica associada A és:

1. Definida positiva si i només si tots els menors principals de A són estrictament positius.
2. Definida negativa si i només si tots els menors principals de A d'ordre parell són estrictament positius i els d'ordre imparell negatius.
3. Semidefinida positiva si i només tots els menors principals de A són positius i $|A| = 0$.
4. Semidefinida negativa si i només si tots els menors principals de A d'ordre parell són positius, els d'ordre imparell negatius ó zero, i $|A| = 0$.
5. Indefinida si i només si no es dóna cap de les situacions anteriors. [57]

<u>Exemple</u>: Calcula l'expressió analítica i el signe de la forma quadràtica amb matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ: L'expressió analítica és:

$$Q(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6xy + 2yz.$$

Com que els tres menors principals d'ordre 1 de A són negatius:[58]

$$Mp_1 = \{-5; -2: -3\}$$

els tres d'ordre 2 són estrictament positius:

$$Mp_2 = \left\{ \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right\} = \{1; 6; 14\}$$

i el d'ordre 3 és negatiu:

$$Mp_3 = \{|A|\} = \{-1\}$$

deduïm, pel teorema anterior, que la forma quadràtica és definida negativa ■

[56] Recordem que un **menor principal** d'una matriu quadrada A és qualsevol dels determinants de les submatrius quadrades que tenen per diagonal alguns dels elements de la diagonal principal de A.

[57] D'aquests resultats es desprèn que: (1) Si hi ha un canvi de signe en els elements de la diagonal de A, és a dir, si tenim: $a_{ii} < 0 < a_{jj}$ llavors la forma quadràtica és indefinida. (2) Si algun menor principal d'ordre 2 de A és negatiu, la forma quadràtica és indefinida. (3) Si el determinant de A és diferent de 0, la forma quadràtica no pot ser mai semidefinida (ni positiva ni negativa). Cal tenir en compte aquestes propietats a l'hora d'estudiar el signe d'una forma quadràtica.

[58] Són els elements de la diagonal de A.

2.3.3. *Forma quadràtica restringida a un subespai vectorial*

Finalment, i en certs casos, caldrà conèixer el signe d'una forma quadràtica però restringida ara a un subespai vectorial.[59] En general:

Definició: Si $Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots, x_n)$ és una forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^n$ i $S \subset \mathbb{R}^n$ és un subespai vectorial, la **forma quadràtica restringida** a S és la forma quadràtica definida únicament sobre els vectors de $S \subset \mathbb{R}^n$.

Vegem un exemple il·lustratiu de classificació d'una forma quadràtica restringida:

Exemple: Troba el signe de la forma quadràtica $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz$ restringida al subespai vectorial:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

SOLUCIÓ:

Aquesta forma quadràtica és indefinida sobre tot $\mathbb{R}^3$ però, restringida a *S*, és definida negativa. En efecte, ja que per exemple tenim que:

$$x + y + z = 0 \text{ implica: } z = -x - y$$

llavors, al substituir aquesta darrera igualtat en l'expressió de la forma quadràtica, s'obté una nova forma quadràtica "restringida" a les variables x i y:

$$Q(x, y, -x - y) =$$
$$= 3x^2 + 3(-x - y)^2 + 4xy + 8x(-x - y) + 4y(-x - y) =$$
$$= -2x^2 - y^2 - 2xy$$

que és definida negativa. Per tant, diem que la forma quadràtica inicial és definida negativa quan la restringim al subespai vectorial S■.[60]

---

[59] Això passarà amb la condició suficient d'optimització restringida per igualtats que s'estudia a Matemàtiques II.

[60] Val a dir que si una forma quadràtica és definida sobre tot $\mathbb{R}^n$ també ho serà sobre qualsevol subespai vectorial. A més, si una forma quadràtica és semidefinida (positiva o negativa) al restringir-la a un subespai vectorial continuarà sent semidefinida (positiva o negativa) o bé passarà a ser definida (positiva o negativa). Contràriament, una forma quadràtica indefinida pot, en principi, adoptar qualsevol signe si la restringim a un subespai vectorial convenient.

2.3.4. *Exemple d'aplicació econòmica de les formes quadràtiques*

Exemple: Un seller que produeix tres tipus de vins, rosat, negre i blanc, té uns beneficis anuals donats per la l'expressió:

$$B(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - \left(2\sqrt{2}\right)xz$$

on $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $z \geq 0$ denoten les quantitats d'hectolitres produïts de cadascun d'ells. Prova que: (1) El seller pot tenir pèrdues. (2) Aquest no és el cas si la quantitat produïda de rosat és la meitat de la de blanc.

SOLUCIÓ:

(1) Notem, d'entrada, que els beneficis del seller venen donats per una forma quadràtica de matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenir pèrdues vol dir, en aquest context, que aquesta forma quadràtica és indefinida, i això és així.[61] De fet, si el seller produís la mateixa quantitat de vi rosat, negre i blanc tindria pèrdues ja que:

$$x = y = z \text{ implica: } B(x,x,x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)x^2 < 0 \blacksquare$$

(2) Ara, si la quantitat produïda de rosat és la meitat de la de blanc, és a dir, si:

$$x = \frac{z}{2} \text{ equivalent a: } z = 2x$$

els beneficis vindrien donats per la forma quadràtica restringida a les variables x i y:

$$B(x,y,2x) = x^2 + y^2 + 2(2x)^2 - 2xy - \left(2\sqrt{2}\right)x(2x) =$$

$$\left(9 - 4\sqrt{2}\right)x^2 + y^2 - 2xy$$

que és una forma quadràtica de dos variables de matriu associada:

$$A' = \begin{pmatrix} 9 - 4\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ja que els menors principals associats a aquesta matriu:

$$Mp_1 = \left\{9 - 4\sqrt{2}; 1\right\} \text{ i } Mp_2 = \{|A'|\} = \left\{8 - 4\sqrt{2}\right\}$$

són estrictament positius, deduïm que els beneficis del seller venen donats, ara, per una forma quadràtica definida positiva. En altres paruales, i per definició, el seller té beneficis■

[61] Els menors principals de A són $Mp_1 = \{1; 1{:}\, 2\}$, $Mp_2 = \{0; 2; 0\}$ i $Mp_3 = \{|A|\} = \{-2\}$.

2.4. Exercicis

1. Donats els vectors $\vec{x} = (2,1,1)$ i $\vec{y} = (3,-2,2)$ determina: (a) El seu producte escalar. (b) Les normes associades. (c) Els vectors unitaris $\vec{u}, \vec{v}$ que hi estan associats. (d) L'angle que formen. (e) La distància entre ells.
2. Demostra que dos vectors ortogonals són sempre linealment independents, i determina una **base ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ en la què formin part els vectors els vectors ortogonals $(1,-3,2)$ i $(-1,3,5)$.[62]
3. Estudia gràficament si el conjunt $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 \leq 2x \text{ i } y > {}^{x}\!/_{2}\right\}$ és obert, tancat, acotat, compacte i convex.
4. Per a fabricar un adob combinat amb dos constituents químics P i Q disposem de dos productes A i B de venda al mercat. Si la taula següent ens indica el % de P i Q que formen part d'una unitat de A i B:

%	P	Q
A	60%	40%
B	30%	70%

   determina gràficament el conjunt de les combinacions de A i B que ens proporcionen un adob on entra, com a mínim, un 30% de P i un 50% de Q.
5. Troba el signe de les formes quadràtiques:
   a. $Q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz.$
   b. $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz.$
   c. $Q(x,y,z) = -3x^2 - 4y^2 - 3z^2 + \left(4\sqrt{2}\right)xy + 4yz.$
6. Determina el signe de la forma quadràtica $Q(x,y,z) = xy + xz + yz - x^2 - y^2 - z^2$ restringida al subespai vectorial:
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5y\}.$$

---

[62] Una **base ortogonal** de $\mathbb{R}^n$ és aquella formada per vectors ortogonals dos a dos.

SOLUCIONS:

1.

   a. $\vec{x}\cdot\vec{y}=6$.

   b. $\|\vec{x}\|=+\sqrt{6}$ i $\|\vec{y}\|=+\sqrt{17}$.

   c. $\|\vec{u}\|=\left(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $\|\vec{v}\|=\left(\frac{3}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$.

   d. $\alpha=53{,}55°$ (ó 0,935 radians).

   e. $d(\vec{x},\vec{y})=+\sqrt{11}$.

2. Una base podria ser $(1{,}2{,}3)$, $(-3{,}0{,}1)$ i $(1,-5{,}3)$.
3. S no és obert, no és tancat, és acotat, no és compacte i és convex.
4. Les combinacions x i y de A i B formen el conjunt tancat:

$$S=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2: 2x+y\geq 1,\ 4x+7y\geq 5, x+y\leq 1 \text{ i } x\geq 0, y\geq 0\}\,.$$

5.

   a. Definida positiva.

   b. Semidefinida positiva.

   c. Semidefinida negativa.

6. Definida negativa.

BLOC II: Càlcul

3. FUNCIONS REALS DE DIVERSES VARIABLES

3.1. Funció escalar real i definicions bàsiques

3.1.1. *Funció escalar i domini*

L'estructura bàsica sobre la què ens mourem serà l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ associat al producte escalar habitual. En general:

Definició: Una **funció escalar real** és una aplicació entre un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$:

$$z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

on $Domf = A \subset \mathbb{R}^n$ és el conjunt de punts (o vectors) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ que tenen imatge per la funció, i que s'anomena **domini.** [63]

Exemple: Determina gràficament el domini de la funció escalar $f(x,y) = +\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

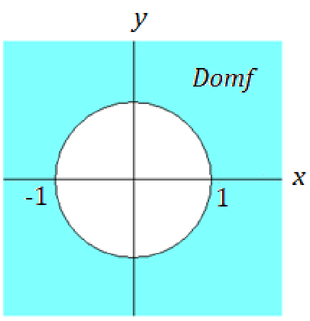
SOLUCIÓ: Ja que:

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ és equivalent a: } x^2 + y^2 \geq 1$$

el domini està format pels punts exteriors a la circumferència de centre $(0,0)$ i de radi $r = 1$ juntament amb ella:[64]

$$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Gràficament:



■

[63] Notem que si $n = 1$ la funció escalar és una funció real d'una variable. A partir d'ara hom donarà per conegudes les propietats més importants d'aquestes funcions.

[64] Tota equació de la forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ representa a la circumferència de centre (a,b) i de radi $r > 0$.

3.1.1.1. Exemple d'aplicació dels dominis de funcions escalars

Representar gràficament dominis de funcions escalars amb dues variables és lo primer que analitzarem amb cert detall. Vegem un exemple:

Exemple: Determina gràficament el domini de la funció escalar:

$$z = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$$

tot indicant si es tracta d'un conjunt obert, tancat, acotat, compacte i convex.

SOLUCIÓ: Tenint en compte que el numerador i el denominador existeixen per a tot valor de x i y, la única condició que cal imposar és que:

$$x^2 - y^2 \neq 0.$$[65]

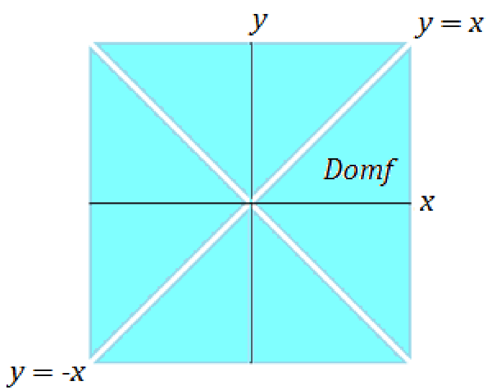
Ja que:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \neq 0 \text{ és equivalent a: } y \neq x \text{ i } y \neq -x$$

el domini de la funció està format pels punts que no pertanyen a les dues bisectrius del sistema de referència. Per tant, el domini és:

$$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x \text{ i } y \neq -x\}.$$

Gràficament:

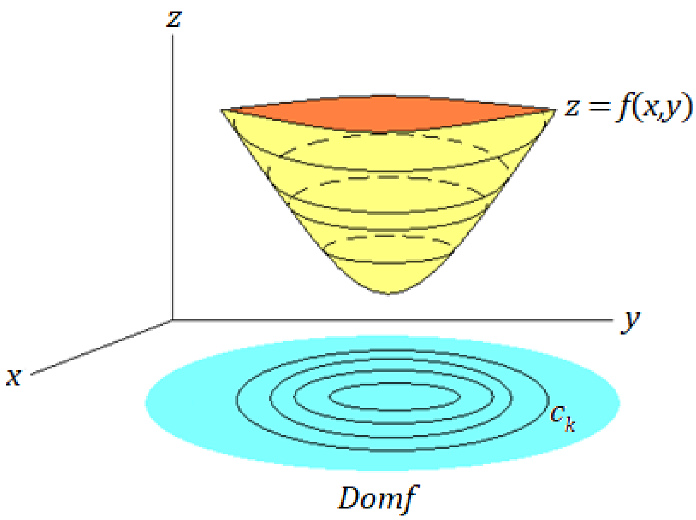


Com podem veure, es tracta d'un conjunt que és obert (no conté cap punt de la seva frontera que són les dues bisectrius), no és acotat (no està contingut en cap bola oberta) i no és convex (per exemple, el segment d'extrems $(-1,0)$ i $(1,0)$ no està tot contingut en el domini ja que el punt mig $(0,0)$ no hi pertany) ■

[65] Dividir per zero està prohibit!

3.1.2. *Corbes de nivell d'una funció escalar amb dues variables*

Ja sabem que la representació gràfica d'una funció d'una variable és una corba en el pla. Doncs bé, la d'una funció escalar amb dues variables $z = f(x, y)$ és una "superfície" en l'espai i dibuixar-la, per regla general, és força complicat. El que es fa és simplificar el problema tot estudiant les corbes associades a la funció que s'obtenen al tallar la superfície associada a $z = f(x, y)$ per un feix de plans paral·lels i "projectar-les" sobre el pla base *XY*. Gràficament:



Definició: Les **corbes de nivell** de la funció escalar $z = f(x, y)$ són les corbes del pla *XY* incloses en el domini i donades per la igualtat $f(x, y) = k$, amb $k \in \mathbb{R}$, i que denotem per c_k.

Propietat: En general:

1. Tota corba de nivell d'una funció escalar està inclosa en el seu domini de definició.
2. Dues corbes de nivell d'una mateixa funció escalar mai es tallen en punts del seu domini.[66]

En Economia les "corbes isoquantes" són les corbes de nivell d'una funció de producció, mentre que les "corbes d'indiferència" són les corbes de nivell d'una funció d'utilitat.

[66] I si es tallen ho fan en punts que no pertanyen al domini de la funció.

3.1.2.1 Exemple d'aplicació de les corbes de nivell

Exemple: Representa gràficament les corbes de nivell de les funcions:

1. $z = f(x, y) = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2$..
2. $z = f(x, y) = x \cdot y$.

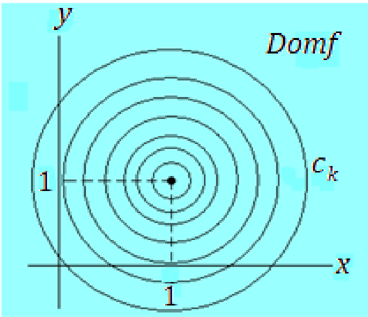
SOLUCIÓ: (1) Ja que el domini de definició de la funció és tot el pla, les corbes de nivell l'ompliran totalment. Les corbes de nivell c_k són les corbes que tenen per equació:

$$1 - (x-1)^2 - (y-1)^2 = k$$

equivalent a:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 - k.$$

Notem que, per a qualsevol valor de $k \leq 1$, la corba de nivell corresponent és una circumferència de centre (1,1) i de radi $r = \sqrt{1-k}$. Gràficament:

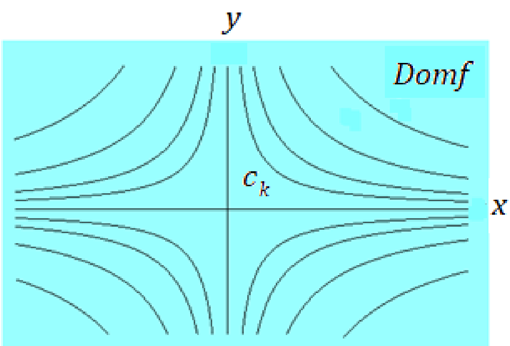


■

(2) Ara les corbes de nivell c_k són les corbes del pla, que és el domini de la funció, d'equació:

$$x \cdot y = k.$$

Aquestes corbes són les hipèrboles equilàteres amb asímptotes els eixos coordinats. Per a qualsevol valor $k > 0$ tenim una hipèrbola equilàtera en el 1er. i 3er. quadrants, i per $k < 0$ tenim una en el 2on. i 4rt. quadrants, mentre que per $k = 0$ s'obtenen, precisament, els eixos coordinats. Gràficament:



■

3.1.2.2. Exemple d'aplicació econòmica de les corbes de nivell

Exemple: Una empresa monopolística que produeix dos articles de consum, A i B, sap que els seus beneficis venen donats per la funció:

$$B(x,y) = 100x + 200y - x^2 - y^2 - 10.000 \text{ u.m.}$$ [67]

on $x > 0$ i $y > 0$ denoten, respectivament, les quantitats produïdes de A i de B. Sabent que la corba de nivell c_k d'aquesta funció de beneficis és la circumferència:

$$(x-50)^2 + (y-100)^2 = 2500 - k$$

prova que el benefici màxim de l'empresa, que és de 2500 u.m., s'assoleix quan es fabriquen 50 unitats de A i 100 de B.

SOLUCIÓ:

Com diu l'enunciat, la k-corba de nivell c_k de la funció de beneficis que, per definició és:

$$100x + 200y - x^2 - y^2 - 10.000 = k$$

és equivalent a la circumferència:

$$(x-50)^2 + (y-100)^2 = 2500 - k$$

de centre (50,100) i de radi:

$$r = +\sqrt{2500-k}\,.$$

Tenint en compte que el benefici màxim s'assoleix quan el valor de $k \geq 0$ sigui el més gran possible, deduïm que aquest valor pot ser, com a màxim, de 2500 ja que el radi $r \geq 0$ d'aquestes circumferències ha de ser un nombre real. Per tant, ja que:

$$k = 2500$$

implica que la circumferència de nivell $k = 2500$ tingui radi nul:

$$(x-50)^2 + (y-100)^2 = 2500 - k = 0$$

la qual cosa implica, en particular, que:

$$x = 50 \text{ i } y = 100$$

deduïm que el màxim benefici de 2500 u.m. s'assoleix produint $x = 50$ unitats del producte A i $y = 100$ unitats del producte B■

[67] Recordem que u.m. denota unitats monetàries.

3.2. Derivades d'una funció escalar i vector gradient

3.2.1. *Derivades direccionals i derivades parcials*

Recordem que una funció real d'una variable $y = f(x)$ és derivable en $a \in Domf \subset \mathbb{R}$ si existeix el límit del quocient incremental:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \in \mathbb{R}.$$

Malauradament aquesta definició no es pot estendre a funcions escalars $z = f(\vec{x})$ en un punt $\vec{a} \in Domf \subset \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t) - f(\vec{a})}{t}$$

ja que el numerador no té sentit.[68]. Així doncs, en el seu lloc, cal considerar aquesta definició:

<u>Definició</u>: [69] La funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ té **derivada** en $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ **segons el vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si existeix el límit:[70]

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t \cdot u_1, \dots, a_n + t \cdot u_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} = f'_{\vec{u}}(\vec{a}) \in \mathbb{R}.$$

En particular:

1. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ és unitari, $f'_{\vec{u}}(\vec{a})$ és la **derivada direccional** en $\vec{a} \in Domf$ **segons** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.[71]
2. Si $\vec{u} = \vec{e}_i = \left(\dots 0, \overset{(i)}{\widehat{1}}, 0 \dots \right)$ és el vector vector i-èsim de la base canònica de $\mathbb{R}^n$, $f'_{\vec{e}_i}(\vec{a})$ és la **derivada parcial i-èsima** en $\vec{a} \in Domf$ que expressada en components és:[72]

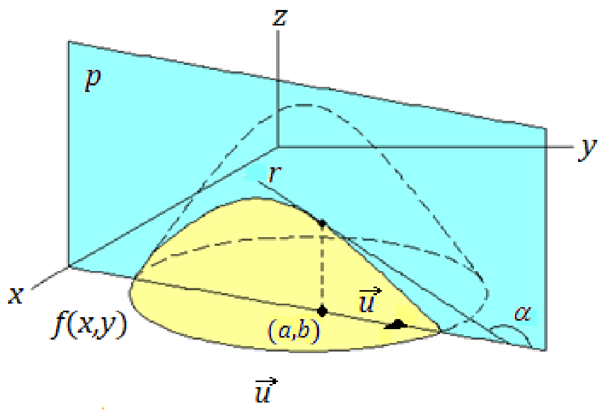
$$f'_{\vec{e}_i}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t} = \{\text{Notació}\} = \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} \in \mathbb{R}.^{73}$$

---

[68] No podem sumar un vector amb un escalar: $\vec{a} + t$. El que es fa és considerar un vector fix $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ i la suma $\vec{a} + t \cdot \vec{u}$ en lloc de $\vec{a} + t$.
[69] Com veurem al llarg d'aquestes planes, el concepte de derivada que així se'n genera té una importancia cabdal.
[70] El valor d'aquest límit és la **derivada en** $\vec{a} \in Domf$ **segons el vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
[71] O **derivada** en $\vec{a} \in Domf$ **segons la direcció del vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
[72] Notem que les derivades parcials són derivades direccionals ja que els vectors de la base canònica d'un espai vectorial són, en particular, vectors unitaris.
[73] Notem que les derivades parcials són les que están més "properes" a les derivades d'una variable. Com a molt, existeixen n derivades parcials d'una funció escalar de n variables en un punt

3.2.2. *Interpretació geomètrica de la derivada direccional d'una funció escalar*[74]

La derivada de $z = f(x, y)$ en el punt $(a, b) \in Domf$ segons el vector unitari $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ serà la pendent de la recta tangent r a la funció en el punt (a, b) i que pertany al pla p: [75]



És a dir:

$$f'_{\vec{u}}(a, b) = \tan \alpha.$$

<u>Exemple</u>: Calcula, a partir de la definició, la derivada direccional de $z = f(x, y) = \frac{y}{x}$ en el punt $\vec{a} = (1,1)$ segons el vector unitari associat al vector $\left(1, \sqrt{3}\right)$.
SOLUCIÓ: Cal considerar l'expressió general de la derivada direccional amb:

$$\vec{a} = (1,1) \text{ i el vector unitari associat a } \left(1, \sqrt{3}\right): \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Per tant:

$$f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((1,1) + t \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(1,1)}{t} =$$

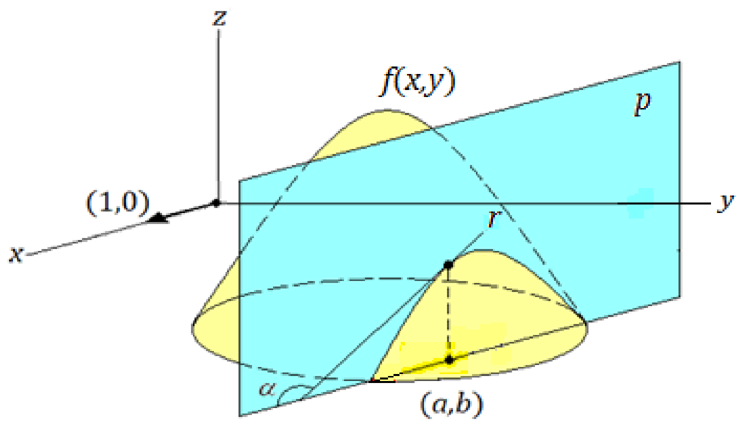
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + t \cdot \left(\frac{1}{2}\right), 1 + t \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{1 + t \cdot (\sqrt{3}/2)}{1 + t \cdot (1/2)}\right) - \frac{1}{1}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{2 + t \cdot \sqrt{3}}{2 + t}\right) - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{3} \cdot t - t}{2 + t}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + t} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \blacksquare$$

[74] La derivada segons un vector no té una interpretació geomètrica interessant.
[75] Aquest pla de tall p és el pla perpendicular al pla base XY, que passant pel punt (a, b), segueix la direcció del vector $\vec{u}$.

3.2.3. *Interpretació geomètrica de les derivades parcials d'una funció escalar*

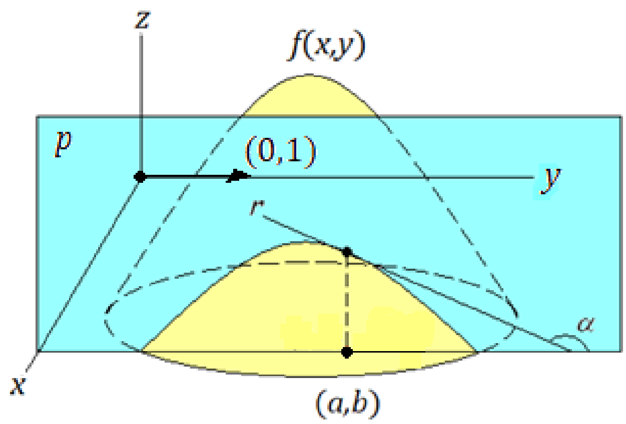
La derivada parcial respecte x de la funció $z = f(x, y)$ en el punt $(a, b) \in Domf$ serà la pendent de la recta tangent r a la funció en el punt (a, b) i que pertany al pla p:[76]



És a dir:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \tan \alpha \,.$$

La derivada parcial respecte y de la funció $z = f(x, y)$ en el punt $(a, b) \in Domf$ serà la pendent de la recta tangent r a la funció en el punt (a, b) i que pertany al pla p:[77]



És a dir:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \tan \alpha \,.$$

[76] Aquest pla de tall p és el pla perpendicular al pla base XY, que passant pel punt (a, b), segueix la direcció del vector (1,0).
[77] Aquest pla de tall p és anàleg a l'anterior però ara seguint la direcció del vector (0,1).

3.2.4. *Càlcul de les derivades parcials d'una funció escalar*

3.2.4.1. Càlcul de les derivades parcials a partir de la definició

Val a dir que aquest no serà el procediment que seguirem d'aquí en endavant per a calcular derivades parcials i tampoc derivades en general. [78] Tanmateix, veurem un exemple:

Exemple: Calcula, a partir de la definició, les derivades parcials en el punt $(1,1)$ de la funció:

$$z = f(x, y) = \frac{y}{x}.$$

SOLUCIÓ:

Pel que fa a la derivada parcial respecte x cal considerar:

$$\vec{a} = (1,1) \text{ i el vector } \vec{u} = \vec{e}_1 = (1,0).$$

Per tant:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = f'_{\vec{u}}(1,1) = f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a} + t\cdot\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\big((1,1) + t\cdot(1,0)\big) - f(1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+t}\right) - \frac{1}{1}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+t}\right) - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{-t}{1+t}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{-1}{1+t}\right) = -1 \blacksquare$$

Pel que fa a la derivada parcial segons la variable y hem de considerar ara:

$$\vec{a} = (1,1) \text{ i el vector } \vec{u} = \vec{e}_2 = (0,1).$$

Per tant:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = f'_{\vec{u}}(1,1) = f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a} + t\cdot\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\big((1,1) + t\cdot(0,1)\big) - f(1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(1,1+t) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1+t}{1}\right) - \frac{1}{1}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1\blacksquare$$

[78] Veure la plana següent. El càlcul de derivades segons un vector general el deixarem per a més endavant.

3.2.4.2. Càlcul de les derivades parcials a partir de les regles de derivació

A partir de l'expressió en components de les derivades parcials que hem vist més amunt, es pot deduir que el seu càlcul es redueix al de les derivades d'una variable: en efecte, la derivada parcial respecte una variable s'obté derivant la funció a partir de les regles de derivació que ja coneixem tot considerant les altres variables com a constants.

Exemple: Calcula les derivades parcials de les funcions escalars:

1. $z = f(x,y) = 4x^2 - 7y^3 + 2x^2y - 75y + 8$.
2. $z = f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$.
3. $z = f(x,y) = x^y$

SOLUCIÓ: (1) En aquest cas, la derivada parcial respecte x serà:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \{y \text{ és constant}\} = 8x - 0 + (4x) \cdot y - 0 + 0 = 8x + 4xy$$

i la derivada parcial respecte y serà:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \{x \text{ és constant}\} = 0 - 21y^2 + 2x^2 \cdot 1 - 75 + 0 = -21y^2 + 2x^2 - 75 \blacksquare$$

(2) En aquest cas, les derivades parcials seran:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \{y \text{ és constant}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}\right) \cdot \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x-y)(x+y)} = \frac{y}{x^2 - y^2}$$

i:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \{x \text{ és constant}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}\right) \cdot \frac{(-1) \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{(x-y)(x+y)} = -\frac{x}{x^2 - y^2} \blacksquare$$

(3) En aquest cas, les derivades parcials són:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \{y \text{ és constant}\} = y \cdot x^{y-1}$$

i:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \{x \text{ és constant}\} = x^y \cdot \ln x \blacksquare$$

3.2.5. *Aplicacions de les derivades parcials*

3.2.5.1. Creixement i decreixement parcial d'una funció escalar

De la mateixa manera que, en una variable, la derivada de la funció ens permetia veure si la funció creixia o decrexia, sempre i quan fos no nul·la, quelcom de semblant passa amb les derivades parcials de les funcions escalars.

Definició: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$

1. És **creixent respecte la variable i-èssima $\boldsymbol{x_i}$** si:
$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} > 0.$$
2. És **decreixent respecte la variable i-èssima $\boldsymbol{x_i}$** si:
$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} < 0.$$

Exemple: Estudia en el punt (1,2) el creixement i/o decreixement de la funció escalar:
$$z = f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}.$$
SOLUCIÓ: Ja que:
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x \cdot (x + y^2) - (x^2 + y) \cdot 1}{(x + y^2)^2} = \frac{x^2 + 2xy^2 - y}{(x + y^2)^2}$$
i que:
$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2 - 2}{(1 + 2^2)^2} = \frac{7}{25} > 0$$
deduïm que, en el punt (1,2), la funció és creixent en la direcció de l'eix d'abscisses. Ja que:
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x + y^2) - (x^2 + y) \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \frac{x - 2x^2y - y^2}{(x + y^2)^2}$$
i que:
$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = \frac{1 - 2 \cdot 1^2 \cdot 2 - 2^2}{(1 + 2^2)^2} = \frac{-7}{25} < 0$$
deduïm que, en el punt (1,2), la funció és decreixent en la direcció de l'eix d'ordenades ■

3.2.5.2. Aplicació econòmica: Marginalitat

Sigui una funció econòmica $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ que admet derivada parcial i-èssima en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$, és a dir, que existeix el límit:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Aleshores, fent $t = 1$ s'obtindria l'aproximació:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} \cong f(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Per tant, la derivada parcial i-èssima ens mesura, aproximadament, la variació del valor de la funció en $(a_1, \dots, a_n)$ quan la component i-èssima a_i augmenta $u = 1$ unitats.

Vegem un exemple econòmic:

Exemple: Si:

$$B(x, y) = 1100x + 1300y - 2x^2 - 2{,}5y^2 - 70.000$$

és la funció de beneficis associada a la producció i venda de dos articles A i B en les quantitats de 250 i de 220 unitats, calcula aproximadament l'increment dels beneficis si la producció i venda de B augmenta $u = 1$ unitats.

SOLUCIÓ:

Per a estimar el increment dels beneficis, hem de considerar la "marginalitat" de la funció de beneficis respecte la variable y. Com que:

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial y} = 1300 - 5y \text{ implica: } \frac{\partial B(250{,}220)}{\partial y} = 1300 - 5 \cdot 220 = 200$$

deduïm que quan la producció de B augmenta en $u = 1$ unitats, els beneficis augmentaran, aproximadament, en 200 u.m. En efecte:

$$B(250{,}220 + 1) - B(250{,}220) = B(250{,}220 + u) - B(250{,}220) \cong u \cdot \frac{\partial B(250{,}220)}{\partial y} =$$

$$= 1 \cdot 200 = 200 \blacksquare$$ [79]

[79] Val a dir que aquesta aproximació s'ajusta força bé a la realitat ja que el increment és exactament igual a 197.5 u.m. En general, u pot prendre valors diferents de 1; tanmateix, i a mesura que u augmenta, l'aproximació s'allunya del valor exacte.

3.2.5.3. Aplicació econòmica: Elasticitats parcials

Sigui una funció econòmica $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ que admet derivada parcial i-èssima en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$, és a dir, que existeix el límit:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Llavors, l'**elasticitat parcial i-èssima** de la funció en aquest punt, que per definició és igual a l'expressió:

$$E_{x_i} f(\vec{a}) = \frac{a_i}{f(\vec{a})} \cdot \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} \right)$$

ens mesura, aproximadament, l'increment percentual de la funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ quan la component i-èssima de $\vec{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ augmenta un $r\% = 1\%$.

Exemple: Si:

$$B(x, y) = 1100x + 1300y - 2x^2 - 2{,}5y^2 - 70.000$$

és la funció de beneficis associada a la producció i venda de dos articles A i B en les quantitats de 250 i de 220 unitats calcula, de forma aproximada, l'increment percentual dels beneficis si la producció i venda de A augmenta un $r\% = 2\%$.

SOLUCIÓ:

La variació percentual dels beneficis quan la producció de A augmenta en un $r\% = 1\%$ és aproximadament igual a l'elasticitat parcial dels beneficis respecte la variable corresponent amb l'article A, és a dir, la variable x. Ja que:

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = 1100 - 4x \text{ implica: } \frac{\partial B(250{,}220)}{\partial x} = 1100 - 4 \cdot 250 = 100$$

i que:

$$E_x B(250{,}220) = \frac{250}{B(250{,}220)} \cdot \frac{\partial B(250{,}220)}{\partial x} = \frac{250}{245.000} \cdot 100 = 0{,}102$$

deduïm que l'increment percentual dels beneficis quan la producció i venda de A augmenta un $r\% = 2\%$ seria aproximadament d'un:

$$E_x B(250{,}220) \cdot r\% = 0{,}102 \cdot 2\% = 0{,}204\% \blacksquare$$ [80]

[80] En realitat, el increment percentual real és d'un 0.184%.

3.2.6. *Vector gradient d'una funció en un punt*

Estem ja en condicions d'introduir el que possiblement és el concepte analític més important del Bloc II com és el de vector gradient. Formalment:

Definició: El **vector gradient** (o **gradient**) d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és, per definició, el vector que té per components les derivades parcials de la funció en el punt. És a dir:

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}\right).$$ [81]

Cal remarcar que el gradient d'una funció escalar de n variables en un punt és un vector que té n components. Per tant, si alguna de les derivades parcials que apareixen en la definició no existeix, tampoc existeix el vector gradient.

Exemple: Calcula, si existeix, el gradient en el punt (1,0) de les funcions escalars:

$$(1)\ z = f(x,y) = \frac{y}{x}.\ (2)\ z = f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}.$$

SOLUCIÓ: (1) Com que les derivades parcials de la funció en el punt (1,0) són:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \text{ implica: } \frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = -\frac{0}{1^2} = 0$$

i:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} \text{ implica: } \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = \frac{1}{1} = 1$$

deduïm que el vector gradient de la funció $f(x,y) = \frac{y}{x}$ en el punt (1,0) és el vector:

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(1,0)}{\partial y}\right) = (0,1) \blacksquare$$

(2) Com que la derivada parcial respecte y de la funció en el punt (1,0) no existeix:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x \text{ implica: } \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1 \cdot 0}} \cdot 1 = \infty \notin \mathbb{R}$$

deduïm que el vector gradient de la funció $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$ no existeix$\blacksquare$.[82]

[81] En Física, l'operador ∇ s'anomena operador "nabla".
[82] Tanmateix la funció existeix en el punt (1,0). En rigor, i aplicant la definició formal de derivada parcial, es pot veure que el límit $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$ no existeix.

3.2.6.1. Aplicació mètrica del gradient: hiperplà tangent i funcions diferenciables

Ja sabem que, en una variable, tenir derivada en un punt és equivalent a tenir recta tangent pel punt. En el domini de les funcions escalars això no passa sempre, és a dir, que existeixen funcions que admeten vector gradient en un punt però no "hiperplà tangent", que és l'equivalent a la recta tangent. Les funcions escalars que admeten hiperplà tangent en un punt són les anomenades funcions escalars **diferenciables** en el punt.

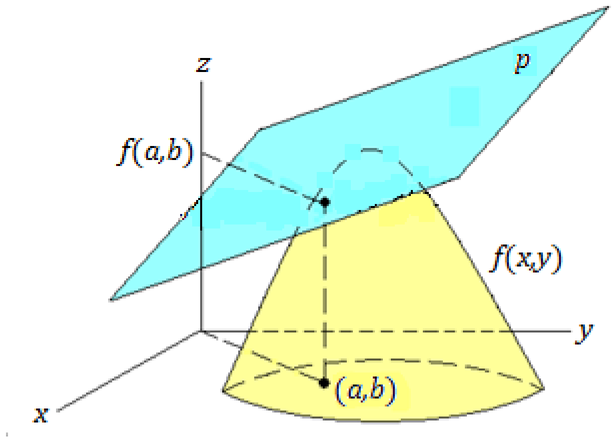
Definició: L'**hiperplà tangent** p a una funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és el lloc geomètric del punts $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que satisfan l'equació vectorial:

$$z = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \cdot (x_n - a_n).$$

En dues variables, l'hiperplà tangent a una funció $z = f(x, y)$ en un punt (a, b) és el pla d'equació:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b).$$

Gràficament:



En tres variables, l'hiperplà tangent a una funció $u = f(x, y, x)$ en un punt (a, b, c) té per equació:

$$u = f(a, b, c) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} \cdot (y - b) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z} \cdot (z - c).$$

3.2.6.1.1. Exemple d'aplicació d'hiperplans tangents

<u>Exemple</u>: Troba l'equació del:

1. Pla tangent a la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{1+y}{1+x}$ en el punt (0,1).
2. Hiperplà tangent en el punt (1,2,3) a la funció $u = f(x, y, z) = \ln(xyz)$.

SOLUCIÓ:

(1) Ja que la imatge de la funció en el punt és:

$$f(0,1) = \frac{1+1}{1+0} = 2$$

i que el gradient de la funció en el punt és:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{-(1+y)}{(1+x)^2}, \frac{1}{1+x}\right) \text{ implica: } \nabla f(0,1) = (-2,1)$$

l'equació del pla tangent serà:

$$\begin{aligned} z &= f(0,1) + \frac{\partial f(0,1)}{\partial x} \cdot (x-0) + \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} \cdot (y-1) = \\ &= 2 + (-2) \cdot x + 1 \cdot (y-1) = -2x + y + 1 \blacksquare \end{aligned}$$

(2) Ja que la funció es pot re-escriure com:

$$u = \ln(xyz) = \ln x + \ln y + \ln z$$

que la imatge de la funció en el punt és:

$$f(1,2,3) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3) = \ln 6$$

i que el gradient de la funció en el punt és:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \text{ implica: } \nabla f(1,2,3) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

l'equació de l'hiperplà tangent serà:

$$\begin{aligned} u &= f(1,2,3) + \frac{\partial f(1,2,3)}{\partial x} \cdot (x-1) + \frac{\partial f(1,2,3)}{\partial y} \cdot (y-2) + \frac{\partial f(1,2,3)}{\partial z} \cdot (z-3) = \\ &= \ln 6 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (y-2) + \frac{1}{3} \cdot (z-3) = \\ &= \ln 6 + x + \left(\frac{1}{2}\right) y + \left(\frac{1}{3}\right) z - 3 \blacksquare \end{aligned}$$

3.2.6.2. Aplicació del gradient: Càlcul de les derivades segons un vector

Anem a veure que, sota certes condicions de regularitat, les derivades d'una funció escalar es poden calcular a partir del vector gradient.

Teorema: Si $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ és diferenciable en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ del seu domini,[83] les derivades segons un vector $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ són iguals al producte escalar del gradient de la funció en el punt pel vector. És a dir:

$$f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}\right) \cdot \vec{u} = \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \cdot u_n.$$

A més, les derivades direccionals associades a la derivada d'una funció en un punt segons un vector són iguals al producte:

$$f'_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot f'_{\vec{u}}(\vec{a}).$$ [84]

Exemple: Donada la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ calcula la seva derivada en el punt $(10,3)$ segons el vector $(13, -7)$, i la derivada direccional associada.
SOLUCIÓ: Ja que el gradient de la funció en el punt és:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2}\right) \text{ implica: } \nabla f(10,3) = \left(\frac{6}{169}, -\frac{20}{169}\right)$$

la derivada de la funció en el punt $(10,3)$ segons el vector $(13, -7)$, i aplicant el teorema anterior, serà igual a:

$$f'_{(13,-7)}(10,3) = \frac{\partial f(10,3)}{\partial x} \cdot 13 + \frac{\partial f(10,3)}{\partial y} \cdot (-7) = \frac{6}{169} \cdot 13 + \left(-\frac{20}{169}\right) \cdot (-7) =$$

$$= \frac{78}{169} + \frac{140}{169} = \frac{218}{169} \blacksquare$$

En conseqüència, la derivada direccional associada a la derivada anterior serà igual a:

$$f'_{\frac{(13,-7)}{\|(13,-7)\|}}(10,3) = \frac{f'_{(13,-7)}(10,3)}{\|(13,-7)\|} = \frac{\left(\frac{218}{169}\right)}{\sqrt{13^2 + (-7)^2}} = \frac{\left(\frac{218}{169}\right)}{\sqrt{218}} = \frac{\sqrt{218}}{169} \cong 0{,}087 \blacksquare$$

[83] Recordem que això vol dir que la funció admet hiperplà tangent en el punt.
[84] Aquesta igualtat és vàlida independentment de si la funció és diferenciable o no.

3.3. Funcions escalars compostes i implícites

3.3.1. *Composició de funcions escalars i regla de la cadena*

Abans d'introduir la noció de funció escalar implícita, ens interessarà veure, a partir d'un exemple concret, com es poden calcular les derivades parcials d'una "composició" de funcions escalars aplicant la "regla de la cadena". Vegem-ho:

<u>Exemple</u>: Donada $z = f(x,y) = 2xy + xy^2$, on les variables x i y estan definides per:

$$x = x(u,v) = u^2 + v \text{ i } y = y(u,v) = 2u - v^2$$

calcula el gradient de la **funció composta** $z = z(u,v)$ en el punt $(u,v) = (1,1)$.
SOLUCIÓ:
Si introduïm la "dependència" entre les variables en l'expressió de la funció ens quedaria una funció composta $z = z(u,v)$ un xic difícil de "gestionar":

$$z = f(u^2 + v\ ,2u - v^2) = 2 \cdot (u^2 + v) \cdot (2u - v^2) + (u^2 + v) \cdot (2u - v^2)^2.$$

Tanmateix, hi ha una altra via per calcular les derivades parcials d'una funció composta.
Observem que la variable z depèn de les variables u i v segons el "arbre de dependència": [85]

$$z \xrightarrow{z=2xy+xy^2} \begin{cases} x \xrightarrow{x=u^2+v} \begin{cases} u \\ v \end{cases} \\ y \xrightarrow{y=2u-v^2} \begin{cases} u \\ v \end{cases} \end{cases}$$

Per tant, i aplicant la "regla de la cadena", les derivades parcials de $z = z(u,v)$ seran:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (2y + y^2) \cdot (2u) + (2x + 2xy) \cdot (2)$$

i:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (2y + y^2) \cdot (1) + (2x + 2xy) \cdot (-2v).$$

Com que:

$$(u,v) = (1,1) \text{ implica: } \begin{cases} x = u^2 + v = 1^2 + 1 = 2 \\ y = 2u - v^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \end{cases}$$

aleshores el gradient de la funció composta que ens demanen és igual a:

$$\nabla z(1,1) = \left(\frac{\partial z(1,1)}{\partial u}, \frac{\partial z(1,1)}{\partial v} \right) = \{x = 2; y = 1; u = 1; v = 1\} = (22, -13) \blacksquare$$

---

[85] Arbres de dependència entre variables com aquest sorgeixen sempre en un context de composició de funcions.

3.3.1.1. Exemple econòmic de la composició de funcions[86]

Exemple: El valor d'una cartera d'inversió formada per 1000 títols de la companyia A i 400 títols de la companyia B és:

$$V = V(x, y) = 1000 \cdot x + 400 \cdot y$$

sent x i y, respectivament, la cotització d'un títol de A i un de B. Si a l'inici de la jornada (09:00) els títols es cotitzaven, respectivament, a 8,4€ i a 44,1€:

1. Calcula el valor de la cartera en aquell moment.
2. Si les cotitzacions del títols varien en el temps de forma que:
$$x = x(t) = 8{,}4 + 0{,}02 \cdot t^2 \text{ i } y = y(t) = 44{,}1 - 0{,}11 \cdot t$$
on $t \geq 0$ és la variable temporal expressada en hores, calcula el valor de la cartera al final de la sessió (17:30).
3. Estudia el creixement del valor de la cartera al llarg de la jornada.

SOLUCIÓ:

(1) El valor de la cartera al inici de la sessió (09:00) és de:

$$V = V(8'4{,}44'1) = 1000 \cdot 8{,}4 + 400 \cdot 44{,}1 = 26040€ \blacksquare$$

(2) Com les 17:30 hores representen $t = 8{,}5$ hores des de les 09:00, aleshores tenim que:

$$x = x(8{,}5) = 8{,}4 + 0{,}02 \cdot 8{,}5^2 = 9{,}845€ \text{ i } y = y(8{,}5) = 44{,}1 - 0{,}11 \cdot 8{,}5 = 43{,}165€.$$

Per tant, el valor de la cartera al final de la jornada serà de:

$$V = V(9'845{,}43'165) = 1000 \cdot 9{,}845 + 400 \cdot 43{,}165 = 27111€ \blacksquare$$

(3) Com que el valor de la cartera en l'instant $t \geq 0$ és igual a la funció composta:

$$V(t) = V\big(x(t), y(t)\big)$$

deduïm, aplicant la regla de la cadena, que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 1000 \cdot (0.04t) + 400 \cdot (-0{,}11) = 40t - 44.$$

Ja que:

$$0 = \frac{dV}{dt} = 40t - 44 \text{ implica: } t = \frac{44}{40} = 1{,}1 \text{ i } \frac{d^2V}{dt^2} = 40 > 0$$

deduïm que $t = 1{,}1$ és un mínim de $V = V(t)$. Per tant, el valor de la cartera decreix durant la primera hora i 6 minuts i creix la resta de la jornada.[87]

[86] Adillon, R.; Jorba, L. (1995).

[87] $t = 1{,}1$ hores és 1 hora i 6 minuts després de les 09:00.

3.3.2. *Funcions escalars implícites*

Val a dir que les funcions escalars implícites són funcions on la relació entre la variable "dependent" i les variables "independents" ve expressada de forma implícita. Per exemple, l'equació:

$$2xz^2 - 3xy + 5yz = 4$$

defineix "implícitament" la variable z en funció de les dues variables x i y que hi romanen. Aquest fet el denotarem per $z = z(x, y)$.

En general:

<u>Definició</u>: Diem que una variable z ve definida "implícitament" per n variables $x_1, \dots, x_n$ si existeix una equació funcional de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_n, z) = 0.$$

En aquest cas a la funció:

$$z = z(x_1, \dots, x_n)$$

que es troba "implícita" en l'equació, li direm **funció implícita**.

En molts casos sol passar que la variable implícita z no es pot "explicitar", és a dir, no es pot aïllar de l'equació funcional que la defineix. Malgrat això, sempre podrem calcular les seves derivades parcials i, en aquest sentit, caldrà tenir en compte el teorema següent:

<u>Teorema</u>: Si l'equació funcional:

$$F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$$

defineix implícitament la funció:

$$z = z(x_1, \dots, x_n)$$

aleshores la derivada parcial i-èsima de $z = z(x_1, \dots, x_n)$ pot calcular-se a partir de la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}, \text{ per a tot } i = 1, \dots, n.$$

3.3.2.1. Exemple de càlcul de les derivades parcials d'una funció implícita

Exemple: Donada l'equació:

$$2xz^2 - 3xy + 5yz = 4$$

que defineix la variable z com a funció implícita de x i y, és a dir, $z = z(x, y)$:

1. Calcula el seu gradient en el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sabent que $z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2$.
2. Troba l'equació del pla tangent a la funció implícita en aquest punt.

SOLUCIÓ:

(1) Calcularem les dues derivades parcials de la funció implícita en el punt $(x, y) = (1/2\,, 0)$ a partir de l'expressió funcional:

$$F(x, y, z) = 2xz^2 - 3xy + 5yz - 4.$$

Aplicant doncs el teorema anterior deduïm que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)} = -\frac{2z^2 - 3y}{4xz + 5y}$$

i:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)} = -\frac{-3x + 5z}{4xz + 5y}.$$

Tenint en compte arabque:

$$x = \frac{1}{2}, y = 0 \text{ i } z = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2$$

el vector gradient de la funció implícita en el punt $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ serà:

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{2z^2 - 3y}{4xz + 5y}, -\frac{-3x + 5z}{4xz + 5y}\right) \text{ implica: } \nabla z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-2, -\frac{17}{8}\right) \blacksquare$$ [88]

(2) Finalment, l'equació del pla tangent a la funció implícita en el put $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ serà:

$$z = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\partial z\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\partial x} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial z\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\partial y} \cdot (y - 0) = 3 - 2x - \left(\frac{17}{8}\right) y \blacksquare$$

[88] Cal emfatitzar el fet que hem pogut calcular les derivades parcials de la funció implícita sense conèixer la seva expressió funcional.

3.4. Derivades segones d'una funció escalar i matriu hessiana

3.4.1. *Derivades parcials segones d'una funció escalar*

Un concepte fonamental en l'àmbit del que estem estudiant és el de matriu hessiana d'una funció escalar en un punt. Aquesta matriu està formada per les derivades parcials segones de la funció en el punt en qüestió.

<u>Definició</u>: La **derivada parcial segona** d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ respecte les variables (x_i, x_j), en aquest ordre, és la derivada parcial j-èssima de la funció "derivada parcial i-èssima" $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en el punt. És a dir:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{a})}{\partial x_j} = \{\text{Notació}\} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si $x_i = x_j$ posarem:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i^2}.$$

<u>Exemple</u>: Calcula en el punt (1,1) les derivades parcials segones de $z = f(x, y) = x \cdot \ln y$.
SOLUCIÓ: Ja que el vector gradient és:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\ln y, \frac{x}{y}\right)$$

les quatre derivades parcials segones seran:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\ln y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\ln y)}{\partial y} = \frac{1}{y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \end{array}\right\} \text{implica: } \begin{cases} \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = -1 \end{cases} \blacksquare$$ [89]

[89] Notem que les dues derivades parcials "creuades" $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ són iguals. Això passa sempre amb les funcions diferenciables però, en general, no té per què.

3.4.2. *Matriu hessiana d'una funció escalar*

Com tindrem ocasió de comprovar més endavant, les matrius hessianes tenen una importància cabdal en l'optimització de funcions escalars.[90]

<u>Definició</u>: La **matriu hessiana** d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$, si existeix, és la matriu quadrada formada per les derivades parcials segones la funció en el punt:

$$Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Val a dir que la matriu hessiana, a part de ser quadrada, pot ser simètrica si les derivades parcials segones "creuades" coincideixen:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_j \partial x_i}.$$ [91]

Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: Calcula la matriu hessiana de la funció $z = f(x, y) = x \cdot \ln y$ en el punt (1,1).
SOLUCIÓ:
Aplicant els resultats de l'exemple anterior veiem que la matriu hessiana de la funció en el punt (1,1) és:

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

[90] De fet juguen un paper semblant al de la segona derivada en el context de les funcions reals d'una variable.
[91] Això passarà sempre amb les funcions que estem estudiant ja que són, en particular, funcions diferenciables.

3.5. Funcions escalars homogènies

3.5.1. *Funció escalar homogènia i interpretació econòmica*

Les funcions escalars homogènies són funcions que satisfan la propietat que diu que quan les variables independents varien en la mateixa taxa, la variació que repercuteix en la funció ho fa en una proporció que "depèn" d'aquesta taxa de variació.

<u>Definició</u>: Una funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ se'n diu **homogènia de grau** $m \in \mathbb{R}$ si per a tot escalar positiu $t > 0$:

$$f(t \cdot \vec{x}) = f(t \cdot x_1, \dots, t \cdot x_n) = t^m \cdot f(x_1, \dots, x_n) = t^m \cdot f(\vec{x}).$$

<u>Exemple</u>: Proba que la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$ és homogènia de grau $m = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓ: És una aplicació directa de la definició. En efecte:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = \frac{(tx) - (ty)}{\sqrt{(tx) + (ty)}} = \frac{t \cdot (x - y)}{\sqrt{t(x + y)}} = \frac{t \cdot (x - y)}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{x + y}} = t^{1-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x - y}{\sqrt{x + y}}\right) = t^{\frac{1}{2}} \cdot f(x, y) \blacksquare$$

En Economia hom diu que una funció de producció, per exemple, té:

a. *Rendiments a escala creixents* quan és homogènia de grau $m > 1$. En aquest cas, si tots els inputs de la producció varien en una mateixa proporció, la producció (output) variarà en una proporció més gran i en el mateix sentit.[92]
b. *Rendiments a escala decreixents* quan és homogènia de grau $m < 1$. En aquesta tessitura, l'output varia en una proporció més petita que els inputs si aquests varien en la mateixa proporció. En el cas que $m = 0$, el output no varia encara que els inputs ho facin, i en el cas $m < 0$, l'output varia en sentit contrari a la variació dels inputs.
c. *Rendiments a escala constants* quan és homogènia de grau $m = 1$. Ara, tant els inputs com l'output varien en la mateixa proporció i sentit.[93]

[92] Per exemple si els inputs creixen, l'output també.
[93] També se'n diu "funció homogènia lineal".

3.5.1.1. Aplicació econòmica de les funcions homogènies

Anem a veure un exemple econòmic d'una funció de producció que té rendiments a escala decreixents, és a dir, d'una funció homogènia de grau inferior a la unitat.

Exemple: Una empresa produeix segons la relació:[94]

$$Q = Q(K, L) = 10 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,6}$$

on $Q \geq 0$ és l'output (producte) i $K \geq 0$ i $L \geq 0$ són, respectivament, els intputs del capital i del treball. Si actualment el nivell d'aquests inputs és de $K = 100$ unitats i $L = 50$ unitats:

1. Calcula el nivell actual de l'output.
2. Prova que la funció de producció és una funció homogènia de grau $\mathrm{m} = 0{,}9$.
3. Calcula, a partir de la igualtat anterior, el nou output així com l'increment relatiu associat si els dos inputs creixen un 2%.

SOLUCIÓ:

(1) El nivell actual de l'output Q_0 és de:

$$Q_0 = Q(100{,}50) = 10 \cdot 100^{0,3} \cdot 50^{0,6} = 416{,}277 \text{ unitats}\blacksquare$$

(2) La funció de producció és homogènia de grau $m = 0{,}9$ ja que:

$$Q(t \cdot K, t \cdot L) = 10 \cdot (tK)^{0,3} \cdot (tL)^{0,6} = 10 \cdot (t^{0,3} \cdot K^{0,3}) \cdot (t^{0,6} \cdot L^{0,6}) =$$
$$= t^{0,3+0,6} \cdot (10 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,6}) = t^{0,9} \cdot Q(K, L)\blacksquare$$

(3) Si els dos inputs creixen un 2% tindrem com a nous inputs:

$$(K, L) = (100 + 2\% \cdot 100{,}50 + 2\% \cdot 50) = (1{,}02 \cdot 100{,}1{,}02 \cdot 50) = (102{,}51).$$

Així doncs, el nou output Q_1 serà, aplicant l'apartat anterior, de:

$$Q_1 = Q(102{,}51) = Q(1{,}02 \cdot 100{,}1{,}02 \cdot 50) = \{m = 0{,}9 \text{ i } t = 1{,}02\} =$$
$$= 1{,}02^{0,9} \cdot Q(100{,}50) = 1{,}02^{0,9} \cdot Q_0 = 1{,}02^{0,9} \cdot 416{,}277 = 423{,}762 \text{ unitats}\blacksquare$$

En tants per cent, això suposaria un increment relatiu del 1,8% en la producció, inferior al 2% dels inputs. En efecte:

$$\frac{\Delta Q_0}{Q_0} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{1{,}02^{0,9} \cdot Q_0 - Q_0}{Q_0} = 1{,}02^{0,9} - 1 = 0{,}01798 = 1{,}8\%\blacksquare$$ [95]

[94] Funció de tipus Cobb-Douglas.
[95] Observem que, en general, si els inputs varíen un r%, l'output variarà un $((1 + r)^m - 1)$%.

3.5.2. *Propietats de les funcions escalars homogènies*

Propietat: En general:

1. La suma de dues funcions homogènies de graus $m, p \in \mathbb{R}$ és una funció homogènia si i només si $m = p$. En aquest cas, el grau d'homogeneitat és $m = p$.
2. El producte de dues funcions homogènies de graus $m, p \in \mathbb{R}$ és sempre una funció homogènia de grau $m + p$.
3. El quocient de dues funcions homogènies de graus $m, p \in \mathbb{R}$, en aquest ordre, és sempre una funció homogènia de grau $m - p$.
4. La funció derivada parcial d'una funció homogènia de grau $m \in \mathbb{R}$ és sempre una funció homogèna de grau $m - 1$.

Vegem un exemple d'aplicació:[96]

Exemple: Donada la funció:

$$z = f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{y/x}}}{xy}$$

1. Prova que és una funció homogènia i determina el seu grau.
2. Quin seria el grau d'homogeneïtat de les funcions derivades parcials associades.

SOLUCIÓ:

(1) Es tracta d'aplicar directament la definició de funció homogènia. Ja que:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = \frac{e^{\sqrt{(ty)/(tx)}}}{(tx)(ty)} = \frac{e^{\sqrt{y/x}}}{t^2(xy)} = t^{-2} \cdot \left(\frac{e^{\sqrt{y/x}}}{xy} \right) = t^{-2} \cdot f(x, y)$$

hom dedueix que la funció és homogènia de grau $m = -2$ ■

(2) Aplicant la última propietat podem afirmar que les funcions derivades parcials:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$$

seran homogènies de grau:

$$m - 1 = (-2) - 1 = -3 \blacksquare$$

[96] De la propietat 4 en concret.

3.6. Exercicis

1. Representa gràficament el domini i les corbes de nivell de les funcions escalars:
    a. $z = x^{0,5} \cdot y^{0,5}$.
    b. $z = \frac{x-y}{x+y-2}$.
2. Determina gràficament la 1-corba de nivell de la funció $z = \frac{2xy}{x^2+y^2-4}$.
3. Calcula la norma del vector gradient de:
    a. $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ en el punt (2,1).
    b. $u = 4y^2 + \cos(z-x)$ en el punt $\left(0, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Troba l'equació del pla tangent a la funció $z = f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punt (e, e^2).
5. Calcula la derivada direccional de la funció $z = f(x,y) = \ln(x \cdot y)$ en el punt (7,2) segons el vector $\vec{u} = (-1,5)$.
6. Troba l'equació de la recta tangent en el punt (2,1) a la corba en el pla $y = y(x)$ definida implícitament per l'equació:
$$x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0.$$
7. Prova que $f(x,y) = \ln((x-a)^2 + (y-b)^2)$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, satisfà l'equació de Laplace:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
8. Troba la matriu hessiana de:
    a. $z = 2x^3 - 3y^2 + xy^2 + 2$ en el punt $(3,-1)$.
    b. $u = x^2y - yz^2$ en el punt (1,1,1).
9.
    a. Prova que $Q(K,L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, amb $A \in \mathbb{R}$ i $m = \alpha + \beta$, satisfà l'equació d'Euler:
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right) \cdot K + \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right) \cdot L = m \cdot Q(K,L).$$
    b. Sigui $Q(K,L)$ una funció de producció homogènia que satisfà l'equació d'Euler amb $m = 1$.[97] Calcula el nivell de producció si els inputs són de $K = 2$ i $L = 4$ unitats, i si les "productivitats marginals" associades són, respectivament, de -1 i 3.[98]

[97] Funció de producció homogènia lineal.
[98] Les productivitats marginals són les derivades parcials de la funció de producció.

SOLUCIONS:

1.

   a. $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ i } y \geq 0\}$, i c_k són hipèrboles.

   b. $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 2\}$, i c_k són rectes que passen pel punt (1,1).[99]

2. Són les dues rectes $y = x \pm 2$.

3.

   a. $\|\nabla f(2,1)\| = +\sqrt{17}$.

   b. $\left\|\nabla f\left(0, \pi, {}^{\pi}/_{2}\right)\right\| = +\sqrt{2 + 64\pi^2}$.

4. $z = -1 + \frac{x}{e} - \frac{y}{e^2}$.

5. La derivada direccional és igual a $\frac{33}{14 \cdot \sqrt{26}} \cong 0{,}462$.

6. $y = 1 + 1{,}6 \cdot (x - 2)$.

8.

   a. $Hz(3,-1) = \begin{pmatrix} 36 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. $Hz(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

9.

   b. $Q(2,4) = 10$ unitats.

[99] Notem que el punt (1,1) no pertany al domini.

4. OPTIMITZACIÓ SENSE RESTRICCIONS

4.1. Òptims d'una funció escalar i teorema de Weierstrass

4.1.1. *Màxim i mínim globals o absoluts d'una funció escalar*

L'objectiu d'aquest tema és donar eines que ens permetin trobar els màxims i mínims, és a dir, els òptims "lliures"[100] de les funcions escalars que admeten derivades parcials segones contínues.[101] Val a dir que les definicions són idèntiques a les d'una variable.

Definició: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ té :

1. Un **màxim global** ó **absolut** si per a tot punt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in Domf$:
$$f(\vec{x}) \le f(\vec{a}).$$
2. Un **mínim global** ó **absolut** si per a tot punt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in Domf$:
$$f(\vec{a}) \le f(\vec{x}).$$

Vegem un exemple d'aplicació:

Exemple: Prova que la funció escalar polinòmica:
$$z = f(x, y) = 1 - 2y + 3x^2 + y^2$$
té un mínim global en el punt (0,1).

SOLUCIÓ:

Com que la funció sempre és positiva ja que:
$$z = f(x, y) = 1 - 2y + 3x^2 + y^2 = (y^2 - 2y + 1) + 3x^2 = (y - 1)^2 + 3x^2 \ge 0$$
el valor mínim que pot prendre la funció és 0. Per tant, ja que:
$$f(0,1) = 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 + 1^2 = 0$$
deduïm que, per definició, (0,1) és un mínim global■

[100] "Lliures" en el sentit que les variables independents no estan subjectes a cap mena de restricció, llevat de les pròpies del domini de definició.

[101] Aquesta restricció s'haurà de tenir en compte al llarg del tema. Dir que aquestes funcions són, en particular, funcions diferenciables.

4.1.2. *Teorema de Weierstrass*

Tot recordant que un conjunt compacte és un conjunt que, alhora, és tancat i acotat podem enunciar el teorema de Weierstrass.

<u>Teorema</u>(Weierstrass): Tota funció escalar contínua sobre un conjunt compacte té màxim i mínim globals.[102]

<u>Exemple</u>: Prova que $z = f(x, y) = +\sqrt{(x^2 + y^2 - 2)(1 - x^2 - y^2)}$ té màxim i mínim globals.
SOLUCIÓ:
El domini de definició està format pels punts del pla que satisfan la desigualtat:

$$(x^2 + y^2 - 2)(1 - x^2 - y^2) \geq 0$$

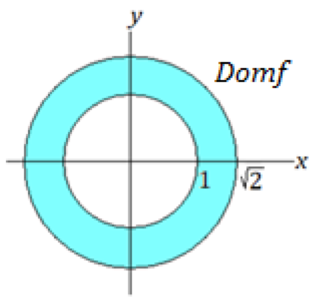
Com que:

$$(x^2 + y^2 - 2)(1 - x^2 - y^2) \geq 0 \text{ és equivalent a: } \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2 \text{ i } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \text{ó} \\ x^2 + y^2 \leq 2 \text{ i } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

deduïm que el domini de la funció és el conjunt:

$$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$ [103]

Gràficament:



Ja que $Domf$ és un conjunt compacte i la funció, per la seva definició, hi és contínua deduïm,[104] pel teorema de Weierstrass, que hi hauran màxims i mínims globals.[105]

---

[102] El teorema de Weierstrass és fonamental a l'hora d'optimitzar funcions escalars subjectes a restriccions de desigualtat. Aquest tipus d'optimització s'estudia a Matemàtiques II.
[103] La primera condició $x^2 + y^2 \geq 2$ i $x^2 + y^2 \leq 1$ és incompatible.
[104] Totes les funcions que estudiem són contínues ens els punts del seu domini de definició.
[105] Es pot provar que els mínims són els punts de les circumferències de centre (0,0) i de radis 1 i $\sqrt{2}$, i els màxims els de la circumferència de centre (0,0) i radi $\sqrt{3/2}$.

4.1.3. *Màxim i mínim locals o relatius. Òptim i valor òptim d'una funció escalar*

Tanmateix, però, els màxims i els mínims globals no són el tipus d'òptims que, en principi, detecten les eines analítiques que hem estudiat.[106] L'objecte d'estudi serà, més aviat, els màxims i els mínims "locals".

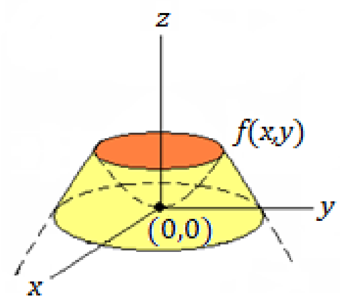
<u>Definició</u>: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ té :

1. Un **màxim local** ó **relatiu** si existeix una bola oberta de centre $\vec{a} \in Domf$, inclosa en el domini, tal que per a tot punt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que pertany a la bola:
$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}).$$
2. Un **mínim local** ó **relatiu** si existeix una bola oberta de centre $\vec{a} \in Domf$, inclosa en el domini, tal que per a tot punt $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que pertany a la bola:
$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}).$$

Per exemple, la funció escalar definida a "trossos":

$$z = f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2 - x^2 - y^2, & \text{altrament} \end{cases}$$

té un mínim local en (0,0) que no és global. Gràficament:



<u>Definició</u>: Donada la funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ diem que $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és un **òptim lliure** (o **òptim** a seques) si és un màxim o mínim, ja sigui global o local. Al valor que la funció pren en un òptim:

$$z_0 = f(\vec{a}) = f(a_1, \dots, a_n)$$

li direm **valor òptim** de la funció.

[106] El vector gradient i la matriu hessiana.

4.2. Condicions necessàries i suficient d'òptims locals

4.2.1. *Condició necessària de primer ordre.*[107] *Punt crític i punt de sella d'una funció*

Aquesta condició, exposada en el teorema que donem tot seguit, ens diu que un òptim local (ja sigui màxim o mínim) necessàriament ha d'anul·lar el vector gradient associat (sempre i quan existeixi). En efecte:

Teorema: Donada la funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, si el punt $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in Domf$ és un òptim local (màxim o mínim) aleshores:

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}\right) = \left(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n}\right).$$

Vegem un exemple d'aplicació:

Exemple: Comprova que la funció escalar:

$$z = f(x, y) = 1 - 2y + 3x^2 + y^2$$

satisfà la condició necessària de primer ordre d'existència d'òptims en el punt (0,1).[108]

SOLUCIÓ:

Evident ja que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2 + 2y \end{aligned}\right\} \text{ implica: } \nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f(0,1)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}\right) = (0,0) \blacksquare$$

Cal remarcar que els òptims locals que satisfan aquesta condició necessària han de ser punts "interiors" del domini de la funció que s'està estudiant.[109]

---

107 Hom diu de primer ordre ja que fa intervenir només les derivades parcials primeres.

108 Ja hem vist que aquest punt és un mínim global de la funció. Tanmateix, com que el domini de la funció és tot el pla també serà, en particular, un mínim local.

109 Si pertanyen a la frontera del domini aquest teorema no es pot aplicar.

4.2.1.1. Punt crític i punt de sella d'una funció escalar

Sembla ser, doncs, que els punts que anul·len el gradient d'una funció escalar juguen un paper molt important. Anem a donar-los-hi un nom:

Definició: Donada la funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és un **punt crític** o **estacionari** si anul·la el vector gradient associat.

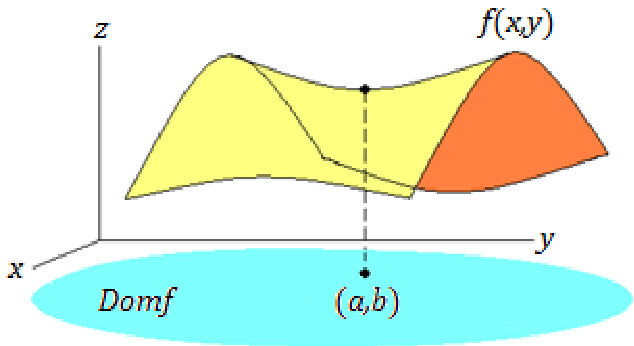
Exemple: Calcula els punts crítics de la funció escalar $u = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + x + 5$.
SOLUCIÓ: L'únic punt crític de la funció és el punt $\left(-\frac{1}{4}, 0,0\right)$ ja que:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 1 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial z} = -2z \end{aligned}\right\} \text{implica: } (x, y, z) = \left(-\frac{1}{4}, 0,0\right) \blacksquare$$

No tot punt crític d'una funció escalar és sempre un òptim. El que sí podem afirmar és que un punt crític és, o bé un òptim, o bé un "punt de sella".

Definició: Donada la funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és un **punt de sella** si és un punt crític que no és un òptim. [110]

Gràficament, el punt (a, b) és un punt de sella de la funció $z = f(x, y)$:



[110] Precisament el punt crític del exemple anterior, com veurem endavant, és un punt de sella.

4.2.2. *Condició necessària de segon ordre i punts de sella*

La condició necessària de segon ordre fa referència a la matriu hessiana de la funció escalar que s'està optimitzant i ens diu que:

<u>Teorema</u>: Si $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ té un òptim local i:
1. $\vec{a} \in Domf$ és un mínim, la matriu hessiana $Hf(\vec{a})$ és definida o semidefinida positiva.
2. $\vec{a} \in Domf$ és un màxim, la matriu hessiana $Hf(\vec{a})$ és definida o semidefinida negativa.

<u>Exemple</u>: Comprova que el mínim $(0,1)$ de la funció escalar $z = f(x,y) = 1 - 2y + 3x^2 + y^2$ satisfà la condició necessària de segon ordre.
SOLUCIÓ: Com que:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6x, -2 + 2y) \text{ implica: } Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ implica: } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

el mínim $(0,1)$ de la funció satisfà la condició necessària de segon ordre ja que la matriu hessiana associada en aquest punt és, com podem veure, definida positiva■

De fet el que afirma la condició necessària de segon ordre és que, en un òptim lliure d'una funció escalar, la matriu hessiana no pot ser indefinida. Per tant:

<u>Teorema</u>: Si la matriu hessiana en un punt crític d'una funció escalar és indefinida, aleshores aquest punt crític és un punt de sella.

<u>Exemple</u>: Prova que $u = f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + x + 5$ té un punt de sella en $\left(-\frac{1}{4}, 0{,}0\right)$.
SOLUCIÓ: Ja sabem que aquest punt és un punt crític de la funció.[111] Així doncs, com que:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ implica: } Hf\left(-\frac{1}{4}, 0{,}0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{indefinida}$$

deduïm, aplicant el teorema anterior, que el punt $\left(-\frac{1}{4}, 0{,}0\right)$ no pot ser un òptim i que, per tant, és un punt de sella■

---

[111] Veure la plana anterior.

4.2.3. *Condició suficient de segon ordre*

Aquesta condició també està relacionada, com la condició necessària de segon ordre, amb les matrius hessianes de la funció escalar a optimitzar. Notem que malgrat que el teorema que enunciarem tot seguit sembla el recíproc del de la plana anterior, no ho és ja que, ara, les matrius hessianes han de ser definides positives o negatives segons el cas.

<u>Teorema</u>:[112] Sigui $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ una funció escalar i $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ un punt crític. Aleshores:

1. Si la matriu hessiana $Hf(\vec{a})$ és definida positiva, $\vec{a} \in Domf$ és un mínim local.
2. Si la matriu hessiana $Hf(\vec{a})$ és definida negativa, $\vec{a} \in Domf$ és un màxim local.[113]

Vegem un exemple d'aplicació:

<u>Exemple</u>: Donada la funció escalar:

$$z = f(x, y) = 1 - 2y + 3x^2 + y^2$$

1. Comprova que el punt crític (0,1) satisfà la condició suficient de segon ordre per a ser mínim local.
2. Calcula el valor òptim (valor mínim) associat. [114]

SOLUCIÓ:

(1) Evident ja que, com hem vist més amunt, la matriu hessiana avaluada en aquest punt:

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

és definida positiva.

(2) Finalment, el valor òptim (mínim) associat serà igual a:

$$z_0 = f(0,1) = 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 + 1^2 = 0 \blacksquare$$

---

[112] Tant aquest teorema com el anterior justifiquen l'estudi del signe de les formes quadràtiques dut a terme en el Bloc I.

[113] Notem que el cas de matriu hessiana semidefinida, en principi, no decideix. Tanmateix, i sota certes condicions, pot decidir. Veure, per exemple, l'últim apartat del tema dedicat a l'optimització convexa.

[114] En aquest cas sabem més ja que es tracta d'un màxim global.

4.2.3.1. Exemple d'aplicació de les condicions necessàries i suficient d'existència d'òptims

Exemple: Optimitza la funció escalar:

$$z = f(x,y) = 8xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

SOLUCIÓ: D'entrada, notem que el domini d'aquesta funció és:

$$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ i } y \neq 0\}$$

la qual cosa haurem de tenir en compte. Trobar els punts crítics voldrà dir, en primer lloc, estudiar la condició necessària, és a dir, resoldre el sistema d'equacions no lineals:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 8y - \frac{1}{x^2} \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 8x - \frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} \text{ equivalent a: } \begin{cases} 8yx^2 = 1 \\ 8xy^2 = 1 \end{cases}$$

Com que $x, y \neq 0$ i:

$$\left.\begin{aligned} 8yx^2 &= 1 \\ 8xy^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ implica: } 0 = 1 - 1 = 8yx^2 - 8xy^2 = 8xy(x-y) \text{ implica: } x = y$$

aleshores, considerant la segona de les dues equacions anteriors, tindrem que:[115]

$$1 = 8xy^2 = \{x = y\} = 8x^3 \text{ implica: } x = y = \frac{1}{2}.$$

Així doncs, l'únic punt crític de la funció és el punt:

$$(a,b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Finalment, caldrà "qualificar" aquest punt crític, és a dir, dir si és un òptim local (màxim o mínim) o un punt de sella, i per això caldrà estudiar la condició suficient que passa per determinar el signe de la matriu hessiana de la funció en el punt crític. Ja que:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} {}^{2}/_{x^3} & 8 \\ 8 & {}^{2}/_{y^3} \end{pmatrix} \text{ implica: } Hf\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

hom dedueix que aquest punt crític és un mínim local de la funció ja que aquesta matriu hessiana és definida positiva. En aquest cas, el valor òptim (valor mínim) de la funció seria:

$$z_0 = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{({}^{1}/_{2})} + \frac{1}{({}^{1}/_{2})} = 6 \blacksquare$$

[115] Anàlogament podríem haver considerat la primera.

4.2.3.2. <u>Exemple d'aplicació econòmica dels òptims lliures</u>

<u>Exemple</u>: Sigui $C(q_1,q_2) = 3q_1 \cdot q_2 + 1{,}5q_1^2 + 2q_2^2$ u.m. la funció de costos d'una empresa que produeix dos articles A i B, sent $q_1 \geq 0$ i $q_2 \geq 0$ les quantitats produïdes. L'empresa vol conèixer les unitats de A i B que maximitzen els beneficis en el cas que els preus de venda unitaris de A i B siguin: (1) $p_1 = 42$ u.m. i $p_2 = 51$ u.m. (2) $p_1 = 66 - 3q_1$ i $p_2 = 72 - q_2$.
SOLUCIÓ:
(1) En aquest mercat, la funció de beneficis és:

$$B(q_1,q_2) = (p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2) - C(q_1,q_2) = -1{,}5q_1^2 - 2q_2^2 - 3q_1q_2 + 42q_1 + 51q_2.$$

Ja que:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial B}{\partial q_1} = -3q_1 - 3q_2 + 42 \\ 0 = \frac{\partial B}{\partial q_2} = -4q_2 - 3q_1 + 51 \end{aligned}\right\} \text{implica: } q_1 = 5 \text{ i } q_2 = 9$$

i:

$$Hf(5{,}9) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ és definida negativa}$$

veiem que l'empresa ha de produir i vendre $q_1 = 5$ unitats de A i $q_2 = 9$ unitats de B per a maximitzar els beneficis. Notem que el màxim dels beneficis seria de $B(5{,}9) = 333{,}5$ u.m.■
(2) En aquest altre mercat, la funció de beneficis és:

$$\begin{aligned} B(q_1,q_2) &= (p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2) - C(q_1,q_2) = \\ &= \big((66 - 3q_1) \cdot q_1 + (72 - q_2) \cdot q_2\big) - (3q_1q_2 + 1{,}5q_1^2 + 2q_2^2) = \\ &= -4{,}5q_1^2 - 3q_2^2 - 3q_1q_2 + 66q_1 + 72q_2. \end{aligned}$$

Ja que:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial B}{\partial q_1} = -9q_1 - 3q_2 + 66 \\ 0 = \frac{\partial B}{\partial q_2} = -6q_2 - 3q_1 + 72 \end{aligned}\right\} \text{implica: } q_1 = 4 \text{ i } q_2 = 10$$

i:

$$Hf(4{,}10) = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \text{ és definida negativa}$$

l'empresa ha de produir i vendre $q_1 = 4$ unitats de A i $q_2 = 10$ unitats de B per tal de maximitzar els beneficis. El valor d'aquests beneficis és de $B(4{,}10) = 492$ u.m., sent els preus de venda de A i de B:

$$p_1 = 66 - 3 \cdot 4 = 54 \text{ u.m. i } p_2 = 72 - 10 = 62 \text{ u.m.}■$$

4.3. Optimització convexa i teorema local-global

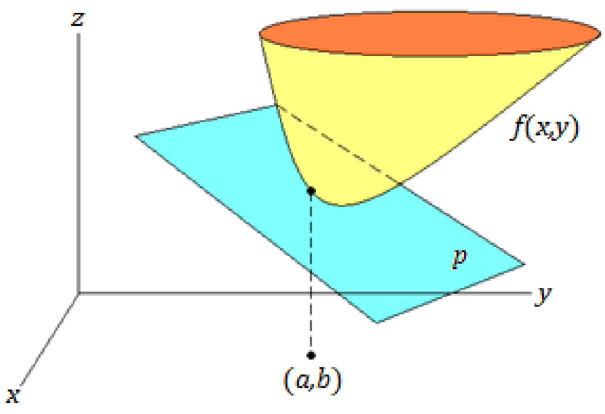
4.3.1. *Funció escalar convexa i còncava*

Quan les funcions escalars a optimitzar siguin convexes o còncaves, l'obtenció dels seus òptims es simplifica molt. Val a dir que les funcions escalars que apareixen en molts models econòmics d'optimització són d'aquests dos tipus.

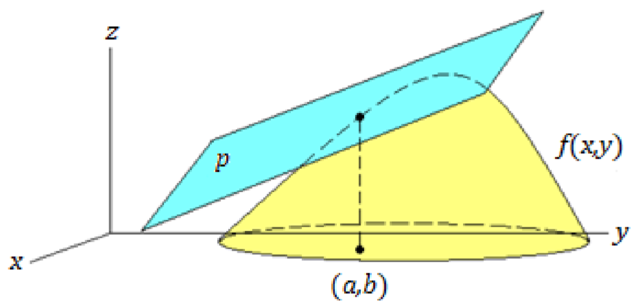
Definició: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ amb domini $Domf$ conjunt convex és:

1. **Convexa** en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ si en una bola oberta de centre aquest punt, la funció está per damunt de l'hiperplà tangent a la funció en el punt.
2. **Còncava** en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ si en una bola oberta de centre aquest punt, la funció está per sota de l'hiperplà tangent a la funció en el punt.[116]

Gràficament, la funció $z = f(x, y)$ és convexa en (a, b):



i còncava en aquest cas:



[116] En Economía, les definicions de funció convexa i còncava són les contràries a les definicions matemàtiques habituals.

4.3.1.1. Relació entre la convexitat i/o concavitat i les matrius hessianes

El teorema que enunciem a continuació caracteritza les funcions convexes i còncaves a partir de les seves matrius hessianes.[117]

Teorema: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ amb domini $Domf$ conjunt convex és:

1. Convexa sobre un conjunt $A \subset Domf$ si les matrius hessianes $Hf(\vec{x})$, avaluades en els punts d'aquest conjunt, són definides o semidefinides positives.
2. Còncava sobre un conjunt $A \subset Domf$ si les matrius hessianes $Hf(\vec{x})$, avaluades en els punts d'aquest conjunt, són definides o semidefinides negatives.

Vegem un exemple d'aplicació:

Exemple: Prova que la funció escalar:

1. $z = f(x, y) = 2xy - x^2 - 5y^2$ és còncava en tot el seu domini.
2. $u = f(x, y, z) = 7x^2 + 5y^2 + z^2 - 12x + 3y - 14z + 22$ és convexa en tot el seu domini.

SOLUCIÓ: (1) Ja que:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2y - 2x, 2x - 10y)$$

implica:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

la funció és còncava en tot el seu domini ja que aquesta matriu és definida negativa■

(2) Ja que:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (14x - 12, 10y + 3, 2z - 14)$$

implica:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la funció és convexa en tot el seu domini ja que aquesta matriu és definida positiva■

[117] Recordem que les funcions escalars que estem estudiant han de tenir derivades parcials segones contínues en el seu domini. Si no fos així, aquest teorema podría no ser cert.

4.3.2. *Teorema local-global*

Aquest teorema ens diu que tot punt crític d'una funció convexa o còncava és un òptim i, a més, que és global. En efecte:

Teorema(local-global): Sigui $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ una funció escalar definida sobre un domini convex, i sigui $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in Domf$ un punt crític. Aleshores:

1. Si la funció és convexa en $Domf$, el punt crític $\vec{a} \in Domf$ és un mínim global.
2. Si la funció és còncava en $Domf$, el punt crític $\vec{a} \in Domf$ és un màxim global. [118]

Vegem un exemple d'aplicació:

Exemple: Prova que els punts de la forma $(\alpha, \alpha, 0)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$, són mínims globals de la funció escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy$.

SOLUCIÓ: Ja que:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \end{aligned}\right\} \text{ implica: } (x, y, z) = (\alpha, \alpha, 0), \text{ per a tot } \alpha \in \mathbb{R}$$

deduïm que els punts $(\alpha, \alpha, 0)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$, són els punts crítics de la funció. Ara bé, com que la matriu hessiana de la funció avaluada en aquests punts crítics és semidefinida positiva:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ implica: } Hf(\alpha, \alpha, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tenim, d'entrada, que no podem dir res del caràcter de tots aquests punts crítics. Tanmateix, i degut a que totes les matrius hessianes de la funció són la mateixa matriu semidefinida positiva, podem concloure que la funció és convexa i que, aplicant el teorema local-global, els punts crítics $(\alpha, \alpha, 0)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$, són mínims globals amb valor mínim igual a:

$$z_0 = f(\alpha, \alpha, 0) = \alpha^2 + \alpha^2 + 0^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \alpha = 0 \blacksquare$$

[118] Val a dir que si totes les matrius hessianes de la funció convexa (còncava) són definides positives (negatives), l'òptim és únic.

4.4. Exercicis

1. Prova que $z = f(x, y) = x \cdot y$ té òptims globals en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$..
2. Optimitza les funcions escalars:
   a. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
   b. $z = f(x, y) = 2x + 3y - x^2 - 2y^2 + xy$
   c. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot \ln x - 18 \cdot \ln y$
   d. $z = f(x, y) = xy - x^3 - y^3$
   e. $u = f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 12yz$.
3. Estudia la convexitat i/o concavitat de les funcions:
   a. $z = f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy$
   b. $z = f(x, y) = 2x^{0,5} \cdot y^{0,5}$
   c. $u = f(x, y, z) = 6x + 3y + z - 4x^2 - y^2$.
4. Estudia, per $a, b > 0$, la concavitat de la funció $z = f(x, y) = 2xy - ax^2 - by^2$.
5. Un empresari que fabrica dos productes sap que, a un preu de 25 u.m., pot vendre 175 unitats del primer i que per cada u.m. de augment ven 5 unitats menys. Si el preu de venda del segon és constant i igual a 30 u.m., i si:
$$C(x, y) = \left(\frac{1}{5}\right) x^2 + \left(\frac{1}{3}\right) y^2 + 1925$$
   és la funció de costos, on $x, y > 0$ denoten les unitats produïdes d'ambdós productes, determina la producció que maximitza els beneficis i el seu valor monetari, així com el preu de venda del primer producte.
6. Se sap que un determinat fenòmen econòmic objecte d'estudi segueix una llei lineal del tipus $Y = f(X) = aX + b$, on les variables X, Y representen indicadors econòmics precisos, i a, b són paràmetres desconeguts. Suposem, per una altra banda, que s'han obtingut experimentalment quatre valors de Y per a quatre valors de X segons la taula:

X_i	1	2	3	4
Y_i	3,1	3,4	4,2	4,5

   Es demana trobar els valors de a, b de manera que $Y = f(X)$ descrigui de la "millor" manera possible el fenòmen.[119]

[119] Alegre, P. et al. (1995), plana 378. Cal emprar el mètode d'*ajust per mínims quadrats* que consisteix en obtenir una funció lineal $Y = f(X) = aX + b$ que minimitzi la suma dels quadrats de les diferències entre els valors experimentals de Y i els de $f(X)$ corresponents: min $\sum_{i=1}^{4} \left(Y_i - f(X_i)\right)^2$.

SOLUCIONS:

1. Cal aplicar el teorema de Weierstrass.
2.
   a. $\left(\frac{15}{16}, -\frac{99}{16}\right)$ és un punt de sella.
   b. $\left(\frac{11}{7}, \frac{8}{7}\right)$ és un màxim local.
   c. $(1,3)$ és un mínim local.
   d. $(0,0)$ és un punt de sella i $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ és un màxim local.
   e. $(0,0,0)$ és un punt de sella.
3.
   a. La funció és convexa.
   b. La funció és còncava.
   c. La funció no és ni còncava ni convexa.
4. La funció és còncava si $a \cdot b \geq 1$.
5. 75 unitats del primer producte i 45 unitats del segon maximitzen els beneficis que seran de 1000€. El preu de venda del primer producte és de 45€.
6. La funció que cal minimitzar respecte els paràmetres a i b és:

$$\sum_{i=1}^{4} \left(Y_i - f(X_i)\right)^2 = 59{,}06 + 57a^2 + 4b^2 - 107{,}4a - 30{,}4b + 26ab.$$

Ja que el mínim d'aquesta funció és $\left(\frac{86}{295}, \frac{1683}{590}\right)$, la llei lineal que busquem és:

$$Y = \left(\frac{86}{295}\right) \cdot X + \frac{1683}{590}.$$

BIBLIOGRAFIA

ADILLÓN, R.; JORBA, L. (1995) *Lecciones de matemáticas para economistas.* Barcelona: gráficas Rey.

ALEGRE, P. et al. (2005) *Matemáticas empresariales*. Madrid: AC.

BALBAS, A. et al. (1989) *Análisis matemático para la economía I: cálculo diferencial.* Madrid: AC.

BORRELL, J. (1990) *Métodos matemáticos para la economía: campos y autosistemas.* Madrid: Pirámide.

CHIANG, A. (2005) *Métodos fundamentales de economía matemática.* Madrid: McGraw-Hill.

SYDSAETER, K.; HAMMOND, P.J. (1996) *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Prentice Hall.

VEGAS, A.; LÓPEZ, M. (1991) *Elementos de matemáticas para economistas.* Madrid: Pirámide.

GLOSSARI