Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Un acostament a les quàrtiques projectives planes

Imanol Morata

Director: Juan Carlos Naranjo Del Val
Realitzat a: Departament d'Àlgebra i Geometria. UB

Barcelona, 26 de gener de 2012

Índex

Introducció **5**

1 Antecedents teòrics **9**
1.1 Conceptes algebraics . . . 9
1.2 Conjunts algebraics afins i projectius . . . 13

2 Corbes algebraiques projectives planes **17**
2.1 Definicions i propietats . . . 17
2.2 Multiplicitat de punts i singularitats d'una corba plana . . . 19
2.3 Divisors i espais $L(D)$ . . . 26
2.4 El teorema fonamental de Max Noether . . . 31
2.5 El gènere i el teorema de Riemann-Roch . . . 33

3 Quàrtiques projectives planes **39**
3.1 Polars i dualitat . . . 39
3.2 θ-característiques . . . 46
3.3 Àlgebra simplèctica a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . . . 49
3.4 Equació d'una quàrtica no-singular . . . 52

4 La quàrtica de Klein **59**
4.1 Bitangents de la quàrtica de Klein . . . 59
4.2 Equació de la quàrtica de Klein . . . 61

A Qüestions obertes **63**
A.1 La via Mumford . . . 63
A.2 Les bitangents determinen la corba . . . 65

B Notes històriques **67**
B.1 Poncelet i la Paradoxa del Dual . . . 67
B.2 La solució de Plücker . . . 68
B.3 L'escola italiana . . . 70

Bibliografia i annexos **73**

Introducció

Abstract

This work, which consists in two separate parts, will attempt to build an equation for a non-singular plane projective quartic over an algebraically closed field, namely $\mathbb{C}$. In the course of this trail, algebric and geometric theory will be introduced and discussed here, taking special care in subjects such as Bézout's theorem, the divisor language, Riemann-Roch's theorem and some matters about symplectic algebra. This path will lead us to Steiner-Hesse's theorem which provides a way to write an equation for a non-singular quartic. Finally, we will use those methods in order to attempt the development of an equation for the Klein quartic.

An appendix lies at the end of the work talking about a pair of questions which can be investigated parting from the subjects in the main text, and a brief historical background for the things shown on it.

Key words: quartic, plane projective curve, algebraic curve, divisor, θ-characteristic, Klein quartic.

Unes paraules de l'autor

Presentem en aquest text una breu introducció a la teoria de Corbes Algebraiques a través del problema de la classificació de la quàrtiques projectives planes sobre un cos algebraicament tancat, particularment el cos dels nombres complexos. La motivació del mateix sorgeix de la sensació de l'autor que l'objectiu d'una teoria geomètrica és el de classificar els objectes que pretén estudiar, i que aquest objectiu no pot ésser assolit d'altra manera que no sigui avançant pas a pas i afegint nous criteris i objectes que complertin les classificacions anteriors. Sota aquest punt de vista, allò que la Geometria Projectiva Plana ha de fer és classificar corbes projectives planes, i aquest primer pas es dóna en un curs de Geometria Projectiva de qualsevol grau de matemàtiques amb la classificació de les còniques projectives, que són les corbes de grau 2. El següent pas no arriba fins que un no ha assolit una considerable quantitat de conceptes algebraics, i marca la introducció en la disciplina de la Geometria Algebraica. Aquell qui vulgui dur a terme la classificació de les cúbiques projectives, les corbes de grau 3, de seguida descobreix que no en té prou de fer servir només la Geometria Projectiva, car l'aparició de punts singulars en corbes que no són degenerades porta al darrera una sèrie de matisos que només poden ésser identificats mitjançant eines algebraiques.

Seguint l'ordre aparentment natural que segueix aquest procés, l'autor d'aquest treball es va preguntar, al final d'un curs d'introducció a la Geometria Algebraica, si es podríen fer servir arguments similars als emprats per a les cúbiques per classificar les quàrtiques projectives, que són les corbes de grau 4. La resposta obtinguda en aquella ocasió advertia sobre la necessitat de tot un curs sencer per tal d'abordar aquesta qüestió, i aquest treball, entre d'altres coses, serveix per confirmar aquest fet. Si per a les cúbiques planes no n'hi havia prou amb una teoria geomètrica com l'emprada per a les còniques, per a les quàrtiques planes no n'hi ha prou amb una teoria –geomètrica i algebraica– plana com la que funciona per a les cúbiques; cal una teoria més elaborada que exigeix mirar-se una corba plana dins d'un espai de dimensió superior. Tret, ara bé, de que hom només vulgui estudiar quàrtiques projectives planes sense punts singulars. Aleshores sí que n'hi ha prou amb una teoria plana, malgrat que el bagatge algebraic hagi de ser ampliat. Aquest serà, doncs, el modest objectiu que cercaran les pàgines que segueixen: ampliar la teoria de Geometria Algebraica assolida en cursos anteriors mostrant una manera d'obtenir una equació per a un cert tipus de corbes projectives planes de grau 4, fet que s'il.lustrarà amb l'exemple de la quàrtica de Klein.

La voluntat d'aquest autor és que el lector acabi amb la convicció de que allò que es perd fent una construcció incomplerta de les quàrtiques projectives planes es guanya amb la presa de consciència sobre el salt teòric existent entre aquestes i les cúbiques, de manera que la descoberta de nous conceptes i procediments algebraics suposin la motivació necessària per tal de superar aquest salt teòric en cursos ulteriors de Geometria Algebraica i de Corbes Algebraiques.

Organització dels continguts

Aquest treball dividit en quatre capítols. Els tres primers corresponen a la teoria algebraica prèvia a la descripció de les quàrtiques projectives planes no-singulars. El quart il.lustra tota aquesta teoria amb l'exemple de la quàrtica de Klein. Al final del text s'hi troben, a més, dos apèndixs. Una breu descripció de cada capítol es presenta tot seguit:

En el primer capítol es fa un breu recordatori d'una sèrie de conceptes que són coneguts de diversos cursos del Grau i la Llicenciatura de Matemnàtiques i que caldran per desenvolupar tota la teoria que aquí volem presentar. Bàsicament, enumera tot el llenguatge algebraic emprat en la teoria de corbes algebraiques i recorda els conceptes referents a què és una varietat algebraica i algunes de les seves propietats.

El capítol 2 és un estudi dels elements principals de les corbes projectives planes. Els continguts prenen com a base l'assignatura d'Introducció a la Geometria Algebraica i van una mica més enllà per tal d'assolir els conceptes necessaris per a la demostració del teorema de Riemann-Roch. Hom podria dir que aquest darrer és l'objectiu principal del capítol i, vertaderament, la única raó que el motiva. Altres resultats importants per sí mateixos, però, s'esdevenen al llarg del mateix, essent els més destacables el teorema de Bézout, del qual en donem la demostració segons apareix al llibre "Curvas Algebraicas" de W. Fulton ([1]) i el teorema fonamental de Max Noether. També s'hi introdueix el concepte de gènere d'una corba sense passar pel bagatge topològic que caldria per definir-lo per un camí diferent al seguit en aquest treball, i es fan les discussions referents a la teoria de divisors.

El tercer capítol usa les eines dels dos capítols anteriors per dur a terme la construcció d'una equació per a les quàrtiques projectives no-singulars sobre el cos dels nombres complexos. El procediment a seguir és mitjançant les bitangents, tasca per a la qual caldrà primer demostrar les Fórmules de Plücker i definir les θ-caraterísitques. Aquestes duen a la construcció dels conjunts d'Aronhold i a les tríades i tètrades sizigètiques, la qual cosa serveix de pretext per a fer un breu resum d'àlgebra lineal simplèctica. Com ja hem dit, el lector pot trobar que és una construcció incomplerta, en quant a que obvia totes les quàrtiques que contenen punts singulars; i certament així ho és, però els conceptes necessaris per a una classificació general de les quàrtiques se'n surten de l'àmbit de la geometria plana i es troben fora de l'abast d'aquest treball.

El darrer capítol pren la quàrtica de Klein i, coneixent-ne de partida la seva equació, empra les eines del capítol 3 per mirar de verificar que, efectivament, permeten arribar a la pròpia equació de la quàrtica, almenys en un cert sentit que serà descrit quan pertoqui. El treball finalitza amb un annex que inclou explicacions i resultats sobre qüestions que es poden estudiar partint dels continguts aquí presentats.

Barcelona, 26 de gener de 2012

Capítol 1

Antecedents teòrics

En aquest primer capítol s'introduïran una sèrie de conceptes de caire tant algebraic com geomètric que s' usen en l'estudi de les corbes algebraiques enteses com a varietats algebraiques de dimensió 1. L'objectiu és presentar una sèrie d'eines en un format més centrat en el pragmatisme que no pas en la formalitat, de manera que la major part del text consistirà en un llistat de definicions i exemples que les il.lustren. S'inclou també l'enunciat d'alguns teoremes importants, com ara el Teorema dels Zeros de Hilbert, però se n'obvia la demostració. El text és, essencialment, un reflex dels dos primers capítols de [1]. El lector que vulgui aprofundir més en la matèria o que estigui interessat en les demostracions omeses en aquest apartat pot consultar [6] i [7].

1.1 Conceptes algebraics

Se suposa al lector familiaritzat amb els conceptes bàsics sobre estructures algebraiques (particularment, pel que fa a anells i cossos). Tret que s' especifiqui el contrari, la paraula "anell" farà referència a un anell commutatiu.

Notació: Sigui R un anell, $R[x]$ denotarà l'anell de polinomis sobre R i $R(x)$ denotarà el cos de fraccions algèbriques sobre l'anell R.

Definició 1.1. D'un anell R se'n diu un domini d'integritat si no hi existeixen divisors de 0_R.

Exemple: $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ són dominis d'integritat. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ no és un domini d'integritat, per exemple: $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$.

Definició 1.2. Un cos és un domini R on tot element que no sigui 0_R té un invers multiplicatiu.

Proposició 1.1.1. Tot domini R té un cos de fraccions k que conté a R com a subanell. Tot element de k es pot expressar com a quocient d'elements de R.

Exemple: $\mathbb{Q}$ és el cos de fraccions de $\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}(x)$ és el cos de fraccions de $\mathbb{R}[x]$.

Definició 1.3. $R[X_1, \ldots, X_n]$ designa l'anell de polinomis a coeficients en l'anell R i indeterminades $X_1, \ldots, X_n$. Donat un element $p \in R[X_1, \ldots, X_n]$, si $p = \sum_{i \in I} a_i X_1^{d_1} \ldots X_r^{d_r}$; $r \leq n$, amb $\sum_k d_k = d \ \forall \ i$; es diu que p és un polinomi homogeni de grau d o bé una forma de grau $d \in \mathbb{N}$.

Proposició 1.1.2. Tot $p \in R[X_1, \ldots, X_n]$ es pot escriure de la forma $p = \sum_{i=0}^{d} F_i$, on F_i són formes de grau $i \leq \deg(p)$.

Exemple: Sigui $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ donat per $p = X^2 + Y^2 + XY + X + Y + 1 = F_2 + F_1 + F_0$, amb $F_2 = X^2 + Y^2 + XY$, $F_1 = X + Y$ i $F_0 = 1$ formes de grau 2, 1, i 0 respectivament.

Definició 1.4. Un element a d'un anell R s' anomena irreductible si tota descomposició és de la forma $a = b \cdot c$ amb $b, \ c \in R$ i essent un dels dos un element inversible.

Exemple: A $\mathbb{Z}$, 3 és un element irreductible, ja que les úniques descomposicions possibles (tret de l'ordre) són $3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3)$. A $\mathbb{R}[X]$, X^2 no és irreductible, ja que $X^2 = X \cdot X$; però $X^2 + 1$ sí que ho és.

Definició 1.5. Un domini R s' anomena factorial, o domini de factorització única (DFU), si tot element $x \in R^*$ descompon de manera única, tret de producte per elements unitaris i ordre dels factors, en elements irreductibles.

Exemple: $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}[x]$ són DFU.

Proposició 1.1.3. Si k és el cos de fraccions d'un domini R, aleshores un element irreductible de $R[X]$ ho és també en $k[X]$.

Proposició 1.1.4. Si R és un DFU, aleshores $R[X]$ és un DFU. Com a conseqüència, $R[X_1, \ldots, X_n]$ és un DFU, entenent que $R[X_1, \ldots, X_n] = R[X_1, \ldots X_{n-1}][X_n]$.

Definició 1.6. El cos de fraccions de l'anell $k[X_1, \ldots, X_n]$, $k(X_1, \ldots, X_n)$, s' anomena cos de funcions racionals sobre R.

Exemple: $\mathbb{R}(x)$ és el cos de funcions racionals en una variable real: si $f \in \mathbb{R}(x)$, aleshores $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ amb $p, \ q \in \mathbb{R}[x]$.

Definició 1.7. Un subconjunt $I \subset R$ d'un anell s' anomena ideal si, per a tot element $x \in I$ se satisfà que $a \cdot x \in I$, per a tot $a \in R$. En particular, $\{0_R\}$ i R són ideals de R.

Proposició 1.1.5. Si $\varphi : R \to S$ és un homomorfisme d'anells, aleshores el conjunt $\varphi^{-1}(0) \subset R$ és el nucli de φ i és un ideal de R.

Definició 1.8. Un ideal $I \subset R$ s' anomena propi si $I \neq R$; i s' anomena maximal si no es troba contingut dins de cap altre ideal propi.

Exemple: $5 \cdot \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ és un ideal propi i és maximal. En canvi, $4 \cdot \mathbb{Z}$ és un ideal propi però no és un ideal maximal, ja que $4 \cdot \mathbb{Z} \subsetneq 2 \cdot \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

Definició 1.9. Un ideal $I \subset R$ es diu primer si $ab \in I$ implica que $a \in I$ o bé $b \in I$.

Exemple: $2 \cdot \mathbb{Z}$ és un ideal primer, ja que si $a \in 2 \cdot \mathbb{Z}$ aleshores $a = 2k$ per algun $k \in \mathbb{Z}$. En canvi, $8 \cdot \mathbb{Z}$ no és un ideal primer, ja que $24 = 6 \cdot 4$, amb $4,\ 6 \notin 8 \cdot \mathbb{Z}$.

Proposició 1.1.6. En un DFU, un ideal principal és primer si, i només si, està generat per un únic element irreductible.

Exemple:

(i) A $\mathbb{Z}$, $2 \cdot \mathbb{Z} = (2)$ és un ideal primer, mentre que $4 \cdot \mathbb{Z} = (4)$ no ho és.

(ii) A $\mathbb{R}[X, Y]$, $I_{(X+Y)} = (X + Y)$ és primer, mentre que $I_{(X^2-Y^2)} = (X^2 - Y^2)$ no ho és.

Definició 1.10. Tot subconjunt $S \subset R$ genera un ideal I en l'anell R de la forma següent:

$$I = \left\{ \sum_i a_i s_i \middle| s_i \in S,\ a_i \in R \right\}.$$

I és l'ideal més petit que conté S. Direm que I és de generació finita si $\mathrm{card}(S) < \infty$, i aleshores escriurem $I = (s_1, \dots, s_n)$. Si $\mathrm{card}(S) = 1$ direm que l'ideal I és principal.

Exemple:

(i) $3 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ és un ideal principal; $3 \cdot \mathbb{Z} = (3)$.

(ii) A $\mathbb{R}[X, Y]$, $I = (X, Y)$ és de generació finita, però no és principal.

(iii) A l'anell de polinomis en infinites variables reals, $\mathbb{R}[X_i,\ \forall i \in \mathbb{N}]$, l'ideal $I = (\bigcup_{i \geq 1} \{X_i\})$ no és de generació finita.

Demostració: [de (ii)]: Suposem que I fos principal, aleshores, sigui $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ tal que $I = (p)$. Com que $X + Y \in I$, existeix un cert polinomi $q \in \mathbb{R}[X, Y]$ tal que $X + Y = p \cdot q$, però $X+Y$ és irreductible, per tant ha de ser, o bé $p = 1$, o bé $p = X+Y$. No pot ser 1, car aleshores tindríem que $I = \mathbb{R}[X, Y]$, cosa que és falsa (per exemple, $X + Y + 1 \notin I$). Així, ha de ser $p = X + Y$, però això tampoc és possible ja que, si ho fos, aleshores tindríem que per $a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq b$, el polinomi $aX + bY \in I$ hauria de satisfer $aX + bY = r \cdot (X + Y)$, per a un cert polinomi $r \in \mathbb{R}[X, Y]$ que només pot ser de grau zero, és a dir, una constant; i si aquesta constant existís, hom tindria $a = b$, de manera que arribem a una contradicció i, per tant, l'ideal I no és principal.
Per demostrar (iii), n'hi ha prou de veure que la cadena d'ideals $I_k = (\bigcup_{i=1}^{k} \{X_i\})$ no té cap element maximal, de manera que en aplicació del Lema de Zorn, I no pot ser de generació finita. $\square$

Definició 1.11. Un domini en el qual tots els seus ideals són principals (i.e. generats per un sol element) s' anomena domini d'ideals principals (DIP).

Proposició 1.1.7. Tot DIP és DFU.

Exemple: $\mathbb{Z}$ és DIP. $\mathbb{R}[X]$ és DIP i, per tant, DFU. $\mathbb{R}[X,Y]$ no és DIP, ja que $I=(X,Y)$ no és un ideal principal; però en aplicació de la proposició 1.1.4, sí que és un DFU, de manera que el recíproc de la proposició 1.1.7 no és cert en general.

Definició 1.12. Un domini els ideals del qual són tots de generació finita s'anomena anell noetherià. En particular, tot DIP és un anell noetherià.

Definició 1.13. Sigui I un ideal d'un anell R. L'anell quocient R/I és el conjunt de les classes d'equivalència d'elements de R donades per la relació $a \sim b \Leftrightarrow a-b \in I$. S'anomena I-classe residual de a a la classe que conté a; $[a] \in R/I$.

Proposició 1.1.8. L'aplicació de projecció $\pi : R \to R/I$ és un homomorfisme d'anells.

Sigui I un ideal propi de $k[X_1,\dots,X_n]$, k un cos. L'homomorfisme $\pi : k[X_1,\dots,X_n] \to k[X_1,\dots,X_n]/I$ es pot restringir a un homomorfisme d'anells $k \to k[X_1,\dots,X_n]/I$. Aleshores, hom pot considerar a k com a subanell de $k[X_1,\dots,X_n]/I$. En particular, $k[X_1,\dots,X_n]/I$ és un k-espai vectorial.

Definició 1.14. Sigui $F=\sum a_i X^i$ un polinomi. Definim el seu derivat com el polinomi $\dfrac{\partial F}{\partial X}=\sum i\cdot a_i X^{i-1}$. Si $F \in R[X_1,\dots,X_n]$, escriurem $\dfrac{\partial F}{\partial X_i}=F_{X_i}$

Proposició 1.1.9. Sigui R un anell, es tenen les propietats següents:

(i) $(aF+bG)_X = aF_X + bG_X,\ \forall a,\ b \in R;\ F,\ G \in R[X]$.

(ii) $F_X = 0 \Leftrightarrow F \in R$.

(iii) $(FG)_X = F_X G + F G_X$.

(iv) Si $G_1,\dots,G_n \in R[X]$ i $F \in R[X_1,\dots,X_n]$, aleshores

$$F_X(G_1,\dots,G_n)=\sum F_{X_i}(G_1,\dots,G_n)\cdot G_{iX}.$$

(v) $F_{X_iX_j} = F_{X_jX_i}$.

(vi) (Teorema d'Euler): Si F és una forma de grau m, aleshores $mF=\sum_{i=1}^m X_i F_{X_i}$.

1.2 Conjunts algebraics afins i projectius

En aquest punt es considera al lector familiaritzat amb la geometria afí i projectiva, i s'apliquen els conceptes del punt anterior per tal de descriure uns conjunts que donaran lloc al tipus de corbes que volem estudiar. Suposarem, en primer lloc, que ens trobem a l'espai afí de dimensió n sobre el cos k, $A^n(k)$.

Definició 1.15. Sigui $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Un punt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n(k)$ s'anomena zero de F si $F(P) = 0$. Si F no és constant, el conjunt de zeros de F s'anomena hipersuperfície afí definida per F i es denota $V(F)$. Una hipersuperfície en $A^2(k)$ s'anomena corba plana afí.

En general, si $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ i $V(S) = \{P \in A^n(k) | F(P) = 0, \ \forall F \in S\}$, aleshores $V(S) = \bigcup_{F \in S} V(F)$.

Definició 1.16. Un subconjunt $X \subset A^n(k)$ s'anomena un conjunt algebraic afí si $X = V(S)$ per algún subconjunt $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$.

Les següents propietats són conseqüència de combinar aquestes definicions amb els conceptes desenvolupats a l'apartat anterior. El lector pot consultar les demostracions de les mateixes a [2].

Proposició 1.2.1. Es tenen les propietats següents:

(i) Si I és l'ideal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ generat per S, aleshores $V(I) = V(S)$. És a dir, tot conjunt algebraic és igual a $V(I)$ per algun ideal I.

(ii) Si $\{I_\alpha\}$ és una col.lecció d'ideals, aleshores $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.

(iii) Si $I \subset J$, aleshores $V(J) \subset V(I)$.

(iv) $V(FG) = V(F) \cup V(G)$, per a quelsevol parell de polinomis F i G. Donats els ideals $I, \ J \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, $V(I) \cap V(J) = \{FG | F \in I, \ G \in J\}$. Per tant, qualsevol unió finita de conjunts algebraics és un conjunt algebraic.

(v) $V(0) = A^n(k)$, $V(1) = \emptyset$. $V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$, $a_i \in k$. És a dir, tot subconjunt discret de l'espai afí és un conjunt algebraic.

Exemple:

(i) El conjunt $\mathcal{S}_1 = \{(t, t^2, t^3) \in A^3(\mathbb{R}) | \ t \in \mathbb{R}\}$ és un conjunt algebraic.

(ii) El conjunt $\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \in A^2(\mathbb{R}) | \ y = \sin(x)\}$ no és un conjunt algebraic.

Demostració:

(i) Observem que $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in A^3(\mathbb{R}) | \ y = x^2, \ z = x^3\}$. Hem de trobar un ideal $I \subset \mathbb{R}[X, Y, Z]$ tal que $\mathcal{S}_1 = V(I)$. N'hi ha prou de prendre, doncs, $I = (Y - X^2, Z - X^3) \subset \mathbb{R}[X, Y, Z]$.

(ii) Si $\mathcal{S}_2$ fos un conjunt algebraic, aleshores hauria d'existir un polinomi $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ tal que $V(F) = \mathcal{S}_2$. És a dir, un polinomi $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ tal que $F(P) = 0$, $\forall P \in \mathcal{S}_2$. Però això no pot ser, ja que si tallem F amb la recta $y = 0$, hauríem d'obtenir un altre conjunt algebraic, en aquest cas, un conjunt finit de punts; però si fem $y = \sin(x) = 0$ tenim que existeixen infinits x (tants com nombres enters) que satisfan aquesta condició. Per tant, $\mathcal{S}_2$ no és un conjunt algebraic. □

En aquest treball volem tractar corbes algebraiques projectives, que són les hipersuperfícies projectives del pla projectiu. La definició d'hipersuperfície projectiva és completament anàloga a la d'hipersuperfície afí tenint simplement en compte que el conjunt S que hi dóna lloc ha de contenir només formes de $k[X_1, \ldots X_n]$, enlloc de polinomis qualssevol com en el cas afí. Aquest fet rau en la identificació que generalment es fa de $A^n(k)$ amb els punts de $\mathbb{P}^n_k$ que són de la forma $(1 : x_1 : \cdots : x_n)$. Particularitats sobre aquest tema, que corresponen a un curs elemental de geometria projectiva, es poden consultar en [3]. Notem, així mateix, que aquestes formes es troben determinades tret de producte per elements no nuls de k. Així doncs, tenim les següents definicions per al context projectiu:

Definició 1.17. Un punt $P \in \mathbb{P}^n_k$ s'anomena zero del polinomi F si $F(P) = 0$ per a qualsevol elecció de les coordenades homogènies de $P = (X_0 : \cdots : X_n)$.

Com en el cas afí, si $S \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ és conjunt de polinomis, $V(S)$ denota el conjunt de punts de l'espai projectiu on s'hi anul.len tots els polinomis de S. Així mateix, $V(S) = V(I)$, essent I l'ideal generat per S.

Definició 1.18. Sigui $I = (F^0, \ldots, F^n)$, on $F^i = \sum F_j^{(i)}$ és una forma de grau j. El conjunt $V(S) = V(I)$ s'anomena conjunt algebraic projectiu.

Definició 1.19. Per a tot $X \subset \mathbb{P}^n$, sigui $I(X) = \{F \in k[X_0, \ldots X_n] \mid F(P) = 0 \ \forall P \in X\}$. $I(X)$ s'anomena ideal de X. Un ideal I s'anomena homogeni si per a tot $F = \sum_{i=0}^{m} F_i \in I$, F_i forma de grau i, es té també que $F_i \in I$. Per a tot conjunt $X \in \mathbb{P}^n$, $I(X)$ és un ideal homogeni.

Proposició 1.2.2. Un ideal $I \subset k[X_0, \ldots x_n]$ és homogeni si, i només si, està generat per un conjunt de formes.

Hem definit un conjunt algebraic a partir d'un subconjunt qualsevol de polinomis però, de fet, només en calen un nombre finit. Aquest fet és una conseqüència del Teorema Fonamental de Hilbert.

Teorema 1.2.3 (Fonamental de Hilbert)**.** Si R és un anell noetherià, llavors $R[X_1, \ldots, X_n]$ és un anell noetherià. En particular, $k[X_1, \ldots, X_n]$ és noetherià per a tot cos k.

Corol.lari 1.2.4. Tot conjunt algebraic és intersecció d'un nombre finit d'hipersuperfícies.

La demostració ([1]) consisteix en adonar-se de que si $\mathcal{S} = V(S)$, aleshores l'ideal generat per S només pot estar generat per un nombre finit de polinomis, car en cas contrari $k[X_1, \ldots, X_n]$ no serià noetherià. Aquest fet, a més, adquirieix rellevància en el cas del pla, on el corol.lari implica que els únics conjunts algebraics que hi són contingunts són el buit, els conjunts finits de punts i les corbes algebraiques. Seguint amb les analogies que fan el fil d'aquesta secció, una versió afí del teorema és també admissible.

Definició 1.20. Un conjunt algebraic $V \subset \mathbb{P}^n$ s'anomena reduïble si existeixen conjunts algebraics V_1 i V_2 de $\mathbb{P}^n$, $V_1 \neq V_2$, tals que $V = V_1 \cup V_2$. En cas contrari, V s' anomena irreductible.

Una manera molt útil d'identificar conjunts irreductibles és la següent:

Proposició 1.2.5. Un conjunt algebraic V és irreductible si, i només si, $I(V)$ és un ideal primer. Els conjunts algebraics irreductibles de $\mathbb{P}^n$ s'anomenen varietats projectives.

En particular, es té aquest teorema, conseqüència d'aplicar el Lema de Zorn a una cadena d'ideals d'un anell noetherià:

Teorema 1.2.6. Sigui $V \subset \mathbb{P}^n$ un conjunt algebraic. Aleshores, existeixen conjunts algebraics irreductibles $V_1, \ldots, V_r$, unívocament determinats, tals que $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ amb $V_i \nsubseteq V_j$ per a tot $i \neq j$.

Aquests fets porten a establir que hi ha una correspondència bijectiva entre els ideals homogenis de $k[X_0, \ldots, X_n]$ i els conjunts algebraics de $\mathbb{P}^n$.

Una altra eina útil consisteix a donar una estructura topològica als conjunts algebraics projectius. La que segueix és una construcció que ens proporciona aquesta eina.

Definició 1.21. Definim la Topologia de Zariski, $\mathcal{Z}$, sobre $\mathbb{P}^n$ com aquella els oberts de la qual són els conjunts $U \subset \mathbb{P}^n$ tals que $\mathbb{P}^n \setminus U$ és un subconjunt algebraic de $\mathbb{P}^n$. Els conjunts U reben el nom d'oberts de Zariski.

Que $(\mathbb{P}^n, \mathcal{Z})$ sigui un espai topològic és conseqüència directa de les propietats dels conjunts algebraics projectius. La primera secció del capítol 6 de [1] ho explica amb detall.

Enllestim aquest capítol enunciant el teorema dels Zeros de Hilbert (o *nullstelensatz*, com se'l coneix habitualment) i alguns corol.laris que se'n desprenen.

Teorema 1.2.7 (Zeros de Hilbert)**.** Sigui I un ideal de $k[X_0, \ldots, X_n]$, k algebraicament tancat. Aleshores $I(V(I)) = Rad(I)$.

Corol.lari 1.2.8. Si I és un ideal radical de $k[X_0, \ldots, X_n]$, aleshores $I(V(I)) = I$. Per tant, existeix una correspondència bijectiva entre ideals radicals i conjunts algebraics projectius.

Corol.lari 1.2.9. Si I és un ideal primer de $k[X_0, \ldots, X_n]$, aleshores $V(I)$ és irreductible. Per tant, existeix una correspondència bijectiva entre ideals primers i conjunts algebraics irreductibles. Als ideals maximals els hi corresponen punts.

Corol.lari 1.2.10. Sigui I un ideal de $k[X_0, \ldots, X_n]$. Aleshores $V(I)$ és un conjunt finit si, i només si, $k[X_0, \ldots, X_n]/I$ és un espai vectorial de dimensió finita sobre k. En aquest cas, el nombre de punts de $V(I)$ no és més gran que la dimensió de l'espai.

Capítol 2

Corbes algebraiques projectives planes

En endavant, suposarem que treballem a $\mathbb{P}^2_k$. Tots els conceptes que aquí s'expliquen poden ésser extesos sense dificultat a $A^n(k)$ i $\mathbb{P}^n_k$, per a qualsevol n, simplement augmentant el nombre de variables dels polinomis corresponents a n en el cas projectiu i a $n-1$ en el cas afí (veure [1]). Similarment al que succeïa amb el pla afí, el corol.lari 1.2.4 implica que els únics conjunts algebraics del pla projectiu són el buit, els conjunts finits de punts i les corbes algebraiques projectives planes. El propòsit d'aquest capítol és el de definir els elements principals de les corbes planes, i posarem especial èmfasi en els conceptes relacionats amb la multiplicitat de punts d'una corba. Introduïrem, en aquest context, el llenguatge de divisors, concepte que probablement constitueix l'eina més rellevant de tot el treball. Tres seran els resultats principals que veurem durant el capítol: el teorema de Bézout, el teorema fonamental de Max Noether i el teorema de Riemann-Roch.

2.1 Definicions i propietats

Començarem aquest apartat completant el llenguatje emprat per a varietats algebraiques afins i projectives però centrant-nos ara ja només en el significat que assoleixen en el context de les corbes algebraiques projectives planes.

Definició 2.1. Un subconjunt $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_k$ s'anomena una corba algebraica projectiva plana si $\mathcal{C} = V(\{F\})$, per alguna forma $F \in k[X,Y,Z]$. Així, $\mathcal{C} = \{p \in \mathbb{P}^2_k \mid F(p) = 0\}$, de manera que les corbes algebraiques projectives planes (en endavant, i mentre no s' especifiqui el contrari, simplement corbes planes) són les hipersuperfícies projectives de $\mathbb{P}^2_k$. El grau d'una corba és el grau de la seva forma associada. Per abús de notació, generalment escriurem $V(F)$ enlloc de $V(\{F\})$.

Exemple: La cònica $\mathcal{Q}$ donada per la forma de grau 2 $F = X^2 + Y^2 + Z^2$ és una corba algebraica projectiva plana de grau 2. La corba $\mathcal{C} = V(X^4Y - Z^3X^2 + Y^5)$ és una corba algebraica projectiva plana de grau 5. Les corbes de grau 2 reben el nom de còniques, les de grau 3, cúbiques; i les de grau 4, quàrtiques.

Observació: El fet que $\mathcal{C}$ vingui donada per una única forma F és conseqüència d'aplicar el corol.lari 1.2.4 al pla projectiu: si tot conjunt algebraic és intersecció finita d'hipersuperfícies algebraiques, les corbes algebraiques del pla només poden ésser la intersecció d'elles mateixes; ja que si tinguéssim més d'una, el Teorema Fonamental de l'Àlgebra ens garanteix que es tractaria d'un conjunt finit de punts del pla projectiu.

Definició 2.2. Sigui $X \subset \mathbb{P}^2_k$ un subconjunt del pla projectiu i considerem el conjunt de polinomis (formes) que s'anul.len en els punts de X. Aquest conjunt és un ideal de $k[X,Y,Z]$ que s'anomena l'ideal del conjunt X, desginat per

$$I(X) := \left\{F \ \in k[X,Y,Z] \mid F(x:y:z),\ \forall P = (x:y:z) \in \mathbb{P}^2_k\right\}.$$

Definició 2.3. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba projectiva plana i suposem que F descompon en factors irreductibles $F_1, \ldots, F_r$. A les corbes $\mathcal{C}_i = V(F_i)$, $1 \leq i \leq r$, les anomenem components irreductibles de la corba $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ ve donada per una única forma irreductible F, aleshores direm que $\mathcal{C}$ es una corba irreductible, i aleshores estarà formada per una única component.

Exemple: Considerem el cas de les corbes de grau 2, que són les còniques projectives. Una el.lipse donada per la forma $F = X^2 + Y^2 - Z^2$ és una corba irreductible, car F és una forma irreductible. En canvi, el parell de rectes donat per la forma $G = XY$ (cònica degenerada) té dues components irreductibles que són cadascuna de les dues rectes i que venen donades per les formes $G_1 = X$ i $G_2 = Y$ respectivament.

Proposició 2.1.1. (i) Si $X \subset Y$, aleshores $I(X) \supset I(Y)$.

(ii) $I(\emptyset) = k[X,Y,Z]$, $I(\mathbb{P}^2_k) = (0)$ si $k = \mathbb{C}$. $I(\{(x:y:z)\}) = (X-x, Y-y, Z-z)$.

(iii) $I(V(S)) \supset S$ per a tot conjunt S de polinomis. $V(I(X)) \supset X$ per a tot conjunt X de punts.

(iv) $V(I(V(S))) = V(S)$ per a tot conjunt S de polinomis, $I(V(I(X))) = I(X)$ per a tot conjunt X de punts. En particular, si $\mathcal{C}$ és un conjunt algebraic $\mathcal{C} = V(I(\mathcal{C}))$; i si I és l'ideal d'un conjunt algebraic, $I = I(V(I))$.

(v) $I(X)$ és un ideal radical per a tot conjunt $X \in \mathbb{P}^2_k$.

Ens cal definir el concepte de cos de funcions racionals sobre una corba projectiva plana, ja que més endavant esdevindrà crucial per tal de poder desenvolupar els conceptes que porten a la demostració del teorema de Riemann-Roch. Aquí només en farem les definicions i esmentarem alguna propietat important.

Definició 2.4. Considerem $\mathcal{C}$ una corba projectiva plana i sigui $U \subset \mathcal{C}$ un obert de Zariski a $\mathbb{P}^2_k$. Direm que $f : U \longrightarrow k$ és una funció racional si localment es pot expresar com a quocient de formes del mateix grau; és a dir, si per a tot $P_0 \in U$, existeix un entorn $U_0 \subset U$ i formes F i G tals que $f = F/G$, amb $G \neq 0$ en U_0. El conjunt de totes les funcions racionals f així definides rep el nom de cos de funcions racionals sobre la corba $\mathcal{C}$, i el denotem per $k(\mathcal{C})$.

L'estructura de cos de $k(\mathcal{C})$ es troba definida puntualment, és a dir, si $P \in \mathcal{C}$ i $f, g \in k(\mathcal{C})$, aleshores $f(P) + g(P) = (f + g)(P)$ i $f(P) \cdot g(P) = (fg)(P)$. Com que $k \subset k(\mathcal{C})$ (entenent les constants com quocients d'una forma entre un múltiple d'ella mateixa), $0 \in k$ és l'element neutre de la suma a $k(\mathcal{C})$, i $1 \in k$ és l'element neutre del producte. És evident que tot quocient de formes del mateix grau té un invers que també és un quocient de formes del mateix grau.

Definició 2.5. Sigui $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_k$ una corba plana, i considerem $I(\mathcal{C})$, que serà un ideal primer de $k[X, Y, Z]$; de manera que $\Gamma(\mathcal{C}) = k[X, Y, X]/I(\mathcal{C})$ és un domini. A $\Gamma(\mathcal{C})$ l'anomenarem l'anell de coordenades (o anell coordenat) de $\mathcal{C}$.

Definició 2.6. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba projectiva plana donada per una forma irreductible F. Per a cada $P \in \mathcal{C}$, anomenarem anell local de P en $\mathcal{C}$, i ho denotarem $\mathcal{O}_p(\mathcal{C})$, al subanell de $k(\mathcal{C})$ format per totes les funcions que es troben definides en P.

És clar, segons aquesta definició, que $k \subset \Gamma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \subset k(\mathcal{C})$.

Definició 2.7. Donada una funció $f \in k(\mathcal{C})$, el conjunt de punts $P \in \mathcal{C}$ on f no es troba definida s'anomena conjunt de pols de f, i és un conjunt algebraic de $\mathbb{P}^2_k$.

Proposició 2.1.2. Donat un anell R, són equivalents les següents afirmacions:

(i) R és noetherià i local, i l'ideal maximal és principal.

(ii) Existeix un element irreductible $t \in R$ tal que per a cada $z \in R$ no nul, hom pot escriure z de forma única com $z = ut^n$, per a u unitari en R i $n \geq 0$.

Definició 2.8. Un anell que satisfaci les condicions de la proposició 2.1.2 s'anomena un anell de valoració discreta (AVD). L'element t s'anomena paràmtre d'uniformització i qualsevol altre paràmetre d'uniformització és de la forma ut.

Proposició 2.1.3. Per a cada $P \in \mathcal{C}$, $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ és un anell de valoració discreta.

2.2 Multiplicitat de punts i singularitats d'una corba plana

Els conceptes següents donaran al lector l'entorn necessari per estudiar aquells punts d'una corba que s'anomenen singulars. L'objectiu és posar la base per tal de demostrar el teorema de Riemann-Roch en la darrera secció d'aquest capítol, tot passant primer pel teorema de Bézout, que ens diu el "grau de singularitat" d'un punt d'una corba.

Arribat aquest punt, convé recordar el procés de deshomogeneïtzació que ens permet estudiar una corba projectiva mitjançant l'estudi d'una corba afí associada. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba projectiva plana donada per una forma $F \in k[X,Y,Z]$. Recordem que $V(F) = V(\lambda F),\ \forall \lambda \in k^*$. Posem

$$F = \sum_{i,j,k=0}^{n} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k,\ i+j+k=n.$$

Definim la corba plana afí $\mathcal{C}^* = V(F^*)$ donada per

$$F^* := \frac{1}{Z^n} F.$$

Amb el canvi $x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{Y}{Z}$ es té

$$F^* = \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j,n-i-j} x^i y^j.$$

Aquesta corba $\mathcal{C}^*$ és la corba afí associada a la corba $\mathcal{C}$. Notem que el canvi de variables assenyalat prové de considerar el pla afí com el complementari de la recta projectiva $\{x_2 = 0\}$ mitjançant la identificació $\pi : (x : y : 1) \to (x, y)$ (veure [3]). Observem, així mateix, que F^* no és necessàriament una forma, sinò un polinomi de grau n genèric.

Definició 2.9. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba plana. Sigui $P = (x_0 : x_1 : x_2) = (x : y : 1) \in \mathcal{C}$, direm que P és un punt simple de $\mathcal{C}$ si, un cop deshomogeneïtzada la corba $\mathcal{C}$, se satisfà $F^*_X(P^*) \neq 0$ i $F^*_Y(P^*) \neq 0$, on $P^* = (x_0, y_0) = \pi(P)$. En aquest cas, la recta (afí) $F^*_X(P^*)(X - x_0) + F^*_Y(P^*)(Y - y_0) = 0$ és la recta tangent a $\mathcal{C}^*$ per P^*, que denotem $L^*_{P^*}(\mathcal{C}^*)$. La corresponent recta projectiva s'obté re-homogeneïtzant i la denotarem $L_P(\mathcal{C})$. Un punt que no sigui simple s'anomena múltiple o singular. Una corba que només tingui punts simples s'anomena no-singular.

Ens cal, però, una forma de distingir tots aquells punts que no siguin singulars:

Definició 2.10. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba plana i considerem $\mathcal{C}^* = V(F^*)$ la corba afí corresponent. Posem $F^* = F_m + F_{m+1} + \dots F_n$, on $F_i \in k[X,Y]$ és una forma de grau i, i $F_m \neq 0$. Definim l'enter m com la multiplicitat de la corba $\mathcal{C}^*$ en $P = (0,0)$, i ho denotem $m := m_P(C^*)$.

Observació: $P \in \mathcal{C}^*$ és un punt de la corba si, i només si, $m_P(C^*) > 0$. Si $m_P(C^*) = 1$ aleshores P és un punt simple de la corba $\mathcal{C}^*$ i F_1 és la recta tangent a $\mathcal{C}^*$ per P. Donat un punt qualsevol P, podem estudiar-ne la multiplicitat fent un canvi de coordenades afins que dugui P a $(0,0)$. Per estudiar la multiplicitat d'un punt d'una corba projectiva, tot el que haurem de fer és deshomogeneïtzar la corba i estudiar el punt sobre la corba afí corresponent. Aleshores, posarem $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\mathcal{C}^*)$. D'ara endavant considerarem certes totes aquestes hipòtesis i prescindirem de la seva menció per tal d'estudiar corbes projectives amb comoditat.

Exemple: Considerem la corba $\mathcal{C} = V(F)$ donada per $F = X^3 - Y^2Z$ i anem a calcular $m_P(\mathcal{C})$, per a $P = (1 : 1 : 1)$. Deshomogeneïtzem F i obtenim $F^* = x^3 - y^2$. Com que $F_x^*(1, 1) = 3 \neq 0$ i $F_y^*(1, 1) = -2 \neq 0$, tenim que P és un punt simple de $\mathcal{C}$. La multiplicitat de $\mathcal{C}$ en $(0 : 0 : 1) = \pi^{-1}(0, 0)$ és 2, ja que F^* és la suma de dues formes de graus 2 i 3 respectivament.

Una altra manera d'estudiar la multiplicitat d'un punt d'una corba plana és fer-hi passar una recta i analitzar *com* aquesta recta talla la corba. Intuïtivament, podem pensar en una mena d'"ordre de tall" que sigui 1 quan la recta talla la corba en un punt simple i que sigui més gran quan la recta talli la corba en un punt múltiple. Si hom pensa en una cúbica nodal, la idea intuïtiva que acabem d'exposar duria a detectar que el node és un punt doble (multiplicitat 2) veient que l'"ordre de tall" d'una recta que hi fem passar expressament és 2. Aquest concepte es pot formalitzar mitjançant el que s'anomena nombre d'intersecció de dues corbes i particularitzant en el cas en què una de les dues corbes és una recta (corba de grau 1). La següent tasca, doncs, serà definir aquest concepte amb rigor, la qual cosa portarà a enunciar el Teorema de Bézout.

Definició 2.11. Siguin $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ i $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ dues corbes projectives planes donades per sengles formes F_1 i F_2. Definim el nombre d'intersecció de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ en el punt P, $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$, com la dimensió del k-espai vectorial $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}_k^2)/(F_1, F_2)$.

Observació: Notem que en cap moment hem dit que el punt P pertanyi a la intersecció de les dues corbes, i vertaderament no cal; ja que quan mirem el nombre d'intersecció en un tal punt, el resultat és que hi val zero.

Tot seguit enunciarem una sèrie de propietats que ha de satisfer el nombre d'intersecció de dues corbes. Cal dir que estem seguint el procés en el sentit invers al què es considera canònic; generalment, primer s'enuncien les propietats i després es demostra que només hi ha una definició possible de nombre d'intersecció, i que no és altra que la que nosaltres hem donat. El llibre de W. Fulton ([1]) dedica una secció sencera d'un capítol a desenvolupar aquest procés amb detall, i el lector interessat en les demostracions i la tècnica emprada és animat a fer-ne la consulta.

Definició 2.12. Direm que dues corbes planes es tallen en sentit estricte en P si no tenen cap component en comú que passi pel punt P.

Notació: Sigui P un punt simple sobre una corba irreductible $\mathcal{C} = V(F)$. Considerem $\mathrm{ord}_P^{\mathcal{C}}$ la funció ordre sobre $k(\mathcal{C})$ definida per l'AVD $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Si $G \in k[X, Y, Z]$, i g és la imatge de G en $\Gamma(\mathcal{C})$, escrivim $\mathrm{ord}_P^{\mathcal{C}}(G)$ enlloc de $\mathrm{ord}_P^{\mathcal{C}}(g)$.

Proposició 2.2.1. Siguin $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ i $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ dues corbes planes que es tallen en un punt $P \in \mathbb{P}_k^2$. Aleshores, el nombre d'intersecció $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ satisfà les propietats següents:

(i) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ és un enter no negatiu per a tot parell de corbes i per a tot punt on s' hi tallin en sentit estricte. Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no es tallen en sentit estricte en P, aleshores $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \infty$.

(ii) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = 0$ si, i només si, P no es troba a $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. El nombre d'intersecció depèn només de les components de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ que passen per P.

(iii) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ no depèn de la referència projectiva triada.

(iv) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = I_P(\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_1)$.

(v) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \geq m_P(\mathcal{C}_1) m_P(\mathcal{C}_2)$. La igualtat es té si, i només si, $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no tenen cap tangent en comú pel punt P.

(vi) Si $F_1 = \prod {F_1}_i^{r_i}$ i $F_2 = \prod {F_2}_j^{r_j}$, aleshores $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \sum_{i,j} I_P({F_1}_i \cap {F_2}_j)$.

(vii) $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = I_P(\mathcal{C}_1 \cap V(F_2 + GF_1))$ per a qualsevol forma $G \in k[X, Y, Z]$.

(viii) Si P és un punt simple de $\mathcal{C}_1$, aleshores $I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \mathrm{ord}_P^{F_1}(\mathcal{C}_2)$.

(ix) Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no tenen components comunes, aleshores

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_k^2} I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = \dim_k(k[X, Y, Z]/(F_1, F_2)).$$

Observació: De la propietat (v) se'n dedueix el següent: si L és una recta que talla la corba $\mathcal{C}$ en el punt P però que no hi és tangent, aleshores $m_P(\mathcal{C}) = I_P(L \cap \mathcal{C})$.

Abans d'enunciar el teorema de Bézout, enunciem un lema que ens caldrà per a la demostració.

Lema 2.2.2. Siguin $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ dues corbes irreductibles sense cap component en comú. Aleshores, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ és un conjunt finit de punts.

Demostració: Suposem que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ contigués una quantitat infinita de punts. La intersecció de conjunts algebraics és un conjunt algebraic, (corol.lari 1.2.4) i com que els únics conjunts algebraics del pla són el buit, els conjunts finits de punts i les corbes planes, aquest ha de ser una corba plana; posem $\mathcal{C}_3 := \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Siguin $F_i \in k[X, Y, Z]$ formes tals que $\mathcal{C}_i = V(F_i)$ per a $i = 1, 2, 3$. Com que $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, tenim $V(F_3) = V(F_1) \cap V(F_2)$, per tant, $V(F_3) \subset V(F_1)$ i $V(F_3) \subset V(F_2)$. Aleshores, prenent ideals, tenim $I(F_1) \subset I(F_3)$ i $I(F_2) \subset I(F_3)$. Això vol dir que existeixen formes $A,\ B \in k[X, Y, Z]$ tals que $F_1 = AF_3$ i $F_2 = BF_3$. Si això és així, hom té $V(F_1) = V(A) \cup V(F_3)$ i $V(F_2) = V(B) \cup V(F_3)$; és a dir, $\mathcal{C}_1 = V(A) \cup \mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_2 = V(B) \cup \mathcal{C}_3$. Però llavors estem dient que $\mathcal{C}_3$ és una component de $\mathcal{C}_1$ i també una component de $\mathcal{C}_2$, per tant, $\mathcal{C}_3$ és una component comuna de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$, la qual cosa porta a una contradicció perquè hem suposat que $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no tenen components en comú. Així, la intersecció és un conjunt finit de punts, tal i com volíem demostrar. $\square$

Ja tenim les eines que ens calen per enunciar el Teorema de Bézout. La secció 5.3 de [1] comença amb el següent comentari, que citem textualment: *El pla projectiu va ésser construït per a que tot parell de rectes es talléssin en algun punt. El famós Teorema de Bézout ens diu molt més.*

La demostració fa servir un parell de conceptes relacionats amb les successions exactes. Es recomana al lector que no domini aquest llenguatje la consulta de [6] per a una introducció general al concepte de successió exacta, i de [8] (capítol 2, apèndix) per un estudi del seu ús en el cas de R-mòduls i, en particular, espais vectorials.

Teorema 2.2.3 (Bézout)**.** Siguin $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ i $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ corbes planes projectives de graus m i n respectivament. Suposem que ambdues corbes no tenen components comunes. Aleshores

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_k^2} I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = m \cdot n.$$

Demostració: Com que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ és finit pel lema 2.2.2, podem suposar, mitjançant un canvi de coordenades si cal, que cap dels punts de la intersecció es troba sobre la recta de l'infinit. Aleshores, $\sum_{P \in \mathbb{P}_k^2} = \dim_k k[X,Y,Z]/(F_1, F_2)$, per la propietat (ix) del nombre d'interesecció. Sigui $\Gamma := k[X,Y,Z]/(F_1,F_2)$, i sigui Γ_d l'espai vectorial de les formes de grau d de Γ. El teorema estarà demostrat si podem provar que $\dim \Gamma_d = mn$ per a d prou gran. Posarem $R := k[X,Y,Z]$.

Part 1: $\dim \Gamma = mn$ per a tot $d \geq m+n$: Sigui $\pi : \ R \to \Gamma$ l'aplicació natural de projecció, sigui $\varphi : \ R \times R \to R$ definida per $\varphi(A,B) = AF_1 + BF_2$, i sigui $\psi : R \to R \times R$ definida per $\psi(G) = (F_2 G, -F_1 G)$. Com que F_1 i F_2 no tenen factors en comú, hom pot comprovar la exactitud de la següent successió:

$$0 \to R \xrightarrow{\psi} R \times R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \to 0$$

Si restringim aquestes aplicacions a les formes de diversos graus, obtenim la successió exacta següent:

$$0 \to R_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\varphi} R_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \to 0$$

Com que $\dim R_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ ([3]), deduïm, mitjançant la Fórmula de Grassmann per espais vectorials (veure prop.7 del capítol 2 de [1], i [8]), que $\dim \Gamma_d = mn$ quan $d \geq mn$.

Part 2: Provem que l'aplicació $\alpha : \ \Gamma \to \Gamma$ definida per $\alpha(\overline{H}) = \overline{ZH}$ és un a un: Prenem $ZF_3 = AF_1 + BF_2$ i veiem que, aleshores, ha de ser $F_3 = A'F_1 + B'F_2$ per a certs A' i B'. Per a tot $J \in k[X,Y,Z]$, designarem $J_0 := J(X,Y,0)$. Com que Z, F_1 i F_2 no tenen divisors en comú, F_{10} i F_{20} són primers entre ells dins de $k[X,Y]$. Si $ZF_3 = AF_1 + BF_2$, aleshores $A_0 F_{1=} - B_0 F_{20}$, per tant $B_0 = F_{10} G$ i $A_0 = -F_{20} G$ per a un cert $G \in k[X,Y]$. Siguin $A_1 = A + GF_2$ i $B_1 = B - GF_1$. Com que $A_{10} = B_{10} = 0$, tindrem que $A_1 = ZA'$ i $B_1 = ZB'$ per a certs A', B'; i com que $ZF_3 = A_1 F_1 + B_1 F_2$, acabem de provar que $F_3 = A'F_1 + B'F_2$, tal i com volíem.

Part 3: Sigui $d \geq m+n$, i triem $A_1, \ldots, A_{mn} \in \Gamma_d$ les classes residuals dels quals formin una base de Γ_d. Sigui $A_{i*} = A_i(X,Y,1) \in k[X,Y]$, i a_i la classe residual de A_{i*} en Γ_*. Aleshores, hem de veure que $a_1 \ldots, a_{mn}$ constitueix una base de Γ_*: Observem que, si $d \geq m+n$, l'aplicació α de la part anterior es restringeix a un isomorfisme entre Γ_d i Γ_{d+1}, ja que una aplicació lineal un a un entre dos espais de la mateixa dimensió és un ismorfisme (conseqüència del teorema d'Isomorfia per a espais vectorials). Amb això n'hi ha prou per provar que les classes residuals de $Z^r A_1, \ldots, Z^r A_{mn}$ generen Γ_{d+r}, per a tot $r \geq 0$.

Els a_i generen Γ_*: si $h = \overline{H} \in \Gamma_*$, $H \in k[X,Y]$, aleshores algun $Z^N H^*$ és una forma de grau $d+r$, de manera que $Z^N H^* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_1 Z^N A_i + BF_1 + CF_2$ per a certs $\lambda_i \in k$, $B, C \in k[X,Y,Z]$. Aleshores, $H = (Z^N H^*)_* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_{1*} A_{i*} + B_* F_{1*} + C_* F_{2*}$, per tant $h = \sum \lambda_i a_i$, i els a_i generen l'espai Γ_*.

Finalment, vegem que són independents: Ho són, car si $\sum \lambda_i a_i = 0$, aleshores $\sum \lambda_i A_{i*} = B_* F_{1*} + C_* F_{2*}$ Per tant, $Z^r \sum \lambda_i A_i = Z^s B^* F_1 + Z^t C^* F_2$ per a certs r, s, t. Però aleshores $\sum \lambda_1 \overline{Z^R A_i} = 0$ en Γ_{d+r} i els $\overline{Z^R A_i}$ formen una base, per tant $\lambda_i = 0$ per a cada i. Amb això conclou la demostració. □

Vegem tot seguit una sèrie de conseqüències útils que surten directament d'aquest teorema.

Corol.lari 2.2.4. Siguin $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ dues corbes planes donades per sengles formes F_1 i F_2. Aleshores:

(i) Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no tenen components comunes, aleshores $\sum_{P \in \mathbb{P}_k^2} m_P(\mathcal{C}_1) \cdot m_P(\mathcal{C}_2) \leq \deg(F_1) \cdot \deg(F_2)$.

(ii) Si $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ es tallen en $\deg(F_1) \cdot \deg(F_2)$ punts diferents, aleshores tots ells són punts simples de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$.

(iii) Si dues corbes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ tenen més de $\deg(F_1) \cdot \deg(F_2)$ punts en comú, aleshores tenen una component en comú.

Demostrem un cas particular força cél.lebre de l'apartat (i) d'aquest corol.lari:

Proposició 2.2.5. Un recta L no continguda en una corba $\mathcal{C}$ de grau d talla a $\mathcal{C}$ en, com a molt, d punts diferents.

Demostració: Suposem que una tal recta pogués tallar $\mathcal{C}$ en $d+r$ punts diferents, per a qualsevol $r > 0$. Si això és així, l'apartat (v) de la proposició 2.2.1 implica que $\sum_{P \in \mathcal{C}} I_P(L \cap \mathcal{C}) \geq d+r$, car $I_P(L \cap \mathcal{C}) \geq 1$ en cada punt de tall. Però aleshores, pel teorema de Bézout tindríem que

$$d + r \leq \sum_{P \in \mathcal{C}} I_P(L \cap \mathcal{C}) = \deg(L) \cdot \deg(\mathcal{C}) = d,$$

arribant, per tant, a una contradicció; de manera que el resultat queda demostrat. □

Demostrat el teorema de Bézout, podem abordar una mica més la qüestió dels punts múltiples. Una conseqüència senzilla del mateix teorema és la proposició següent:

Proposició 2.2.6. Si $\mathcal{C}$ és una corba irreductible de grau n i m_P en designa la multiplicitat en P, aleshores

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^2_k}\frac{m_P(m_P-1)}{2}\leq\frac{n(n-1)}{2}.$$

Malgrat això, un examen dels casos $n=2,3,4$ indica que aquesta no és la millor fita. El següent teorema ens en dóna una de millor:

Teorema 2.2.7. Si $\mathcal{C}$ és una corba irreductible de grau n, aleshores

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^2_k}\frac{m_P(m_P-1)}{2}\leq\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Per demostrar aquest teorema ens cal primer enunciar un lema, la demostració del qual es troba a [1], capítol 5, secció 2.

Lema 2.2.8. Sigui $V(d;r_1P_1,\dots,r_nP_n)$ l'espai de les corbes $\mathcal{C}$ de grau d tals que $m_{P_i}(\mathcal{C})\geq r_i$, $\forall i$.

(1) $V(d;r_1P_1,\dots,r_nP_n)$ és un subespai lineal de $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ de dimensió D, amb

$$D\geq\frac{d(d+3)}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i(r_i+1)}{2}.$$

(2) Si $d\geq\sum_{i=1}^{n}r_i-1$, aleshores s'assoleix la igualtat.

Demostració: (del teorema 2.2.7) Com que $r=\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}-\sum\frac{m_P(m_P-1)}{2}\geq\frac{(n-1)n}{2}-\sum\frac{m_P(m_P-1)}{2}\geq 0$, podem triar punts simples $Q_1,\dots Q_r\in\mathcal{C}$. El lema 2.2.8 garanteix l'existència d'una corba $\mathcal{Q}$ de grau $n-1$ tal que $m_P(\mathcal{Q})\geq m_P-1$ per a tot P i amb $m_{Q_i}(\mathcal{Q})\geq 1$. Aplicant ara el primer dels corol.laris del teorema de Bézout a $\mathcal{C}$ i a $\mathcal{Q}$, hom té $n(n-1)\geq\sum m_P(m_P-1)+r$, i el teorema queda provat susbtituïnt el valor obtingut per a r en aquesta igualtat. $\square$

Aquest teorema produeix resultats coneguts, com ara que rectes i còniques no degenerades no tenen punts singulars; o que una cúbica no singular pot tenir, com a molt, un punt doble. Fent $n=4$, obtenim que una quàrtica tindrà, com a molt, tres punts dobles o bé un sol punt triple.

2.3 Divisors i espais $L(D)$

Passarem ara a estudiar els espais $L(D)$ de les funcions que tenen un determinat nombre de pols en un punt d'una corba donada. L'enter $l(D)$ serà definit com la dimensió d'aquests espais, i la nostra tasca serà la de calcular-ne el valor. Existeix una teoria general per al gènere que fa ús del que anomenem model no-singular de la corba $\mathcal{C}$. El model no-singular consisteix en, donada una corba $\mathcal{C}$ que té punts singulars, construïr-ne una que és equivalent a la primera segons un determinat sentit i que si bé encara pot tenir punts singulars, aquests són, en tot cas, ordinaris. La contrapartida és que aquesta nova corba viu en un espai de dimensió més alta. Aleshores, hom defineix el gènere d'una tal corba i demostra que el gènere del model no-singular de la corba $\mathcal{C}$ és el mateix que el de la corba $\mathcal{C}$. Com que nosaltres només volem classificar quàrtiques no-singulars, el model no-singular d'una corba d'aquestes característiques serà la mateixa corba, i en tindrem prou de definir el gènere per aquesta classe de corbes.

Tanmateix, d'aquesta secció en endavant, prescindirem de la distinció que fins ara hem fet entre una corba $\mathcal{C}$ i la forma que la defineix, F, posant sempre $\mathcal{C} = V(F)$. Amb el fi de no perdre rigor i fer consistent aquesta notació, entendrem que la corba $\mathcal{C}$ es pot definir com una classe d'equivalència de formes de $k[X, Y, Z]$. Aquesta classe obeeix a la relació d'equivalència $F \sim G$ si, i només sí, $G = \lambda F$ per algun $\lambda \in k$ no nul. Així, si escrivim $Z \cdot \mathcal{C}$ voldrem dir "el lloc on es tallen la recta donada per la forma Z i la corba $\mathcal{C}$", assumint que el fet que aquesta estigui multiplicada per una o altra constant no altera els resultats que volem utilitzar.

Definició 2.13. Donada una corba $\mathcal{C}$, un divisor de $\mathcal{C}$ és una suma formal $D = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P P$ amb $n_p \in \mathbb{Z}$ tots nuls tret d'un nombre finit. El grau d'un divisor és la suma dels seus coeficients, $\deg(D) = \sum_{P\in\mathcal{C}} n_P$. Direm que un divisor és efectiu si $n_P \geq 0$ per a tot P, i escriurem $\sum n_P P \succ \sum m_P P$ si $n_P \geq m_P$ per a cada P.

Donades dues corbes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ de manera que l'una no sigui una component de l'altra es pot definir, de manera general, el divisor de $\mathcal{C}_2$ sobre $\mathcal{C}_1$ com la suma dels ordres de $\mathcal{C}_2$ sobre els punts de $\mathcal{C}_1$.

Definició 2.14. Suposem que $\mathcal{C}_1$ és una corba plana de grau m i $\mathcal{C}_2$ una corba de grau n que no es troba continguda en $\mathcal{C}_1$. Definim el divisor de $\mathcal{C}_1$, $\mathrm{div}(\mathcal{C}_1)$, com $\sum_{P\in\mathcal{C}_2} \mathrm{ord}_P(\mathcal{C}_1)P$.

Observació: $\deg(\mathrm{div}(\mathcal{C}_1)) = \sum_{P\in\mathcal{C}_2} \mathrm{ord}_P(\mathcal{C}_1) = \sum_{P\in\mathcal{C}_2} I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$. El teorema de Bézout ens diu aleshores que $\mathrm{div}(\mathcal{C})$ és un divisor de grau mn, el producte dels graus d'ambdues corbes. Així, en el cas en que la corba $\mathcal{Q}$ sigui una recta, aquest resultat duu a $\mathrm{div}(\mathcal{C}) = m$, precissament el grau de la corba $\mathcal{C}$.

Exemple: Sigui $\mathcal{Q}$ una cònica no degenerada, i sigui L una recta que talla la cònica en dos punts diferents. Un exemple de divisor de $\mathcal{Q}$ consisteix en assignar als punts de

$L \cap \mathcal{Q} = \{P_1, P_2\}$ el coeficient 1, i a la resta zero: $D = P_1 + P_2 = I_{P_1}(L \cap \mathcal{Q})P_1 + I_{P_2}(L \cap \mathcal{Q})P_2$. En altres paraules, hom pot usar un divisor per descriure com una recta talla a una corba o, més generalment, com es tallen dues corbes (satisfent-se, clar, el teorema de Bézout).

Considerem ara el cos de funcions racionals sobre la corba $\mathcal{C}$, $k(\mathcal{C})$, i definim el concepte de divisor d'un element $z \in k(\mathcal{C})$. Això ens proporcionarà una eina per comparar dos divisors diferents i establir-ne una relació d'equivalència. Un cop finalitzada aquesta tasca ja tindrem els elements que ens calen per definir els espais $L(D)$.

Definició 2.15. Per a tot $z \in k(\mathcal{C})$ no nul, el divisor de z és $\mathrm{div}(z) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(z)P$. Com que z té només un nombre finit de zeros i de pols (definició 2.4 i següents), aquest divisor es troba ben definit.

Si hom considera $(z)_0 = \sum_{\mathrm{ord}_{P(z)>0}} \mathrm{ord}_P(z)P$ i $(z)_\infty = \sum_{\mathrm{ord}_{P(z)<0}} -\mathrm{ord}_P(z)P$, el divisor dels zeros de z i el divisor dels pols de z, respectivament, aleshores es té $\mathrm{div}(z) = (z)_0 - (z)_\infty$ (el lector amb coneixements de funcions holomorfes pot trobar familiar aquest resultat). Observem que

$$\mathrm{div}(zz') = \mathrm{div}(z) + \mathrm{div}(z'), \text{ i } \mathrm{div}(z^{-1}) = -\mathrm{div}(z).$$

Proposició 2.3.1. Per a tot $z \in k(\mathcal{C})$, $\mathrm{div}(z)$ és un divisor de grau zero. Una funció racional té el mateix nombre de zeros i de pols, sempre i quan es comptin de manera adequada, això és, tenint-ne en compte els respectius ordres.

Demostració: Prenem una corba $\mathcal{C}$ de grau n. Sigui $z = \frac{g}{h}$ amb $g,\ h \in \Gamma_h(\mathcal{C})$ dues formes del mateix grau. Aleshores g i h són classes residuals de formes G i H de grau m en $k[X, Y, Z]$. Segons la definició de divisors i, en aplicació del teorema de Bézout, hom té

$$\mathrm{div}(G) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(G)P = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(H)P = \mathrm{div}(H).$$

D'aquesta manera, es té $\mathrm{div}(z) = \mathrm{div}(G) - \mathrm{div}(H) = 0$; i com que $\mathrm{div}(z) = (z)_0 - (z)_\infty$, es dedueix finalment que z té el mateix nombre de zeros i de pols. □

Exemple: Fem $k = \mathbb{C}$. La funció $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$ té dos zeros (1 i -1) i, a priori, un sol pol, el zero; però aquést es tracta d'un pol d'ordre 2, ja que el primer terme no nul de la seva sèrie de Laurent és b_{-2}. D'aquesta manera, es considera que aquest pol "compta dos cops" i, per tant, la funció té tants pols com zeros. Aquest exemple il.lustra que el concepte de divisor, definit de manera general en el context d'un cos qualsevol, és coherent amb els aspectes de la teoria de funcions holomorfes en el cas $k = \mathbb{C}$. Els raonaments i les notacions emprats en aquest exemple són els utilitzats a [10].

Corol.lari 2.3.2. Sigui z una funció racional no nula, aleshores són equivalents les proposicions següents:

(i) $\operatorname{div}(z) \succ 0$.

(ii) $z \in k$.

(iii) $\operatorname{div}(z) = 0$.

Demostració: [(i) $\Rightarrow$ (ii)]: Si $\operatorname{div}(z) \succ 0$, aleshores existex un $P_0 \in \mathcal{C}$ tal que $z \in \mathcal{O}_{P_0}(\mathcal{C})$. Sigui doncs $\lambda \in k$ tal que $z(P_0) = \lambda$. Aleshores, $\operatorname{div}(z-\lambda) \succ 0$ i $\deg(\operatorname{div}(z-\lambda)) > 0$, però $z-\lambda$ és racional, de manera que la proposició prohibeix aquest fet tret de que $z - \lambda = 0 \Rightarrow z = \lambda \in k$.

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)]: Si z és constant i no nul.la (per hipòtesi), aleshores no té ni zeros ni pols i per tant

$$\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(z)_0 - \operatorname{div}(z)_\infty = 0 - 0 = 0,$$

tal i com volíem demostrar.

[(iii) $\Rightarrow$ (i)]: Si $\operatorname{div}(z) = 0$, aleshores $\operatorname{ord}_P(z) = 0$, $\forall P \in \mathcal{C}$, de manera que, en efecte, $\operatorname{div}(z) \succ 0$. $\square$

Corol.lari 2.3.3. Siguin z i z' dues funcions racionals sobre la corba $\mathcal{C}$, totes dues no nules, aleshores $\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(z')$ si, i només si, $z' = \lambda z$ per a un cert $\lambda \in k$.

Demostració: [$\Rightarrow$]: Suposem z i z' dues funcions racionals no nul.les sobre la corba $\mathcal{C}$. Si $\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(z')$, aleshores $\operatorname{div}(z) - \operatorname{div}(z') = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(z) + \operatorname{div}(z'^{-1}) = \operatorname{div}(zz'^{-1}) = 0$. Per tant, en virtud del corol.lari anterior, $zz'^{-1} = \lambda$, per a $\lambda \in k$ no nul i, aleshores, $z = \lambda z'$.

[$\Leftarrow$]: Si $z = \lambda z'$ per a una certa constant λ; aleshores z i z' tenen els mateixos zeros i els mateixos pols, i així, $\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(z)_0 - \operatorname{div}(z)_\infty = \operatorname{div}(z')_0 - \operatorname{div}(z')_\infty = \operatorname{div}(z')$. $\square$

Com que el divisor d'una funció racional sobre la corba $\mathcal{C}$ sempre té grau zero, podem fer servir aquesta propietat per definir una relació d'equivalència entre divisors.

Definició 2.16. Direm que dos divisors D i D' són linealment equivalents si $D' = D + \operatorname{div}(z)$ per a un cert $z \in k(\mathcal{C})$, i escriurem $D \equiv D'$.

Proposició 2.3.4. (i) La relació $\equiv$ és d'equivalència.

(ii) $D \equiv 0$ si, i només sí, $D = \operatorname{div}(z)$, $z \in k(\mathcal{C})$.

(iii) Si $D \equiv D'$ aleshores $\deg(D) = \deg(D')$.

(iv) Si $D \equiv D'$ i $D_1 \equiv D'_1$, aleshores $D + D_1 = D' + D'_1$.

(v) Sigui $\mathcal{C}$ una corba plana, aleshores $D_1 \equiv D_2$ si, i només si, existeixen dues corbes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ del mateix grau tals que $D_1 + \operatorname{div}(\mathcal{C}_1) = D_2 + \operatorname{div}(\mathcal{C}_2)$.

Definit el concepte de divisor, hom es pregunta si, donada una corba $\mathcal{C}$ que conté punts $x_1, \ldots, x_r$ amb multiplicitats respectives $m_1, \ldots, m_r$; existeixen funcions $z \in k(\mathcal{C})$ de manera que z tingui els seus pols a $x_1, \ldots, x_r$ i, a més, siguin tots ells d'ordre no superior a la multiplicitat de cadascun com a punt de la corba. Si la resposta és afirmativa, ¿quants n'hi ha i quina és l'estructura del conjunt que formen?

Definició 2.17. Designarem per $L(D)$ al conjunt $\{f \in k(\mathcal{C}) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P \ \forall P \in \mathcal{C}\}$, on D és un divisor.

Una funció racional f pertany a $L(D)$ si $\mathrm{div}(f) + D \succ 0$, o bé si $f = 0$; de manera que podem definir $L(D)$ alternativament com l'espai de les funcions que satisfan aquesta mateixa propietat: $L(D) := \{f \in k(\mathcal{C}) \mid D + \mathrm{div}(f) \succ 0\}$. $L(D)$ és un k-espai vectorial, i designarem per $l(D)$ a la seva dimensió. La següent proposició mostra que $l(D)$ és finit.

Proposició 2.3.5. Sigui $\mathcal{C}$ una corba plana. Els divisors sobre la corba tenen les propietats següents:

(i) Si $D \prec D'$, aleshores $L(D) \subset L(D')$ i $\dim_k(L(D')/L(D)) \leq \deg(D' - D)$.

(ii) $L(0) = k$, $L(D) = 0$ si $\deg(D) < 0$.

(iii) $L(D)$ és de dimensió finita per a tot D. Si $\deg(D) \geq 0$, aleshores $l(D) \leq \deg(D) + 1$.

(iv) Si $D \equiv D'$, aleshores $l(D) = l(D')$.

Demostració: (iii): Si $\deg(D) = n \geq 0$, triem $P \in \mathcal{C}$, i considerem $D' = D - (n+1)P$. Aleshores, $L(D') = 0$, ja que $\deg(D') < 0$ (ii), i per (i), $\dim(L(D)/L(D')) \leq n + 1$, per tant $l(D) \leq n + 1$.

(iv): Suposem que $D' = D + \mathrm{div}(g)$. Definim $\psi : L(D) \to L(D')$ com $\psi(f) = fg$, que és un isomorfisme d'espais vectorials. Aleshores, $l(D) = l(D')$. $\square$

La prova dels altres dos apartats es pot seguir a [1], capítol 8, apartat 2.

Sobre $l(D)$ ja sabem que és finit i que està afitat en funció del grau de D, però ens agaradaria tenir una idea el més exacta possible de quant val. La següent proposició n'és un primer pas.

Proposició 2.3.6. Sigui $x \in k(\mathcal{C})$, x no constant. Sigui $(x)_0$ el divisor dels zeros de x, i sigui $n = [k(\mathcal{C}) : k(x)]$. Aleshores

(i) $(x)_0$ és un divisor efectiu de grau n.

(ii) Existeix una constant τ tal que $l(r(x)_0) \geq rn - \tau$, per a tot r.

Definició 2.18. Direm que la corba $\mathcal{C}$ és racional si $k(\mathcal{C})$ és una extensió racional de $k(x)$ (veure [6] per a més detalls).

Corol.lari 2.3.7. Les següents proposicions són equivalents:

(i) Existeix un $x \in k(\mathcal{C})$ tal que $\deg(x)_0 = 1$.

(ii) Per algun $P \in \mathcal{C}$, es té $l(P) > 1$.

(iii) $\mathcal{C}$ és racional.

Demostració: [(i) $\Rightarrow$ (ii)]: Sigui $x \in k(\mathcal{C})$ tal que $\deg(x)_0 = 1$. Aleshores, com que $\deg(x)_0 = \deg(x)_\infty$, existeix $P \in \mathcal{C}$ tal que x té un pol a P. Si això és així, x ha de ser una funció no constant, de manera que el subespai generat per x i les funcions constants es troba contingut dins de $L(P)$, la qual cosa implica $l(P) > 1$.

[(ii) $\Rightarrow$ (i)]: Si $l(P) > 1$, aleshores $L(P)$ conté funcions no constants. Sigui x tal que $(x)_\infty = P$. Aleshores, com que les funcions racionals tenen igual nombre de pols i de zeros, $\deg(x)_\infty = \deg(x)_0 = 1$.

[(ii) $\Rightarrow$ (iii)]: Si $l(P) > 1$ i, per tant, existeix x tal que $\deg(x)_0 = 1$, per la proposició 2.3.6 es té que la dimensió de $k(\mathcal{C})$ com a extensió de $k(x)$ és 1, de manera que es tracta d'una extensió racional i, per tant, $\mathcal{C}$ és racional.

[(iii) $\Rightarrow$ (i)]: Del fet que $\mathcal{C}$ sigui racional, se'n segueix immediatament de la proposició 2.3.6 que existeix x amb $\deg(x)_0 = 1$. $\square$

Afegim uns resultats sobre espais $L(D)$ i divisors que ens seran d'utilitat al final d'aquest capítol.

Proposició 2.3.8. Sigui D un divisor, $l(D) > 0$ si, i només si, D és linealment equivalent a un divisor efectiu.

Demostració: [$\Rightarrow$]: Si $l(D) > 0$, aleshores $L(D)$ conté elements no trivials. Observem que si $D = \sum n_P P$ és equivalent a un divisor efectiu, D', vol dir que $D = D' + \mathrm{div}(z)$ per a $z \in k(\mathcal{C})$ i, per tant, $\deg(D) = \deg(D') + \deg(\mathrm{div}(z))$. Com que D' és efectiu, $\deg(D') \geq 0$ i, com que $z \in k(\mathcal{C})$, 2.3.1 ens diu que $\deg(\mathrm{div}(z)) = 0$. Així, si provem que $\deg(D) \geq 0$, ja haurem acabat. Ara bé, $L(D) = \{f \in k(\mathcal{C}) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_p\}$, sigui doncs $f \in L(D)$ no nul.la, es té $-\mathrm{ord}_P(f) \leq n_P$ per a cada P. Així,

$$\deg(D) = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P \geq \sum_{P \in \mathcal{C}} -\mathrm{ord}_P(f) = -\deg(\mathrm{div}(f)),$$

i el divisor d'una funció racional sempre té grau zero, de manera que $\deg(D) \geq 0$, tal i com volíem provar.

[$\Leftarrow$]: Si $D = D' + \mathrm{div}(z)$, D' efectiu i $z \in k(\mathcal{C})$, aleshores $\deg(D) \geq 0$. Si és així, $D = \sum n_P P$, amb $n_P \geq 0$ per a algun P. Per tant, $L(D)$ conté com a mínim les constants $\lambda \in k$, car satisfan $\mathrm{ord}_P(\lambda) = 0$. Aleshores, $l(D) > 0$, com volíem. □

Proposició 2.3.9. Suposem $l(D) > 0$ i sigui $f \neq 0$, $f \in L(D)$. Aleshores, $f \notin L(D - P)$ per a tot P tret d'un nombre finit.

Demostració: Sigui $f \in L(D)$, $f \neq 0$. Triem f tal que $\mathrm{ord}_Q(f) = n_Q$ per a tot Q, de manera que $D = \sum \mathrm{ord}_Q(f)Q$. Aleshores, $D - P = \sum_{Q \neq P} ord_Q(f)Q + (ord_P(f) - 1)P$. Si P no és un zero de f, posem $m_P := \mathrm{ord}_P(f) - 1$, llavors $m_P \leq -1$ i $\mathrm{ord}_P(f) \leq 0$, de manera que $f \notin \{z \in k(\mathcal{C}) \mid \mathrm{ord}_{Q \neq P}(z) \geq -n_Q,\ \mathrm{ord}_P(z) \geq -m_P \geq 1\} = L(D - P)$ en aquest cas. I, com que f només té un nombre finit de zeros, $f \in L(D - P)$ només per a una quantitat finita de punts P, tal i com volíem demostrar. □

Corol.lari 2.3.10. $l(D - P) = l(D) - 1$ per a tot P tret de per a un nombre finit.

Demostració: Suposem P en les condicions de la proposició tals que $f \notin L(D - P)$. En aquest cas, $L(D) = L(D - P) \oplus \langle f \rangle$ i, per tant, $l(D - P) = l(D) - 1$. Els casos en els quals això no succeeix són els casos en que P és un zero de f, que només en són un nombre finit. □

Proposició 2.3.11. Si $D \prec D'$, aleshores $l(D') - \deg(D') \geq l(D) - \deg(D)$.

Demostració: Com que $D \prec D'$, podem escriure $D = D' - \mathrm{ord}_{P_1}(f)P_1 - \cdots - \mathrm{ord}_{P_r}(f)P_r$, per a una certa $f \in L(D')$ tal que $\mathrm{ord}_{P_i}(f) \geq 1$ per a tot $1 \leq i \leq r$. Així, $\deg(D) \geq \deg(D') - r \Rightarrow r \geq \deg(D') - \deg(D)$. Podem suposar, addicionalment, que cap dels P_i és un zero de f, de manera que el corol.lari anterior garanteix que $l(D) = l(D') - r \leq l(D') - \deg(D') + \deg(D)$, i aleshores, $l(D') - \deg(D') \geq l(D) - \deg(D)$, tal i com volíem provar. □

2.4 El teorema fonamental de Max Noether

Segurament, el resultat més important a banda del teorema de Riemann-Roch que podem demostrar amb la teoria de divisors és el teorema fonamental de Max Noether. Estem especialment interessats en fer-ho perquè constitueix un pas crucial en la construcció que farem al capítol 3 per escriure l'equació d'una quàrtica plana no-singular.

Definició 2.19. Donades dues corbes planes $\mathcal{C}_1 = V(F)$ i $\mathcal{C}_2 = V(G)$, definim

$$F \cdot G := \sum_{P \in \mathbb{P}^2_k} I_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$$

com el divisor de la intersecció de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$.

El teorema fonamental de Max Noether s'ocupa del problema de, donades tres corbes $V(F)$, $V(G)$, $V(H)$ tals que $H \cdot F \succ G \cdot F$, quan existeix una corba $\mathcal{K} = V(B)$ tal que $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$. Observem que, necessàriament, $\deg(B) = \deg(H) - \deg(G)$.

Si apliquem les propietats del nombre d'intersecció, observarem que per trobar $\mathcal{K}$, n'hi haurà prou de buscar formes A i B tals que $H = AF + BG$, car aleshores hom tindrà $H \cdot F = BG \cdot F = B \cdot F + G \cdot F$.

Definició 2.20. Sigui $P \in \mathbb{P}^2_k$, i siguin $\mathcal{C}_1 = V(F)$ i $\mathcal{C}_2 = V(G)$ corbes planes sense components comunes que passin per P, i sigui $\mathcal{C}_3 = V(H)$ una altra corba. Direm que se satisfan les condicions de Noether respecte de F, G i H en el punt P si $H_* \in (F_*, G_*) \subset \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2_k)$.

Teorema 2.4.1 (fonamental de Max Noether)**.** Siguin $V(F)$, $V(G)$, $V(H)$ corbes projectives planes, amb F i G sense components comunes. Existeix una equació $H = AF + BG$ si, i només si, les condicions de Noether se satisfan en cada punt $P \in V(F) \cap V(G)$.

Demostració: És clar que si $H = AF + BG$, aleshores $H_* = A_*F_* + B_*G_*$ en tot P; de manera que només ens cal provar el recíproc. Suposem, com en la demostració del teorema de Bézout, que $V(F, G, H) = \emptyset$. Podem escriure $F_* = F(X, Y, 1)$, $G_* = G(X, Y, 1)$ i $H_* = H(X, Y, 1)$. Les condicions de Noether expressen que la classe residual de H_* en $\mathcal{O}_P/(F_*, G_*)$ és zero en tot $P \in V(F) \cap V(G)$. Això prova, en particular, que aquesta classe és zero en $k[X, Y]/(F_*, G_*)$ (veure secció 2.1), és a dir, $H_* = aF_* + bG_*$ per a certs $a, b \in k[X, Y]$. Aleshores, $Z^r H = AF + BG$ per a certs A, B, r. Però en el segon pas de la demostració del teorema de Bézout hem vist que la multiplicació per Z és una aplicació un a un en $k[X, Y, Z]/(F, G)$, de manera que $H = A'F + B'G$ per a certs A', B'. Si $A' = \sum A'_i$ i $B' = \sum B'_i$, amb A'_i i B'_i formes de grau i, aleshores $H = A'_s F + B'_t G$, on $s = \deg(H) - \deg(F)$ i $t = \deg(H) - \deg(G)$. $\square$

Evidentment, la utilitat del teorema depèn de disposar d'un criteri que permeti verificar les condicions de Noether. Aquesta proposició ([1], secció 5.5) en dóna condicions suficients:

Proposició 2.4.2. Amb les notacions del teorema, les condicions de Noether se satisfan en P si succeeix alguna de les tres següents:

1. $V(F)$ i $V(G)$ es tallen transversalment en P, i $P \in V(H)$.

2. P és un punt simple de $V(F)$ i $I_P(H \cap F) \geq I_P(G \cap F)$.

3. $V(F)$ i $V(G)$ tenen tangents diferents a P, i $m_P(H) \geq m_P(F) + m_P(G) - 1$.

El teorema fonamental de Max Noether porta a molts resultats destacats, com ara els teoremes de Pascal i de Pappus (veure [3]) o l'importat fet de que es pot definir una estructura de grup sobre els punts d'una cúbica no-singular.

2.5 El gènere i el teorema de Riemann-Roch

Dedicarem aquesta darrera secció del capítol 3 a demostrar el teorema de Riemann, tot introduïnt el gènere d'una corba (plana), i la seva versió més forta, el teorema de Riemann-Roch; un cop haurem definit el que anomenarem divisors canònics. Els continguts d'aquesta secció prenen com a referència les darreres seccions del capítol 8 de [1], malgrat que aquí es prescindeix de tota la notació referent al model no-singular de la corba $\mathcal{C}$ (i que allà es denota per X). Se suposen coneguts els aspectes algebraics referents a derivacions i diferencials, que poden ésser consultats en la secció 3 del capítol 7 de [9]; i també es requereixen nocions de la teoria de funcions analítiques, per a les quals es recomana la consulta de [10]. Començarem demostrant el teorema de Riemann, resultat que fa ús de les eines estudiades a les seccions anteriors i que donarà, al mateix temps, la definició de gènere d'una corba plana.

Teorema 2.5.1 (Riemann). Donada una corba $\mathcal{C}$, existeix una costant $g \geq 0$ tal que $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ per a tots els divisors D. El menor d'aquests g s'anomena el gènere de la corba $\mathcal{C}$.

Demostració: Posem $S(D) := \deg(D) + 1 - l(D)$. Volem trobar g tal que $S(D) \leq g$ per a tot D. Observem el següent:

(1). $S(0) = 0$, per tant, si existeix, $g \geq 0$.

(2). Si $D \equiv D'$, aleshores $S(D) = S(D')$, ja que $l(D) = l(D')$.

(3). Si $D \prec D'$, aleshores $S(D) \leq S(D')$.

Sigui $x \in k(\mathcal{C})$ no constant i posem $Z := (x)_0$, aleshores sigui τ el menor enter que verifica la proposició 2.3.6. Com que $S(rZ) \leq \tau + 1$ per a tot r, i com que $rZ \prec (r+1)Z$, deduïm de (3) que:

(4). $S(rZ) = \tau + 1$ per a tot $r > 0$ prou gran.

Sigui $g = \tau + 1$. Acabarem la demostració si provem (usant (2) i (3)) que:

(5). Per a tot divisor D, existeix un divisor $D' \equiv D$, i un enter $r \geq 0$ tals que $D' \prec rZ$.

Per veure-ho, sigui $Z = \sum n_P P$ i $D = \sum m_P P$. Volem que $D' = D - \operatorname{div}(f)$, per tant ens cal que $m_P - \operatorname{ord}_P(f) \leq r n_P$ per a tot P. Sigui $T := \{P \in \mathcal{C} \mid m_P > 0 \text{ i } \operatorname{ord}_P(y) \geq 0\}$ amb $y = x^{-1}$. Sigui $f = \prod_{P \in T}(y - y(P))^{m_P}$. Aleshores $m_P - \operatorname{ord}_P(f) \leq 0$ sempre que $\operatorname{ord}_P(y) \geq 0$. Si $\operatorname{ord}_P(y) < 0$ aleshores $n_P > 0$, per tant, un r gran farà que se satisfaci (5). □

Corol.lari 2.5.2. (i) Si $l(D_0) = \deg(D_0) + 1 - g$ i $D \equiv D' \succ D_0$, aleshores $l(D) = \deg(D) + 1 - g$.

(ii) Si $x \in k(\mathcal{C})$ no constant, aleshores $g = \deg((x)_0) - l(r(x)_0) + 1$ per a tot r prou gran.

(iii) Existeix un enter N tal que per a tot divisor D de grau més gran que N, $l(D) = \deg(D) + 1 - g$.

El teorema de Riemann ens diu quelcom si som capaços de calcular el gènere g d'una corba. El següent resultat ens diu com calcular-lo i, tot i que a nosaltres només ens cal el cas d'una corba plana amb singularitats ordinàries, és prou general si s'aplica al model no-singular d'una corba qualsevol.

Proposició 2.5.3. Sigui $\mathcal{C}$ una corba plana de grau n que només té punts múltiples ordinaris. Sigui $r_P = m_P(\mathcal{C})$. Aleshores, el gènere de $\mathcal{C}$ ve donat per la fórmula

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in \mathcal{C}} \frac{r_P(r_P - 1)}{2}.$$

Tres corol.laris importants s'obtenen d'aquesta proposició. Per a un d'ells cal primer definir el concepte de corba adjunta, la qual cosa ens porta a enunciar el teorema del Residu.

Definició 2.21. Sigui $\mathcal{C} = V(F)$ una corba plana que només té punts múltiples ordinaris. Per a cada $Q \in \mathcal{C}$, posem $r_Q := m_{f(Q)}(\mathcal{C})$. Definim el divisor $E := \sum(r_Q - 1)Q$, que és un divisor efectiu de grau $\sum r_Q(r_Q - 1)$. Tota corba plana $\mathcal{G} = V(G)$ tal que $\operatorname{div}(\mathcal{G}) \succ E$ s'anomena adjunta de $\mathcal{C}$; i la forma G s'anomena forma adjunta de F.

Proposició 2.5.4. Una corba $\mathcal{C}'$ és adjunta de $\mathcal{C}$ si, i només si, $m_P(\mathcal{C}') \geq m_P(\mathcal{C}) - 1$ per a cada $P \in \mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ és no-singular, aleshores tota corba n'és una adjunta.

Teorema 2.5.5 (del Residu)**.** Siguin $\mathcal{C}$ i E com en la definició anterior. Suposem que D i D' són dos divisors efectius i linealment equivalents de $\mathcal{C}$. Suposem que $\mathcal{C}'$ és una adjunta de grau m tal que $\operatorname{div}(\mathcal{C}') = D + E + A$, per a un cert divisor efectiu A. Aleshores, existeix una adjunta $\mathcal{C}''$ de grau m tal que $\operatorname{div}(\mathcal{C}'') = D' + E + A$.

Ja podem tornar als corol.laris de la proposició 2.5.3:

Corol.lari 2.5.6. (i) Sigui $\mathcal{C}$ una corba plana de grau n, $r_P = m_P(\mathcal{C})$, $P \in \mathcal{C}$. Aleshores

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in \mathcal{C}} \frac{r_P(r_P - 1)}{2} \geq g.$$

(ii) Si els dos termes de l'esquerra coincideixen, aleshores $\mathcal{C}$ és racional.

(iii) (a) Sigui $E_m = m \sum_{i=1}^{n} (P_i - E)$, E com en la definició de corba adjunta. Aleshores, tota funció $h \in L(E_m)$ es pot escriure com $h = H/Z^m$, on H és una forma adjunta de grau m.

(b) $\deg(E_{n-3}) 2g - 2$, $l(E_{n-3}) \geq g$.

I encara un altre corol.lari que atèn als nostres propòsits en aquest treball.

Corol.lari 2.5.7. Les corbes quàrtiques no-singulars tenen gènere 3.

Demostració: N'hi ha prou d'aplicar la fórmula amb $n = 4$ i $r_P = 1$:

$$g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - \sum_{P \in \mathcal{C}} \frac{r_P(r_P - 1)}{2}.$$

El sumatori sempre serà zero, ja que $r_P(r_P - 1) = 0$, de manera que $g = 3$. $\square$

Tot seguit començarem a parlar de divisors canònics per poder enunciar el teorema de Riemann-Roch. Per aquesta part, s'emprarà el llenguatge algebraic per derivades i diferencials: sigui $\mathcal{C}$ una corba plana, considerem $\Omega := \Omega_k(k(\mathcal{C}))$ l'espai de les diferencials de $k(\mathcal{C})$ sobre k, que també podem anomenar espai de les diferencials en $\mathcal{C}$.

Definició 2.22. Sigui $\omega \in \Omega$, $\omega \neq 0$, i $P \in \mathcal{C}$ un punt. Considerem $f \in k(\mathcal{C})$ i t un paràmetre d'uniformització de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ de manera que $\omega = f dt$. Aleshores, definim l'ordre d'ω com $\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(f)$. Aquesta definició no depèn de l'elecció del paràmetre d'uniformització t.

Definició 2.23. Si $0 \neq \omega$, es defineix $W := \mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(\omega) P$. W s'anomena el divisor canònic.

Si ω' és una altra diferencial no nul.la, aleshores $\omega = f\omega'$, per a $f \in k(\mathcal{C})$, i per tant $\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(\omega') + \mathrm{div}(f)$, de manera que $W \equiv W'$. Recíprocament, si $W \equiv W'$, aleshores es prèn $f \in k(\mathcal{C})$ de manera que $\mathrm{div}(W') = \mathrm{div}(W) + \mathrm{div}(f)$, i aleshores $W' = \mathrm{div}(f\omega)$. Per tant, els divisors canònics formen una classe d'equivalència respcete de l'equivalència lineal de divisors. En particular, tots els divisors canònics tenen el mateix grau. Vegem una proposició que ens diu com construïr un divisor canònic d'una corba donada que no tingui punts múltiples no-ordinaris.

Proposició 2.5.8. Sigui $\mathcal{C}$ una corba plana de grau $n \geq 3$ que només tingui punts múltiples ordinaris. Posem $r_Q = \mathrm{ord}_Q(\mathcal{C})$ i considerem $E := \sum_{Q \in \mathcal{C}} (r_Q - 1)Q$. Sigui G una corba plana de grau $n - 3$. Aleshores $\mathrm{div}(G) - E$ és un divisor canònic (si $n = 3$, $\mathrm{div}(g) = 0$).

Demostració: Triem coordenades homogènies $(X : Y : Z)$ a $\mathbb{P}^2_k$ de manera que

$$Z \cdot \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} P_i,$$

P_i diferents; $(1 : 0 : 0) \notin \mathcal{C}$; i que cap tangent a $\mathcal{C}$ per un punt múltiple passi per $(1 : 0 : 0)$. Deshomogeneïtzem i considerem F tal que $\mathcal{C} = V(F)$, amb $f_x = F_X(x, y, 1)$ i $f_y = F_Y(x, y, 1)$.

Sigui $E_m := m\sum_{i=1}^{n} P_i - E$. Considerem $\omega = dx$. Com que els divisors de la forma $\mathrm{div}(G) - E$, $\deg(G) = n-3$ són linealment equivalents, n'hi haurà prou de provar que $\mathrm{div}(\omega) = E_{n-3} + \mathrm{div}(f_y)$, i com que $f_y = F_Y/Z^{n-1}$, és el mateix que provar

$$\mathrm{div}(dx) - \mathrm{div}(F_Y) = -2\sum_{i=1}^{n} P_i - E. \text{ (*)}$$

Observem en primer lloc que $dx = -(f_x/f_y)dy = -(F_X/F_Y)dy$, per tant $\mathrm{ord}_Q(dx) - \mathrm{ord}_Q(F_Y) = \mathrm{ord}_Q(dy) - \mathrm{ord}_Q(F_X)$ per a tot $Q \in \mathcal{C}$. Suposem que $Q = P_i \in Z \cap \mathcal{C}$. Aleshores, $y^{-1} := Z/Y$ és un paràmetre d'uniformització de $\mathcal{O}_Q(\mathcal{C})$, i $dy = -y^2 d(y^{-1})$, de manera que $\mathrm{ord}_Q(dy) = -2$. Com que $F_X(Q) \neq 0$ (car $m_Q(\mathcal{C}) = 1$ i, per hipòtesi, no hi passa cap tangent que contingui $(1:0:0)$), els dos membres de (*) tenen tots dos ordre -2 en Q.

Suposem ara que $Q = P = (a:b:1) \in \mathcal{C}$. Podem suposar $P = (0:0:1)$, ja que $dx = d(x-a)$ i les derivades són invariants per traslació. Considerem el cas en que Y és tangent a $\mathcal{C}$ en P. Aleshores, per hipòtesi, P no és un punt múltiple i x és un paràmetre d'uniformització. A més, $F_Y(P) \neq 0$, i $\mathrm{ord}_Q(dx) = \mathrm{ord}_Q(F_Y) = 0$, com volíem.

Si Y no és tangent, aleshores y és un paràmetre d'uniformització en Q, per tant $\mathrm{ord}_Q(dy) = 0$ i $\mathrm{ord}_Q(f_x) = r_Q^{-1}$, tal i com volíem demostrar. □

Corol.lari 2.5.9. Sigui W un divisor canònic. Aleshores, $l(W) = 2g-2$ i $l(W) \geq g$.

Només ens manca un ingredient per a demostrar el teorema de Riemann-Roch, l'anomenat lema de Reducció de Noether.

Lema 2.5.10 (de Reducció de Noether)**.** Sigui D un divisor d'una corba plana $\mathcal{C}$, $P \in \mathcal{C}$ i W el divisor canònic. Si $l(D) > 0$ i $l(W-D-P) \neq l(W-D)$, aleshores $l(D+P) = l(D)$.

Demostració: Triem $\mathcal{C}$ només amb punts múltiples ordinaris, i tal que P sigui un punt simple de $\mathcal{C}$. Com en la demostració de la darrera proposició, $Z \cdot \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} P_i$, P_i diferents. Sigui $E_m := m\sum P_i - E$. Els termes de l'enunciat del lema depenen només de les classes d'equivalència lineal dels divisors implicats, per tant hom pot suposar $W = E_{n-3}$, i $D \succ 0$ (proposicions 2.3.8 i 2.5.8). Així, $L(W-D) \subset L(E_{n-3})$. Sigui $h \in L(W-D)$, $h \notin L(W-D-P)$. Aplicant el tercer apartat del corol.lari 2.5.6, escrivim $h = G/Z^{n-3}$, essent G un adjunt de grau $n-3$. Ara, $\mathrm{div}(G) = D + E + A$, amb $A \succ 0$ però $A \not\succ P$. Prenguem una recta L tal que $L \cdot \mathcal{C} = P + B$, on B consta de $n-1$ punts simples de $\mathcal{C}$, tots diferents de P. Així, $\mathrm{div}(LG) = (D+P) + E + (A+B)$.

Sigui ara $f \in L(D+P)$, i sigui $\mathrm{div}(f) + D =: D'$. Hem de veure que $f \in L(D)$, de manera que $D' \succ 0$. Com que $D + P \equiv D' + P$, i tots dos són divisors efectius, apliquem el teorema del residu, de manera que existeix una corba H de grau $n-2$ amb

$\operatorname{div}(H) = (D' + P) + E + (A + B)$. Però B conté $n-1$ punts diferents alineats, i H és una corba de grau $n-2$, per tant, el teorema de Bézout diu que H ha de contenir L com a component. En particular, $H(P) = 0$. Com que P no es troba en $E + A + B$, es té que $D' + P \succ P$ o bé $D' \succ 0$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Ja podem enunciar el teorema de Riemann-Roch. Aquést millora el teorema de Riemann proporcionant el terme que falta a la desigualtat per tal de fer-la igualtat, en el qual hi intervé un divisor canònic de la corba.

Teorema 2.5.11 (Riemann-Roch). Sigui W un divisor canònic de $\mathcal{C}$. Aleshores, per a tot divisor D,

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D).$$

Demostració: Distingim dos casos: $l(W - D) = 0$ i $L(W - D) > 0$.

Cas 1: Com que $g \leq L(W)$ per 2.5.9 i $l(W) \leq l(W - D) + \deg(D)$ (proposició 2.3.11), tenim que en aquest cas, $\deg(D) \geq G$. Aplicant el teorema de Riemann, $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g \geq 1$, i si la igualtat d'aquest teorema fos falsa, seria $l(D) > 1$. Procedim ara per inducció sobre $l(D)$. Triem P tal que $l(D-P) = l(D) - 1$ (proposició 2.3.9 i corol.lari). Si la igualtat fos falsa, $L(D-P) > 0$, per tant el lema de Reducció de Noether implicaria que $l(W-(D-P)) = 0$. Aplicant la hipòtesi d'inducció a $D-P$, $l(D-P) = \deg(D-P)+1-g$, de manera que $L(D) = \deg(D) + 1 - g$, com volem.

Cas 2: $l(W - D) > 0$. Aquest cas només es pot donar si $\deg(D) \leq \deg(W) = 2g - 2$. Per tant, hom podria triar un D maximal per al qual la igualtat fos falsa; és a dir, $l(D + P) = \deg(D + P) + 1 - g + l(W - D - P)$ seria cert per a qualsevol P. Triem P tal que $l(W - D - P) = l(W - D) - 1$ (proposició 2.3.9 i corol.lari). Aplicant el lema de Reducció de Noether, $l(D + P) = l(D)$. Com que suposem la igualtat certa per a $D + P$, tenim $l(D) = l(D+P) = \deg(D+P)+1-g+l(W-D-P) = \deg(D)+1-g+l(W-D)$, com volíem demostrar. $\square$

Corol.lari 2.5.12. (i) $l(W) = g$ si W és un divisor canònic.

(ii) Si $\deg(D) \geq 2g - 1$, aleshores $l(D) = \deg(D) + 1 - g$.

(iii) Si $\deg(D) \geq 2g$, aleshores $l(D - P) = l(D) - 1$ per a tot $P \in \mathcal{C}$.

(iv) (Teorema de Clifford). Si $l(D) > 0$, i $l(W - D) > 0$, aleshores $l(D) < \frac{1}{2}\deg(D) + 1$.

Amb aquests resultats tanquem el capítol. En el proper farem ús de tot el llenguatge que hem definit fins ara per a dur a terme la construcció d'equacions per a quàrtiques no-singulars; tot i que el lector ha de prendre consciència de que les seves aplicacions van força més lluny d'aquest modest objectiu. Sigui'n un exemple l'avantatge que pot suposar des del punt de vista topològic tenir una manera purament algebraica de calcular el gènere d'una corba per tal de poder-lo interpretar després en el context de les superfícies topològiques: en el corol.lari 2.5.7 hem vist que les quàrtiques no-singulars tenen gènere 3, de manera que resulta raonable establir un criteri que associi una quàrtica no-singular amb una superfície que contingui tres forats i, ulteriorment, amb la característica d'Euler de la mateixa.

Capítol 3

Quàrtiques projectives planes

Disposem ja del llenguatje necessari per tal d'abordar la classificació de les quàrtiques projectives planes no-singulars. Dedicarem doncs aquest capítol a desenvolupar aquest assumpte i el procés ens portarà a conéixer nous conceptes de la geometria algebraica. Per a un correcte seguiment del mateix, s'assumeix que el lector té assimilats els conceptes de la geometria projectiva elemental, especialment allò que fa referència a dualitat. Diverses fonts proporcionen la teoria que aquí es comentarà, malgrat que el camí a seguir s'inspira en el guió que segueix [4].

3.1 Polars i dualitat

D'aquest punt en endavant considerarem que treballem en un cos de característica zero, particularment $\mathbb{C}$. Dels cursos de geometria projectiva hom recordarà el concepte de recta polar d'una cònica respecte d'un punt del pla projectiu. A grans trets, donat un punt P anomenat exterior a la cònica $\mathcal{Q}$, es construïa la recta polar de $\mathcal{Q}$ respecte de P com la recta $L_P = Q_1 \vee Q_2$, on Q_1 i Q_2 són els punts de contacte de sengles tangents a la cònica desde P. Aquesta construcció permetia identificar diversos aspectes de $\mathcal{Q}$, com ara el seu centre i, interpretant projectivament una mètrica sobre l'espai afí, l'anomenat focus. Tanmateix, quan hom es mirava aquestes rectes com a punts de l'espai projectiu dual, comprovava que les polars i els punts respecte dels quals es traçaven hi quedaven intercanviats, essent que si L és la polar de $\mathcal{Q}$ resecte del punt P, aleshores P' és la recta polar de $\mathcal{Q}'$ respecte de L'.

En aquesta secció generalitzarem el concepte de recta polar d'una cònica, que és una polar de grau 1 respecte d'una corba de grau 2, i passarem a parlar de la corba polar d'una corba plana. La finalitat d'aquest anàlisi és estudiar en quants punts talla una polar a la corba associada i quina informació podem extreure d'aquest fet. Això ho farem a través de la Primera Fórmula de Plücker, que aquí justificarem. Posteriorment estudiarem els conjunts de bitangents de la corba, ja que aquestes dónen una caracterització de les quàrtiques planes no-singulars que aprofitarem a la propera secció. Els conceptes exposats en aquesta secció es poden seguir i ampliar amb la consulta del primer capítol de [4].

Definició 3.1. Sigui $F \in k[X,Y,Z]$ una forma (irreductible) de grau $d \geq 2$ i considerem la corba $\mathcal{C} = V(F)$. Definim la (primera) corba polar de $\mathcal{C}$ respecte del punt $a \in \mathbb{P}^2_k$ com la corba $P_a(\mathcal{C}) = V(P_a)$, on P_a és una forma de grau $d-1$. Posem $a = (a_0 : a_1 : a_2)$ i definim P_a per

$$P_a = a_0 \frac{\partial F}{\partial X} + a_1 \frac{\partial F}{\partial Y} + a_2 \frac{\partial F}{\partial Z}.$$

Quan no hi hagi confusió, designarem a la corba polar per P_a simplement.

És directe a partir de la definició que la corba polar d'una corba respecte d'un punt és en efecte una corba algebraica, doncs el derivat d'una forma de grau $d \geq 2$ és una forma i, per tant, el conjunt de punts de $\mathbb{P}^2_k$ on s'anul.la és algebraic.

El lector familiaritzat amb els cursos de Geometria Projectiva recordarà que en ells s'hi parla de rectes polars. Notem que aquí hem matisat que estem definint la primera polar, el qual dóna la idea de que pot existir un concepte més general de corba polar. Aquest fet és cert i, sota aquesta definició (capítol 1 de [4]), la recta polar és la $(d-1)$-èssima polar, mentre que la corba polar que nosaltres hem definit és la primera (entesa com la corba polar d'ordre més gran possible). Tal i com succeïa amb les còniques, podem definir la recta polar d'una corba de grau d qualsevol respecte d'un punt del pla projectiu.

Definició 3.2. Donada una corba plana $\mathcal{C} = V(F)$ definim la recta polar de $\mathcal{C}$ respecte del punt $a \in \mathbb{P}^2_k$ com la recta

$$L_a(\mathcal{C}) = \frac{\partial F}{\partial X}(a)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(a)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(a)Z.$$

Quan no hi hagi confussió possible, denotarem simplement L_a.

Exemple:

(i). A $\mathbb{C}$, considerem la corba $\mathcal{C} = V(F)$ donada per $F = X^3 - Y^2Z$, que es tracta d'una cúbica. La polar de $\mathcal{C}$ respecte del punt $a = (1:1:1)$ és la corba $P_a = 3X^2 - 2YZ - Y^2$. P_a té grau 2.

(ii). La recta polar de $\mathcal{C}$ respecte del mateix punt és la recta $L_a = 3X - 2Y - Z$.

Vegem dues propietats que relacionen una corba amb la seva polar primera:

Proposició 3.1.1. Sigui $a \in \mathbb{P}^2_k$ i considerem una corba projectiva plana irreductible de grau d. Aleshores, la corba P_a i la corba $\mathcal{C}$ no tenen components comunes.

Demostració: Posem $\mathcal{C} = V(F)$ i $P_a = V(G)$. Provar que les dues corbes no tenen components comunes és equivalent a provar que les formes F i G no tenen divisors comuns a $\Gamma_k[X,Y,Z]$. Ara bé, F és irreductible, de manera que cap dels factors no trivials de G pot dividir F. Així, F i G no tenen divisors comuns i, per tant, $\mathcal{C}$ i P_a no tenen components comunes. $\square$

Proposició 3.1.2. Els punts de tall de la primera polar P_a d'una corba $\mathcal{C}$ respecte del punt $a \in \mathbb{P}^2_k$ amb la corba són els punts de contacte amb les tangents a la corba des de a.

Demostració: Sigui $b \in \mathcal{C} \cap P_a$. Tindrem el resultat demostrat si veiem que la tangent a $\mathcal{C}$ per b, $\mathcal{T}_b$, conté a. Posem $\mathcal{C} = V(F)$ i $P_a = V(a_0 \frac{\partial F}{\partial X} + a_1 \frac{\partial F}{\partial Y} + a_2 \frac{\partial F}{\partial Z})$. Com que $b \in P_a$, se satisfà la relació

$$a_0 \frac{\partial F}{\partial X}(b_0 : b_1 : b_2) + a_1 \frac{\partial F}{\partial Y}(b_0 : b_1 : b_2) + a_2 \frac{\partial F}{\partial Z}(b_0 : b_1 : b_2) = 0. \ (*)$$

La tangent a $\mathcal{C}$ per b és la recta d'equació

$$\mathcal{T}_b = \frac{\partial F}{\partial X}(b_0 : b_1 : b_2)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(b_0 : b_1 : b_2)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(b_0 : b_1 : b_2)Z,$$

i per (*) resulta que $\mathcal{T}_b(a_0 : a_1 : a_2) = 0$, de manera que $a \in \mathcal{T}_b$, com volíem provar. $\square$

Una pregunta que sorgeix de manera natural és on i com talla una corba polar a la corba associada. Com que una corba i la seva polar no tenen components en comú, el teorema de Bézout ens diu que ambdues s'han de tallar en, com a molt, $d(d-1)$ punts. La diferència entre els casos en què una polar talla la seva corba en el nombre màxim possible de punts i els casos en què ho fa en menys punts és la idea a partir de la qual desenvoluparem un criteri per classificar les quàrtiques no-singulars. Aquesta qüestió queda descrita mitjançant la Primera Fórmula de Plücker, però per tal d'enunciar-la primer ens cal parlar de la corba dual d'una corba.

En aquest punt, recordem que si $\mathbb{P} := \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ és el projectivitzat del $\mathbb{C}$-espai vectorial E, aleshores, es pot definir l'espai dual de $\mathbb{P}$ com l'espai projectiu $\mathbb{P}^*$ resultat de projectivitzar l'espai vectorial dual de E, que és un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió igual a la dimensió de E (de manera que $\dim(\mathbb{P}) = \dim(\mathbb{P}^*)$). Aquesta definició permet, un cop escollida una referència projectiva, identificar punts de l'espai projectiu dual amb hiperplans de l'espai projectiu original mitjançant la relació

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X_k \right\} \subset \mathbb{P} \longleftrightarrow H^\perp = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^*.$$

Aquesta correspondència s'amplia a un diccionari de dualitat que identifica varietats de dimensió d de $\mathbb{P}$ amb varietats de dimensió $n-d-1$ de $\mathbb{P}^*$. És conegut que el concepte de dualitat *redueix a la meïtat* els resultats que es poden demostrar amb la geometria projectiva, ja que el Principi de Dualitat estableix que tot enunciat té un dual equivalent. Per exemple, el fet que dos punts del pla determinin una recta és l'enunciat dual de que dues rectes del pla es tallin en un punt. Una visió general i més detinguda sobre l'espai dual és la que s'ofereix en [3].

Les eines del dual no es redueixen només a les subvarietats lineals de l'espai projectiu, sinó que també es poden aplicar a les subvarietats algebraiques. El concepte és general sigui quina sigui la dimensió de l'espai projectiu, però aquí ens centrarem en el cas del pla projectiu i les corbes algebraiques.

Definició 3.3. Donada una corba projectiva plana no-singular $\mathcal{C}$ a $\mathbb{P}_k^2$, definim la corba dual de $\mathcal{C}$ com el lloc de $\mathbb{P}_k^{2^*}$ format pels punts que són els duals de les rectes tangents a $\mathcal{C}$ per cada un dels seus punts. Aquesta corba dual la denotarem per $\mathcal{C}^*$.

Es pot interpretar la corba dual com aquella els punts de la qual són els duals de les rectes polars de la corba original respecte de cadascun dels seus punts. És fàcil veure que el punt $(\frac{\partial F}{\partial X}(a) : \frac{\partial F}{\partial Y}(a) : \frac{\partial F}{\partial Z}(a))$ de $\mathbb{P}_k^{2^*}$ s'identifica amb la recta $L := \frac{\partial F}{\partial X}(a)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(a)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(a)Z$ de $\mathbb{P}_k^2$ que, com vam veure al capítol 1, és la recta tangent a la corba pel punt a. En particular, la recta polar d'una corba respecte d'un punt de la corba coincideix amb la recta tangent a la corba pel punt (enunciat que es pot interpretar com un corol.lari de 3.1.2).

Observem així mateix que aquesta definició requereix de certs matisos en el cas en que una corba presenti singularitats, però en aquest treball no hi entrarem. El que sí farem serà veure unes propietats que satisfà la corba dual d'una corba en relació amb la corba original.

Teorema 3.1.3. Sigui $\mathcal{C}$ una corba projectiva plana que no conté rectes. Aleshores, es tenen les següents propietats:

(i). $\mathcal{C}^*$ és una corba algebraica de $\mathbb{P}_k^{2^*}$.

(ii). Si $\mathcal{C}$ és irreductible, aleshores $\mathcal{C}^*$ és irreductible amb $\deg(\mathcal{C}^*) \geq 2$.

(iii). $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$.

Hi ha dues maneres de demostrar aquest teorema: una consisteix a mirar d'escriure una expressió per a $\mathcal{C}^*$ a partir de l'expressió de $\mathcal{C}$ i veure que, efectivament, dóna una corba algebraica. L'altra consisteix en emprar el teorema d'Eliminació ([5], pàg. 57). Aquest és un teorema algebraic que, traduït al llenguatge de corbes, diu el següent:

Teorema 3.1.4 (Eliminació)**.** Donada una corba plana $\mathcal{C}$, sigui $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$ una aplicació regular. Aleshores la imatge $\varphi(\mathcal{C})$ és un tancat de Zariski.

Aplicant aquest teorema, prenem l'aplicació $a \longmapsto (\frac{\partial F}{\partial X}(a) : \frac{\partial F}{\partial Y}(a) : \frac{\partial F}{\partial Z}(a))$, que és clarament regular sobre $\mathcal{C}$, car és polinòmica de grau $\deg(\mathcal{C}) - 1$, i obtenim que la seva imatge, que és la corba $\mathcal{C}^*$, és un tancat de Zariski. Aleshores, per definició de la topologia de Zariski, resulta que $\mathcal{C}^*$ és un conjunt algebraic de $\mathbb{P}_k^{2^*}$ i, per tant, es tracta d'una corba algebraica.

Amb les eines proporcionades per l'espai dual i la noció de corba polar ja podem demostrar les Fórmules de Plücker.

Teorema 3.1.5 (Primera Fórmula de Plücker)**.** Sigui $\mathcal{C}$ una corba projectiva plana irreductible i no-singular de grau d. Aleshores, $\deg(\mathcal{C}^*) = d(d-1)$.

Demostració: Prenem la primera polar de $\mathcal{C}$ des d'un punt en posició general $a \in \mathbb{P}^2_k$, P_a. Segons la seva definició, es tracta d'una corba de grau $d-1$ i, com que no té components en comú amb $\mathcal{C}$ (3.1.1) i són ambdues irreductibles, el teorema de Bézout garanteix que es tallen en $d(d-1)$ punts diferents. Això és equivalent a dir que el feix de rectes per a conté $d(d-1)$ rectes tangents a la corba $\mathcal{C}$ (3.1.2). Passant al dual, el feix de rectes per a s'identifica amb els punts de la recta $L := a^{\perp}$, i aquelles que són tangents a $\mathcal{C}$, passen a punts de tall de L amb la corba dual (veure definició de corba dual), de manera que L talla $\mathcal{C}^*$ en $d(d-1)$ punts. Aplicant de nou el teorema de Bézout, obtenim que aleshores $\deg(\mathcal{C}^*) = d(d-1)$, tal i com volíem demostrar. □

La demostració de la Fórmula de Plücker apel.la a un argument de polaritat per establir que hi ha $d(d-1)$ tangents a una corba des d'un punt $a \in \mathbb{P}^2_k$ exterior a la mateixa. El que no diu és si aquestes tangents tenen un únic punt de contacte amb la corba o si, pel contrari, hi poden haver tangents que tallin la recta en més d'un punt. Encara més, de moment no tenim manera de saber si existeixen rectes que són tangents a la corba en punts diferents.

Exemple: De fet, és senzill construïr una situació on això succeeixi: considerem la corba $\mathcal{C} = V(F)$ donada per $F = X^4 + Z^4 - 2X^2Z^2 - YZ^3$. Si calculem les tangents pels punts $P = (1:0:1)$ i $Q = (-1:0:1)$ obtenim

$$\mathcal{T}_P = Y, \qquad \mathcal{T}_Q = Y.$$

És a dir, que $\mathcal{C}$ té la mateixa tangent en dos punts diferents.

Definició 3.4. Una recta com la de l'exemple s'anomena una bitangent a la corba $\mathcal{C}$.

Formalment, direm que la recta L és bitangent a la corba $\mathcal{C}$ si existeix una parella de punts P i Q de $\mathcal{C}$ tals que $I_P(L \cap \mathcal{C}) = I_Q(L \cap \mathcal{C}) = 2$. Observem que pot ser $P = Q$, cas en el qual direm que L és una tangent hiperflexa, mentre que en cas contrari direm que és una bitangent flexa, o bitangent sense més. La primera observació que cal fer és que, si $\mathcal{C}$ té bitangents, aleshores, pel teorema de Bézout, $\deg(\mathcal{C}) \geq 4$. Sembla, doncs, raonable preguntar-se si és possible conéixer la quantitat de rectes bitangents a una corba $\mathcal{C}$ donada des d'un punt $a \in \mathbb{P}^2_k$. A la propera secció d'aquest capítol esbrinarem la manera de respondre aquesta pregunta.

Abans, però, ens cal una versió més general de la fórmula de Plücker. Es pot veure que les bitangents a una corba plana coincideixen amb els punts d'ordre 2 de la corba dual, el procediment és delicat, però la idea és que si hom pren punts "prou regulars" (i.e. no són inflexions o singularitats d'ordre massa alt), el fet de que una bitangent passi per dos punts diferents de la corba es tradueix en que les rectes duals d'aquests punts siguin totes dues tangents a la corba dual per un mateix punt, que és el dualitzat de la bitangent en qüestió; i aquesta és precissament la propietat d'un punt d'ordre 2 (secció 2.1).

Això ens diu que, per comptar bitangents, ens cal tenir en compte les singularitats de la corba dual i, per tant, precissem d'una expressió que ens permeti saber el nombre d'aquestes singularitats a la corba dual. Aquest problema es pot resoldre si la corba és una corba de Plücker.

Definició 3.5. Sigui $\mathcal{C}$ una corba projectiva plana. Direm que $\mathcal{C}$ és una corba de Plücker (veure figura 3.1) si satisfà les dues propietats següents:

(i). $\mathcal{C}$ és irreductible de grau $d \geq 2$.

(ii). $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ tenen, com a molt, punts dobles simples i cúspides simples.

Més endavant veurem que les quàrtiques planes no-singulars són corbes de Plücker, i farem servir aquest fet per comptar-ne les bitangents mitjançant la Segona Fórmula de Plücker.

Teorema 3.1.6 (Segona Fórmula de Plücker)**.** Sigui $\mathcal{C}$ una corba de Plücker de grau d. Sigui $\mathcal{C}^*$ de la corba dual de $\mathcal{C}$. Posem $d^* := \deg(\mathcal{C}^*)$ (d^* s'anomena la classe de $\mathcal{C}$). Aleshores, es tenen les relacions següents:

(1). $d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa$.

(2). $\kappa^* = 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa$.

(3). $d = d^*(d^*-1) - 2\delta^* - 3\kappa^*$.

(4). $\kappa = 3d^*(d^*-2) - 6\delta^* - 8\kappa^*$,

on δ i κ denoten, respectivament, el nombre de nodes i de cúspides de la corba $\mathcal{C}$; i δ^* i κ^* són els nodes i les cúspides de la corba dual $\mathcal{C}^*$.

Observem que només cal demostrar les dues primeres, ja que les segones són les versions duals de les primeres, de forma que el Principi de Dualitat garanteix que demostrar les unes és equivalent a demostrar les altres.

Demostrar aquest teorema és una qüestió de càlcul un cop hom sap el teorema de Bézout. No n'exposarem els detalls, que es poden trobar a [2], secció 5.9, però donarem les línies que cal seguir per completar-ne una prova.

En primer lloc, demostrem (1) triant un punt $q \in \mathcal{C}$ de manera que no sigui el punt de contacte de la corba amb una de les seves diverses bitangents o tangents d'inflexió. Aquesta tria és possible degut a les discussions del tema 2, que garanteixen que de rectes tangents del tipus esmentat només n'hi ha un nombre finit, en tot cas, un nombre no superior al grau de la corba. Aleshores, prenem la corba $P_q(\mathcal{C})$, la tallem amb $\mathcal{C}$ i apliquem el teorema de Bézout en la seva versió per divisors:

$$d(d-1) = d^* + \sum_{P \in \mathcal{C}} I_P(\mathcal{C} \cap P_q(\mathcal{C})).$$

Si $\mathcal{C}$ és no-singular, aleshores es té la Primera Fórmula de Plücker. Si no, tot el que s'ha de fer és comprovar el següent:

$$I_P(\mathcal{C} \cap P_q(\mathcal{C})) = \begin{cases} 2, \text{ si } P \text{ és un punt doble,} \\ 3, \text{ si } P \text{ és una cúspide.} \end{cases}$$

Per provar (2) el raonament és exactament el mateix, però prenent la corba Hessiana enlloc de la polar. La corba Hessiana de $\mathcal{C}$ ([2], secció 4.4) és la corba les singularitats de la qual es troben sobre les cúspides de $\mathcal{C}$, i té per equació el determinant de la matriu de segones derivades parcials de $\mathcal{C}$. Aplicant-hi el teorema de Bézout, s'obté

$$\kappa^* = 3d(d-2) + \sum_{P \in \mathcal{C}} I_P(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})),$$

i aleshores només resta comprovar que

$$I_P(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})) = \begin{cases} 6, \text{ si } P \text{ és un punt doble,} \\ 8, \text{ si } P \text{ és una cúspide.} \end{cases}$$

Amb la Segona Fórmula de Plücker finalitza aquesta secció. Anem ara a esbrinar com la fem servir per establir que una quàrtica no-singular té 28 bitangents.

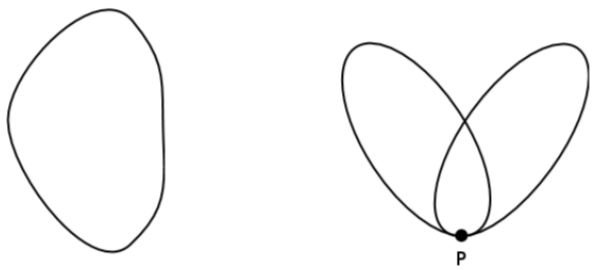

Figura 3.1: La de l'esquerra és una corba de Plücker. La de la dreta no, perquè P és un punt doble no-simple (tacnode).

3.2 θ-característiques

Sigui $\mathcal{Q}$ una quàrtica projectiva plana no-singular. Fent un abús de llenguatge, farem servir el terme "quàrtica" sense més per tal de referir-nos a aquestes corbes, tret de que s'especifiqui el contrari. Segons el vist a la secció 2.2, $g := g(\mathcal{Q}) = 3$, i recordem que, si W és un divisor canònic de $\mathcal{Q}$, aleshores el teorema de Riemann-Roch diu que $l(W) = 3$. Hom pot interpretar W com els punts pels quals una recta donada talla $\mathcal{Q}$. Notem que diem "punts" en sentit ampli, és a dir, comptats amb les seves multiplicitats (per exemple, si tallem $\mathcal{Q}$ amb una recta bitangent hem de comptar cada punt de tall dos cops). És en termes d'aquests divisors canònics W que definim les θ-caracteristiques associades a una quàrtica $\mathcal{Q}$.

Definició 3.6. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàrtica projectiva plana no-singular i considerem W un divisor canònic. Definim les θ-característiques associades a $\mathcal{Q}$ com els divisors $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Q}$ tals que $2\mathcal{V} \equiv W$.

De totes les corbes amb les quals hom pot tallar $\mathcal{Q}$, resulta d'especial interès el cas en que aquesta corba és una recta. Observem que, si és així, aleshores $W \succ 0$, car $W = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ essent P_i els punts de tall de la recta amb $\mathcal{Q}$ (potser són menys de quatre si algun d'ells té multiplicitat més gran que 1, per exemple en el cas de les bitangents).

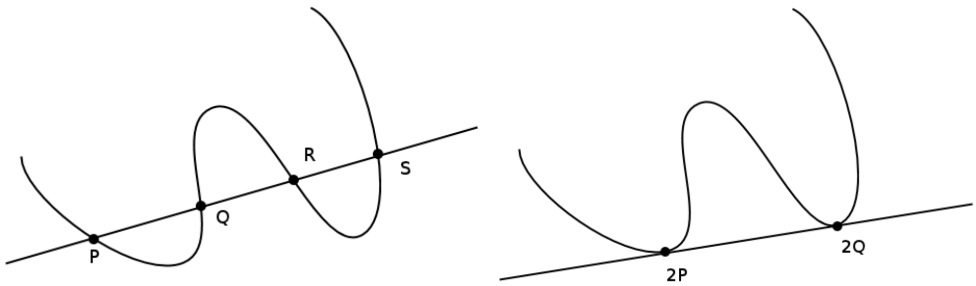

Figura 3.2: Esquerra: no és θ-característica. Dreta: θ-característica

Definició 3.7. Sigui $\mathcal{V}$ una θ-característica associada a la corba $\mathcal{Q}$. Si $\mathcal{V}$ és un divisor efectiu direm que $\mathcal{V}$ és una θ-característica senar. En cas contrari, direm que és parell.

El que provarem tot seguit és que les θ-característiques senars permeten establir una correspondència amb les rectes bitangents a la corba.

Proposició 3.2.1. Sigui W un divisor canònic de la quàrtica $\mathcal{Q}$, i suposem que tenim una recta L tal que $W = \mathrm{div}_{\mathcal{Q}}(L)$. Si $W = 2\mathcal{V}_L$ per a una certa θ-característica senar $\mathcal{V}_L$, aleshores

(i). L és una recta bitangent a $\mathcal{Q}$.

(ii). Si L' és una altra recta bitangent a $\mathcal{Q}$, aleshores $\mathcal{V}_L \neq \mathcal{V}_{L'}$.

Demostració: (i). Per a cada $P \in \mathcal{Q}$, posem $m_P := I_P(L \cap \mathcal{Q})$ i siguin n_P els coeficients del divisor $\mathcal{V}$, de manera que tenim

$$W = \sum_{P \in \mathcal{Q}} m_P P \qquad \text{i} \qquad \mathcal{V} = \sum_{P \in \mathcal{Q}} n_P P.$$

Com que $W = 2\mathcal{V}$, es té que, per a cada P, $m_P = 2n_P$, i del fet que $\deg(W) = 4$, en resulta que

$$4 = \sum_{P \in \mathcal{Q}} 2n_P.$$

Com que $\mathcal{V}$ és senar, tenim $m_P = 2n_P \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, aleshores o bé hi ha un únic $P \in \mathcal{Q}$ tal que $m_P = 4$, o bé hi ha dos punts diferents P_1 i P_2 tals que $m_{P_1} = m_{P_2} = 2$. Aleshores, o bé L talla $\mathcal{Q}$ en dos punts diferents i ho fa amb multiplicitat 2, de manera que L és una bitangent flexa de $\mathcal{Q}$; o bé L talla $\mathcal{Q}$ en un únic punt amb multiplicitat 4 i per tant L és una bitangent hiperflexa de $\mathcal{Q}$ (figura 3.3).

(ii). Si $L' \neq L$, dels quatre punts possibles de bitangència amb $\mathcal{Q}$ n'hi ha almenys tres de diferents, posem que siguin P_1, P_2 i P_3. Aleshores $L = P_1 \vee P_2$ i $L' = P_1 \vee P_3$, de manera que $\mathcal{V}_L = P_1 + P_2$ i $\mathcal{V}_{L'} = P_1 + P_3$ i, per tant, $\mathcal{V}_L \neq \mathcal{V}_{L'}$. $\square$

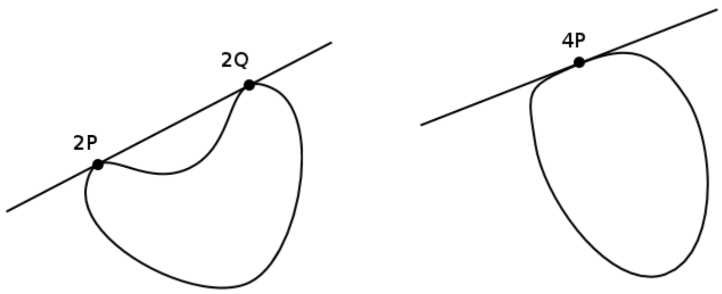

Figura 3.3: Bitangent flexa i bitangent hiperflexa.

Corol.lari 3.2.2. Hi ha una bijecció entre el conjunt de θ-característiques senars d'una quàrtica no-singular $\mathcal{Q}$ i el conjunt de rectes bitangents a $\mathcal{Q}$.

Provarem ara fent ús de la Segona Fórmula de Plücker que una quàrtica no-singular té 28 bitangents. Comencem veient que una tal corba és una corba de Plücker.

Lema 3.2.3. Una quàrtica no-singular $\mathcal{Q}$ no té hiperflexes. En particular, $\mathcal{Q}$ és una corba de Plücker.

Demostració: Suposem que no fos així i que $\mathcal{Q}$ tingués una tangent hiperflexa. Escollim una referència projectiva de manera que $\mathcal{Q}$ tingui a la recta $X = 0$ per tangent hiperflexa en $P = (0 : 0 : 1)$. Un raonament de multiplicitat d'intersecció mostra que, aleshores, $\mathcal{Q}$ té equació $F = X \cdot G_3 + k \cdot Y^4$, on G_3 és una forma de grau 3 i k una constant. Fixem, doncs, rectes L i M que es tallen en P. Aleshores, una corba amb hiperflex en P i tangent L tindrà equació

$$F = L \cdot G_3 + M^4.$$

L'espai $\mathcal{M}$ de paràmetres d'equacions d'aquesta forma és un $\mathbb{P}^{14}$. Considerem l'espai $\mathrm{Pr}(\mathbb{P}^2_k)$ de projectivitats de $\mathbb{P}^2_k$ mòdul multiplicitat, que es tracta d'un espai vectorial de dimensió 8, car aquestes projectivitats queden determinades per matrius 3×3 mòdul producte per escalars. L'espai de paràmetres d'una quàrtica amb un hiperflex és, doncs, $\mathcal{M}/\mathrm{Pr}(\mathbb{P}^2_k)$, que té dimensió $14 - 8 = 6$. Així, les quàrtiques amb hiperflexes no formen part del conjunt de corbes en posició general i, per tant, una quàrtica no-singular no té hiperflexes. □

Teorema 3.2.4. Una quàrtica projectiva plana no-singular $\mathcal{Q}$ té exactament 28 bitangents.

Demostració: Pel lema anterior, $\mathcal{Q}$ no té hiperflexes i, per tant, la seva dual $\mathcal{Q}^*$ té, com a molt, punts dobles i cúspides. Això ens situa dins de les condicions de la Segona Fórmula de Plücker, i tot el que hem de veure és que, com que $d = 4$, aleshores $\delta^* = 28$.

Com que $\mathcal{Q}$ és no-singular, no té ni nodes ni cúspides, i usant les igualtats (1) i (2) de la Segona Fórmula de Plücker, tenim que $d^* = 12$ i $\kappa^* = 24$. Això prova, en particular, que $\mathcal{Q}$ té 24 inflexions.

Amb aquestes condicions, la igualtat (3) esdevé

$$4 = 132 - 2\delta^* - 72 \Leftrightarrow 2\delta^* = 56 \Leftrightarrow \delta^* = 28.$$

Com que els nodes de $\mathcal{Q}^*$ es corresponen amb les bitangents de $\mathcal{Q}$, ja tenim que aquesta té 28 bitangents. □

Corol.lari 3.2.5. Hi ha exactament 28 θ-característiques senars associades a una quàrtica no-singular.

Demostració: N'hi ha prou de combinar el corol.lari 3.2.2 amb el darrer teorema per obtenir el resultat. □

Teorema 3.2.6. Si una corba no-singular $\mathcal{Q}$ té 28 bitangents i, a més, és una corba de Plücker, aleshores té grau 4.

Demostració: Com que $\mathcal{Q}$ és una corba de Plücker, podem usar la Segona Fórmula de Plücker per veure que si $\delta^* = 28$, aleshores $d = 4$. Comencem aplicant la igualtat (2) sabent que $\delta = \kappa = 0$:

$$\kappa^* = 3d(d - 2).$$

Si susbtituïm aquesta relació en la igualtat (4), obtenim

$$0 = 3d^*(d^* - 2) - 168 - 24d(d - 2).$$

Ara bé, de (1) tenim que $d^* = d^2 - d$, de manera que (4) queda finalment com

$$3(d^2 - d)(d^2 - d - 2) - 24d(d - 2) - 168 = 0.$$

Substituïnt, veiem que $d = 4$ és una solució d'aquesta equació polinòmica. Per completar el resultat, només cal expandir el polinomi i comprovar, mitjançant Ruffini, que 4 és la única solució entera de l'equació. Així, $\mathcal{Q}$ té grau 4. □

Corol.lari 3.2.7. Una corba $\mathcal{Q}$ és una quàrtica projectiva plana no-singular si, i només si, té 28 bitangents. En particular, dir que una corba té 28 bitangents és equivalent a dir que és de gènere 3.

Hem tancat, doncs, aquesta secció provant que una quàrtica projectiva plana no-singular queda identificada pel fet de tenir 28 rectes bitangents. Les seccions següents miraran de, un cop hom té aquest fet, com es pot escriure l'equació de la corba.

3.3 Àlgebra simplèctica a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

La tasca de comptar el nombre de θ-característiques –tant senars com parells– d'una corba atén a la teoria de formes quadràtiques sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que introduïrem tot seguit de manera resumida. Per arribar-hi, primer ens cal parlar una mica d'àlgebra lineal simplèctica. Més detalls sobre aquests temes i la seves relacions amb l'estudi de les corbes algebraiques en general es poden consultar a [12].

Definició 3.8. Sigui E un k-espai vectorial de dimensió $2g$ sobre un cos k. Una forma $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to k$ s'anomena simplèctica si és bilineal i anti-simètrica.

Observi's que si G és la matriu associada a una forma simplèctica, aleshores G és invertible.

Exemple: La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $\langle u, v\rangle = u_2v_1 - u_1v_2$ és una forma simplèctica. Les dues propietats de simplecticitat es poden comprovar fàcilment a través de le matriu G associada,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una forma bilineal com les aquí descrites admet sempre una base, anomenada base simplèctica, de manera que la matriu J associada a $\langle\ ,\ \rangle$ en aquesta base és de la forma

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

En l'exemple anterior, la base simplèctica associada és $\{e_1, -e_2\}$. En efecte, $\langle e_1, e_1\rangle = \langle -e_2, -e_2\rangle = 0$, $\langle e_1, -e_2\rangle = 1$ i $\langle -e_2, e_1\rangle = -1$.

Típicament, una base simplèctica es denota mitjançant dues sub-bases, cadascuna formada per g elements: $x_1, \ldots, x_g; y_1, \ldots, y_g$. En el nostre exemple, posaríem $x_1 = (1, 0)$, $y_1 = (0, -1)$ enlloc de x_1 i x_2.

Per als nostres interessos ens cal considerar un espai vectorial V de dimensió $2g$ sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dotat d'una forma simplèctica no-degenerada $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Com que és no-degenerada, aquésta indueix un isomorfisme entre V i el seu dual V^*. Denotem per $v^* = \langle v, - \rangle \in V^*$ a la forma lineal corresponent a cada vector $v \in V$ sota aquest isomorfisme. Aquí, g denota el gènere d'una corba plana donada.

Recordem que a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tenim $1 \equiv -1$, de manera que sobre aquest cos sempre existirà una base simplèctica tal que que la matriu d'una forma associada sigui del tipus

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Definició 3.9. Per a $g \geq 2$, anomenem grup simplèctic al grup

$$\mathrm{Sp}(V) := \mathrm{Aut}(V, \langle\ ,\ \rangle) \cong \left\{ M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mid M^T J M = J \right\}$$

L'ordre del grup $\mathrm{Sp}(V)$ coincideix amb el nombre de bases simplèctiques de V, i es té

$$|\mathrm{Sp}(V)| = 2^{2g} \prod_{i=1}^{g} (2^{2i} - 1).$$

Definició 3.10. Una forma quadràtica és una aplicació $Q : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ satisfent que

$$Q(u + v) = Q(u) + Q(v) + \langle u, v \rangle, \ \forall\ u, v \in V.$$

Denotarem per QV al conjunt de totes les formes quadràtiques associades a V.

Fiaxada una forma quadràtica Q_0, es té una bijecció entre V^* i QV donada per $v^* \longmapsto Q_0 + v^*$, i amb inversa $Q \longmapsto Q + Q_0$. En particular, la suma de tres formes quadràtiques és una forma quadràtica.

Prenem una base simplèctica $\{x_1, \ldots, x_g; y_1, \ldots, y_g\}$, i sigui $w \in V$ de manera que la seva expressió en coordenades segons aquesta base sigui

$$w = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i x_i + \mu_i y_i,$$

que per simplicitat abreviarem $w = (\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$. La forma quadràtica més senzilla és $Q_0(w) = \lambda \cdot \mu := \sum_{i=1}^{g} = \lambda_i \mu_i$; i per a qualsevol altre vector $v = (\epsilon, \epsilon') \in V$, la forma lineal v^* actua com

$$v^*(w) = \langle v, w \rangle = \epsilon \cdot \lambda + \epsilon' \cdot \mu.$$

Així, la forma $Q := Q_0 + v^*$ actua per

$$Q(w) = \epsilon \cdot \lambda + \epsilon' \cdot \mu + \lambda \cdot \mu.$$

Diem aleshores que (ϵ, ϵ') són les coordenades de Q amb respecte d'aquesta base i escrivim $Q = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$. Noti's que $\epsilon = (Q(x_1), \ldots, Q(x_g))$ i $\epsilon' = (Q(y_1), \ldots, Q(y_g))$. Les propietats que hem mencionat per a les formes quadràtiques s'expressen ara en coordenades com segueix:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} + (\lambda, \mu)^* = \begin{bmatrix} \epsilon + \lambda \\ \epsilon' + \mu \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_1' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_3 \\ \epsilon_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \epsilon_1' + \epsilon_2' + \epsilon_3' \end{bmatrix}.$$

No oblidem que el nostre objectiu és comptar θ-característiques per tal de saber el nombre de bitangents d'una quàrtica projectiva. Així, la raó d'aquesta breu introducció a l'àlgebra lineal simplèctica és la possibilitat de definir unes formes quadràtiques senars i unes altres de parells que, al final, estan en bijecció amb les θ-característiques parelles i senars respectivament, de manera que coincideixen en nombre les unes amb les altres. Aquesta distinció la reben les formes quadràtiques a través de l'invariant d'Arf.

Lema 3.3.1. El nombre de vectors $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ tals que $\lambda \cdot \mu$ és 0 ó 1 és, respectivament, $2^{g-1}(g+1)$ i $2^{g-1}(g-1)$.

Demostració: Fixat $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$, pensem en $\lambda \cdot \mu = 0$ i $\lambda \cdot \mu = 1$ com a sistemes d'equacions lineals. Si $\lambda = 0$, els sistemes tenen, respectivament, 2^g i 0 solucions. Si $\lambda \neq 0$, aleshores els sistemes tenen tots dos 2^{g-1} solucions. $\square$

Definició 3.11. Fixada una base simplèctica $\{x_1, \ldots, x_g; y_1, \ldots, y_g\}$ de V, per a cada forma quadràtica $Q = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ definim l'invariant d'Arf com

$$\mathrm{Arf}(Q) := \epsilon \cdot \epsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Direm que Q és parell si $\mathrm{Arf}(Q) = 0$ i senar si $\mathrm{Arf}(Q) = 1$.

Aquí esdevé clar que, si hom demostrés l'existència d'una bijecció entre el conjunt de θ-característiques d'una corba –que ara denotarem per TCh– i QV, aleshores es pot usar el lema 3.3.1 per comptar θ-característiques, obtenint així una via alternativa per al compteig de bitangents que, a més, pot ésser generalitzada a qualsevol que sigui el grau de la corba. Observi's, així mateix, que la cardinalitat de QV queda descrita en funció del gènere g d'una corba. Existeix un teorema, anomenat teorema de Mumford ([13]), que prova l'existència d'aquesta bijecció. Malauradament, les eines i tècniques que calen per demostrar aquest teorema són fora del nostre abast, i reduïrem el nostre anàlisi al respecte a uns comentaris a l'annex A.1.

3.4 Equació d'una quàrtica no-singular

Per tal de dur a terme la classificació de les quàrtiques projectives no-singulars, dedicarem aquesta darrera secció del capítol 3 a construïr els conjunts d'Aronhold d'una quàrtica i a mirar de trobar una expressió per a la seva equació. Per tal de fer-ho, recuperarem el llenguatge d'àlgebra lineal simplèctica i l'invariant d'Arf de la secció anterior. Veurem que el conjunt de conjunts d'Aronhold es troba en bijecció amb el conjunt de bases simplèctiques del $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espai vectorial V de la secció anterior i que això mostra que hi ha una quantitat determinada de conjunts d'Aronhold. Veurem que aquí, el concepte de classificació no va en la mateixa direcció que en el cas de còniques i cúbiques, on hi tenim una manera canònica d'associar una equació a cada tipus de corba, sinò que el que es fa es construïr una sèrie d'invariants que determinen el conjunt de bitangents d'una quàrtica determinada, en el ben entès de que si hom, a més de les rectes, en coneix els punts de contacte amb la corba, aleshores es pot determinar un conjunt d'equacions que fan referència a la mateixa quàrtica. Allò que determina el conjunt de bitangents són els conjunts d'Aronhold, i d'aquí vindrà l'interès per estudiar-los.

Redirigim la mirada cap a l'invariant d'Arf i observem que el podem re-interpretar en termes del lema 3.3.1 escrivint $Q(w) = (\epsilon' + \lambda) \cdot (\epsilon + \mu) + \mathrm{Arf}(Q)$, de manera que es tenen les relacions

$$\begin{aligned} \mathrm{Arf}(Q) = 0 &\Rightarrow |Q^{-1}(0)| = 2^{g-1}(2^g + 1) \\ \mathrm{Arf}(Q) = 1 &\Rightarrow |Q^{-1}(0)| = 2^{g-1}(2^g - 1). \end{aligned}$$

Això mostra que l'invariant d'Arf no depèn de la base simplèctica escollida per expressar Q, ja que el seu nombre de zeros n'és una característica intrínseca.

Segons la definició que hem fet a l'apartat anterior de l'invariant d'Arf i les propietats del càlcul amb formes quadràtiques, també comentades a la secció anterior, s'obté de manera immediata el següent:

Lema 3.4.1. Per a cada $v \in V$ i formes quadràtiques Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 hom té

$$\begin{aligned} &\mathrm{Arf}(Q_0 + v^*) = \mathrm{Arf}(Q_0) + Q_0(v), \\ &\mathrm{Arf}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \mathrm{Arf}(Q_1) + \mathrm{Arf}(Q_2) + \mathrm{Arf}(Q_3) + \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

on $v_i^* = Q_1 + Q_i$, $i = 2, 3$.

El primer pas cap a la definició dels conjunts d'Aronhold és la introducció de les tríades sizigètiques. Hom veurà que els conjunts d'Aronhold mantenen una estreta relació amb l'invariant d'Arf i, per tant, en el cas $g = 3$, amb les θ-característiques.

Definició 3.12. Direm que una tríada de formes quadràtiques Q_1, Q_2, Q_3 és senar (resp. parell) si la forma quadràtica $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ és senar (resp. parell). Una tríada senar s'anomena tríada sizigètica (resp. asizigètica).

Proposició 3.4.2. Siguin Q_1, Q_2, Q_3 formes quadràtiques senars, i posem $Q_1 + Q_i = v_i^*$, per a $i = 2, 3$. Aleshores, $Q_1 + Q_2 + Q_3$ és sizigètica $\Leftrightarrow \langle v_2, v_3 \rangle = 0$.

Demostració: És una conseqüència inmediata del lema 3.4.1: si $Q_1 + Q_2 + Q_3$ és senar, aleshores $\mathrm{Arf}(Q_1) + \mathrm{Arf}(Q_2) + \mathrm{Arf}(Q_3) + \langle v_2, v_3 \rangle = 1$. Com que Q_1, Q_2, Q_3 són senars, la suma anterior queda $1 + 1 + 1 + \langle v_2, v_3 \rangle = 1 + \langle v_2, v_3 \rangle$ (recordem que treballem sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Ara, volem $\mathrm{Arf}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = 1$, per tant $1 = 1 + \langle v_2, v_3 \rangle \Leftrightarrow \langle v_2, v_3 \rangle = 0$. $\square$

Aquesta proposició proporciona una forma senzilla de detectar tríades sizigètiques i asizigètiques, la qual cosa porta a una manera molt clara de definir els conjunts d'Aronhold i d'identificar-los. D'ara endavant, assumirem que $g = 3$.

Definició 3.13. Un conjunt d'Aronhold de formes quadràtiques associades a un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espai vectorial V és un conjunt de set formes quadràtiques senars tals que qualsevol tríada per elles formada és asizigètica.

Recordem que el teorema de Mumford estableix una relació entre formes quadràtiques i θ-característiques, mostrant en particular que, passant per aquestes, es poden identificar les bitangents d'una quàrtica plana no-singular amb les formes quadràtiques senars de V. Sota aquest raonament, té sentit parlar del conjunt d'Aronhold de bitangents d'una quàrtica no-singular enlloc del conjunt d'Aronhold de formes quadràtiques associades a V. Farem ús de les dues denominacions segons ho requereixi el context.

Aplicant la darrera proposició, esdevé clar que un conjunt de set formes quadràtiques $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7$ és un conjunt d'Aronhold si, i només si, $\langle v_i, v_j \rangle = 1$, $i \neq j$, i on $i, j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ i $v_i^* = Q_1 + Q_i$. D'aquesta manera, hom pot entreveure una relació entre els conjunts d'Aronhold i les bases simplèctiques de V. De fet, podem construïr-los a partir, precissament, d'aquestes bases simplèctiques.

Teorema 3.4.3. Hi ha exactament 288 conjunts d'Aronhold.

Demostració: Es pot construïr una bijecció entre bases simplèctiques $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ de V i bases $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ de V tals que $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ per a $i \neq j$. Per exemple, la donada per les relacions següents:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1, & x_2 &= v_2 + v_3, & x_3 &= v_3 + v_4, \\ y_1 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6, & y_2 &= v_3 + v_4 + v_5 + v_6, & y_3 &= v_5 + v_6. \end{aligned}$$

Per cada conjunt d'Aronhold ordenat hi podem associar una base $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ i, recíprocament, donada una tal base, hi podem associar un conjunt d'Aronhold en una base simplèctica considerant les relacions anteriors i posant $Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. És immediat comprovar que $Q_1(v_i) = 0$ per a cada i, de manera que totes les formes quadràtiques $Q_i := Q_1 + v_i^*$ són senars i formen un conjunt d'Aronhold ordenat. Ara, seguint la definició 3.9 i els resultats que la segueixen, hi ha $2^9 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 63$ bases simplèctiques de V, i aquest nombre és la quantitat de conjunts d'Aronhold que es poden obtenir si hom té en compte l'ordre en que escriu les formes quadràtiques. Com que aquest ordre no importa a l'hora de tenir un o altre conjunt d'Aronhold, dividim per les 7! permutacions de les formes quadràtiques que formen cada conjunt i obtenim com a resultat els 288 possibles conjunts d'Aronhold. □

Corol.lari 3.4.4. Donada una quàrtica no-singular $\mathcal{Q}$, hi ha exactament 288 maneres de triar (sense tenir en compte l'ordre) 7 de les seves 28 bitangents de forma que constitueixin un conjunt d'Aronhold.

Donada una quàrtica $\mathcal{Q}$, denotem per $\mathrm{Bit}(\mathcal{Q})$ al conjunt de bitangents de $\mathcal{Q}$. Arribats a aquest punt, recordem que hem treballat amb les identificacions següents:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Bit}(\mathcal{Q}) & \longleftrightarrow & \mathrm{TCh}_{\mathrm{senars}} & \longleftrightarrow & \mathrm{QV}_{\mathrm{senars}} \\ L & \longmapsto & \mathcal{V} := \mathcal{V}_L & \longmapsto & Q_L := Q_{\mathcal{V}} \end{array} \quad (*).$$

La darrera qüestió que sorgeix és com aprofitem aquest fet i tota la teoria desenvolupada per escriure una expressió que poguem associar a una quàrtica. La resposta passa per conéixer les seves bitangents i els conjunt d'Aronhold que se'n poden formar. Aleshores, la introducció del concepte de tètrades sizigètiques (en la mateixa línia que les tríades) i dels conjunts d'Steiner permet arribar a escriure una equació per a la quàrtica en qüestió. L'únic problema és que aquesta equació no és única, però es pot establir el nombre d'equacions que fan referència a la mateixa corba; de manera que, en aquest sentit, haurem classificat la quàrtica donada.

Definició 3.14. Suposem $g = 3$ i considerem un conjunt de 4 formes quadràtiques senars Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 que satisfan les següents condicions equivalents:

(i) $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$.

(ii) Qualsevol tríada és sizigètica.

(iii) Tres de les quatre tríades són sizigètiques.

Al conjunt d'aquestes 4 formes quadràtiques senars l'anomenem tètrada sizigètica.

L'equivalència de les condicions és, de fet, un teorema conseqüència de la definició de tríades sizigètiques; hom en pot veure la demostració a [12]. Observem que si tenim una tètrada sizigètica, aleshores no es troben totes quatre formes dins del mateix conjunt d'Aronhold, car això contradiria (ii). Aquest fet és cabdal per justificar com s'escriu l'equació d'una quàrtica no-singular.

Definició 3.15. Per a cada $v \in V$, considerem el conjunt d'Steiner S_v com

$$S_v := \{Q \in \mathrm{QV}_{\mathrm{senar}} \mid Q(v) = 0\} = \{Q \in \mathrm{QV}_{\mathrm{senar}} \mid Q + v^* \in \mathrm{QV}_{\mathrm{senar}}\}.$$

Direm que dues formes quadràtiques $Q, Q' \in S_v$ formen un parell a S_v si $Q + Q' = v^*$. Cada forma $Q \in S_v$ forma un parell amb una única $Q' = Q + v^* \in S_v$.

Lema 3.4.5. Cada conjunt d'Steiner té $2^{g-2}(2^{g-1}-1)$ parells de formes quadràtiques senars.

Demostració: Els parells $\{Q, Q+v^*\} \subseteq S_v$ es troben en bijecció amb les formes quadràtiques senars de l'espai simplèctic $\langle v\rangle^{\perp}/\langle v\rangle$, que té dimensió $2g-2$. □

Lema 3.4.6. Sigui Q_1, Q_2, Q_3 una tríada de formes quadràtiques senars que es troben en un conjunt d'Steiner S_v. Aleshores, Q_1, Q_2, Q_3 és una tríada sizigètica si, i només si, dues d'elles formen un parell a S_v.

Demostració: [$\Rightarrow$]: Posem $i, j, k = 1, 2, 3$, i, j, k diferents dos a dos. Si $Q_i + Q_j = v^*$, aleshores $Q_i + Q_j + Q_k = Q_k + v^*$ és una forma quadràtica senar.

[$\Leftarrow$] : Suposem que $Q_1 + Q_2 + Q_3$ és imparell i que $Q_2 \neq Q_1 + v^*$ i $Q_3 \neq Q_0 + v^*$. Aleshores, $Q_1, Q_2, Q_3, Q_1 + v^*$ és una tètrada de formes quadràtiques senars satisfent que cada tríada que conté Q_1 és sizigètica. Així, la suma de les quatre és zero i, aleshores, $Q_2 + Q_3 = v^*$ i, per tant, formen un parell a S_v. □

Teorema 3.4.7. Hi ha 315 tètrades sizigètiques de formes quadràtiques.

Demostració: Notem que cada tríada sizigètica Q_1, Q_2, Q_3 es troba continguda en tres conjunts d'Steiner diferents generats, respectivament, pels parells $\{Q_1, Q_2\}$, $\{Q_1, Q_3\}$ i $\{Q_2, Q_3\}$. Per exemple, si $Q_1 + Q_2 = v^*$, aleshores, per hipòtesi $Q_3 + v^*$ és senar, de manera que $Q_1, Q_2, Q_3 \in S_v$. D'altra banda, fixat un conjunt d'Steiner S_v, hi ha 60 tríades sizigètiques a S_v com a conseqüència del lema 3.4.6. Tenim 6 parells de formes (lema 3.4.5), i per a cada parell podem afegir-ne 10 formes per tal de formar una tríada sizigètica. Així, el nombre total d'aquestes tríades és $60 \cdot 63/3 = 1260$. Per la definició de tètrada sizigètica, cada tríada sizigètica es troba continguda en una única tètrada, i hi ha 4 tríades dins de cada tètrada, de manera que tenim un total de $1260/4 = 315$ tètrades sizigètiques. □

Tornem a les relacions de $(*)$ per poder parlar de tètrades de bitangents sizigètiques, i vegem els dos teoremes que proporcionen, finalment, una manera d'obtenir una equació per a una quàrtica plana no-singular $\mathcal{Q}$.

Teorema 3.4.8. Sigui L_1, L_2, L_3, L_4 una tètrada de bitangents de $\mathcal{Q}$. Aleshores, existeix una cònica $\mathcal{K} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $(\mathcal{Q} \cdot \mathcal{K}) = (L_1 L_2 L_3 L_4 \cdot \mathcal{K})$ si, i només si, les bitangents formen una tètrada sizigètica.

Demostració: [$\Leftarrow$] Com a conseqüència del teorema de Riemann-Roch, l'únic divisor D tal que $l(D) = g$ i $\deg(D) = 2g-2$ és el divisor canònic. Si K és un divisor efectiu tal que $2K = D$, aleshores apliquem el teorema de Riemann-Roch i obtenim

$$l(2K) = l(K - 2K) + 2(2g-2) + 1 - g = 0 + 8 + 1 - 3 = 6. \quad (1)$$

Ara, sigui $\mathcal{K}$ una cònica. Pel teorema de Bézout, $\mathcal{K} \cdot \mathcal{Q}$ és un divisor de grau 8. Sigui $\mathcal{K}' = L_1 + L_2$ un parell de rectes enteses com a cònica degenerada, aleshores $\mathcal{K} \cdot \mathcal{Q} \equiv$

$\mathcal{K}' \cdot \mathcal{Q} = L_1\mathcal{Q} + L_2\mathcal{Q} = 2D$ i, per tant, $\mathcal{K} \cdot \mathcal{Q}$ és equivalent a $2D$. Posem $|K|$ el conjunt de divisors efectius de la sèrie canònica i considerem l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} |K| \times |K| & \longrightarrow & |2K| \\ (D_1, D_2) & \longmapsto & D_1 + D_2 \end{array}$$

$\dim(|2K|) = l(2K) - 1 = 5$ per (1), aleshores $|2K| = \mathbb{P}^5$, que és precissament l'espai de paràmetres d'una cònica de $\mathbb{P}^2_k$. Per tant, si $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$ formen una tètrada sizigètica, aleshores la cònica $\mathcal{K}$ satisfà que $(\mathcal{Q} \cdot \mathcal{K}) = (L_1L_2L_3L_4 \cdot \mathcal{K})$.

[$\Rightarrow$] Sigui $\mathcal{V}_i := \dfrac{1}{2}(L_i \cdot \mathcal{Q})$ la θ-característica corresponent a la recta L_i i sigui K el divisor canònic efectiu. Hom té:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 = 2K \Leftrightarrow \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 - K \equiv K - \mathcal{V}_4 \equiv \mathcal{V}_4.$$

I això és equivalent a dir $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$, de manera que aquesta és una tètrada sizigètica. □

Teorema 3.4.9 (Steiner-Hesse)**.** 1. Per a cada parell $L,\ M$ de bitangents existeixen 5 parells $L'\ M'$ tals que la cònica $\mathcal{K}$ talla $\mathcal{Q}$ sobre el divisor $\frac{1}{2}(LML'M' \cdot \mathcal{Q})$.

2. Hi ha 315 còniques que tallen $\mathcal{Q}$ en un divisor que és la meïtat del divisor de les intereseccions de $\mathcal{Q}$ amb 4 de les seves bitangents.

Demostració:

1. Aquest parell de bitangents es correspon amb un parell de formes quadràtiques del conjunt d'Steiner S_v tal que $Q_L + Q_M = v^*$, de manera que hi ha 5 parelles més de formes quadràtiques senars (lema 3.4.5) amb la mateixa propietat.

2. És conseqüència directa de combinar els dos darrers teoremes. □

El que ens està dient aquest resultat és que si posem $\mathcal{Q} = V(F)$, aleshores, coneixent les equacions de les rectes bitangents, tenim 315 maneres d'escollir-ne quatre de manera que els seus punts de contacte amb la quàrtica es trobin sobre una cònica $\mathcal{K} = V(G)$ que satisfà

$$(\mathcal{Q} \cdot \mathcal{K}^2) = (LML'M' \cdot \mathcal{Q}) \quad (1)$$

Aleshores, es pot aplicar el teorema fonamental de Max Noether de la forma següent: de (1) se'n desprèn la condició 1 de la proposició 2.4.2, de manera que les corbes $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}^2$ i $LML'M'$ es troben en les condicions de Noether. Llavors podem escriure

$$F = aG^2 + bLML'M',$$

per a certes constants a i b. A més, l'equació es pot normalitzar de manera que $a = 1$ i $b = -1$. La importància dels conjunts d'Aronhold rau, aleshores, en que determinen les bitangents en el sentit en que expliquen com triar-ne quatre de forma que conformin una tètrada sizigètica: si hom així les vol, no pot prendre totes quatre del mateix conjunt d'Aronhold (conseqüència de la definició 3.14). Per tant, si hom coneix les bitangents, hom coneix els conjunts d'Aronhold i, aleshores, disposa de maneres de triar tètrades que li permeten escriure una d'entre 315 possibles equacions per a la quàrtica $\mathcal{Q}$. Notem, malgrat tot, que amb el que sabem no hi ha res que porti a deduïr que en tenim prou amb les bitangents car en tot moment estem usant els punts de contacte amb $\mathcal{Q}$ per construïr una cònica. Allò que seria veritablement desitjable és poder construïr l'equació de la quàrtica sense haver de conéixer aquests punts.

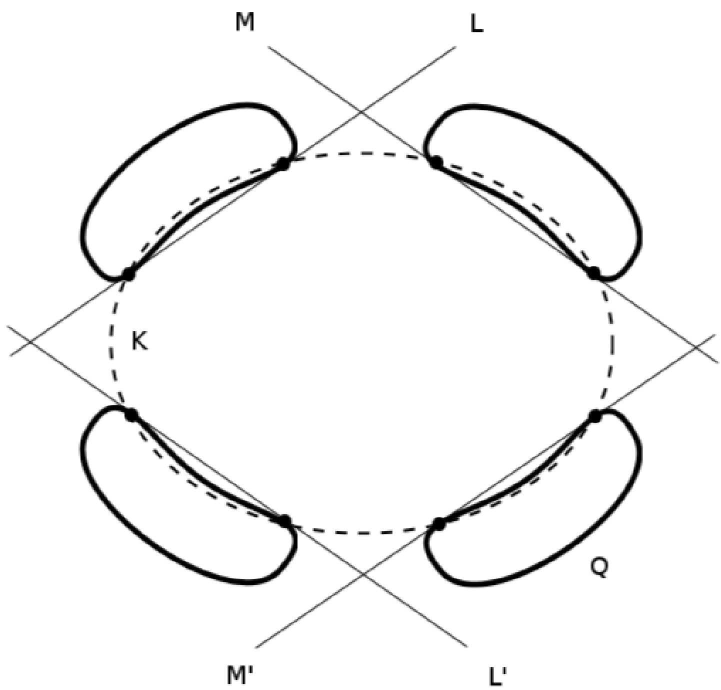

Figura 3.4: Quàrtica (part real, a $\mathbb{C}$ hi ha una única component connexa) no-singular amb una tètrada sizigètica de bitangents que generen una cònica que passa pels punts de tangència. Qualsevol família de tres d'aquestes rectes és una tríada sizigètica; i.e. no es troba dins de cap conjunt d'Aronhold.

Capítol 4

La quàrtica de Klein

Ocuparem aquest darrer capítol en exemplificar la teoria del capítol anterior amb una corba concreta. El procediment que seguirem no és gens canònic i no s'ha de pendre com un mètode per classificar una quàrtica. De fet, el que farem semblarà redundant per a molts lectors i, de fet, és objectivament cert que ho és, en el sentit en què pretenem partir d'una equació i acabar provant que arribem a la mateixa equació. L'interès aquí raurà en el camí que fem. Bàsicament el que volem és, prenent un exemple la solució del qual és coneguda, construïr els conjunts d'Aronhold i les tètrades sizigètiques per comprovar que aquest camí porta, efectivament, a l'equació de partida. A la pràctica, el hàndicap de no conéixer, a priori, les equacions de les rectes bitangents o altres dades útils fan d'aquest un procediment pràcticament inutilitzable, la validesa del qual es limita únicament a la verificació de la teoria.

4.1 Bitangents de la quàrtica de Klein

Ens situem a $\mathbb{C}$ i considerem l'espai projectiu $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Sigui $\{x_0 : \cdots : x_n; y\}$ una referència projectiva a $\mathbb{P}^2$, la quàrtica de Klein és la corba $\mathcal{Q} = V(F)$ donada per l'equació

$$F = X^3Y + Y^3Z + Z^3X.$$

El primer que ens cal per desenvolupar el procediment explicat al capítol anterior és conéixer les rectes bitangents a la corba. Com hom sap, una recta L serà tangent a $\mathcal{Q}$ pel punt $P = (x : y : z)$ si és de la forma

$$L := \mathcal{T}_P = \frac{\partial F}{\partial X}(x : y : z)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(x : y : z)Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(x : y : z)Z.$$

Aprofitant la teoria sobre dualitat, una manera de trobar les rectes bitangents consisteix en calcular la corba dual de $\mathcal{Q}$ i estudiar-ne les singularitats, car hem vist que les bitangents de la corba es corresponen amb les cúspides de la dual. Malauradament, l'expressió d'aquesta corba, que té grau 12, és la següent

$$\begin{aligned} F^*(X,Y,Z) = \quad & 27X^{10}Y^2 + 42X^5Y^6Z - 282X^7Y^3Z^2 - 4X^9Z^3 \\ & +651X^4Y^4Z^4 + 42X^6YZ^5 + 42XY^5Z^6 - 4X^3Y^9 \\ & -282X^3Y^2Z^7 - 282X^2Y^7Z^3 + 27X^2Z^{10} - 4Y^3Z^9, \end{aligned}$$

i el simple fet de buscar els punts on s'anul.len les derivades parcials suposa resoldre un sistema de tres equacions d'onzè grau. Alguns paquets de Mathematica permeten, però, dur a terme aquesta tasca.

A la proposició 9 de la referència [14] es presenta un mètode per calcular-les directament a partir de les arrels setenes de la unitat. La verificació d'aquest mètode rau en tota la teoria precedent a la proposició que hi ha en l'esmentat article i es basa en teoria de grups de Galois. Aquí la suposem certa i la usarem de punt de partida per a la nostra tasca.

Proposició 4.1.1. Considerem $\mathcal{Q}$ la quàrtica de Klein a $\mathbb{P}^2$. Sigui ζ una arrel setena primitiva de la unitat (com que 7 és primer, totes les arrels, tret de 1, són primitives), i fixem $\varepsilon_1 = \zeta + \zeta^{-1}$, $\varepsilon_2 = \zeta^2 + \zeta^{-2}$ i $\varepsilon_3 = \zeta^4 + \zeta^{-4}$. Aleshores, les 28 bitangents de $\mathcal{Q}$ venen donades per

$$\begin{cases} \ell_{0,j}: & \zeta^j Y + \zeta^{3j} X + Z = 0 \\ \ell_{1,j}: & \zeta^j \varepsilon_1^2 Y + \dfrac{\zeta^{3j}}{\varepsilon_3^2} X + Z = 0 \\ \ell_{2,j}: & \zeta^j \varepsilon_2^2 Y + \dfrac{\zeta^{3j}}{\varepsilon_1^2} X + Z = 0 \\ \ell_{3,j}: & \zeta^j \varepsilon_3^2 Y + \dfrac{\zeta^{3j}}{\varepsilon_2^2} X + Z = 0, \end{cases}$$

per a $j = 0, 1, \ldots, 6$.

Podem prendre les del tipus $\ell_{0,j}$ i comprovar que tres d'elles formen una tríada asizigètica, de manera que totes set conformin un Conjunt d'Aronhold. Aleshores, només caldrà aplicar el teorema d'Steiner-Hesse per escriure l'equació de la corba. Notem que, geomètricament, el fet que tres bitangents formin un tríada asizigètica es tradueix en que els sis punts de contacte amb la quàrtica no es trobin sobre una cònica, així que el que aquí tenim que fer és calcular els punts de contacte amb la quàrtica de cadascuna de les rectes triades i comprovar que no existeix cap cònica que passi per tots sis.

Comencem amb $\ell_{0,0} : Y + X - Z = 0$ i busquem els punts de contacte amb la quàrtica de Klein $\mathcal{Q} = V(F)$. Una manera és buscar les solucions del sistema

$$\begin{cases} Y + X + Z = 0 \\ X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0. \end{cases}$$

Deshomogeneïtzant respecte de Z obtenim

$$\begin{cases} y + x + 1 = 0 \\ x^3y + y^3 + x = 0, \end{cases}$$

Aquest sistema es pot resoldre algebraicament sempre i quan hom empri la fórmula de Cardano per a equacions de grau 4. El Mathematica produeix els següents resultats:

$$p_1 = (-\xi, \xi - 1) \text{ i } p_2 = (\xi^2, -\xi^2 - 1),$$

on $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és tal que $\xi^3 = -1$. Les solucions per a la recta $\ell_{0,1}$ són

$$p_3 = (\tfrac{1}{2}(-\zeta^4 + \sqrt{3\zeta}), \tfrac{1}{2}(-\zeta^6 - \sqrt{3\zeta^5})) \text{ i } p_4 = (\tfrac{1}{2}(-\zeta^4 - \sqrt{3\zeta}), \tfrac{1}{2}(-\zeta^6 + \sqrt{3\zeta^5})),$$

i per a la recta $\ell_{0,2}$,

$$p_5 = (\tfrac{1}{2}(\zeta + \sqrt{3\zeta^9}), \tfrac{1}{2}(\zeta^5 + \sqrt{3\zeta^3})) \text{ i } p_6 = (\tfrac{1}{2}(\zeta - \sqrt{3\zeta^9}), \tfrac{1}{2}(\zeta^5 - \sqrt{3\zeta^3})),$$

Comprovem ara que aquests sis punts no es troben sobre una cònica. Recordem que l'expressió general d'una cònica ve donada per una forma bilineal simètrica segons l'expressió

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

de la qual en resulta

$$X^2 + a_{1,1}Y^2 + a_{2,2}Z^2 + 2a_{0,1}XY + 2a_{0,2}XZ + 2a_{1,2}YZ = 0.$$

Si substituïm els sis punts obtinguts anteriorment en aquesta expressió, obtindrem un sistema lineal de sis equacions amb cinc incògnites. Tot el que hem de veure per comprovar que tenim una tríada asizigètica és que aquest sistema és incompatible. A l'annex trobareu un fitxer de Mathematica amb els càlculs computats que, finalment, mostra que aquest sistema és incompatible, de manera que $\ell_{0,0}$, $\ell_{0,1}$ i $\ell_{0,2}$ formen una tríada asizigètica.

Anàlogament es comprovaria per a la resta de tríades i arribaríem a que les rectes $\ell_{0,j}$ conformen un conjunt d'Aronhold.

4.2 Equació de la quàrtica de Klein

El teorema d'Steiner-Hesse diu que donada una parella de bitangents L, M, existeixen unes altres cinc parelles L', M' i una cònica $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{K}^2 = LML'M' \cdot \mathcal{Q}$. Prenem les rectes $\ell_{0,0}$ i $\ell_{1,0}$ de la secció anterior i provarem de trobar aquesta cònica –que és una d'entre 315 possibles– per tal d'escriure l'equació de la quàrtica de Klein.

Amb l'ajuda de Mathematica, hem fet diverses proves sense assolir resultats satisfactoris, malgrat que una ullada detinguda a les expressions obtingudes fan, com a mínim, sospitar que el mètode funciona. No podem verificar que tornem a l'expressió original de la quàrtica de Klein, però explicarem el camí seguit i les raons que tenim per pensar que l'argument és correcte.

Hem près les rectes $\ell_{k,0}$, amb $k = 0, 1, 2, 3$, triant-ne una de cada 7-tupla –la primera– ens garantim que no estan totes quatre al mateix conjunt d'Aronhold car, en cas contrari, qualsevol família de tres seria una tríada asizigètica i els sis punts de contacte amb $\mathcal{Q}$ no es trobaríen sobre una cònica, menys encara els vuit resultants d'afegir-hi la quarta. De fet, això és justament triar una tètrada sizigètica, i hom pot definir així tètrada sizigètica com una família de 4 bitangents tals que no totes quatre es troben contingudes en el mateix conjunt d'Aronhold. El següent pas ha estat fer-ne el producte. És a partir d'aquí quan el Mathematica comença a ser de poca ajuda: amb els paquets estàndards, almenys, es veu incapaç de reordenar les expressions resultants, tot eliminant aquelles que se simplifiquen, i ens retorna una expressió que ocupa 36 línies. Hem anomenat R a aquesta expressió.

Tot seguit, hem calculat cinc dels vuit punts de tangència amb les bitangents escollides i hem imposat que passéssin per una cònica. Notem que no calen tots vuit, car una cònica queda unívocament determinada per cinc punts no alineats i la teoria ja ens diu que si cinc punts com els triats es troben sobre una cònica $\mathcal{K}$, aleshores els altres tres també (proporcionant un criteri –poc pràctic– per saber si vuit punts donats es troben sobre una cònica).

Finalment, hem anomenat G a l'expressió corresponent a la cònica obtinguda i hem fet $F = G^2 + R$. L'expressió resultant no s'assembla pas a l'equació de partida de la quàrtica de Klein (a banda dels coeficients que el Mathematica no simplifica), però és vertaderament una expressió per a la mateixa: recordem que el mètode no dóna una equació única car, per exemple, la cònica obtinguda és una de 315 possibles. Qualsevol altra tria de bitangents i de subseqüents punts de tangència hagués produït una cònica diferent que, utilitzada de la mateixa manera, hagués donat una equació diferent per a $\mathcal{Q}$. La qüestió és que la teoria garanteix que, en qualsevol cas, existeix un canvi de coordenades projectives que transformen les equacions obtingudes en l'equació original del principi del capítol.

Els resultats d'aquest capítol es poden trobar a l'annex, al final del llibre, i el lector pot provar de treure'n les seves pròpies conclusions. Tanmateix, se suggereix mirar de reproduïr el procediment amb la quàrtica de Fermat, l'equació de la qual ve donada per $F = X^4 + Y^4 + Z^4$.

Apèndix A

Qüestions obertes

Fem ara una ullada a algunes qüestions ulteriors que, o bé han estat mencionades al llarg del mateix, o bé constitueixen un "següent pas" en el camí que s'inicia amb els conceptes que hem presentat en els capítols principals. El lector encuriosit pot seguir les referències i és animat a consultar la ingent bibliografia relacionada amb el tema.

A.1 La via Mumford

Al final de la secció 3.3 havíem desenvolupat tota una teoria que portava a una tècnica per comptar θ-característiques a partir de les formes quadràtiques associades a un espai simplèctic. La tesi final era que, si hom podia provar la correspondència entre formes quadràtiques i θ-característiques, aleshores n'hi havia prou de comptar formes quadràtiques, molt lligades al cardinal del conjunt de bases simplèctiques de l'espai V, per poder comptar θ-característiques i, en particular, bitangents.

Aquest fi es pot assolir mitjançant el teorema de Mumford, la demostració del qual queda molt lluny dels objectius d'aquest treball. Presentem aquí de manera molt resumida el raonament que se segueix (per exemple, a [12]) per deduïr que una quàrtica no-singular té exactament 28 bitangents. L'avantatge d'aquesta via és el que el resultat es pot generalitzar a qualsevol que sigui el gènere de la corba, essent que no es limita només al cas de quàrtiques no-singulars.

La demostració d'aquest teorema es troba a [13], apèndix B. Abans d'enunciar-lo, però, ens cal introduïr la definició d'un objecte que, de fet, ja ens és conegut:

Definició A.1. Donada una corba plana $\mathcal{C}$, definim el grup de Picard de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$, com el grup de les classes de divisors de $\mathcal{C}$ dotat de l'operació suma de divisors definida com a la secció 2.3.

Definició A.2. Considerem l'aplicació grau, $\deg : \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, que envia cada divisor al seu grau. El nucli d'aquesta aplicació també té estructura de grup i constitueix el grup de divisors de grau zero, amb l'operació induïda per $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$. El denotem per $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})$.

El fet que aquest nucli sigui també un grup es pot provar mitjançant un argument de successions exactes (de grups). Denotarem per $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[k] \subset \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})$ al grup d'elements de k-torsió de $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})$, és a dir, els elements $x \in \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})$ tals que $x^k = 0$.

Es pot demostrar que hi ha una bijecció Tch $\longleftrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[2]$ definida així: fixada una θ-característica L_0, posem $L \longmapsto L - L_0 = 2(\mathcal{V}_L - \mathcal{V}_{L_0}) = K - K = 0$, on K denota el divisor de la sèrie canònica.

El grup $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[2]$ queda identificat amb $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a través d'una forma simplèctica natural, anomenada **aparellament de Weil** ([12]). Aquest fet permet donar a $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[2]$ estructura de tor complex.

Teorema A.1.1 (Mumford)**.** Existeix una bijecció entre el conjunt QV i el conjunt TCh donada per $\mathcal{V} \mapsto Q_{\mathcal{V}}$, on

$$\begin{array}{cccc} Q_{\mathcal{V}}: & \mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})[2] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \alpha & \longmapsto & l(\mathcal{V}+\alpha) + l(\mathcal{V}), \pmod 2 \end{array}$$

La forma quadràtica $Q_{\mathcal{V}}$ és, respectivament, parell ó senar si, i només si, $l(\mathcal{V})$ és 0 ó 1. Diem, aleshores, que $\mathcal{V}$ és parell ó senar.

Observi's la relació entre els elements de 2-torsió de $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C})$ i les bases de l'espai simplèctic V, que recordem que és un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espai vectorial.

Corol.lari A.1.2. Si $g = 3$, aleshores hi ha exactament 28 θ-característiques senars i 36 θ-característiques parells.

Demostració: Apliqui's directament el lema 3.3.1. □

Corol.lari A.1.3. Una quàrtica projectiva plana no-singular $\mathcal{Q}$ té exactament 28 bitangents.

Demostració: Com que les corbes de gènere 3 són les quàrtiques projectives planes no-singulars, n'hi ha prou de combinar el corol.lari 3.2.2 amb el darrer corol.lari per obtenir el resultat. □

De fet, el recíproc també és cert, ja que l'equació $2^{g-1}(2g-1) = 28$ té $g = 3$ com a única solució a $\mathbb{N}$ (car el terme de l'esquerra és una funció injectiva per a tot $g \geq 1$). Això prova que una corba només pot tenir 28 bitangents si té gènere 3, i les úniques corbes que satisfan aquesta propietat són les quàrtiques no-singulars. És a dir:

Teorema A.1.4. Una corba $\mathcal{Q}$ és una quàrtica projectiva plana no-singular si, i només si, té 28 bitangents. En particular, dir que una corba té 28 bitangents és equivalent a dir que és de gènere 3.

Tal i com succeïa al final de la secció 3.3, es prova per aquest camí que les quàrtiques no-singulars queden determinades pel fet de tenir 28 bitangents. L'avantatge, si s'obvia el preu que cal pagar per assolir la teoria necessària que duu a la comprensió del teorema de Mumford, és que prescindeix de l'ús de la Segona Fórmula de Plücker, el principal problema de la qual és que precissa provar primer que una quàrtica no-singular és una corba de Plücker, la qual cosa, com ja hem vist, requereix emprar un farragós argument calculístic que mostra que una tal corba no té tangents hiperflexes.

A.2 Les bitangents determinen la corba

Al final del capítol 3 hem explicat que la construcció d'Aronhold presuposa que hom coneix una sèrie de rectes bitangents i els seus punts de contacte amb la corba, i que fóra desitjable saber que es pot recuperar la corba a partir només de les bitangents. L'any 2003, Lucia Caporaso i Edoardo Sernesi van provar en un article publicat al *Journal of Algebraic Geometry* ([15]) que això és en efecte possible. Per al cas de les quàrtiques s'usa un argument que recorre a la teoria d'esquemes, així com d'altres conceptes que resten molt llunyans a aquest treball, però els autors observen que, curiosament, si el grau de la corba és igual o superior a 5 aleshores la prova és un senzill raonament amb el teorema de Bézout. Qui escriu aquest treball no pot evitar establir una analogia entre aquest fet i el problema que resol el teorema de Poincaré-Perelman, on es va veure que era més senzill provar el resultat per a dimensió 4 o superior que per a dimensió 3.

Volem presentar en aquest annex la prova del teorema de les bitangents per a corbes de grau igual o superior a 5.

Teorema A.2.1 (de les bitangents)**.** Si $\mathcal{C}$ és una corba projectiva plana no-singular de grau $d \geq 5$, aleshores $\mathcal{C}$ queda unívocament determinada per les seves bitangents.

Demostració: Es pot usar la Segona Fórmula de Plücker (igualtats 1, 2 i 4) per veure que hi ha $\frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$ bitangents que es corresponen a igual quantitat de nodes de la corba dual $\mathcal{C}^*$. Com que $\mathcal{C}$ és no-singular, aleshores $\mathcal{C}^*$ té grau $d^2 - d$. Ara, suposem que hi hagués dues corbes diferents $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ amb les mateixes bitangents. Aleshores, les seves duals $\mathcal{C}_1^*$ i $\mathcal{C}_2^*$ es tallen en els seus $\frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$ nodes. Com que cadascun d'aquests nodes és un punt de multiplicitat 2 dins de cada corba, es té que, per a cada P que sigui un node de $\mathcal{C}_1^*$, $I_P(\mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*) = 4$. Sigui N el conjunt dels nodes de $\mathcal{C}_1^*$, aleshores, aplicant el teorema de Bézout s'obté

$$d^2(d-1)^2 = 2d(d-2)(d^2-9) + \sum_{P \notin N} I_P(\mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*),$$

essent el sumatori un nombre enter no negatiu. Ara bé, aquest darrer fet fa que la igualtat no se satisfci si $d \geq 5$, per tant $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ i les bitangents determinen la corba $\mathcal{C}$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Aquest fet il.lustra la dificultat que presenta el problema de la classificació de les quàrtiques projectives planes en comparació amb altres corbes. De fet, es pot veure per un raonament similar que determinades quàrtiques singulars queden també unívocament determinades per les seves bitangents. A les corbes que satisfan aquesta propietat se les anomena corbes amb la θ-propietat.

Apèndix B

Notes històriques

Tancarem aquest treball amb un breu comentari històric que repassa, de manera molt resumida, els fets més rellevants del progrés en la geometria moderna. Serveixi, doncs, per retre homenatge als personatges que s'hi mencionen, així com a d'altres que no hi aparéixen i que són igualment justos contribuïdors del pensament matemàtic. El text que aquí mostrem està basat en [11], referència recomanada per a tothom qui cerqui un text sobre la història recent de la geometria.

B.1 Poncelet i la Paradoxa del Dual

Tot i que els principis de la geometria projectiva es remunten a mitjans del Segle XVII, quan Desargues en van establir els fonaments, les idees que plantejava van caure en la dessidia, probablement sota l'ombra de l'obra de Descartes, fins a principis del Segle XVIII. La recuperació d'aquesta manera de fer geometria la podem situar en el context de la França de la Revolució de 1789 i dels convulsos anys que la van seguir. La primera personalitat en destacar dins l'àmbit geomètric d'aquesta època va ser Gaspard Monge. En un període de guerres i revolucions, Monge havia estat contractat per a la tasca de disenyar un fort que protegís les línies de defensa de l'Exèrcit Francès contra els atacs frontals de les tropes enemigues, i hi va destacar pels mètodes geomètrics que va emprar en els seus treballs, que resultaven més pràctics que els mètodes que fins aleshores figuraven als manuals. L'èxit de Monge va consistir en emprar un llenguatge que representava un punt de l'espai mitjançant uns valors numèrics que reflexen la seva posició dins de sengles plans (anomenats pla xy i pla yz) sobre els quals es projecta el punt. Mentre que aquestes idees no es basen en conceptes projectius, sí que implicaven un avenç en el pensament geomètric que suposaria el punt de partida de la geometria moderna: la geometria descriptiva, anomenada així en tant en quant un punt "queda descrit" per les seves projeccions sobre plans coordenats.

Un dels deixebles de Monge va ser Jean-Victor Poncelet. Poncelet va ésser capturat durant la Batalla de Krasnoy, a la Rússia zarista, l'any 1812 i va romandre presoner a l'hospital de Saratov fins a la signatura del Tractat de París a l'any 1814. Durant el seu captiveri es va dedicar a posar en ordre els seus coneixements matemàtics, i ho va fer sense ser conscient dels avenços que, al mateix temps, s'estaven produïnt al món de fora de la presó. Mentre escrivia, Poncelet es va adonar de que no recordava gaire res dels mètodes matemàtics que havia après a l'École Polytechnique, i es va veure una mica obligat a redescobrir els teoremes i resultats que anava necessitant mentre avançava. S'adonà de que els complicats arguments als que, en ocasions, s'apel.lava en les diverses demostracions no havíen estat pensats per romandre a la memòria d'aquells qui volguéssin emprar aquests resultats partint d'un profund coneixement dels mateixos i, d'alguna manera, va mirar de trobar raonaments més sintètics que prescindissin d'una notació massa farragosa per demostrar resultats que, per altra banda, a ell li semblaven força intuïtius.

Sota aquesta premisa va ser que Poncelet va escriure el seu *Traité des properitiés projectives des figures* (1822). En aquesta obra, Poncelet mira d'explicar la geometria a partir de les porpietats intrínsiques dels objectes més que no pas del lloc en el qual es troben o, fins i tot, de l'aspecte que tenen. Per exemple, hi va establir el Principi de Continuïtat, segons el qual les propietats d'un o diversos objectes relacionats es mantenen quan sobre ells s'aplica alguna mena de canvi que ell va anomenar, de manera molt intuïtiva, continu. Així, si dos cercles es tallen en dos punts, sotmetre tots dos cercles a una deformació que no suposi canvis bruscos ha de mantenir-los units per dos punts. Ell mateix, però, se'n va adonar de que aquesta idea portava a paradoxes, com ara on es troben els dos punts d'intersecció de dos cercles disjunts del pla (punts que ell va anomenar "ideals"), entenent que aquests dos cercles han assolit aquesta situació a partir d'estar units i ésser desplaçats cadascun en sentit contrari. Tot i que Poncelet no va donar gaire rigor a aquesta teoria, a ell li semblava força obvia, i és per això que es va convertir en un ferm defensor d'aquesta mena de raonaments; refusant tot aquell altre que recurrís a l'ús de coordenades o de qualsevol eina de la geometria analítica.

En aquesta línia, Poncelet va introduïr el concepte de recta de l'infinit i de polaritat. Va desenvolupar una forma de raonament que relacionava rectes amb punts, que relacionava *cada* recta amb *cada* punt, i, veient que resultats sobre punts tenien anàlegs sobre rectes, va enunciar el Principi de Dualitat. Aquest principi va ésser extés per Gergonne als seus *Annales* (1827-1828) i aquest fet va suscitar polèmica entre tots dos autors. El que Gergonne va fer va ser considerar les rectes polars de tots els punts d'una corba qualsevol –Poncelet només usava aquests conceptes per a les còniques– i es va preguntar quina entitat tenien aquestes rectes, veient posteriorment que conformen l'envolupant d'una altra corba que va anomenar la corba dual de l'original.

B.2 La solució de Plücker

D'entre les deduccions que Gergonne va fer de la seva interpretació general del Principi de Dualitat, n'hi ha una que diu que *si hom considera una sistema de punts qualsevol* *sobre una corba, aleshores hi ha igual quantitat de rectes tangents dels mateix ordre pel mateix punt de la corba dual.* Com hom sap, aquest resultat és fals degut a l'aparició de singularitats en corbes de grau 3 o superior, i malgrat que Poncelet va posar de relleu que hi havia un error, cap dels dos va ésser capaç d'explicar-ne la naturalesa amb rigor. Aquest fet, segons el qual algunes rectes "desapareixien" en ésser dualitzades, va ser conegut amb el nom de la Paradoxa del Dual, i la seva solució no va arribar fins l'any 1835, de la ma de Julius Plücker.

Les corbes algebraiques de grau alt ja havíen estat estudiades per Newton quan entre 1667 i 1668 va dur a terme un treball sobre les cúbiques, però poc més se'n va saber fins a l'estudi que en va fer Plücker. Aquest es va ocupar, inicialment, del problema de comptar les rectes tangents a una corba que passen per un punt del pla i, va establir que, en general, si la corba té grau n, aleshores hi ha $3n(n-2)$ rectes tangents a la corba. Per a ell, "general" volia dir que la corba no té punts singulars; i va provar la fórmula esmentada raonant sobre la coincidencia de les arrels del polinomi associat a la corba i el seu derivat. De manera anàloga va establir que el grau de la corba dual d'una corba de grau n és $n(n-1)$ i, en aquests termes, va reformular la Paradoxa del Dual observant que la dualitzada de la dualitzada que, segons els raonaments de Poncelet i Gergonne, havia de ser la pròpia corba; resultava tenir grau $n(n-1)(n^2-n-1)$. A la pràctica, aquesta relació és certa només per a les còniques, i ja falla amb les cúbiques: amb la teoria anterior, la dual d'una cúbica és una corba de grau 6, i la dualitzada de la dualitzada és una corba de grau 30, enlloc de 3.

El primer que va veure Plücker és que si hom prenia un punt sobre la corba i volia comptar les tangents a la corba que passéssin per aquest punt, el resultat no havia de ser diferent de si es prenia qualsevol altre punt del pla i que, per tant, les rectes tangents a la corba des d'un punt de la corba havíen d'ésser comptades de manera diferent. En aquesta línia, Plücker va descobrir que si prenia dos punts molts propers a l'original i sengles tangents per aquests punts, en moure aquests dos punts cap al punt de partida, les tangents col.lapsaven en la tangent pel punt original, i que aquest fet tenia incidència sobre la forma en la qual es transformen aquestes tangents en punts del dual. D'aquesta manera va establir que les tangents per una cúspide han d'ésser comptades dos cops, fent així que el grau de la corba dual baixi en dues unitats per cada cúspide de la corba original; i que les tangents per un punt d'inflexió han d'ésser comptades tres cops, fent que el grau de la corba dual baixi en tres unitats per cada punt d'inflexió de la corba original. Aquests raonaments són els que van dur a les Fórmules de Plücker i van aconseguir resoldre el problema de la Paradoxa del Dual.

El paper que van jugar les quàrtiques en aquesta qüestió el conformen l'aparició de les rectes bitangents, que en aquest treball hem tractat abstament. De les relacions anteriors en va deduïr que una corba no-singular de grau n té $3n(n-2)$ punts d'inflexió i que, per tant, la seva dual té igual nombre de cúspides. Això redueix el grau de la dual de la dual en $9n(n-2)$, malgrat que aquesta disminució encara no el redueix a n com es volia, sinò a $n(n-2)(n^2-9)$. Tanmateix, una recta que fos tangent en dos punts diferents produïria un punt doble en la corba dual, i Plücker ja havia explicat que cada punt doble redueix el grau de la dual en 2, deduïnt així que una corba de grau n sense punts dobles té $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ rectes bitangents –observi's com, en efecte, una quàrtica no-singular té 28 bitangents–, i resolent d'aquesta manera la Paradoxa del Dual. Més tard, Plücker va anar establint límits a les formes que pot pendre la corba dual en base al nombre de cúspides i inflexions i, amb la introducció de la Hessiana, que ell mateix va comprovar que talla la corba en $3n(n-2)$ punts –precissament les inflexions de la corba original–, va elaborar una llista de corbes quàrtiques segons el nombre de cúspides i inflexions que, més endavant, hauríen d'ésser construïdes i classificades per altres mitjants, més en la línea dels mostrats en aquest treball.

També va invertir part dels seus esforços en construïr una quàrtica les 28 tangents de la qual fóssin reals, cosa que va aconseguir ajustant el paràmetre μ de la corba

$$(x^2-y^2)(x-1)(x-\frac{3}{2})-2(y^2+x(x-2))^2=\mu,$$

i pel camí va descobrir que una quàrtica pot tenir 8, 16 o 28 bitangents reals i que cap altra quantitat és possible. Al final de la seva feina, Julius Plücker anunciava haver descrit totes les possibles corbes de grau $n \leq 10$, però de fet aquesta resolució es redueix a corbes que, com a molt, tinguin singularitats d'ordre 2, i en cap cas parla de corbes com, per exemple, quatre rectes concurrents o la quàrtica trinodal.

B.3 L'escola italiana

Cap a la dècada dels 1870, l'obra de personalitats com Beltrami, Felix Klein, Janos Bolyai o Lobachevskiy, entre d'altres, havia situat a les geometries no-euclidianes en una posició d'acceptació, i s'havia anat veient que la geometria projectiva, entesa com la geometria que treballa amb les propietats intrínseques més bàsiques dels objectes, proporcionava resultats que es podien interpretar des de qualsevol dels models de geometria que s'havíen construït. En aquesta línia, Arthur Cayley va escriure la famosa frase *la geometria projectiva és tota la geometria*.

Luigi Cremona es va doctorar en enginyeria civil l'any 1853, i les dificultats que va trobar per accedir a llocs de treball degut al seu historial polític i militar el van empényer a dedicar-se a la publicació d'articles matemàtics i a la docència en aquesta disciplina en el Ginnasio de Cremona (no confondre aquí el cognom de la persona amb el nom de la ciutat on treballava que, qui sap si per un caprici del destí, coincideixen). Luigi Cremona era un fervent entusiasta del Principi de Dualitat de Poncelet, fins al punt d'escriure molts dels seus llibres i articles a doble columna, una per als resultats que anava treient i una altra per a les seves versions duals. Al llarg de la seva vida acadèmica va fer contribucions en dualitat, raó doble i polaritat, entre d'altres; així com en la introducció de les transformacions que avui porten el seu nom i que permeten resoldre les singularitats d'una corba si hom la pensa com la imatge projectada d'una corba que viu en un espai de dimensió superior, idea que havia estat originalment obra de Veronese. De tots els seus èxits, però, en destaca el fet d'haver aconseguit que la geometria projectiva abandonés els "prejudicis" euclidians i pogués ésser treballada sense la barrera psicològica de si allò que diu es pot observar intuïtivament a la realitat o no.

Vora 1885, Giuseppe Peano i Corrado Segre van iniciar carreres paral.leles en el món de les matemàtiques amb visions contraposades que els durien a un enfrontament públic cap a finals de la dècada dels 1880. Peano opinava que molts treballs en geometria projectiva patien de manca de rigor i abusaven d'unes apel.lacions a la intuïció que ell trobava il.lícites. En efecte, Peano era el que avui dia es descriuria com un fonamentalista del formalisme; un autor que rebutjaria un treball independentment del seu contingut si era capaç de trobar la més mínima llacuna en el rigor del mateix. Aquest fet, malgrat tot, el va permetre arribar resultats que, en efecte, són contraris a la intuició, com ara una corba contínua que passa per tots els punts del pla –i que duu el seu nom– o una sèrie de construccions i contraexemples que, apel.lant només a la intuïció, no s'haguéssin pogut estudiar.

En camp contrari se situava Segre, qui considerava que els complicats arguments que els autors clàssics empraven per demostrar els seus resultats no ajudaven gens a la comprensió d'allò que volien explicar; i que el rigor excessiu es podia sacrificar en benefici de la claritat pedagògica (qui escriu aquestes línies s'ha de confesar, excusant-se davant tothom qui així no ho pensi, més proper a la doctrina de Segre que a la de Peano). La contribució més destacable de Segre va ser treballar amb espais de dimensió arbitrària sense complexes –fet que suscitava reticència en la majoria de científics, en entendre que no tenia aplicació pràctica– si fer-ho permetia resoldre problemes en 2 o 3 dimensions, fet que, d'alguna manera, ell entenia que mantenia el sentit pràctic dels seus raonaments. Tanmateix, cometia alguns errors considerables, com ara treballar amb coordenades homogènies sense mencionar que el $(0 : 0 : \cdots : 0)$ no hi és permès, essent aquesta la mena de situacions que ennervaven Peano.

Aquest repàs històric finalitza amb la menció de dos deixebles de Segre. El primer és Gino Fano, a qui devem el seu esforç en axiomatitzar la geometria en un sistema de postulats, tot mirant de cadascun fos independent dels precedents. Amb aquesta doctrina va ser capaç de construïr espais projectius sobre cossos finits, éssent el conegut Pla de Fano (el pla projectiu sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) un exemple que avui dia es presenta a molts cursos elementals de geometria projectiva. L'altre deixeble de Segre és Federigo Enriques, qui va modificar els fonaments de la geometria projectiva per adaptar-los a la seva visió, permetent així el seguiment de noves línies d'investigació desconegudes fins aleshores. Entre molts d'altres temes, Enriques va desenvolupar un mètode basat en les idees d'Aronhold, presentades en aquest mateix treball, per construïr l'eqüació d'una quàrtica no-singular per mitjà de l'espai de paràmetres d'una cúbica que passa per una sèrie de punts de tall de la corba amb les seves bitangents.

En aquest repàs històric no s'ha parlat de moltes altres importants personalitats, començant per Gauss i passant per Klein, Desargues, Pascal, Brianchon, Riemann, Hilbert, Silvester, Cayley, MacLaurin i molts d'altres que són prou coneguts. A tots ells, i també als investigadors contemporanis, els hi pertoca un lloc important en la història de la geometria projectiva i algebraica així com en la de les matemàtiques en general.

Bibliografia

[1] W. Fulton, “Curvas algebraicas”, Reverté 1971.

[2] G. Fischer, “Plane algebric curves”, AMS 2001.

[3] E. Casas-Alvero, “Analytic Projective Geometry”, 2008.

[4] I. V. Dolgachev, “Topics in Classical Algebraic Geometry”, (notes d’un curs) 2003.

[5] I. Shafarevich, “Basic Algebraic Geometry, vol. I”, Springer-Verlag 1977.

[6] S. Lang, “Álgebra”. Aguilar 1971.

[7] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, “Introducción al Álgebra Conmutativa”, Reverté 1989.

[8] V. Navarro, P. Pascual, “Topologia Algebraica”, Edicions UB 1990.

[9] C. Currás, “Geometria Diferencial”, Edicions UB 2003.

[10] J. Marsden, M. Hoffman, “Basic Complex Analysis”, Freeman 1999.

[11] J. Gray, “Worlds out of nothing”, Springer-Verlag 2007.

[12] E. Nart, “Bitangents and theta characteristics of plane quartics”, (article) 2005.

[13] E. Arbarello, M. Corbalba, P.A. Griffiths, J. Harris “Geometry of Algebraic Curves, Vol. I”, Grundlehren der matematischen Wissenchaften 267, Springer-Verlag 1985.

[14] T. Shioda, “Plane quartics and Mordell-Weil lattices of type E_7”, ICM report.

[15] L. Caporaso, E. Sernesi, “Recovering plane curves from their bitangents”, Journal of Algebraic Geometry núm. 12, pàgs. 225 a 244. 2003.

Annex: resultats amb Mathematica

Les següents pàgines corresponen als fitxers de Mathematica que contenen els càlculs referents al capítol 4 d'aquest treball. Les tres primeres corresponen a la comprovació de que les rectes $\ell_{0,j}$, $j = 0, 1, 2$, formen una tríada asizigètica, i les deu següents mostren el camí seguit per intentar escriure l'equació de la quàrtica de Klein.