Exercicis resolts de Matemàtiques I pels graus d'Economia i Empresa

Àlgebra Lineal

Oriol Roch Casellas
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials
Universitat de Barcelona

Índex

1 Matrius i sistemes lineals

Exercicis

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu

   (a) $A \cdot B$

   (b) A^2

   (c) A^{-1}

   (d) $B \cdot B'$ (aquí B' denota la matriu transposada de B)

2. Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & k & 0 \end{pmatrix}$. Calculeu el valor o valors de k tals que $|A| = 0$.

3. Calculeu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Donat el sistema $\left\{ \begin{aligned} y - 2z &= -6 \\ -x + y - 3z &= -9 \\ 3x + 2y + z &= -1 \end{aligned} \right.$

   (a) Apliqueu el teorema de Rouché-Frobenius per estudiar les seves solucions.

   (b) Resoleu el sistema.

5. Donat el sistema $\left\{ \begin{aligned} -6x + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \right.$

   (a) Apliqueu el teorema de Rouché-Frobenius per estudiar les seves solucions.

   (b) Resoleu el sistema.

   (c) Escolliu dues solucions i verifiqueu que compleixen el sistema.

6. Donat el sistema $\left\{ \begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 0 \\ 2x - 4y + 8z &= 0 \end{aligned} \right.$

   (a) Apliqueu el teorema de Rouché-Frobenius per estudiar les seves solucions.

   (b) Resoleu el sistema.

7. Donat el sistema $\left\{ \begin{aligned} 5x + y + 4z &= 2 \\ -3x - 3z &= 2 \\ y - z &= 2 \end{aligned} \right.$

   (a) Apliqueu el teorema de Rouché-Frobenius per estudiar les seves solucions.

(b) Resoleu el sistema.

8. Sigui A una matriu de dimensió $n \times n$. Si $\mathrm{Rang}(A) < n$, discutiu si podem assegurar que existeix algun vector b de dimensió n tal que $Ab = 0$.

Solucions

1. (a) $\begin{pmatrix} 32 & -25 \\ -29 & 20 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 7 & -32 & 44 \\ 14 & 17 & -4 \\ 6 & -4 & 15 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} \frac{15}{47} & \frac{12}{47} & \frac{-22}{47} \\ \frac{-8}{47} & \frac{3}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{-5}{47} & \frac{-4}{47} & \frac{23}{47} \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 41 & -14 \\ 1 & -14 & 5 \end{pmatrix}$

2. Si calculem el determinant tenim que $|A| = 0 + 4x + 0 - x - 3x = 0$. Per tant, el determinant sempre és 0 independentment del valor de x.

3. El rang de la matriu és 3, ja que podem trobar un menor d'ordre 3 no nul, per exemple $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2$. No és possible que el rang sigui 4 perquè el rang d'una matriu no pot ser major que el número de files o columnes que conté, i la matriu A conté 3 files.

4. (a) Seguint el teorema de Rouché-Frobenius, calculem el rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada:

   $$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

   $$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & -3 & -9 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

   Com els rangs coincideixen, el sistema és compatible i per tant té solució. A més a més, com els rangs coincideixen amb el nombre d'incògnites, el sistema és compatible determinant i per tant la solució és única.

   (b) Resolem el sistema per substitució. De la primera equació tenim que $y = 2z - 6$, i de la segona tenim que $x = y - 3z + 9$. Substituint aquests valors en la tercera equació obtenim

$$
\begin{aligned}
3(y-3z+9)+2(2z-6)+z &= -1\\
3y-9z+27+4z-12+z &= -1\\
3y-4z+15 &= -1\\
3(2z-6)-4z+15 &= -1\\
6z-18-4z+15 &= -1\\
2z &= 2\\
z &= 1
\end{aligned}
$$

Com de la primera equació tenim que $y = 2z - 6$, conegut el valor de z substituïm i trobem que $y = 2(3) - 6 = -1$. De forma anàloga, de la segona equació tenim $x = y - 3z + 9$. Substituint obtenim finalment $x = -4 - 3(1) + 9 = 2$.

En resum, la única solució del sistema és $x = 2, y = -4, z = 1$. En forma vectorial l'expressem com $(2, -4, 1)$.

5. (a) Procedint de forma anàloga a l'exercici anterior, el rang de la matriu del sistema

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és 2 donat que el menor no nul d'ordre màxim és d'ordre 2. El rang de la matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

també és 2 ja que afegir una columna de zeros no modifica el rang de la matriu. El nombre d'incògnites és 3. Per tant, en virtut del teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible indeterminat, ja que el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada però menor al nombre incògnites.

(b) Abans de començar a resoldre el sistema convé notar que el sistema té 1 grau de llibertat (recordem que els graus de llibertat s'obtenen com la diferència entre el nombre de variables, en aquest cas 3, i el rang de la matriu del sistema, en aquest cas 2). Això vol dir que la solució estarà en funció d'una de les variables. En el nostre cas farem que la solució estigui en funció de la variable x com a exemple.

De la primera equació obtenim $z = 6x$, i de la segona $z = -2z$, de manera que $z = -2(6x) = -12x$. Així, donant un valor a la variable x obtenim automàticament el valor de y i de z que resolen el sistema. En notació vectorial diem que la solució és de la forma $(x, -12x, 6x)$.

(c) De l'apartat b) sabem que les solucions del sistema són de forma $(x, -12x, 6x)$. Escollim per exemple $x = 1$, de manera que $y = -12x = -12(1) = -12$ i $z = 6x = 6(1) = 6$. És a dir, escollim la solució $(1, -12, 6)$. Substituint la solució al sistema tenim que la primera equació es verifica $-6(1)+6 = 0$, igual que la segona $-12 + 2(6) = 0$.

Si per exemple escollim $x = -3$, aleshores $y = -12(-3) = 36$ i $z = 6(-3) = -18$. Substituint al sistema es verifica tant la primera

$$-6(-3) - 18 = 0$$

com la segona

$$36 + 2(-18) = 0$$

equació.

6. (a) El rang de la matriu del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

és 1, ja que el menor no nul d'ordre màxim és d'ordre 1. El rang de la matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

també és 1 pel mateix motiu. El nombre de variables és 4. Seguint el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat.

(b) Com el sistema té dos graus de llibertat, la solució estarà en funció de dues variables, per exemple y, z. De la primera equació obtenim $x = 2y - 4z$. Per tant, les solucions són de la forma $(2y - 4z, y, z)$.

(c) De l'apartat b) sabem que les solucions del sistema són de forma $(2y - 4z, y, z)$. Escollim per exemple $y = 1$, $z = 1$ de manera que $x = 2y - 4z = 2(1) - 4(1) = -2$. És a dir, escollim la solució $(-2, 1, 1)$. Substituint la solució al sistema tenim que la primera equació es verifica $-(-2) + 2(1) - 4(1) = 0$, igual que la segona $-2(-2) - 4(1) + 8(1) = 0$.

Si per exemple escollim $y = 0$, $z = -1$ aleshores $x = 4$. Substituint al sistema es verifica tant la primera

$$-(4) + 2(0) - 4(-1) = 0$$

com la segona

$$2(4) - 4(0) + 8(1) = 0$$

equació.

7. (a) El rang de la matriu del sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

és 2, ja que el menor no nul d'odre màxim és d'ordre 2.

El rang de la matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

és 3, ja que al menys tenim un menor d'ordre 3 no nul, per exemple

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 22.$$

Seguint el teorema de Rouché-Frobenius, com el rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada són diferents, el sistema és incompatible i no existeix cap solució.

(b) De l'apartat anterior sabem que no existeix cap solució, per tant no cal pedre el temps intentant resoldre'l.

8. L'exercici pregunta per la solució del sistema $Ab = 0$. Segons el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible (és a dir, té solució) si el rang de la matriu dels sistema és igual al rang de la matriu ampliada. En aquest cas la matriu del sistema és la matriu A, que té rang diguem k, que sabem que és menor que n. La matriu ampliada és la matriu A juntament amb el vector de termes independents, que en aquest cas és un vector nul i per tant no augmenta el rang de A. Per tant, podem assegurar que el sistema té solució.

2 Combinacions lineals

Exercicis

1. Dibuixeu i descriviu de forma geomètrica (recta, pla,...) les combinacions lineals de

   (a) $\{(3,2)\}$

   (b) $\{(1,-1),(-3,3)\}$

   (c) $\{(0,1),(1,0)\}$

2. Descriviu de forma geomètrica (recta, pla,...) totes les combinacions lineals de

   (a) $\{(-1,-1,-1),(-4,-4,-4)\}$

   (b) $\{(2,0,0),(1,2,2)\}$

   (c) $\{(2,2,2),(1,0,1),(3,2,3)\}$

   (d) $\{(2,2,2),(1,0,1),(5,-3,2)\}$

3. Discutiu si el vector $\vec{u}=(2,0,-1)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{v}=(6,-2,4)$ i $\vec{w}=(-3,-1,2)$.

4. Discutiu si el vector $\vec{u}=(1,-2,6)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1=\left(\frac{3}{2},\frac{4}{5},2\right)$ i $\vec{u}_2=\left(1,\frac{9}{5},-1\right)$.

5. Discutiu si el vector $\vec{u}=(1,1,1)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1=(1,0,0)$, $\vec{u}_2=(0,1,0)$ i $\vec{u}_3=(0,0,1)$.

6. Discutiu per a quins valors del paràmetre k el vector $\vec{u}=(k,4,k)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1=(-1,2,2)$ i $\vec{u}_2=(4,2,1)$.

7. Discutiu per a quins valors del paràmetre k el vector $\vec{u}=(2,k,2)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1=(1,2,2)$ i $\vec{u}_2=(3,1,-1)$.

8. Discutiu per a quin valor o valors del paràmetre k el vector $\vec{u}=(5,5,5)$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1=(2,0,1)$, $\vec{u}_2=(k,6,0)$ i $\vec{u}_3=(-1,1,k)$.

9. Trobeu λ_1, λ_2, λ_3 tals que

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\14\end{pmatrix}.$$

10. Considerem els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de dimensió 3. Expliqueu per què si el determinant de la matriu formada pel tres vectors és diferent de 0, el vector $\vec{w}$ NO és combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$.

11. Sigui el vector $\vec{u} = (2, 4, 6)$ i siguin $\vec{u}_1 = (-1, -2, -3)$, $\vec{u}_2 = (-2, -4, -6)$. Discutiu si existeix algun vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ NO sigui combinació lineal dels vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$.

12. Volem comprovar que les combinacions lineals dels vectors $(2, -1, 3)$ i $(1, 4, 1)$ defineixen un pla i que el vector $(5, 2, 7)$ es troba en el citat pla. Per tant, trobeu l'equació del pla que passa per $(2, -1, 3), (1, 4, 1), (0, 0, 0)$ i comproveu que el vector $(5, 2, 7)$ satisfà l'equació del pla.

Solucions

1. (a) Les combinacions lineals d'un vector generen una recta, en aquest cas la que passa per $(3,2)$ i per $(0,0)$.
   (b) Els dos vectors són proporcionals (per exemple $(-3,3)=(-1)\cdot(1,-1)$), pel que generen una recta, en concret la que passa pel punts $(1,-1)$ i $(-3,-3)$ (i també pel $(0,0)$).
   (c) Les combinacions lineals de $\{(0,1),(1,0)\}$ omplen un espai de dimensió 2, ja que la matriu formada pel dos vectors té rang 2. Per tant, omplen un pla.

2. (a) Una recta que passa pels punts $(-1,-1,-4)$, $(-4,-4,-4)$ (i també $(0,0,0)$).
   (b) Un pla.
   (c) Un pla.
   (d) Omple tot l'espai tridimensional, ja que la matriu formada pel tres vectors té rang 3.

3. El vector $\vec{u}$ és combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ si el sistema d'equacions

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   és compatible, és a dir, que té solució. En cas contrari, si el sistema no té solució, el vector $\vec{u}$ no és combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Una alternativa és resoldre el sistema i veure si té o no solució. Una altra alternativa, més ràpida, és aplicar el teorema de Rouché-Frobenius. El rang de la matriu del sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   és igual a 2, mentre que el rang de la matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   és igual a 3. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, al ser el rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada diferents, el sistema és incompatible, i per tant el vector $\vec{u}$ NO és combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$.

4. Operant de forma anàloga a l'exercici anterior, comparem els rang de les matrius formades per $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ i per $\{\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$. Si els rangs coincideixen, el vector $\vec{u}$ serà combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. En cas contrari, no ho serà. Tenim

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Com els rangs són iguals, el vector $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.

La interpretacció geomètrica és que els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ generen un pla, i el vector $\vec{u}$ es troba situat dins d'aquest pla. Per tant, segur que $\vec{u}$ es pot obtenir com a combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.

5. En aquest cas, el rang de la matriu formada pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ té rang 3. El rang de la matriu ampliada pel vector $\vec{u}$ també té rang 3. Fixem-nos que el rang d'aquesta matriu no pot ser inferior a 3 perquè conté els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$, que ja tenien rang 3, i no pot ser quatre perquè la matriu conté tres files (el rang d'una matriu no por ser més gran que el nombre de files o columnes!). Per tant, el vector $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$. Podem interpretar-ho com que combinacions lineals dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ omplen tot l'espai tridimensional. El vector $\vec{u}$ es troba dins d'aquest espai, per tant es pot aconseguir com a combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$.

6. El rang de la matriu formada pel vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ és 2, ja que podem trobar algun menor d'ordre 2 no nul a la matriu, per exemple

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

El vector $\vec{u}$ serà combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ si el rang de la matriu formada pels tres vectors és també igual a 2. Tenim que

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} k & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

només si $k = 3$, ja que és l'únic cas en que el determinant d'ordre 3 s'anul·la. Així, el vector $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ només si $k = 3$.

7. De forma anàloga a l'exercici anterior, $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ només si $k = \frac{18}{7}$.

8. Tenim que la matriu del sistema

$$A := \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

té rang igual a 2 si $k = -\frac{6}{13}$ i igual a 3 si $k \neq -\frac{6}{13}$. Aleshores:

- En el cas $k \neq -\frac{6}{13}$, la matriu ampliada

$$(A; b) := \begin{pmatrix} 2 & k & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

té rang 3 i el vector $\vec{u}$ serà combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

- En el cas $k = -\frac{6}{13}$, la matriu ampliada $(A; b)$ té rang 3, ja que podem trobar un menor d'ordre 3 no nul, per exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -\frac{6}{13} & 5 \end{vmatrix} = \frac{60}{13} \neq 0.$$

  Com $\mathrm{Rang}(A) \neq \mathrm{Rang}(A; b)$ el vector $\vec{u}$ no serà combinació lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

9. Resolent el sistema trobem la solució única $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 1$.

10. Hem de comprovar si el vector $\vec{w}$ és una combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Això és equivalent a comprovar si el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

    té solució (no importa si és única o no). La matriu ampliada (formada pel tres vectors) té rang 3 perquè el determinant és diferent de 0. La matriu del sistema no potser més gran que 2 ja que nomé té dues columnes. Com el rang de la matriu del sistema no pot ser més gran que el rang de la matriu ampliada, el sistema no té solució i $\vec{w}$ no pot ser combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

11. No existeix. El vector $\vec{u}$ és combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, ja que per exemple $\vec{u} = 0 \cdot \vec{u}_1 - 2 \cdot \vec{u}_2$. Afegir un tercer vector per combinar no pot fer que deixi de ser així, ja que sempre podem fer $\vec{u} = 0 \cdot \vec{u}_1 - 2 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{w}$.

12. El pla queda definit pel l'equació $-13x + y + 9z = 0$ (si no ho heu estudiat mai podeu buscar per internet com trobar l'equació d'un pla que passa per 3 punts donats). Sustituint $(5, 2, 7)$ a l'equació obtenim $13 \cdot (5) + (2) + 9 \cdot (7) = 0$, que és cert i per tant el vector $(5, 2, 7)$ es troba en el pla.

3 Espais vectorials

Exercicis

1. Expliqueu per què qualsevol espai vectorial conté necessàriament el vector $\vec{0}$.
2. Discutiu si el conjunt que conté només el vector $\vec{0}$ és un espai vectorial.
3. Discutiu si els següents conjunts són espais vectorials:
   (a) El conjunt de matrius triangulars superiors d'ordre 3×3.
   (b) El conjunt de matrius d'ordre 3×2.
   (c) El conjunt de matrius singular d'ordre 2×2.
4. És possible que un espai vectorial contingui a la vegada vectors de dimensió 2 i de dimensió 3?
5. Doneu les dues definicions de conjunt de vectors linealment dependents.
6. Un conjunt de vectors que no és linealment dependent és necessàriament linealment independent?
7. Donats els vectors $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ i $\vec{u}_4 = (-2, 3, 1)$, mostreu que els vectors són linealment dependents:
   (a) Resolent el sistema $U\vec{\lambda} = \vec{0}$ i trobant una solució $\vec{\lambda} \neq \vec{0}$.
   (b) Comprovant que un dels vectors és combinació lineal dels altres.
8. Comproveu que el conjunt de vectors $\{\vec{u}_1 = (4, 0, 2), \vec{u}_2 = (0, 0, 0), \vec{u}_3 = (-2, 0, -1)\}$ és linealment dependent:
   (a) Comprovant que el sistema $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}$ és compatible indeterminat.
   (b) Comprovant que un dels vectors és combinació lineal dels altres.
9. Expliqueu per què qualsevol conjunt que contingui el vector $\vec{0}$ és linealment dependent.
10. Discutiu la dependència o independència lineal dels conjunts
    (a) $\{(1, -2, 3), (3, 1, 2), (2, -3, 1)\}$
    (b) $\{(-2, -3, 3), (3, 4, 1), (1, 2, -7)\}$
    (c) $\{(5, 6, 2), (2, 3, 5), (3, 2, -1)\}$

    Si el conjunt és linealment dependent, trobeu una combinació lineal dels primers dos vectors que doni com a resultat el tercer vector del conjunt.

11. Sigui el conjunt de vectors $\{(2,1),(4,2),(3,0)\}$. Comproveu primer que el conjunt és linealment dependent. Comproveu després que el tercer vector no es pot obtenir com a combinació lineal dels dos primers. Contradiu això la definició de conjunt de vectors linealment dependent?

12. Donats els vectors $\vec{u}=(0,2,3)$ i $\vec{v}=(-1,-4,1)$, escolliu un vector $\vec{w}$ tal que els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment independents.

13. Expliqueu per què qualsevol conjunt de m vectors de $\mathbb{R}^n$ és linealment dependent si $m>n$.

14. Trobeu el nombre més gran possible de vectors columna independents de:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

15. Comproveu que si $a=0$ o $d=0$ o $f=0$, els vectors columna de la matriu

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

són linealment dependents.

16. Donats els vectors $\vec{u}=(1,3,3)$, $\vec{v}=(1,0,1)$ i $\vec{w}=(6,k,-k)$, escolliu k tal que el conjunt de vectors sigui linealment independent.

17. Donats els vectors $\vec{u}=(2,2,1)$, $\vec{v}=(k,1,2)$ i $\vec{w}=(-3,k,1)$, escolliu k tal que el conjunt de vectors sigui linealment dependent.

18. Escolliu k tal que els vectors

$$\vec{u}_1=(3,5,1)\,, \quad \vec{u}_2=(k,4,7)\,, \quad \vec{u}_3=(2,-k,0)\,, \quad \vec{u}_4=(k,k,3)$$

siguin linealment independents.

19. Si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors linealment independents, discutiu si les següents afirmacions són certes o falses.

    (a) Els vectors $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ donats per $\vec{w}_1=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ i $\vec{w}_2=\vec{u}_1-\vec{u}_2$ sempre són linealment independents.

    (b) Els vectors $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ i $\vec{w}_3$ donats per $\vec{w}_1=\vec{u}_1$, $\vec{w}_2=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ i $\vec{w}_3=\vec{u}_1-\vec{u}_2$ sempre són linealment independents.

Solucions

1. Segons la definició d'espai vectorial, hem de ser capaços de multiplicar qualsevol element de l'espai vectorial per qualsevol nombre real i obtenir com a resultat un element del mateix espai vectorial. En particular, hem de ser capaços de multiplicar qualsevol element de l'espai per 0 (que és un nombre real). Com el resultat de multiplicar per 0 és sempre el vector $\vec{0}$, el vector $\vec{0}$ ha de pertànyer necessàriament a tot espai vectorial.

2. El conjunt que només conté el vector $\vec{0}$ és efectivament un espai vectorial. Segons la definició d'espai vectorial, combinacions lineals d'elements de l'espai tenen com a resultat elements del mateix espai. No importa si l'espai conté només un element, res no diu que no el puguem fer seguir diverses vegades. Per tant, qualsevol combinació lineal d'elements d'aquest conjunt en particular serà de la forma $\lambda_1\vec{0} + \lambda_2\vec{0} + \ldots + \lambda_n\vec{0}$, que té sempre com a resultat el vector $\vec{0}$, que és un element del mateix espai vectorial.

3. (a) És un espai vectorial perquè combinacions lineals de matrius triangulars superiors d'ordre 3×3 donen com a resultat matrius triangular superiors d'ordre 3×3. En el cas de combinacions lineal de dos elements de l'espai, formalment podem escriure

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{pmatrix}.$$

   (b) És un espai vectorial. Podem aplicar el mateix raonament que en el cas de l'apartat (a).

   (c) NO és un espai vectorial. Un simple contraexemple hauria de ser suficient. Considerem les matrius singulars (amb determinant igual a 0)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Sumant $A + B$ obtenim la matriu no singular $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. NO és possible. Tots els vectors d'un espai vectorial han de tenir la mateixa dimensió. Segons la definició d'espai vectorial hem de poder sumar dos elements de l'espai, però si tenim vectors de dimensió diferent això no serà possible.

5. Primera definició (dependència lineal): Un conjunt de vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n\}$ és linealment dependent si algun dels vectors del conjunt és combinació lineal de la resta.

Segona definició (dependència lineal): Un conjunt de vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n\}$ és linealment dependent si existeix alguna combinació lineal al sistema

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

diferent de la solució trivial.

6. Seguint les definicions dels apunts de teoria, si un conjunt de vectors no és linealment dependent ha de ser segur linealment independent.

7. (a) Resolent el sistema obtenim solucions de la forma $\{2\lambda_4, -3\lambda_4, -\lambda_4, \lambda_4\}$. Per tant, els vectors són linealment independents perquè existeixen solucions diferents a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (per exemple $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1$). De fet no cal resoldre el sistema per saber que existeixen solucions diferents a la solució trivial (tots zeros). El rang de la matriu del sistema és 3, igual que la matriu ampliada, però menor que el nombre de variables, 4. Això implica que el sistema té infinites solucions, i per tant alguna d'elles serà diferent a la trivial.

   (b) Veiem per exemple que el vector $\vec{u_4}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$. Resolent el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   trobem la solució $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, el que implica que $\vec{u_4}$ és combinació lineal de $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$. Per tant, els quatre vectors no poden ser linealment independents.

8. El més simple per resoldre l'apartat a) és utilitzar el teorema de Rouché-Frobenius. El rang de la matriu del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   és igual a 1. El rang de la matriu ampliada també és igual a 1, donat que afegir una columna de zeros corresponent als termes independents no modifica el rang de la matriu. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, al ser el rang de la matriu del sistema igual al rang de la matriu ampliada el sistema és compatible, i al ser els rangs menors que el nombre d'incógnites, 3, el sistema és compatible indeterminat.

   Una altra alternativa és resoldre el sistema directament, el que dóna solucions de la forma $(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1)$, pròpies d'un sistema compatible indeterminat.

   A l'apartat b) només és necessari comprovar que un dels vectors és combinació lineal de la resta. Per exemple, el vector $\vec{u}_2$ és combinació lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_3$, ja que $\vec{u}_2 = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_3$.

9. Perquè el vector $\vec{0}$ sempre es pot construir com a combinació lineal de la resta de vectors mitjançant la combinació lineal

$$0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0}.$$

10. Ho podem resoldre de forma fàcil calculant el rang de les matrius formades pels vectors columna. Si el rang és igual al nombre de columnes, el conjunt serà linealment independent. En cas contrari, serà linealment dependent.

    Quan la matriu és quadrada, un mètode alternatiu és calcular el determinant: si el determinant és igual a 0, els vectors són linealment dependents, en cas contrari els vectors són linealment independents. Fixem-nos que aquests mètode només funciona si les matrius són quadrades.

    (a) El determinant de la matriu formada pels tres vectors és és igual a -28. Per tant el conjunt de vectors és linealment independent.

    (b) El determinant de la matriu formada pels vectors és igual a 0. Per tant, el conjunt de vectors és linealment dependent. Resolent el sistema

    $$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

    trobem que el tercer vector del conjunt pot obtenir-se multiplicant el primer vector per -2 i restant el segon vector ($\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$).

    (c) El determinant de la matriu formada pel tres vectors és 27, per tant el conjunt és linealment independent.

11. El rang de la matriu formada pels tres vector és 2, menor que el nombre de vectors, per tant el conjunt és linealment dependent. El sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    és incompatible, pel que el vector $(3, 0)$ no pot ser combinació lineal dels vectors $(2, 1)$ i $(4, 2)$. Notem que no incompleix la definició de conjunt de vectors linealment dependent. Segona la definició, un conjunt de vectors és linealment dependent si algun dels vectors és combinació lineal dels altres. Per exemple, els vector $(2, 1) = 2 \cdot (4, 2)$. Això no implica però que tots els vectors del conjunt hagin de ser combinació lineal de la resta.

12. Qualsevol vector tal que la matriu formada pels tres vectors tingui rang 3 serveix. Per exemple, el vector $\vec{w} = (1, -3, 0)$.

13. Si posem els m vectors columna en una matriu, la matriu serà d'ordre $n \times m$. Per a que els vectors siguin linealment independents el rang de la matriu hauria de ser m, però no pot ser ja que com a molt la matriu tindrà rang n (recordem que el rang d'una matriu no pot ser major que el nombre de files o columnes) i $n < m$.

14. El rang d'una matriu ens informa del major nombre de vectors columna independents que conté. La matriu A té rang 3, mentre que la matriu B té rang 2. Per a fer més simple el càlcul del rang recordem que una columna o fila de zeros no pot fer augmentar el rang de la matriu i per tant és prescindible a l'hora de calcular-lo.

15. És fàcil de veure que si $a = 0$ o $d = 0$ of $f = 0$ el rang de la matriu no pot ser 3 i per tant els vectors columna no poden ser linealment independents.

16. Els vectors són linealment independents si el determinant de la matriu formada pels tres vectors és 0. Calculant el determinant en funció del paràmetre k i resolent tenim que $k = -\frac{18}{5}$. Per tant, els vectors són linealment <u>independents</u> si $k \neq -\frac{18}{5}$.

17. Seguint el mètode de l'exercici anterior, els vectors són linealment <u>dependents</u> si $k = 7$ o $k = -1$.

18. Si construïm una matriu a partir dels quatre vectors, els vectors són linealment independents si el rang de la matriu formada té rang 4. Però això no és possible ja que la matriu té 3 files i el rang de la matriu no pot ser major que el nombre de files o columnes. Per tant, no importa quina k escollim que el conjunt de vectors sempre serà linealment dependent.

19. (a) Els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment independents si la única combinació lineal que satisfà $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 = \vec{0}$ és la corresponent a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En termes de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, l'equació es pot reescriure com

$$\lambda_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \lambda_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0}.$$

Reagrupant termes obtenim

$$\vec{u}_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \vec{u}_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0}.$$

Aquesta és una combinació lineal de vectors $\vec{w}_1$ and $\vec{w}_2$ que produeix el vector $\vec{0}$. Com sabem que els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment independents, la única combinació que produeix el vector $\vec{0}$ és aquella en la que $(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ i $(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Resolent el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

trobem una única solució $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, el que segons la definició d'independència lineal implica que els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment independents.

(b) Fent servir la mateixa tècnica que abans, arribem al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

que té infinites solucions. Per tant, els vectors $\vec{w}_1$, $\vec{w}_3$ i $\vec{w}_3$ són linealment dependents, ja que existeix una solució diferent a la trivial al sistema $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 = \vec{0}$.

4 Base i dimensió

Exercicis

1. Considereu els vectors $\vec{u}_1 = (3, \frac{1}{2})$, $\vec{u}_2 = (\frac{9}{2}, \frac{3}{4})$, $\vec{u}_3 = (-\frac{3}{2}, 2)$.

   (a) El conjunt format pel vector $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$?

   (b) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$?

   (c) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$?

   (d) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$?

   (e) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$?

   (f) El conjunt format pel vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$?

2. Considereu els vectors $\vec{u}_1 = (3, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 2)$, $\vec{u}_3 = (3, 0, -3)$, $\vec{u}_4 = (0, 3, 3)$.

   (a) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$?

   (b) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ i $\vec{u}_4$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$?

   (c) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$?

   (d) El conjunt format pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$? Qué generen?

3. Per generar l'espai vectorial $\mathbb{R}^6$, quants vectors necessitem?

4. Trobeu el valor o valors del parámetre k tals que el conjunt de vectors

   $$\{(1, 2, 0), (3, 0, 2), (1, k, 3), (0, 2, -1)\}$$

   sigui un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$.

5. Discutiu si la següent afirmació és certa o falsa:
   "El conjunt de vectors $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ forma una base de $\mathbb{R}^n$ si tot vector de $\mathbb{R}^n$ és combinació lineal dels vectors del conjunt B i si cap vector del conjunt B no és combinació lineal de la resta".

6. Calculeu el valor o valors de k tals que els vectors $(k, -k, 3), (3, 2, 0), (1, 4, 6)$ formin una base de $\mathbb{R}^3$.

7. Els vectors de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (3, -1, 2)\,,\ \vec{u}_2 = (4, 5, 1)\ \text{ i } \vec{u}_3 = (0, 2, 0)$$

són linealment independents? Formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$? I una base de $\mathbb{R}^3$?

8. Trobeu els components del vector $(1, -6, 3)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $\vec{u}_1 = (2, -1, 2)$, $\vec{u}_2 = (3, 2, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 2, 1)$.

9. Sabent que els components del vector $\vec{u} = (a, b, c)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1, 0, 2), (-1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$ són $(1, 2, -2)$, es demana calcular el valor de a, b i c.

10. El conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, on tots els vectors pertànyen a $\mathbb{R}^3$, pot ser una base de $\mathbb{R}^3$? I un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$?

11. Donada una base de $\mathbb{R}^2$ formada pels vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, es demana explicar per qué els components de qualsevol vector de $\mathbb{R}^2$ en aquesta base són únics.

12. Expliqueu per què les columnes de qualsevol matriu no singular d'ordre $n \times n$ formen una base de $\mathbb{R}^n$.

13. Discutiu si les següents afirmacions són certes o falses:

    (a) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ no poden existir conjunts de més de tres vectors linealment independents.

    (b) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$, tot conjunt de quatre vectors forma un base de $\mathbb{R}^4$.

    (c) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$, tot conjunt que contingui menys de quatre vectors és linealment independent.

    (d) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$, tot conjunt de més de quatre vectors és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^4$.

14. Expliqueu per què si el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$, el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ també és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$.

15. Si els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ formen una base de $\mathbb{R}^3$

    (a) Comproveu que els $\vec{w}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{w}_2 = 2\vec{u}_2$ and $\vec{w}_3 = 3\vec{u}_3$ també formen una base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Si els components de cert vector en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ só $(5, 8, 27)$, quin són els components del mateix vector en la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

16. Quina és la dimensió de l'espai vectorial nul?

Solucions

1. (a) No. Un únic vector no és suficient per generar un espai bi-dimensional. Es necessiten al menys dos vectors linealment independents.
   (b) No perquè els dos vectors són linealment dependents.
   (c) Sí, són dos vectors de $\mathbb{R}^2$ linealment independents.
   (d) Sí, són dos vectors de $\mathbb{R}^2$ linealment independents.
   (e) Sí. D'entre els tres vectors en podem trobar dos linealment independents, suficient per generar $\mathbb{R}^2$.
   (f) No. Els vectors només tenen dos components. Per generar l'espai $\mathbb{R}^3$ es necessiten vectors amb tres components.

2. (a) No. Calen tres vectors linealment independents per generar $\mathbb{R}^3$.
   (b) No. Calen tres vectors linealment independents per generar $\mathbb{R}^3$.
   (c) No. La matriu formada pels tres vectors té rang 2, per tant no poden generar $\mathbb{R}^3$.
   (d) No. Igual que a l'apartat anterior. La matriu formada amb els vectors té rang 2, per tant els vectors generen un espai bi-dimensional dins de $\mathbb{R}^3$, és a dir, un pla dins $\mathbb{R}^3$.

3. Necessitem al menys 6 vectors de $\mathbb{R}^6$ (és a dir, vectors amb 6 components) tals que el rang de la matriu que formen sigui 6. Fixem-nos que el rang d'aquesta matriu no pot ser major que 6 perquè la matriu tindrà 6 files (si posem els vectors en columna), i el rang d'una matriu no pot ser major que el nombre de files o columnes que conté.

4. Per a que el conjunt de vectors sigui un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$, el rang de la matriu formada pels vectors ha de ser 3, és a dir, d'entre ells hem de poder trobar-ne tres linealment independients. Això és cert per a tot valor de k, doncs la matriu formada pels vectors $(1, 2, 0)$, $(3, 0, 2)$ i $(0, 2, -1)$ ja té rang 3, i afegir qualsevol altre vector a aquests tres no modificar el rang.

5. És certa. Si tot vector de $\mathbb{R}^n$ és combinació lineal dels vectors del conjunt B, això implica que B és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$. Si cap dels vectors de B no és combinació lineal de la resta de vectors, això implica que el conjunt de vectors B és linealment independent.

6. Tota base de $\mathbb{R}^3$ está formada per tres vectors de $\mathbb{R}^3$ linealment independents. Per tant, serà suficient amb calcular en quins casos el rang de la matriu formada pels tres vectors és 3, el que es complirà sempre que el determinant de la matriu sigui diferent de 0. Analitzem per a quins valors el determinant és cero:

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ -k & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12k + 36 - 6 + 18k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1.$$

Així, el determinant serà diferent de 0, i per tant els vectors formaran una base de $\mathbb{R}^3$, si $k \neq -1$.

7. El rang de la matriu formada pels vector té rang 3. Per tant, els vectors són linealment independents.

   Al ser tres vectors de $\mathbb{R}^3$ i la seva matriu tenir rang 3, formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$.

   Com els vectors formen un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ i són linealment independents, són base de $\mathbb{R}^3$.

8. Per calcular els components del vector $(1, -6, 3)$ en la base formada pels vectors $\vec{u}_1 = (2, -1, 2)$, $\vec{u}_2 = (3, 2, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 2, 1)$ hem de resoldre el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Els components buscats són els valors de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Donat que els components d'un vector en un base són únics, el sistema és compatible determinat i té una única solució. Resolent el sistema trobem la solució $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = -1)$.

9. És suficient amb resoldre

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

   que té com a resultat $a = -7$, $b = 0$, $c = 2$.

10. No pot ser base de $\mathbb{R}^3$ no importa quins siguin els vectors. Una base de $\mathbb{R}^3$ conté exactament tres vectors linealment independents, i aquest conjunt conté quatre vectors. No obstant, sí que pot ser un sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ si existeixen al menys tres vectors de $\mathbb{R}^3$ linealment independents en el conjunt.

11. Sigui $\vec{w} = (w_1, w_2)$ un vector qualsevol de $\mathbb{R}^2$. Els components del vector $\vec{w}$ en la base formada pels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són las combinacions de λ_1, λ_2 que resolen el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

   Si els components són únics el sistema ha de ser necessàriament compatible determinat. Aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el rang de la matriu del sistema és 2, ja que els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, al ser base, són linealment independents. El rang de la matriu ampliada també és 2, pel que es confirma que el sistema és compatible determinat i té una única solució.

12. Per definició, una matriu no singular té determinant diferent de 0. Per tant, els vectors de la matriu són linealment independents. Com la matriu conté n vectors (tots de dimensió n), tenim n vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independents, el que dóna una base de $\mathbb{R}^n$.

13. (a) Cert.
    (b) Fals. Nomé els conjunts de quatre vectors de $\mathbb{R}^4$ linealment independents.
    (c) Fals. Per exemple el conjunt $\{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(3,3,3,3)\}$ és linealment dependent.
    (d) Fals. El conjunt ha de contenir 4 vectors linealment independents.

14. Si el conjunt $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$, això vol dir que existeixen n vectors linealment independents en el conjunt, o el que és el mateix, que el rang de la matriu U formada pels vectors del conjunt és n. Fixem-nos que la dimensió de la matriu U és $n \times k$ i que $k \geq n$ (en cas contrari el conjunt contendria menys vectors que la dimensió de l'espai i no seria suficient per generar-lo), per tant el rang de la matriu U no pot ser major que n. Si ara afegim un vector a la matriu U, la nova matriu tindrà dimensió $(k+1) \times n$. Anomenem V a aquesta matriu. No és difícil veure que V té rang n (perquè $k+1 > n$ i U ja és de rang n), el que implica que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1})$ també és un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$.

15. (a) És suficient amb veure que $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ són linealment independents, és a dir, que la única combinació lineal que satisfà $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 = \vec{0}$ és aquella en la que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En termes de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ tenim
    $$\lambda_1\vec{u}_1 + 2\lambda_2\vec{u}_2 + 3\lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}.$$
    Com els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ són linealment independents, la única combinació que produeix el vector $\vec{0}$ és la que té coeficients 0, per tant
    $$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ 2\lambda_2 & = 0 \\ 3\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$
    que té com a única solució $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Per tant, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ són linealment independents.
    (b) Sigui $\vec{v}$ el vector amb components $(5, 8, 27)$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Aleshores,
    $$\vec{v} = 5\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2 + 27\vec{u}_3,$$
    que en termes de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ és
    $$\vec{v} = 5\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 + 9\vec{w}_3.$$
    Així, els components del vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ són $(5, 4, 9)$.

16. Hem definit la dimensió d'un espai vectorial com el nombre de vectors que conté qualsevol de les seves bases. Sabem que el conjunt que només conté el vector nul és linealment dependent, per tant no podem trobar una base per a aquest espai. En altres paraules, la base de l'espai vectorial nul és el conjunt buit, la seva base no conté cap vector i la dimensió és 0.

5 Subespais vectorials

Exercicis

1. Comproveu si els vectors
$$\vec{u}_1 = (2,3,1)\,,\ \vec{u}_2 = (1,0,-2)$$
generen un pla a $\mathbb{R}^3$ i trobeu la seva equació. Comproveu que la combinació lineal $3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ satisfà l'equació.

2. Descriviu el subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ generat pel vector
$$\vec{u} = (-3,4)$$
i trobeu la seva expressió analítica.

3. Descriviu el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pel vector $\vec{u} = (3,-1,2)$ i trobeu la seva expressió analítica.

4. Els vectors
$$\vec{u}_1 = (1,-1)\,,\ \vec{u}_2 = (-3,3)\,,\ \vec{u}_3 = (2,1)$$
generen un subespai vectorial a $\mathbb{R}^2$. Trobeu una base del subespai vectorial i calculeu la seva dimensió.

5. Trobeu l'expressió conjuntista del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors
$$\vec{u}_1 = (-3,1,0)\,,\ \vec{u}_2 = (1,-2,3)\,.$$
Una vegada trobat, i donat el vector $\vec{u} = (a,3,3)$, trobeu el valor o valors de a tals que el vector $\vec{u}$ es trobi al citat subespai vectorial.

6. Trobeu l'expressió conjuntista del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors
$$\vec{u}_1 = (-3,0,1)\,,\ \vec{u}_2 = (6,0,-2)\,,\ \vec{u}_3 = (3,0,-1)\,.$$

7. Trobeu l'expressió conjuntista del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors
$$\vec{u}_1 = (2,4,1)\,,\ \vec{u}_2 = (-3,1,2)\,,\ \vec{u}_3 = (7,7,0)\,.$$

8. Trobeu una base del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ format per tots els vectors de $\mathbb{R}^3$ que tinguin els seus components iguals.

9. Trobeu una base del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ format per tots els vectors de $\mathbb{R}^3$ en els que la suma de les seves components sigui 1.

10. Trobeu una base del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ donat per
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0, x + y = 0\}$$
i calculeu la seva dimensió.

11. Trobeu una base pel subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ donada per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y - z = 0\}$$

i calculeu la seva dimensió.

12. Donat el conjunt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\}$$

   (a) Comproveu que S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Trobeu una base de S i calculeu la seva dimensió.

13. Comproveu si el conjunt

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

14. Comproveu que el conjunt

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{y} = 0\right\}$$

no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

15. Estudieu si el conjunt

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solucions

1. La matriu formada pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ té rang 2. Per tant els dos vectors són linealment independents, i sabem que dos vectors de $\mathbb{R}^3$ linealment independents generen una pla a $\mathbb{R}^3$. Resolent el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

trobem la solució $6x - 5y + 3z = 0$. La combinació lineal $3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ dóna com a resultat el vector $(8, 9, -1)$. Substituint a l'equació del pla obtenim $6 \cdot 8 - 5 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) = 0$, amb el que es comprova que la combinació satisfà l'equació.

2. Un vector de $\mathbb{R}^2$ diferent de $\vec{0}$ genera una recta a $\mathbb{R}^2$. Resolent el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en funció de x, y trobem la solució $\frac{4}{3}x + y = 0$, que defineix una recta a $\mathbb{R}^2$. Per tant, combinacions lineals del vector $\vec{u}$ només produeixen vectors tals que quatre terços del seu primer component més el seu segon component sigui igual a cero.

3. Un vector de $\mathbb{R}^3$ diferent de $\vec{0}$ genera una recta a $\mathbb{R}^3$. Resolent el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en funció de x, y, z trobem la solució $\{3z - 2x = 0,\ x + 3y = 0\}$. Aquesta solució defineix una recta com l'intersecció de dos plans.

4. El rang de la matriu formada pels tres vectors és 2, així que d'entre els tres vectors en podem trobar dos de linealment independents que generin tot $\mathbb{R}^2$ (recordem que $\mathbb{R}^2$ és un subespai de $\mathbb{R}^2$). Per exemple, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ formen una base d'aquest subespai vectorial. La dimensió és 2, ja que seva base està formada per dos vectors.

5. Per trobar l'expresión analítica del subespai vectorial resolem el sistema

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

d'on obtenim $3x + 9y + 5z = 0$.

Per a que el vector $\vec{u} = (a, 3, 3)$ pertanyi al subespai vectorial haurà de complir l'equació $3x + 9y + 5z = 0$. Substituint obtenim $3(a) + 9 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 0$, d'on trobem $a = -14$.

6. Qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ amb components iguals (excepte el $\vec{0}$) serviria com a base, per exemple el vector $(1, 1, 1)$.

7. Aquesta és una pregunta trampa. Els vectors de $\mathbb{R}^3$ amb components que sumin 1 es troben al pla $x + y + z = 1$. No obstant, aquest pla no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ ja que el vector $\vec{0}$ no es troba dins de l'espai (una demostració més formal de que no és un subespai vectorial es troba a la solució de l'exercici 11).

8. El subespai vectorial S és una recta que passa per l'origen, ja que es tracta de la intersecció de dos plans diferents que passen per l'origen.

   Un procediment general per trobar una base de S és resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   Aquest sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, pel que la solució dependrà d'una variable. En aquest cas concret, resolent el sistema trobem que té infinites soluciones de la forma $(x, -x, -3x)$. El pas següent és trobar un vector que compleixi la solució, per exemple el $(1, -1, -3)$. Donat que el conjunt $B = \{(1, -1, -3)\}$ és un conjunt linealment independent, B és una base del subespai vectorial S.

   La dimensió de S és el nombre de vectors que conté qualsevol de les seves bases, per tant, 1.

9. Resolent el sistema d'equacions lineals trobem que la solució és de la forma $(x, y, 4x - 2y)$. Si $x = 0$ tindrem vectors de la forma $y(0, 1, -2)$ mentre que si $y = 0$ tindrem vectors de la forma $x(1, 0, 4)$. Una base del subesapi vectorial seria per exemple $\{(0, 1, -2), (1, 0, 4)\}$. La seva dimensió és 2.

10. (a) És trivial comprovar que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ i que $S \neq \emptyset$ (per exemple, el vector $(-3, 2, 2) \in S$). Falta comprovar que combinacions lineals de S també pertanyen a S. Siguin $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ elements de S. Combinacions lineals de $\vec{u}$ and $\vec{v}$ són de la forma

$$\lambda_1(u_1, u_2, u_3) + \lambda_2(v_1, v_2, v_3), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

   Simplificant obtenim el vector

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1, \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3).$$

   Si aquest vector és un element de S, dues vegades el seu primer component més tres vegades el seu segon component ha de ser igual a zero. Per tant,

$$2(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1) + 3(\lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2) = 0.$$

   Reagrupant tenim

$$\lambda_1(2u_1 + 3u_2) + \lambda_2(2v_1 + 3v_2) = 0,$$

Com $\vec{u}$ pertany a S, també tenim que dues vegades el seu primer component més tres vegades el seu segon component ha de ser igual a zero ($2u_1 + 3u_2 = 0$). Fent el mateix per $\vec{v}$ obtenim

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

que es compleix no importa quines λ_1, λ_2 escollim.

(b) Resolent el sistema (que en aquest cas consisteix només en una equació) trobem que la solució és de la forma $(\frac{-3}{2}y, y, z)$. Una base de S és per exemple $\{(0,0,1), (\frac{-3}{2}, 1, 0)\}$. Dim($S$)=2.

11. Aquest exercici està relacionat amb l'exercici 7. És trivial comprovar que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ i que $S \neq \emptyset$ (per exemple el vector $(-2, 2, 1) \in S$). Falta comprovar si combinacions lineals de vectors de S també pertanyen a S. Siguin $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ elements de S. Combinacions lineals de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són de la forma

$$\lambda_1(u_1, u_2, u_3) + \lambda_2(v_1, v_2, v_3), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Simplificant obtenim el vector

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1, \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3).$$

Si aquest vector és un element de S, la suma dels seus components ha de ser igual a 1. Per tant,

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1) + (\lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2) + (\lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3) = 1.$$

Reagrupant tenim

$$\lambda_1(u_1 + u_2 + u_3) + \lambda_2(v_1 + v_2 + v_3) = 0,$$

Com $\vec{u}$ pertany a S, la suma de les seves components és igual a 1 ($u_1+u_2+u_3 = 1$). El mateix per $\vec{v}$ i tenim

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

que NO és cert per tot λ_1, λ_2. Per tant, S no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

12. S no conté el vector $\vec{0}$, per tant no pot ser un subespai vectorial.

13. En un principi el conjunt no sembla lineal en absolut. No obstant, observem que aquest conjunt només conté un element: el vector $(0, 0)$. Ja sabem que el conjunt $\{(0, 0)\}$ satisfà els requisits per a ser un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$, per tant S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

6 Espai euclidià i topologia en $\mathbb{R}^n$

Exercicis

1. Calculeu el producte escalar dels vectors $\vec{u} = (-3, 0, 2, 1)$ i $\vec{v} = (4, 1, -1, 2)$. Els vectors són perpendiculars?

2. Trobeu el valor de k tal que els vectors $\vec{u} = (3, k, -2)$ i $\vec{v} = (k, k, 5)$ siguin perpendiculars.

3. Analitzeu si els vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ i $\vec{v} = (0, 0, 0)$ són perpendiculars.

4. Calculeu la norma del vector $\vec{u} = (2, -1, 0, 4, -1)$.

5. Normalitzeu el vector $\vec{u} = (5, -2, 1, 1)$.

6. Donats els dos vectors $\vec{u} = (2, 3, -4)$ i $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, comproveu que es compleix la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$$

7. Expliqueu la diferència entre una base ortogonal i una base ortonormal.

8. Donats els vectors $\vec{u} = (k, 1/2)$ i $\vec{v} = (1/2, 1/3)$, discutiu si existeix algun valor o valors de k tals que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formin una base **ortonormal** de $\mathbb{R}^2$.

9. Calculeu l'angle format pels vectors $\vec{u} = (-2, 4, 4)$ y $\vec{v} = (3, 4, 0)$.

10. Existeix algún valor o valores de k tals que la distancia entre els vectors $(4, 0, 1, k)$ y $(-1, k, 5, 0)$ sigui igual a 7?

11. Donat el conjunt

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1) + y^2 \leq 4, y \leq 0\right\}$$

dibuixeu-lo i discutiu si es tracta d'un conjunt obert, tancat, fitat/acotat, compacte i convex.

12. Donat el conjunt

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > -2, -x + y \leq -1\right\}$$

discutiu si es tracta d'un conjunt obert, tancat, fitat/acotat, compacte i convex.

Solucions

1. Segons la definició de producte escalar tenim que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -12$$

Els vector no són perpendicular perquè el producte escalar és diferent de 0.

2. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ seran perpendiculars si el seu producte escalar és 0. Per tant, s'haurà de complir que $(3, k, -2) \cdot (k, k, 5) = 0$. Simplificant tenim que

$$k^2 + 3k - 10 = 0.$$

Resolent aquesta equació trobem que $k = -5$ o $k = 2$.

3. Els vectors NO són perpendiculars. Encara que el producte escalar dona 0, els vectors no poden ser ortogonals perquè dos vectors ortogonals sempre són linealment independents (no ho demostrarem en aquest curs), i ja sabem que un conjunt de vectors que conté el vector $\vec{0}$ sempre és linealment dependent. Per auqesta raó la definició de vectors ortogonals o perpendiculars exclou el vector $\vec{0}$.

4. Aplicant la definició de norma euclidiana d'un vector tenim

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{22}$$

5. Per normalitzar un vector l'hem de dividir per la seva norma. Per tant primer calculem

$$||\vec{u}|| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{31}$$

de manera que $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = (\frac{5}{\sqrt{31}}, \frac{-2}{\sqrt{31}}, \frac{1}{\sqrt{31}}, \frac{1}{\sqrt{31}})$.

6. Tenim que

$$|\vec{u}| = |(2, 3, -4) \cdot (-1, 0, 1)| = |2(-1) + 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1| = |-6| = 6$$

i que

$$||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{2} \simeq 6'8$$

pel que efectivament es compleix la desigualtat donat que $6 \leq 6'8$.

7. Tant en la base ortogonal com en la ortonormal els vectors que la composen són perpendiculars. La diferència està en que el la base ortonormal els vectors són unitaris.

8. Un requisit per a que los vectors formin una base ortonormal és que siguin unitaris, és a dir, que la seva norma sigui igual a 1. La norma del vector $\vec{v} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{13}/6 \neq 1$, pel que $\vec{u}$, $\vec{v}$ mai podran formar una base ortogonal, no importa el valor de k.

9. Si α és l'àngle format per $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenim

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{10}{6 \cdot 5} = \frac{1}{3}$$

aleshores $\alpha = \arccos(1/3) \simeq 70'53\,°$.

10. Donats dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, la distancia entre ells es calcula com $||\vec{u} - \vec{v}||$. En el cas concret dels vectors de l'enunciat, primer restem les seves components

$$\vec{u} - \vec{v} = (4, 0, 1, k) - (-1, k, 5, 0) = (5, -k, -4, k)$$

i posteriorment calculem la norma del vector resultant

$$||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{5^2 + (-k)^2 + (-4)^2 + k^2}\,.$$

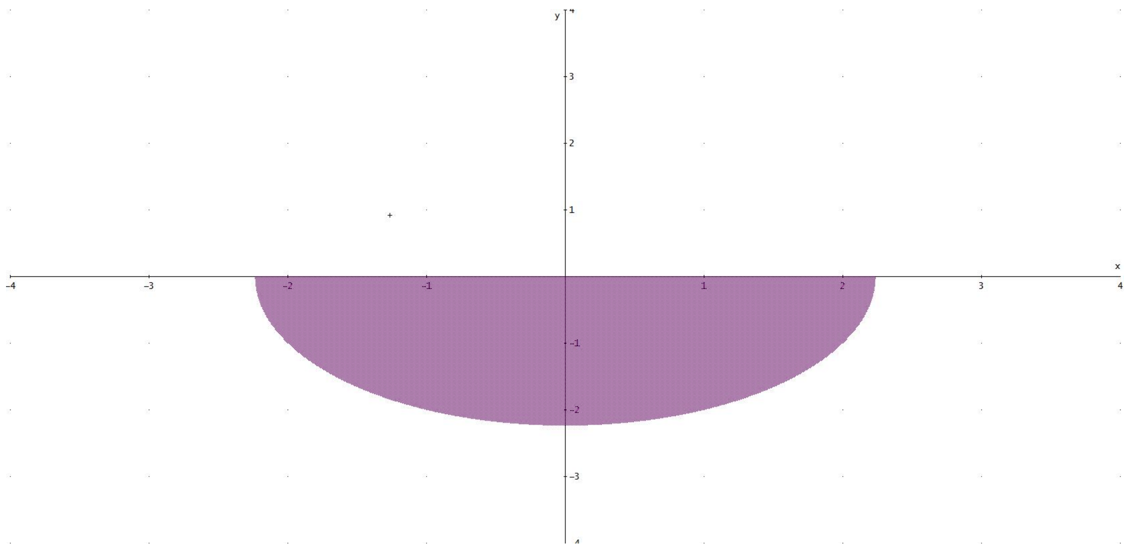
Segons l'enunciat, la distancia ha de ser igual a 7, pel que es verificarà

$$\sqrt{5^2 + (-k)^2 + (-4)^2 + k^2} = 7\,.$$

Simplificant obtenim

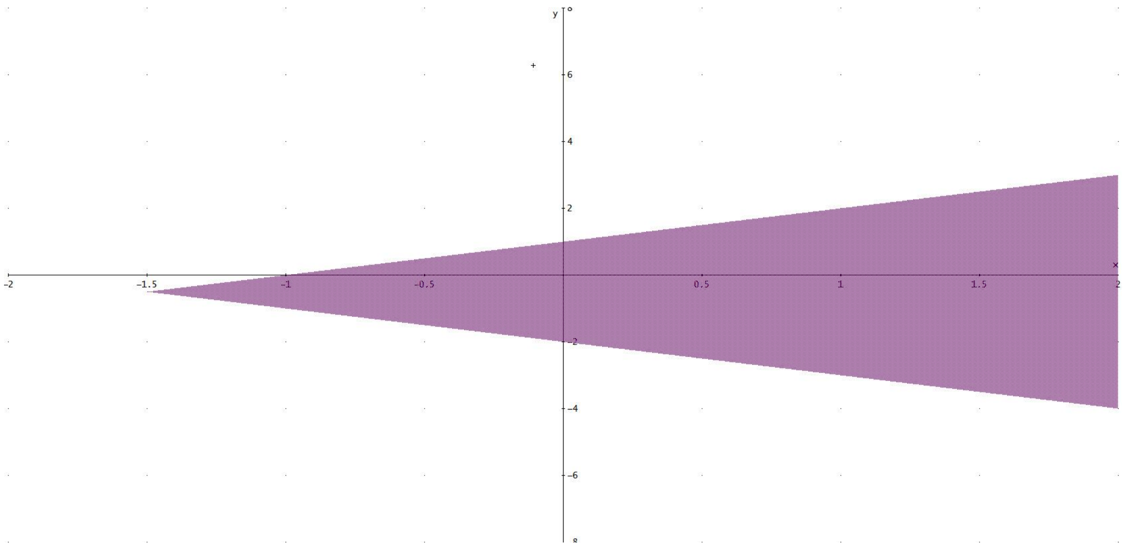
$$\begin{aligned} 5^2 + (-k)^2 + (-4)^2 + k^2 &= 49 \\ 25 + k^2 + 16 + k^2 &= 49 \\ 2k^2 &= 8 \\ k^2 &= 4 \\ k &= \pm 2 \end{aligned}$$

11. Dibuixant la regió tenim



El conjunt no és obert perquè no exclou tots els punts de la frontera, és tancat perquè inclou tots els punts frontera, el conjunt és fitat perquè existeix una bola que el conté, és compacte perquè per definició un domini compacte és tancat i fitat i és convex perquè per tot parell de punts del domini tals el segment que els uneix està estrictament inclòs en el domini.

12. Dibuixant la regió tenim



El conjunt no és obert perquè no exclou tots els punts de la frontera, no és tancat perquè no inclou tots els punts frontera, no és fitat perquè existeix una bola que el contingui, no és compacte perquè per definició un domini compacte és tancat i fitat i és convex perquè per tot parell de punts del domini el segment que els uneix està estrictament inclòs en el domini.

7 Formes quadràtiques

Exercicis

1. Donada la forma quadràtica de $\mathbb{R}^3$ definida per
$$Q\left(x,y,z\right)=-3x^2+z^2+6xy+3xz-2yz$$
trobeu la seva matriu associada.

2. Trobeu l'expressió analítica de la forma quadràtica d'$\mathbb{R}^3$ que té per matriu associada
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{9}{2} & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Classifiqueu la forma quadràtica $Q(x,y,z)=-3x^2+2xy-y^2+4yz-8z^2$.

4. Classifiqueu la forma quadràtica $Q(x,y)=-2x^2-y^2+2axy$ en funció del paràmetre a.

5. Classifiqueu la forma quadràtica de $\mathbb{R}^3$ que té com a matriu associada
$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Donada la forma quadràtica $Q(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2+4xy-8xz-4yz$, es demana:
   (a) Classificar $Q(x,y,z)$.
   (b) Classificar $Q(x,y,z)$ restringida al subespai vectorial $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y-2z=0\}$.

7. Discutiu si és possible que una forma quadràtica definida negativa sigui definida positiva en alguna restricció a un subespai vectorial.

8. Classifiqueu la forma quadràtica d'$\mathbb{R}^3$ definida per
$$Q\left(x,y,z\right)=2x^2+5xy+2yz$$
restringida al conjunt
$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=2y\right\}.$$

9. Classifiqueu la forma quadràtica d'$\mathbb{R}^3$ que té com a matriu associada
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Classifiqueu també la forma quadràtica restringida al subespai vectorial
$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x+y-z=0\right\}.$$

Solucions

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $Q(x, y, z) = y^2 - 4z^2 + 9xz - 4yz$

3. Per classificar la forma quadràtica farem servir el mètode dels menors principals. La matriu associada a la forma quadràtica és

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

   Els menors principals d'orde 1 de la matriu associada són $P_1 = \{-3, -1, -8\}$, els d'ordre 2 són $P_2 = \{2, 24, 4\}$ i el menor d'ordre tres $P_3 = \{-4\}$. Per tant, al ser els menors principals d'orde parell negatius i els d'ordre parell positius, la forma quadrática és definida negativa.

4. Aplicant el mètode dels menors principals tenim $P_1 = \{-2, -1\}$ i $P_2 = \{2 - a^2\}$. Així, si -$\sqrt{2} < a < +\sqrt{2}$, la forma quadràtica és definida negativa, si $a = \pm\sqrt{2}$ és semidefinida negativa i $a < -\sqrt{2}$ 0 $a > +\sqrt{2}$ és indefinida.

5. Aplicant el mètode dels menor principals, trobem que $P_1 = \{5, 2, 1\}$, $P_2 = \{1, 1, 1\}$ i $P_3 = \{0\}$. Per tant, la forma quadràtica és semidefinida positiva.

6. Aplicant el mètode dels menors principals, la matriu associada a la forma quadràtica es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Els menors principals d'ordre 1 de la matriu associada són $P_1 = \{3, 1, 1\}$, els d'ordre 2 són $P_2 = \{-1, -3, -13\}$ i el menor d'ordre tres $P_3 = \{3\}$. Per tant, es indefinida.

   Si restringim a S, substituint $x = -y + 2z$ en $Q(x, y, z)$ i simplificant obtenim la forma quadràtica restringida $Q(y, z) = -3z^2$, que és semidefinida negativa ja que clarament només pot prendre valors negatius o nuls (si no us convenç aquest argument torneu a aplicar el mètode dels menors principals).

7. Segons la definició, si una forma quadràtica és definida negativa el valor de la funció en qualsevol punt del seu domini és negatiu. Òbviament, si restringim el domini d'aquesta funció a qualsevol subespai, el valor de la funció seguirà sent sempre negatiu. Per tant, sota cap restricció podrà tenir assolir un valor positiu i per tant mai serà definida positiva.

8. Substituint $x = 2y$ a $Q(x,y,z)$ obtenim la forma quadràtica restringida $Q(y,z) = 18y^2 + 2yz$, que té com a matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculant els menors principals de A obtenim $P_1 = \{18, 0\}$, $P_2 = \{-1\}$. Per tant, la forma quadràtica és indefinida.

9. Segons el mètode dels menor principals, com $P_1 = \{3, 1, 0\}$, $P_2 = \{-1, -1, -1\}$ i $P_3 = 0$, la forma quadràtica és indefinida. Si la restringim al subespai vectorial S obtenim la forma quadràtica restringida $Q(y,z) = 7x^2 + 3y^2 + 10xy$, que té com a matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Com els menors principals d'ordre 1 d'aquesta matriu són $\{7, 5\}$ i el d'ordre 2 és $\{-4\}$, la forma quadràtica restringida és indefinida.