Universitat de Barcelona

Facultat d'Economia i Empresa

APUNTS DE MATEMÀTIQUES II

Gonzalo Rodríguez Pérez

Departament de Matemàtica Econòmica,

Financera i Actuarial

Graus d'ADE i d'Economia

PRÒLEG

Aquests Apunts de Matemàtiques II dels graus d'ADE (Administració i Direcció d'Empreses) i d'Economia de la Facultat d'Economia i Empresa tenen per objecte ser desenvolupats a les classes presencials d'aquest assignatura. Per tant s'han de prendre com una guia, un resum, i no pas com a un substitut d'elles.
El contingut s'ha estructurat segons el programa que hom troba al Pla Docent de l'assignatura. Aquest programa contempla dos Blocs temàtics ben diferenciats: el primer d'ells, anomenat *Optimització restringida*, té a veure amb la cerca dels òptims -màxims i mínims- de funcions escalars que es troben restringits o condicionats per igualtats (tema 1) o bé per desigualtats (tema 2); el segon, que porta per nom *Anàlisi dinàmica,* està dedicat a desenvolupar els conceptes d'integral indefinida (primitiva) i integral definida d'una funció real de variable real, amb algunes aplicacions econòmiques d'interès (tema 3), i a estudiar, encara que de forma somera, les equacions diferencials ordinàries (tema 4) que són un tipus d'equacions que juguen un paper molt important en el procés de "matematització" de la ciència econòmica.
La majoria dels conceptes que aquí s'exposen venen acompanyats d'exemples il·lustratius, així com de puntualitzacions i comentaris en forma de notes a peu de pàgina que, a ben segur, facilitaran la seva comprensió. En aquest sentit també estan pensats els exercicis que hom troba al final de cada tema i que demanen ser resolts. Val a dir que al final dels Apunts s'ha inclòs una petita ressenya bibliogràfica, així com també un glossari de termes amb l'objectiu d'ajudar en la cerca dels conceptes més importants que aquí s'exposen.
Per últim indicar que aquest document ha estat acceptat i arxivat en el Dipòsit Digital de la UB dins la col·lecció OMADO (Objectes i MAterials DOcents):

http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/33364

i que el seu contingut, així com les possibles errades que hom hi pugui trobar, són responsabilitat única i exclusiva de l'autor.

Gonzalo Rodríguez Pérez

ÍNDEX

BLOC I: **Optimització restringida**

1. OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS D'IGUALTAT

L'optimització matemàtica és un instrument clau en l'àmbit de l'economia i de l'empresa. Hom pot dir que l'optimització permet assignar, de manera eficient, recursos escassos entre activitats econòmiques alternatives. Doncs bé, quan aquests recursos, a més, cal esgotar-los, l'optimització restringida ho serà per igualtats. A tall d'exemple, considerem el següent exemple econòmic:

Exemple: Se sap que la funció de producció d'un fabricant d'un cert producte P depèn de dos factors de producció, sent de tipus Cobb-Douglas de la forma:

$$Q(x, y) = 4 \cdot x^{0,5} \cdot y^{0,5} \text{ unitats}$$

on $x > 0$ i $y > 0$ indiquen, respectivament, les unitats emprades en cadascun dels dos factors. Si els costos unitaris d'aquets factors són constants i iguals a 2 i 8 u.m., el fabricant vol esbrinar quin seria el cost mínim de produir 32 unitats de P, així com el nivell de cadascun dels dos factors emprats. És tractaria doncs de minimitzar la funció de costos:

$$C = C(x, y) = 2 \cdot x + 8 \cdot y \text{ u.m.}$$

subjecta a la "restricció" de producció:

$$Q(x, y) = 4 \cdot x^{0,5} \cdot y^{0,5} = 32 \text{ unitats.}$$

En definitiva, el fabricant hauria de resoldre el "programa d'òptims restringits per igualtats":

$$\left.\begin{array}{ll} \text{min} & C(x, y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{array}\right\}.$$ [1]

Demostrarem més endavant que les quantitats d'ambdós factors de producció que minimitzen els costos de producció són 16 unitats del primer factor i 4 del segon, amb un valor monetari mínim dels costos igual a 64 u.m. [2]

---

[1] L'abreviació "min" indica que es tracta de minimitzar la funció de costos, i "s. a" indica, per la seva banda, "subjecta a" o "restringida a".
[2] Al final del tema.

1.1. Programa d'òptims restringits per igualtats

1.1.1. *Programa d'òptims restringits per igualtats o equacions*

Així doncs podem definir ara, amb tota generalitat, la noció de programa:[3]

Definició: Un **programa d'òptims restringits** o **condicionats per igualtats** (**programa** a partir d'ara) és un problema d'optimització que adopta la forma:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

on: [4]

1. $z = f(x_1, \dots, x_n)$ és la **funció escalar objectiu**.
2. $x_1, \dots, x_n$ són les n **variables instrumentals** o **de decisió**.
3. $g_i(x_1, \dots, x_n)$ són les m **funcions escalars de restricció**.[5]
4. $b_1, \dots, b_m$ són les m **constants de restricció**.

Cal tenir en compte que, per regla general, el nombre m d'equacions de restricció ha de ser menor que el nombre n de variables instrumentals.

Exemple: El programa anterior:

$$\left.\begin{array}{ll} \min & C(x,y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{array}\right\}$$

és un programa amb $n = 2$ variables instrumentals i $m = 1$ equacions de restricció.[6]

---

[3] A partir d'ara totes les funcions escalars a considerar tindran derivades parcials segones contínues. Aquesta restricció matemàtica ens assegura poder aplicar els resultats matemàtics que aniran apareixent per aquestes planes.
[4] Optimitzar en el sentit de maximitzar i/o minimitzar.
[5] Per tant $g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i$ serà una de les m **equacions de restricció** del programa.
[6] És evident que les variables instrumentals d'un programa de caire econòmic han de ser positives; és el que s'anomena **restricció de signe** o **de positivitat**. Tanmateix, i per no complicar els càlculs, considerarem explícitament aquesta restricció quan sigui estrictament necessari.

1.1.2. *Conjunt i punt factible d'un programa*

El procés de resolució d'un programa ha de començar posant l'èmfasi en els punts que satisfan les equacions de restricció ja que, òbviament, estem obligats a optimitzar la funció objectiu sobre ells. Apareix així, de forma totalment natural, el concepte de conjunt factible:

<u>Definició</u>: El **conjunt factible** (també dit **admissible** o **d'oportunitats**) d'un programa és el conjunt format per tots aquells punts del domini de la funció objectiu que satisfan totes les restriccions d'igualtat associades. De tot punt que hi pertany en direm **punt factible**.

<u>Exemple</u>: Donat el programa:

$$\left.\begin{array}{ll}\min & C(x,y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32\end{array}\right\}$$

1. Determina el seu conjunt factible.
2. Prova que el punt (16,4) n'és un punt factible.

SOLUCIÓ:

(1) El conjunt factible del programa és el conjunt format pels punts del primer quadrant que satisfan l'equació de restricció:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ i } 4x^{0,5}y^{0,5} = 32\}.$$ [7]

Com que:

$$4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \text{ és equivalent a: } xy = 64$$

deduïm que el conjunt factible està format pels punts de la branca de la hipèrbola equilàtera $xy = 64$ que es troba en el primer quadrant de $\mathbb{R}^2$ ■

(2) Que el punt (16,4) és un punt factible és evident ja que:

$$(x,y) = (16,4) \text{ implica: } 4x^{0,5}y^{0,5} = 4 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 32 \blacksquare$$

[7] Els punts factibles han de tenir les coordenades positives doncs han d'admetre arrel quadrada degut a l'equació de restricció. D'aquí que el conjunt factible estigui dins el primer quadrant de referència.

1.1.3. *Òptim i valor òptim d'un programa*

Doncs bé "resoldre" un programa d'òptims condicionats per equacions consisteix en optimitzar la funció objectiu, no sobre el seu domini de definició, sinó sobre el conjunt factible associat. En l'exemple econòmic introductori, per exemple, el que cal és trobar un punt (x, y) sobre la hipèrbola $xy = 64$ del primer quadrant que minimitzi la funció objectiu $C(x, y) = 2x + 8y$. Aquest punt, si existeix, serà l'òptim del programa:

$$\left.\begin{array}{ll} \min & C(x,y) = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{array}\right\}.$$ [8]

Definició: El punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un **òptim** del programa:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{array}\right.$$

si és un punt factible que optimitza la funció objectiu sobre el conjunt factible associat. Per definició, al valor que pren la funció objectiu en l'òptim:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

li direm **valor òptim** del programa.

Pensem que els òptims "lliures" (és a dir, els òptims de funcions escalars sense restriccions) i els òptims restringits no sempre coincideixen.[9] Vegem un exemple:

Exemple: El programa de màxim:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 1 - x^2 - y^2 \\ \text{s.a:} & x + y = 1 \end{array}\right\}$$

té un òptim (màxim) en el punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mentre que la seva funció objectiu:

$$z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

té un òptim (màxim) lliure en el punt (0,0).

[8] Notem que la funció objectiu, al ser una funció lineal, no té ni màxims ni mínim.
[9] De fet gairebé mai ho fan.

1.2. Mètodes gràfic i directe de resolució

1.2.1. *Mètode gràfic*

El teorema que enunciem tot seguit ens diu on trobar, en la majoria de casos, els òptims de programes amb $n = 2$ variables instrumentals i $m = 1$ igualtats de restricció.

<u>Teorema</u>: L'òptim d'un programa de la forma:

$$\begin{cases} \text{Opt} & z = f(x, y) \\ \text{s. a:} & g(x, y) = b \end{cases}$$

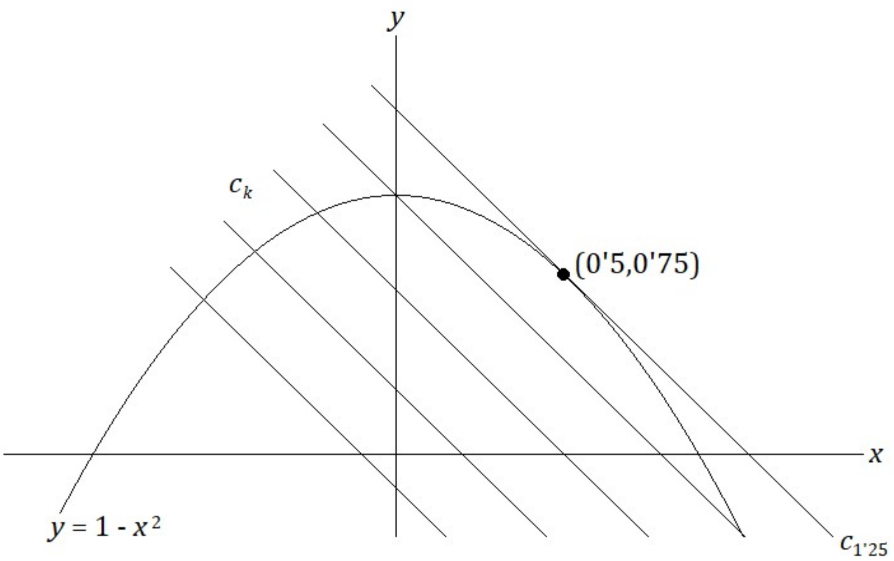
es troba en el punt de tangència de la "corba de restricció" $g(x, y) = b$ amb una de les corbes de nivell c_k de la funció objectiu.[10]

<u>Exemple</u>:[11] Aplicant el mètode gràfic prova que l'òptim del programa:

$$\begin{cases} \max & z = x + y \\ \text{s. a:} & x^2 + y = 1 \end{cases}$$

es troba en el punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

SOLUCIÓ: En efecte, la corba de restricció del programa és la paràbola $y = -x^2 + 1$ i les corbes de nivell c_k són rectes paral·leles a la bisectriu del 2on i 4rt quadrants: [12]



[10] Aplicarem el mètode directe o el dels multiplicadors de Lagrange que analitzarem tot seguit per a trobar aquests punts de tangència (tema 2).
[11] Sydsaeter, p. 523.
[12] Notem que el valor òptim (valor màxim) del programa és $k = 1{,}25$.

1.2.2. *Mètode directe de resolució* [13]

Aquest mètode és adient quan les equacions de restricció siguin lineals. El que cal fer és aïllar algunes de les variables instrumentals en funció de la resta i resoldre el problema d'òptims lliures que en resulta quan les "introduïm" en la funció objectiu.[14]

<u>Exemple</u>: Resol aplicant el mètode directe el programa $\begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓ:

Ja que, per exemple, l'equació lineal de restricció:

$$x + 2y + 3z = 1 \text{ és equivalent a: } x = 1 - 2y - 3z$$

llavors substituint-la en la funció objectiu del programa s'obté una funció escalar en dos variables "auxiliar" que caldrà optimitzar (maximitzar) lliurement. Aquesta funció és:

$$\begin{aligned} u = u(1 - 2y - 3z\,, y, z) &= (1 - 2y - 3z)y + 2yz + (1 - 2y - 3z)z = \\ &= -2y^2 - 3z^2 - 3yz + y + z. \end{aligned}$$

Ja que la condició necessària ens proporciona un únic punt crític:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 3z + 1 \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial z} = -6z - 3y + 1 \end{aligned}\right\} \text{ implica: } (y, z) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$$

la qual cosa implica que el valor de la variable x associat sigui igual a:

$$x = 1 - 2y - 3z \text{ implica: } x = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right) - 3\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{2}{5}$$

i donat que la matriu hessiana de la funció "auxiliar":

$$Hu(y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

és sempre definida negativa, deduïm que:

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right) \text{ és un màxim del programa amb valor màxim } u_0 = u\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right) = \frac{2}{15} \blacksquare$$

---

[13] També dit de **substitució** o d'**eliminació de variables**.

[14] Si les restriccions no són lineals aquest mètode no sempre funciona (exercici 3 del final del tema).

1.2.2.1. Exemple d'aplicació del mètode directe de resolució

Exemple: Aplicant el mètode directe troba els òptims dels programes:

$$(1)\begin{cases}\text{Opt} & z = 2xy \\ \text{s. a:} & x^2 + y = 3\end{cases} \quad (2)\begin{cases}\max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6\end{cases}$$

SOLUCIÓ: (1) En aquest cas tenim com a funció real de variable real "auxiliar":

$$y = 3 - x^2 \text{ implica: } z = z(x, 3 - x^2) = 6x - 2x^3.$$

Ja que:

$$0 = \frac{dz}{dx} = 6 - 6x^2 \text{ implica: } x = \pm 1$$

que:

$$x = -1 \text{ implica: } y = 3 - (-1)^2 = 2 \text{ i } x = 1 \text{ implica: } y = 3 - 1^2 = 2$$

i que la segona derivada en aquests dos punts és:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -12x \text{ implica: } \frac{d^2z(-1)}{dx^2} = 12 > 0 \text{ i } \frac{d^2z(1)}{dx^2} = -12 < 0$$

deduïm que els dos òptims del programa són:

$$(x, y) = (-1,2) \text{ mínim i } (x, y) = (1,2) \text{ màxim}$$

amb valors òptims:

$$z_0 = z(-1,2) = -4 \text{ valor mínim i } z_1 = z(1,2) = 4 \text{ valor màxim} \blacksquare$$

(2) En aquest cas tenim com a funció real de variable real "auxiliar":

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x - y = 6 \end{matrix}\right\} \text{ implica: } \left\{\begin{matrix} y = x - 6 \\ z = 8 - 2x \end{matrix}\right\} \text{ implica: } u = (x, x - 6, 8 - 2x) = -5x^2 + 30x - 48.$$

Ja que:

$$0 = \frac{du}{dx} = -10x + 30 \text{ implica: } x = 3 \text{ implica: } \begin{cases} y = 3 - 6 = -3 \\ z = 8 - 2 \cdot 3 = 2 \end{cases}$$

i que:

$$\frac{d^2u(3)}{dx^2} = -10 < 0$$

deduïm que l'òptim (màxim) del programa és:

$$(x, y, z) = (3, -3, 2)$$

amb valor òptim (valor màxim):

$$u_0 = u(3, -3, 2) = -3 \blacksquare$$

1.3. Mètode dels multiplicadors de Lagrange

1.3.1. *Funció i multiplicadors de Lagrange associats a un programa*

L'avantatge d'aquest mètode de resolució de programes és doble: per una banda tenim que es poden resoldre programes amb moltes variables instrumentals i/o equacions de restricció, i, per l'altra, que es poden interpretar econòmicament els resultats obtinguts. Aquest mètode gira al voltant de la funció de Lagrange associada a un programa; de fet aquesta funció ocupa el lloc de la funció objectiu de l'optimització "lliure" (és a dir, sense restriccions).

<u>Definició</u>: La **funció de Lagrange** associada al programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

és la funció escalar de $n + m$ variables definida per:

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i).$$

Les m variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ són els **multiplicadors de Lagrange** del programa.

<u>Exemple</u>: Determina la funció de Lagrange dels programes:

$$(1) \begin{cases} \min & z = 2x + 8y \\ \text{s. a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

SOLUCIÓ:

(1) En el primer cas:

$$L(x, y; \lambda_1) = 2x + 8y - \lambda_1 \cdot (4x^{0,5}y^{0,5} - 32) \blacksquare$$

(2) En aquest segon cas tenim com a funció de Lagrange associada:

$$L(x, y, z; \lambda_1) = xy + 2yz + xz - \lambda_1 \cdot (x + 2y + 3z - 1) \blacksquare$$

(3) Ara la funció de Lagrange serà:

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_1) = xy + 2xz + yz - \lambda_1 \cdot (x + y + z - 2) - \lambda_2 \cdot (x - y - 6) \blacksquare$$

1.3.2. *Condició necessària d'optimització restringida per igualtats. Punt crític d'un programa*

És el primer resultat a considerar si el que volem és trobar els òptims d'aquest tipus de programes.

<u>Teorema</u>(Condició necessària d'optimització restringida per igualtats): Si $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un òptim del programa: [15]

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

existiran necessàriament m multiplicadors de Lagrange $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$ tal que, juntament amb les n components de l'òptim, anul·len el gradient de la funció de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_m} = 0 \end{array}\right\}.$$ [16]

Per definició doncs:

<u>Definició</u>: Un **punt crític** (o **estacionari**) d'un programa és un punt factible que anul·la el vector gradient de la funció de Lagrange associada. [17]

Fixem-nos que el teorema anterior és semblant a la condició necessària d'existència d'òptims lliures però, ara, amb la funció de Lagrange ocupant el lloc de la funció objectiu.

[15] Val a dir que aquest òptim ha de ser un punt interior del domini de la funció objectiu.
[16] Aquest sistema de $n + m$ equacions i $n + m$ incògnites no te per que ser lineal. Notem que les m darreres equacions del teorema anterior ens asseguren que tot punt crític és, en particular, un punt factible del programa.
[17] Per tant, tot punt crític d'un programa portarà associats un conjunt de multiplicadors de Lagrange, tants com a equacions de restricció hi hagin.

1.3.2.1. Exemple d'aplicació del la condició necessària d'òptims restringits per igualtats

Exemple: Determina els punts crítics del programa $\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$

SOLUCIÓ: Com que la funció de Lagrange és:

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_1) = xy + 2xz + yz - \lambda_1 \cdot (x + y + z - 2) - \lambda_2 \cdot (x - y - 6)$$

els punts crítics del programa s'obtindran com a solucions del sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2z - \lambda_1 \cdot 1 - \lambda_2 \cdot 1 = y + 2z - \lambda_1 - \lambda_2 \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + z - \lambda_1 \cdot 1 - \lambda_2 \cdot (-1) = x + z - \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2x + y - \lambda_1 \cdot 1 - \lambda_2 \cdot 0 = 2x + y - \lambda_1 \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} = -(x + y + z - 2) \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} = -(x - y - 6) \end{array}\right\}.$$ [18]

Notem que les dues últimes equacions ens asseguren que aquestes solucions seran punts factibles. Anem a resoldre'l directament. Si sumem la 1a i la 2a equacions obtenim:

$$\lambda_1 = \frac{x + y + 3z}{2}$$

que, amb la 3a equació, ens proporciona l'equació lineal:

$$3x + y - 3z = 0.$$

Aquesta equació, juntament amb la 4a i la 5a, dona lloc al sistema de Cramer amb solució:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - 3z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x - y = 6 \end{array}\right\} \text{implica: } (x, y, z) = (3, -3, 2).$$

Fixem-nos que els dos multiplicadors de Lagrange associats a aquests valors són:

$$\lambda_1 = \frac{x + y + 3z}{2} = \frac{3 + (-3) + 3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ i } \lambda_2 = y + 2z - \lambda_1 = (-3) + 2 \cdot 2 - 3 = -2.$$ [19]

Per tant, l'únic punt crític del programa és el punt:

$$(x, y, z) = (3, -3, 2) \text{ amb multiplicadors de Lagrange: } \lambda_1 = 3 \text{ i } \lambda_2 = -2 \blacksquare$$

[18] En aquest cas les equacions del sistema són lineals.
[19] Aquest darrer multiplicador de Lagrange s'ha obtingut a partir de la 1a equació del sistema.

1.3.3. *Matriu hessiana restringida d'un programa*

La qüestió, ara, es veure sota quines condicions un punt crític d'un programa és un òptim. Val a dir que aquestes condicions estan relacionades amb el signe de la matriu hessiana "restringida" del programa en aquest punt. Caldrà tenir present d'ara en endavant la següent definició:

<u>Definició</u>: La **matriu hessiana restringida** d'un programa és, per definició, la matriu quadrada i simètrica que té per coeficients les derivades parcials segones de la funció de Lagrange respecte les variables instrumentals:

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$ [20]

<u>Exemple</u>: Calcula la matriu hessiana restringida del programa $\begin{cases} \text{max} & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$

SOLUCIÓ: Ja que les derivades parcials de la funció de Lagrange d'aquest programa són:[21]

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2z - \lambda_1 - \lambda_2, \frac{\partial L}{\partial y} = x + z - \lambda_1 + \lambda_2 \text{ i } \frac{\partial L}{\partial z} = 2x + y - \lambda_1$$

la matriu hessiana restringida del programa serà constant i igual a:

$$H_{xyz} L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentment, en el punt crític que hem trobat, la matriu hessiana serà la mateixa:

$$H_{xyz} L(3, -3, 2; 3, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

[20] Cal tenir en compte que les matrius hessianes restringides poden dependre dels multiplicadors de Lagrange també.

[21] Mirar la plana anterior.

1.3.4. *Condició suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats*

En la majoria dels casos aquesta condició permet "qualificar" els punts crítics dels programes, és a dir, dir si són màxims o mínims.

<u>Teorema</u>(Condició suficient d'existència d'òptims restringits per igualtats): Sigui $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un punt crític del programa: [22]

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

amb m multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$. Si la forma quadràtica de matriu simètrica associada: [23]

$$H_{x_1 \dots x_n} L(x_1^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$$

restringida al subespai vectorial definit pel sistema de m equacions lineals homogènies:[24]

$$\begin{cases} 0 = \nabla g_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \dfrac{\partial g_1(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 = \nabla g_m(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \dots + \dfrac{\partial g_m(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n} \cdot x_n \end{cases}$$

és:

1. Definida positiva, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un mínim del programa.
2. Definida negativa, el punt crític $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ és un màxim del programa. [25]

Anem a veure que, efectivament, el punt crític del programa dels dos darrers exemples satisfà la condició suficient de màxim.

---

[22] Val a dir que aquest òptim ha de ser un punt interior del domini de la funció objectiu.
[23] Com podem veure es tracta de la matriu hessiana restringida en el punt crític.
[24] Aquestes equacions estan definides per l'anul·lació dels productes escalars dels vectors gradients de les m funcions de restricció avaluades en el punt crític i el vector de les variables instrumentals.
[25] Cal emfatitzar el fet que aquesta forma quadràtica restringida, com en el cas de l'optimització lliure, ha de ser definida per a poder afirmar que el punt crític és un òptim. En conseqüència, si la forma quadràtica associada a la matriu hessiana restringida fos, d'entrada, definida no caldria restringir-la a aquest subespai vectorial i ja hauríem acabat.

1.3.4.1. Exemple d'aplicació de la condició suficient d'òptims restringits per igualtats

Exemple: Prova, aplicant el mètode de Lagrange, que el punt crític $(3,-3,2)$ amb multiplicadors de Lagrange associats $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$ és un òptim (màxim) del programa:

$$\begin{cases} \max & u = xy + 2xz + yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 2 \\ & x - y = 6 \end{cases}$$

SOLUCIÓ:

Per a veure que, efectivament, aquest punt crític és l'òptim (màxim) del programa cal considerar la matriu hessiana restringida en el punt que, com ja hem calculat també, és:

$$H_{xyz}L(3,-3,2;3,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que la forma quadràtica associada a aquesta matriu:

$$Q(x,y,z) = 2xy + 4xz + 2yz$$

és indefinida[26] haurem d'estudiar, seguint el teorema anterior, el signe de la forma quadràtica restringida al subespai vectorial definit pel sistema d'equacions lineals que s'obté a partir dels gradients de les dues funcions de restricció:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \nabla g_1(3,-3,2) \cdot (x,y,z) = (1,1,1) \cdot (x,y,z) = x + y + z \\ 0 = \nabla g_2(3,-3,2) \cdot (x,y,z) = (1,-1,0) \cdot (x,y,z) = x - y \end{array}\right\}.$$ [27]

Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x + y + z \\ 0 = x - y \end{array}\right\} \text{ implica: } y = x \text{ i } z = -2x$$

i que la forma quadràtica restringida a aquest subespai és definida negativa ja que:

$$Q(x,x,-2x) = 2x \cdot x + 4x \cdot (-2x) + 2x \cdot (-2x) = -10x^2 < 0$$

deduïm, pel teorema anterior, que el punt:

$$(x,y,z) = (3,-3,2)$$

és un òptim (màxim) del programa amb valor òptim (valor màxim) associat igual a:

$$u_0 = u(3,-3,2) = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 = -3 \blacksquare$$

[26] Els menors principals d'ordre 1 de la matriu són nuls i el seu determinant és 4 diferent de zero.

[27] Val a dir que quan les equacions de restricció són lineals, aquest sistema ve definit per les mateixes equacions lineals però amb els termes independents iguals a zero.

1.3.5. *Interpretació econòmica dels multiplicadors de Lagrange*

Aquesta interpretació fa possible estimar la variació del valor òptim d'un programa quan alguna de les seves constants de restricció varia.[28] En efecte:

<u>Teorema</u>: Sigui $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ un òptim del programa:

$$\begin{cases} \text{Optimitzar} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m \end{cases}$$

Aleshores, si la constant de restricció $b_i \in \mathbb{R}$ experimenta una petita variació Δb_i, l'increment Δz_0 que repercuteix en el valor òptim del programa:

$$z_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

és aproximadament igual al producte del multiplicador de Lagrange corresponent λ_i^0 i de l'increment de la constant de restricció Δb_i. En altres paraules:

$$\Delta z_0 \cong \lambda_i^0 \cdot \Delta b_i.$$

Conseqüentment, i per la llei dels signes, caldrà considerar l'esquema següent a l'hora d'interpretar econòmicament els multiplicadors de Lagrange:

a. Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
b. Si $\lambda_i^0 < 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
c. Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i < 0$, el valor òptim z_0 disminuirà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
d. Si $\lambda_i^0 > 0$ i $\Delta b_i > 0$, el valor òptim z_0 augmentarà aproximadament $\lambda_i^0 \cdot \Delta b_i$.
e. Si $\lambda_i^0 = 0$ aleshores, i independentment del valor de Δb_i, el valor òptim z_0 gairebé no variarà. [29]

---

[28] Cal que tinguis present que aquesta interpretació només fa referència a les variacions del valor òptim del programa i no de l'òptim pròpiament dit.

[29] Des d'un punt de vista econòmic, els multiplicadors de Lagrange mesuren el grau de sensibilitat del valor òptim d'una funció econòmica respecte petits canvis en els valors dels recursos (constants de restricció). És per aquest motiu que solen rebre el nom de **preus ombra** ja que, en cert sentit, valoren si paga la pena variar (incrementar o disminuir) aquests recursos en l'òptim.

1.3.5.1. Exemple d'aplicació de la interpretació econòmica dels multiplicadors de Lagrange

Exemple: Resol pel mètode de Lagrange el programa de l'exemple econòmic introductori:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{min} & C(x,y) = 2x + 8y \\ \text{s.a:} & 4x^{0,5}y^{0,5} = 32\end{array}\right\}$$

tot indicant si és rendible produir una mica més de 32 unitats del producte P.

SOLUCIÓ: Ja que la funció de Lagrange és:

$$L(x,y;\lambda_1) = 2x + 8y - \lambda_1 \cdot (4x^{0,5}y^{0,5} - 32)$$

caldrà resoldre, en primer lloc, el sistema d'equacions no lineals:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 - \lambda_1 \cdot (2x^{-0,5}y^{0,5}) \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial y} = 8 - \lambda_1 \cdot (2x^{0,5}y^{-0,5}) \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(4x^{0,5}y^{0,5} - 32) \end{array}\right\} \text{implica: } \frac{x^{0,5}}{y^{0,5}} = \lambda_1 = 4\left(\frac{y^{0,5}}{x^{0,5}}\right) \text{implica: } x = 4y.$$

Per tant, fent $x = 4y$ en la 3a equació s'obté com a punt crític:

$$32 = 4x^{0,5}y^{0,5} = 4(4y)^{0,5}y^{0,5} = 8y \text{ implica: } (x,y) = (16,4) \text{ implica: } \lambda_1 = 2.$$

Com que la matriu hessiana restringida en aquest punt crític és semidefinida positiva:

$$H_{xy}L = \begin{pmatrix} \lambda_1 x^{-1,5}y^{0,5} & -\lambda_1 x^{-0,5}y^{-0,5} \\ -\lambda_1 x^{-0,5}y^{-0,5} & \lambda_1 x^{0,5}y^{-1,5} \end{pmatrix} \text{implica: } H_{xy}L(16,4;2) = \begin{pmatrix} 1/16 & -1/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

cal estudiar la condició suficient. En efecte, ja que el gradient de la funció de restricció és:

$$\nabla g_1(x,y) = (2x^{-0,5}y^{0,5}, 2x^{0,5}y^{-0,5}) \text{ implica: } \nabla g_1(16,4) = (1,4)$$

caldrà restringir la forma quadràtica associada a la matriu hessiana anterior a l'equació:

$$0 = \nabla g_1(16,4) \cdot (x,y) = (1,4) \cdot (x,y) = 4x + y \text{ implica: } x = -4y.$$

Doncs bé, degut a que la forma quadràtica tot just esmentada és definida positiva:

$$Q(x,y) = \tfrac{1}{16} \cdot x^2 + y^2 - \tfrac{1}{2} \cdot xy \text{ i } x = -4y \text{ implica: } Q(-4y,y) = 4y^2 > 0$$

deduïm que:

$(x,y) = (16,4)$ és un mínim amb valor mínim $C_0 = C(16,4) = 64$ del programa■[30]

Finalment, i ja que $\lambda_1 = 2 > 0$, no interessa produir més ja que el cost mínim de producció, qué és de 64 u.m., augmentaria aproximadament 2 u.m. per unitat produïda:

$$\lambda_1 = 2 \text{ i } \Delta b_1 = 1 \text{ implica: } \Delta C_0 \cong \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ u.m.}■$$

[30] Així doncs, calen 16 unitats del 1er factor i 4 del 2on per a minimitzar el cost de produir 32 unitats de P. El cost mínim és de 64 u.m.

1.3.5.2. Aplicació econòmica: el model d'inversions de Markowitz[31]

Considerem el següent exemple:

Exemple: Suposem que tenim una cartera d'inversió en dos títols amb unes rendibilitats esperades del 8% i del 4%. Si el risc de la inversió ve mesurat per la funció:

$$\sigma(x,y) = 0{,}0016x^2 + 0{,}0004y^2 - 0{,}00096xy$$

on $x > 0$ i $y > 0$ denoten els tants per cent de la cartera invertits en cada títol, determina:

1. Els valors de $x > 0$ i $y > 0$ que minimitzen el risc de la cartera si volem obtenir una rendibilitat conjunta esperada del 5%.
2. Com es veuria afectat aquest risc si la rendibilitat esperada fos del 5,5%.

SOLUCIÓ: (1) El programa a resoldre és:[32]

$$\begin{cases} \min & \sigma(x,y) = 0{,}0016x^2 + 0{,}0004y^2 - 0{,}00096xy \\ \text{s.a:} & 0{,}08x + 0{,}04y = 0{,}05 \end{cases}$$

Com que la funció de Lagrange és:

$$L(x,y;\lambda_1) = 0{,}0016x^2 + 0{,}0004y^2 - 0{,}00096xy - \lambda_1 \cdot (0{,}08x + 0{,}04y - 0{,}05)$$

cal resoldre el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} = 0{,}0032x - 0{,}00096y - 0{,}08\lambda_1 \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y} = 0{,}0008y - 0{,}00096x - 0{,}04\lambda_1 \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(0{,}08x + 0{,}04y - 0{,}05) \end{aligned}\right\} \text{ implica: } \begin{cases} x = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\% \\ y = \dfrac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\% \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{200} = 0{,}005 \end{cases}$$

Ja que la matriu hessiana restringida és sempre definida negativa:

$$H_{xy}L(x,y;\lambda_1) = \begin{pmatrix} 0{,}0032 & -0{,}00096 \\ -0{,}00096 & 0{,}0008 \end{pmatrix}$$

hom dedueix que cal invertir un 31,25% en títols del primer tipus i un 62,5% en el segon per a minimitzar el risc (dispersió) de la cartera que serà de:

$$\sigma\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{8}\right) = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \blacksquare$$

(2) Si la rendibilitat fos del $b_1 = 5{,}5\% = 0{,}055$, el risc augmentaria aproximadament en:

$$\lambda_1 = 0{,}005 \text{ i } \Delta b_1 = 0{,}5\% = 0{,}005 \text{ implica: } \Delta\sigma \cong \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 25 \cdot 10^{-6} \blacksquare$$

[31] Aquest és un model estadístic de "carteres d'inversió".
[32] En aquest cas concret no cal imposar com a restricció que x i y són tants per cent.

1.4. Exercicis

1. Resol aplicant el mètode directe:

(a) $\begin{cases} \min & z = x^2 + 5xy - 1 \\ \text{s. a:} & 3x - y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \max & u = xy + 3yz \\ \text{s. a:} & x + y + z = 6 \\ & x - y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \max & u = 3xy + 2xyz \\ \text{s. a:} & 2x + y - z = 1 \end{cases}$

2. Resol pel mètode de Lagrange el programa: $\begin{cases} \max & u = xy + 2yz + xz \\ \text{s. a:} & x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

3. Prova que el programa:

$$\begin{cases} \min & z = 4y^2 + 3 \\ \text{s. a:} & x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

no es pot resoldre pel mètode directe però si pel dels multiplicadors de Lagrange.

4. Una empresa, que fabrica dos articles A i B, sap que pot vendre 400 unitats de A a un preu unitari de 720 u.m. i que un estudi de mercat li ha permès conèixer que, per cada 10 u.m. de disminució en el preu de venda, es produiria un augment de 2 unitats en les seves vendes. El mateix estudi recomana mantenir el preu de venda de B en 1480 u.m. Si la funció de costos totals és:

$$C(x, y) = 5x^2 + 10y^2 + 50.000$$

on $x, y \geq 0$ indiquen, respectivament, el nombre d'articles A i B produïts: (a) Calcula el què s'hauria de produir per a maximitzar els beneficis. (b) Fes el mateix suposant que només es poden produir 100 articles entre A i B, tot indicant si millorarien els beneficis si es pogués augmentar la producció una unitat més.

5. Una empresa que es dedica a la col·locació de mosaic, moqueta i parquet sap que el benefici per m^2 que obté per la instal·lació de mosaic és de 2000 u.m., de 2400 u.m. per la moqueta i de 2800 u.m. pel parquet. Si els $x \geq 0, y \geq 0$ i $z \geq 0$ m^2 de mosaic, moqueta i parquet instal·lats satisfan l'equació:

$$x^2 + y^2 + 70z = 5375$$

determina els valors de $x, y, z \geq 0$ que maximitzen els beneficis totals i discuteix si millorarien en el cas que l'equació fos: $x^2 + y^2 + 70z = 5374$.

SOLUCIONS:

1.

a) $(0,0)$ amb valor minim -1.

b) $\left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ amb valor màxim $\frac{64}{5}$.

c) $\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}\right)$, amb valor maxim $\frac{1}{216}$.

2. L'òptim (màxim) és el punt $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$ amb $\lambda = \frac{4}{15}$ i valor òptim (màxim) $\frac{2}{15}$.

3. Els òptims (mínims) són $(1,0)$ i $(-1,0)$ amb $\lambda = 0$ i valor òptim (mínim) 3.

4.

a) 136 unitats de A i 74 de B amb uns beneficis de 189.720 u.m. El preu de venda de A és de 2040 u.m.

b) 81 unitats de A i 19 de B amb uns beneficis de 129.220 u.m. El preu de venda de A és de 2315 u.m. Sí, ja que els beneficis augmentarien, aproximadament, en 1100 u.m.

5. $x = 25, y = 30$ i $z = 55$ m^2 maximitzen els beneficis totals de la installació de mosaic, moqueta i parquet amb uns beneficis de 276.000 u.m. En el segons cas, els beneficis totals disminuirien, aproximadament, en 40 u.m.

2. OPTIMITZACIÓ AMB RESTRICCIONS DE DESIGUALTAT

Si a la introducció del tema anterior dèiem que en l'optimització restringida per igualtats estàvem obligats a esgotar els recursos econòmics disponibles, en l'optimització restringida per desigualtats no ho estem, la qual cosa ens permet modelar i estudiar fenòmens més propers a la realitat econòmica i empresarial.[33] Considerem el següent exemple econòmic:

<u>Exemple</u>: Una empresa fabrica dos productes A i B per medi de dos processos productius P i Q. Suposem que la taula:

Temps	A	B	Disponibilitat total
P	6 minuts	10 minuts	10 hores
Q	9 minuts	3 minuts	12 hores

ens mostra el temps en minuts que necessita cadascun dels dos processos per manipular una unitat de A i B, així com el temps total disponible per a P i Q. Si, per exemple, el benefici unitari de A fos de 25 u.m. i de 30 u.m. el de B, la solució del programa d'òptims restringits per desigualtats:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 25x + 30y \\ \text{s. a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}^{34}$$

ens donaria les unitats $x > 0$ de A i $y > 0$ de B a fabricar per a maximitzar els beneficis. Si:

$$p_A = 103 - 0{,}5x,\ p_B = 107 - 0{,}5y \text{ i } C(x, y) = 3x + 5y + 377$$

fossin les funcions de demanda de A, B i la funció de costos conjunta, el programa seria ara:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377 \\ \text{s.a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}.^{35}$$

[33] Tanmateix, i com es veurà més endavant, l'esgotament dels recursos és una possibilitat que es dona amb molta freqüència.
[34] Aquest programa és un exemple de *programa lineal*.
[35] Aquest programa, en canvi, no és lineal ja que la funció de beneficis a maximitzar no ho és. Resoldrem més endavant aquests dos programes.

2.1. Programa d'òptims restringits per desigualtats

2.1.1. *Programa canònic d'òptims restringits per desigualtats*

<u>Definició</u>: Un **programa canònic d'òptims restringits per desigualtats** (**programa canònic** a partir d'ara) és un problema d'optimització que adopta la forma:

$$\begin{cases} \max & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) \le b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \le b_m \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} \min & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s. a:} & g_1(x_1, \dots, x_n) \ge b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \ge b_m \end{cases} \quad \text{on:}$$

1. $z = f(x_1, \dots, x_n)$ és la **funció objectiu** que cal optimitzar.
2. $x_1, \dots, x_n$ són les n **variables instrumentals** o de **decisió**.
3. $g_i(x_1, \dots, x_n)$ són les m **funcions de restricció**.
4. $b_1, \dots, b_m$ són les m **constants de restricció**.

Notem que les restriccions d'un programa "canònic" de màxim són de menor o igual i les de mínim són de més gran o igual. Tanmateix, tot programa "no canònic" es pot expressar de forma canònica. Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: Troba el programa canònic de mínim equivalent al programa: [36]

$$\begin{cases} \max & u = 27z - x^2 - 3y^2 \\ \text{s. a:} & x - y + z \le 0 \\ & y - x \ge 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓ: Ja que:

Maximitzar $u = 27z - x^2 - 3y^2$ és equivalent a: minimitzar $-u = x^2 + 3y^2 - 27x$

i que:

$$x - y + z \le 0 \text{ és equivalent a: } -x + y - z \ge 0$$

el programa canònic de mínim equivalent al de l'enunciat seria:

$$\left.\begin{matrix} \min & -u = x^2 + 3y^2 - 27z \\ \text{s. a:} & -x + y - z \ge 0 \\ & y - x \ge 1 \end{matrix}\right\} \blacksquare$$

[36] Diem que dos programes són **equivalents** si un d'ells s'obté de l'altre mitjançant les operacions que exposem a continuació. Es pot provar que l'òptim d'aquests dos programes és $(-13'5, 4'5, 18)$.

2.1.2. *Conjunt i punt factible d'un programa*

En general, per a resoldre un programa, és a dir, per a trobar els seus òptims, haurem de tenir en compte el conjunt factible associat.

<u>Definició</u>: El **conjunt factible**, (**admissible** o d'**oportunitats**) d'un programa d'òptims restringits per desigualtats és el conjunt dels punts del domini de la funció objectiu que satisfan les desigualtats de restricció. De tot punt del conjunt factible en diem **punt factible.** Si un programa té punts factibles és un **programa factible**; en cas contrari, és un programa **infactible**.

<u>Exemple</u>: Determina gràficament el conjunt factible dels programes:

$$(1)\ \left.\begin{array}{rl} \max & z = 25x + 30y \\ \text{s. a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)\ \left.\begin{array}{rl} \max & z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377 \\ \text{s.a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

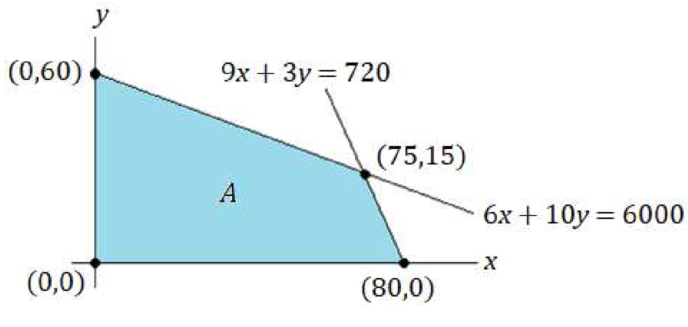
SOLUCIÓ: Notem que el conjunt factible dels dos programes és el mateix i és:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x + 10y \leq 600, 9x + 3y \leq 720, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

En ambdós casos doncs cal dibuixar, en primer lloc, les rectes:

$$6x + 10y = 600 \text{ i } 9x + 3y = 720$$

i, a continuació, la intersecció dels dos semiplans associats a elles en el 1er quadrant tenint en compte les restriccions de desigualtat.[37] Gràficament:



Val a dir que el conjunt factible A és un polígon convex amb vèrtexs:

$$(0,0), (0,60), (75,15) \text{ i } (80,0) \blacksquare$$ [38]

[37] La representació gràfica de conjunts com aquest s'ha treballat a Matemàtiques I.

[38] Un *polígon* és una figura geomètrica plana formada per segments consecutius no alineats (recta poligonal). Els **vèrtexs** són, precisament, els punts d'intersecció dels segments.

2.1.3. *Òptim i valor òptim d'un programa*

Ja sabem que el conjunt factible és un dels elements clau en la resolució d'un programa ja que és sobre ell que cal optimitzar la funció objectiu. Així doncs, els òptims d'un programa seran en particular punts factibles. Per definició:

Definició: Un programa d'òptims restringits per desigualtats té:

1. Un **òptim finit** (o **solució finita** o **acotada**) si existeix un punt factible que optimitza la funció objectiu sobre el conjunt factible. Al valor que pren la funció objectiu en un òptim finit li diem **valor òptim**.
2. Un **òptim infinit** (o **solució infinita** o **no acotada**) quan la funció objectiu s'optimitza de forma indefinida sobre el conjunt factible.[39]

Exemple: Prova, aplicant el teorema de Weierstrass, que els programes:

$$(1)\ \left.\begin{array}{ll} \max & z = 25x + 30y \\ \text{s. a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)\ \left.\begin{array}{ll} \max & z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377 \\ \text{s.a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

tenen òptims finits.

SOLUCIÓ:

D'entrada, el seu conjunt factible, al ser un polígon,[40] és un conjunt compacte (és tancat ja que conté la seva frontera, la línia poligonal, i és acotat). Finalment, degut a que les dues funcions objectiu:

$$z = 25x + 30y \text{ i } z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377$$

són contínues sobre aquest conjunt compacte deduïm, aplicant el teorema de Weierstrass, que els dos programes han de tenir òptims finits■[41]

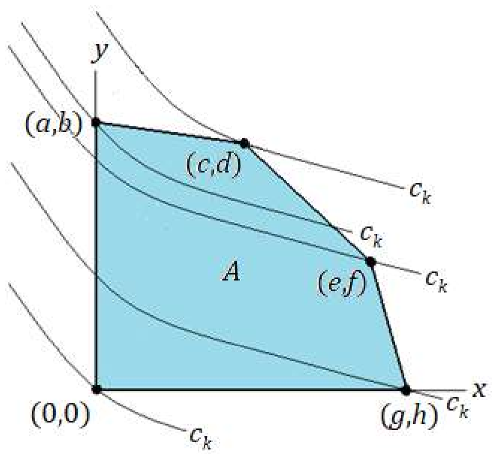
[39] Està clar que els programes amb òptims infinits tenen valor òptim infinit. Notem la diferència entre aquesta definició i la anàloga del tema 1.
[40] Veure la plana anterior.
[41] Provarem més endavant que l'òptim del primer programa es troba en el vèrtex (75,15) i que l'òptim del segon està en el punt (55,27) que pertany al segment d'extrems el vèrtexs (0,60) i (75,15). Val a dir que aquests òptims són òptims globals sobre el conjunt factible.

2.2. Mètode gràfic de resolució

En general, els programes amb $n = 2$ variables instrumentals: [42]

$$\begin{cases} \max & z = f(x,y) \\ \text{s. a:} & g_1(x,y) \le b_1 \\ \vdots & \\ & g_m(x,y) \le b_m \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} \min & z = f(x,y) \\ \text{s. a:} & g_1(x,y) \ge b_1 \\ \vdots & \\ & g_m(x,y) \ge b_m \end{cases}$$

es poden resoldre gràficament. Per això, cal dibuixar el conjunt factible A i, a continuació, algunes de les corbes de nivell c_k de la funció objectiu sobre A que passin per punts factibles "singulars" del programa.[43] Finalment si, per exemple, estem maximitzant, caldrà seguir la direcció i el sentit de les corbes de nivell on el valor de $k \in \mathbb{R}$ vagi augmentant i esbrinar cap a quin punt factible ens porten.[44] Per exemple, si tinguéssim una situació gràfica com aquesta:



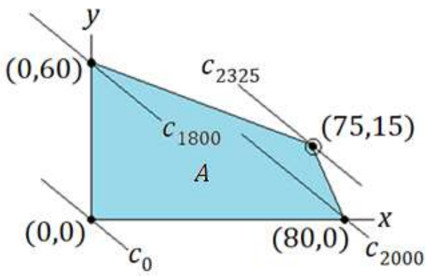
i si a mesura que ens "allunyéssim" de l'origen de coordenades, el valor de $k \in \mathbb{R}$ augmentés de forma progressiva, el màxim del programa es trobaria en el vèrtex (c, d) de A.[45] Notem que el valor òptim (valor màxim) seria el valor numèric $k \in \mathbb{R}$ de la corba de nivell c_k que passa pel vèrtex (c, d).

[42] Val a dir que no cal que els programes a resoldre siguin canònics.
[43] Per exemple, vèrtexs o punts de tall de segments de frontera, etc.
[44] Si estem minimitzant, caldrà anar en sentit contrari. Com podem intuir, un dibuix acurat de la situació és clau en la resolució gràfica d'un programa d'aquest tipus. En molts casos, com per exemple en el de la programació lineal, el valor associat a les corbes de nivell sobre punts "singulars" com els vèrtexs, ens donen la clau de la resolució.
[45] Precisament l'origen de coordenades (0,0) seria el mínim del programa.

2.2.1. *Exemple del mètode gràfic de resolució per a òptims restringits per desigualtats*

Exemple: Resol gràficament els dos programes (1) i (2) de l'exemple anterior.

SOLUCIÓ: (1) En aquest cas, l'òptim és el vèrtex (75,15), amb valor òptim 2325, ja que està sobre la k-corba de nivell (k-recta de nivell) de la funció objectiu amb el valor $k \in \mathbb{R}$ més gran possible, $k = 2325$. Gràficament: [46]

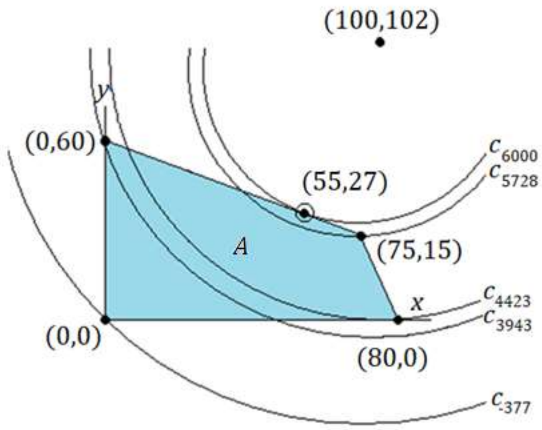


Hom pot veure que l'òptim "satura" la primera i segona restriccions■[47]

(2) Com que la funció objectiu és pot expressar de la forma:[48]

$$z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377 = 9825 - \tfrac{1}{2}(x - 100)^2 - \tfrac{1}{2}(y - 102)^2$$

deduïm que les k-corbes de nivell són ara circumferències de centre (100,102). Ja que:



veiem que el punt de tangència (55,27) és el màxim del programa, amb un valor màxim $k = 6000$.[49] En aquest cas, l'òptim satura només la primera restricció■

---

46 Per tant caldrà produir i vendre 75 unitats de P i 15 unitats de Q per a maximitzar els beneficis que seran de 2325 u.m.

47 Una restricció de desigualtat està **saturada** en l'òptim quan es satisfà la igualtat associada.

48 Aquest fet és clau per a la resolució.

49 Aquest punt de tangència s'obté de resoldre el programa d'òptims restringits per igualtats:

$$\max z = 100x + 102y - 0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 377 \text{ s.a: } 6x + 10y = 600.$$

Això vol dir que ara cal produir i vendre 55 unitats de P i 27 de Q per a maximitzar els beneficis que seran de 6000 u.m. En aquest cas, el preu unitari de P serà de 75. 5 u.m. i 93.5 u.m. el de Q.

2.3. Introducció a la programació lineal

2.3.1. *Programa canònic lineal*

Quan la funció objectiu i les funcions de restricció d'un programa són lineals estem davant d'un *programa lineal*. Històricament parlant, es poden considerar les tables Input-Output de V. Leontieff com un antecedent de la programació lineal. Tanmateix, no és fins els anys 40 del segle passat que hom no troba formulat, per primera vegada, un problema particular de programació lineal: és el problema del transport. Sembla ser, però, que durant els anys 30 del segle XX el premi Nobel L. Kantorovich ja aplicava programes amb restriccions de desigualtat a l'estudi dels plans econòmics quinquennals soviètics.
Val a dir que la teoria i els mètodes de resolució estàndard (mètode del *Símplex*) es coneixen des de principis de 1950 gràcies als treballs del matemàtic nord-americà G. B. Dantzig. Nosaltres, ací, veurem el teorema fonamental de la programació lineal i donarem un cop d'ull a alguns dels models econòmics més importants.

<u>Definició</u>: Un programa canònic és un **programa lineal** si és de la forma: [50]

$$\begin{cases} \max & z = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n \\ \text{s. a:} & a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad \text{o bé:} \quad \begin{cases} \min & z = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n \\ \text{s. a:} & a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \geq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

amb $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. [51]

<u>Exemple</u>: El programa econòmic inicial:

$$\begin{cases} \max & z = 25x + 30y \\ \text{s. a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

és un exemple de programa lineal canònic amb "matriu tecnològica" $M = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

[50] Notem que caldrà considerar sempre les restriccions de signe sobre les variables de decisió.
[51] La matriu de coeficients del programa lineal $M = (a_{ij})$ d'ordre $m \times n$ rep el nom de *matriu tecnològica* del programa.

2.3.2. *Teorema fonamental de la programació lineal.*

Aquest teorema ens diu que l'òptim finit d'un programa lineal es troba sempre en un dels vèrtexs del conjunt factible associat.[52] A més, tot òptim finit d'un programa lineal sempre és global.

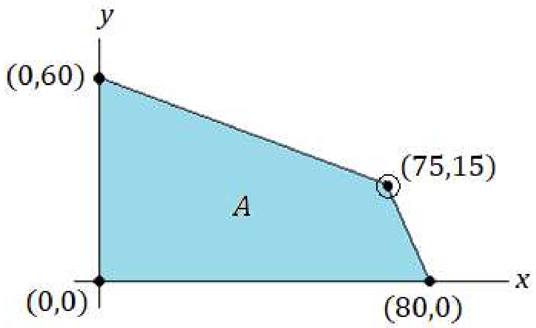
<u>Teorema</u>(Teorema fonamental de la programació lineal): En general:

1. Tot programa lineal amb solució finita té un òptim global en un dels vèrtexs del conjunt factible associat.
2. Qualsevol punt del segment format per dos òptims globals finits també és un òptim global.

<u>Exemple</u>: L'òptim del programa lineal:

$$\begin{cases} \max & z = 25x + 30y \\ \text{s. a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

es troba en el punt (75,15) que és un vèrtex del conjunt factible associat: [53]



Notem que el teorema fonamental no es pronuncia sobre l'existència dels òptims finits d'un programa lineal; de fet el que fa és dir-nos on es troben en el cas que existeixin. Tanmateix, això no passa amb el següent tipus de programes.

[52] Aquest conjunt factible serà sempre un polígon en el pla, un poliedre en l'espai o un poliedre multidimensional (*politop*) en dimensions superiors i serà sempre un conjunt tancat.

[53] Com hem vist unes planes més amunt, això no passa sempre amb els programes "no lineals". En aquest exemple l'òptim finit del programa és únic.

2.3.3. *Programa lineal acotat*

Definició: Un programa lineal és un **programa lineal acotat** si el conjunt factible ho és.[54]

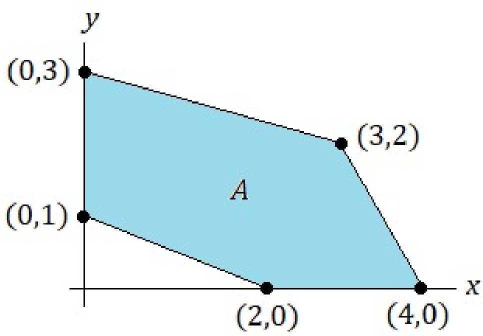
La importància d'aquest tipus de programes lineals rau en el teorema que ens diu que sempre tenen òptims finits:

Teorema: Un programa lineal acotat té sempre un òptim global finit en un dels vèrtexs del conjunt factible associat.

Exemple: Resol el programa lineal:

$$\begin{cases} \text{Optimitza} & z = 7x + 14y - 5 \\ \text{s. a:} & x + 3y \leq 9 \\ & 2x + y \leq 8 \\ & x + 2y \geq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓ: Ja que el conjunt factible associat és acotat:



hom dedueix que es tracta d'un programa lineal acotat i que, pel teorema anterior, tindrà màxims i mínims finits globals en vèrtexs del conjunt factible. Anem a trobar-los. Ja que les imatges de la funció objectiu sobre els vèrtexs satisfan les desigualtats:

$$z(0,1) = z(2,0) = 9 < z(4,0) = 23 < z(0,3) = 37 < z(3,2) = 44$$

deduïm que el màxim global es troba en el vèrtex (3,2), amb valor màxim 44, i que el mínim global és qualsevol punt del segment d'extrems (0,1) i (2,0), amb valor mínim 9■

[54] De fet el conjunt factible d'aquest tipus de programes lineals és més que acotat, és compacte.

2.3.4. *Anàlisi de sensibilitat d'un programa lineal*

L'anàlisi de sensibilitat d'un programa lineal estudia com varia el valor òptim d'un programa lineal quan algun dels coeficients de la funció objectiu, o bé alguna de les constants de restricció, varien. Vegem un exemple il·lustratiu:

<u>Exemple</u>: Considerem el programa lineal de l'exemple econòmic introductori:

$$\begin{cases} \text{max} & z = 25x + 30y \\ \text{s.a:} & 6x + 10y \leq 600 \\ & 9x + 3y \leq 720 \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

que, recordem-ho, modela un procés productiu on $c_1 = 25$ u.m. i $c_2 = 30$ u.m. són els beneficis unitaris de la producció i venda de $x > 0$ unitats d'un producte A i $y > 0$ unitats d'un producte B, productes que han de passar per dos processos productius de durada màxima $b_1 = 600$ minuts i $b_2 = 720$ minuts.[55] Volem estudiar com varia la solució del programa si algun d'aquests quatre coeficients varia. Per això, caldrà tenir en compte les dues taules del programari SOLVER de l'Excel associades al programa lineal:[56]

"Cel·les canviants"					
Nom	**Valor igual**	**Gradient reduït**	**Coeficient objectiu**	**Augment permissible**	**Decrement permissible**
x	75	0	25	65	7
y	15	0	30	11,66	21,66

"Restriccions"					
Nom	**Valor igual**	**Preu ombra**	**Restricció del costat dret**	**Augment permissible**	**Decrement permissible**
R1	600	2,708	600	1800	120
R2	720	0,972	720	180	540

Per dur a terme l'anàlisi de sensibilitat del programa caldrà tenir en compte, especialment, les columnes Augment i Decrement permissibles d'ambdues taules. Vegem-ho:

[55] Veure la introducció al tema 2.
[56] Aquestes taules ens les donaran sempre i no caldrà calcular-les.

a. Òptim i valor òptim del programa

D'entrada, els valors de la columna **Valor Igual** de la taula "Cel·les canviants" ens proporcionen les coordenades de l'òptim (màxim) del programa:

$$(x_0, y_0) = (75{,}15)\blacksquare$$

Per tant, cal fabricar i vendre 75 unitats de A i 15 unitats de B per a maximitzar el benefici, el valor del qual (benefici òptim) caldrà calcular-lo explícitament:

$$z_0 = z(75{,}15) = 25 \cdot 75 + 30 \cdot 15 = 2325 \text{ u.m.}\blacksquare$$

b. Anàlisi de sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu

L' **Augment permissible** i el **Decrement permissible** de la taula "Cel·les canviants" ens diuen que l'òptim no varia si el **Coeficient objectiu** $c_1 = 25$ u.m. augmenta, com a màxim, 65 u.m. o disminueix, com a màxim, 7 u.m. De forma anàloga, l'òptim no varia si el **Coeficient objectiu** $c_2 = 30$ u.m. augmenta, com a màxim, 11'66 u.m. o disminueix, com a màxim, 21'66 u.m. Per exemple, si $c_1 = 25$ u.m. disminuís 5 u.m., l'òptim del programa continuaria sent el mateix, i el "nou" valor òptim (el nou benefici màxim) seria de:

$$z_0^* = (25 - 5) \cdot 75 + 30 \cdot 15 = 1950 \text{ u.m.}\blacksquare$$

I si fos $c_1 = 25 - 10 = 15$ u.m., l'òptim ara variaria. En aquest cas no podríem dir res$\blacksquare$

c. Anàlisi de sensibilitat de les constants de restricció

L'**Augment permissible** i el **Decrement permissible** de la primera fila de la taula "Restriccions" ens estan dient que el **Preu ombra** $\lambda_1 = 2{,}708$ u.m. no varia si la **Restricció del costat dret** $b_1 = 600$ minuts augmenta, com a molt, 1800 minuts o disminueix, com a màxim, 120 minuts. Així mateix, el **Preu ombra** $\lambda_2 = 0{,}972$ u.m. no varia si la **Restricció del costat dret** $b_2 = 720$ minuts augmenta, com a molt, 180 minuts o disminueix, com a màxim, 540 minuts.[57] Per exemple, si la constant de restricció $b_1 = 600$ minuts augmentés 600 minuts, el preu ombra $\lambda_1 = 2{,}708$ u.m. no variaria i el "nou" benefici òptim seria de:

$$\Delta z_0 = \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 2{,}708 \cdot 600 = 1624{,}8 \text{ u.m.}$$

implica:

$$z_0^* = z_0 + \Delta z_0 = 2325 + 1624{,}8 = 3949{,}8 \text{ u.m.}\ \blacksquare$$

Si $b_1 = 600 - 300 = 300$ minuts, el preu ombra $\lambda_1 = 2{,}708$ variaria i no podríem dir res$\blacksquare$

[57] Aquests preus ombra actuen com els multiplicadors de Lagrange però ara, en la programació lineal, les quasi igualtats de la interpretació econòmica són igualtats (veure el tema 1).

2.4. Models econòmics de la programació lineal

2.4.1. *Model de planificació de la producció* [58]

Considerem, per exemple, una empresa que fabrica i ven $n > 0$ productes a partir de $m > 0$ recursos productius de manera que:

- La quantitat de recurs i-èssim emprada en l'elaboració d'una unitat del bé j-èssim és constant i igual a $a_{ij} \geq 0$.
- La disponibilitat màxima del recurs i-èssim és constant i igual a $b_i \geq 0$.
- La utilitat generada per una unitat del bé j-èssim és constant i igual a $c_j \geq 0$.

En aquestes condicions, la quantitat x_j que cal fabricar i vendre del producte j-èssim per tal d'optimitzar la funció d'utilitat global:

$$z = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

s'obté com a solució del programa lineal canònic de màxim:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \\ \text{s.a:} & a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\}.$$

En efecte, per hipòtesi, la quantitat del recurs i-éssim emprat en l'elaboració de x_j unitats del producte j-èssim ha de ser igual a $a_{ij} \cdot x_j \geq 0$, la qual cosa implica que la quantitat total d'aquest recurs emprat en el procés productiu sigui de:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = a_{i1} \cdot x_1 + \cdots + a_{in} \cdot x_n \text{ unitats.}$$

Així doncs, ja que la seva disponibilitat màxima és de $b_i \geq 0$ unitats, tenim finalment que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i.$$

[58] El programa lineal de l'exemple econòmic inicial és un model d'aquest tipus. Val a dir que també existeixen models de la planificació de la producció que minimitzen costos.

2.4.1.1 Exemple d'aplicació del model de la planificació de la producció

Exemple: Un empresari fabrica dos productes P i Q. Per a la seva producció necessita ferro, fusta i plàstic. Si les quantitats d'aquests materials que formen part d'una unitat de P i de Q, amb les seves disponibilitats màximes, venen donades per la taula:

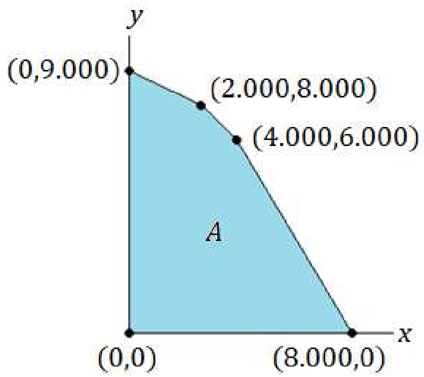
	P	Q	Disponibilitat
Ferro	3 kg	6 kg	54 tones
Fusta	6 kg	4 kg	48 tones
Plàstic	5 kg	5 kg	50 tones

i si els costos d'administració són de 100.000 u.m.: (1) Determina la producció de P i Q que maximitza els beneficis totals sabent que una unitat de P deixa un benefici de 22 u.m, i 18 u.m. una de B. (2) Sabent que el benefici unitari de P té un augment permissible de 5 u.m., calcula el nou benefici total si augmentés 4 u.m.

SOLUCIÓ: (1) Si $x, y > 0$ denoten les unitats de P i Q a fabricar, cal resoldre el programa:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = 22x + 18y - 100.000 \\ \text{s.a:} & 3x + 6y \leq 54.000 \\ & 6x + 4y \leq 48.000 \\ & 5x + 5y \leq 50.000 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Com que el conjunt factible és acotat:



es pot veure que l'òptim és el vèrtex (4.000,6.000) amb valor òptim (benefici òptim) de:

$$z_0 = z(4.000{,}6.000) = 22 \cdot 4.000 + 18 \cdot 6.000 - 100.000 = 96.000 \text{ u.m.} \blacksquare$$

(2) Aplicant l'anàlisi de sensibilitat, l'òptim del programa no varia i el nou benefici seria de:

$$z_0^* = z(4.000{,}6.000) = (22 + 4) \cdot 4.000 + 18 \cdot 6.000 - 100.000 = 112.000 \text{ u.m.} \blacksquare$$

2.4.2. *Model del transport*

Suposem que tenim $m > 0$ "orígens" (magatzems, fàbriques, etc.), amb unes existències d'un determinat producte P en les quantitats $s_1, \dots, s_m \geq 0$, i $n > 0$ "destinacions" (majoristes, grans superfícies, etc.), amb unes demandes $d_1, \dots, d_n \geq 0$ de P a cobrir. Si el cost en u.m. de transportar una unitat de P de l'origen i a la destinació j és constant i igual a $c_{ij} > 0$, i si la variable x_{ij} denota la quantitat a transportar de P de l'origen i a la destinació j, aleshores el sumatori:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} = c_{i1} \cdot x_{i1} + \cdots + c_{in} \cdot x_{in} \text{ u.m.}$$

és el cost total de transportar P des de l'origen i. Així doncs, el cost total del transport serà:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \right) = (c_{11} \cdot x_{11} + \cdots + c_{1n} \cdot x_{1n}) + \cdots + (c_{m1} \cdot x_{m1} + \cdots + c_{mn} \cdot x_{mn}) \text{ u.m.}$$

Per una altra banda, com que les existències del producte P en l'origen i són, com a màxim, de $s_i \geq 0$ unitats cal tenir present que tot el que hi surti no podrà superar aquesta quota:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + \cdots + x_{in} \leq s_i \text{ unitats}$$

i com que s'ha de satisfer la demanda $d_j \geq 0$ del producte P en la destinació j caldrà que:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{1j} + \cdots + x_{mj} \geq d_j \text{ unitats.}$$

Així doncs, per a minimitzar els costos del transport s'haurà de resoldre el programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \\ \text{s.a:} & x_{11} + \cdots + x_{1n} \leq s_1 \\ & \vdots \\ & x_{m1} + \cdots + x_{mn} \leq s_m \\ & x_{11} + \cdots + x_{m1} \geq d_1. \\ & \vdots \\ & x_{1n} + \cdots + x_{mn} \geq d_n. \\ & x_{ij} \geq 0 \end{array}\right\}.$$ [59]

[59] Degut al gran nombre de variables instrumentals que aquests programes fan anar, cal resoldre'ls amb algun algorisme informàtic adequat. Nosaltres emprem aquí l'aplicació SOLVER de l'Excel.

2.4.2.1 Exemple d'aplicació del model del transport

Exemple: Una empresa disposa de dos magatzems M i N des dels quals ha de subministrar un determinat producte P de consum a tres minoristes A, B i C. Si els costos unitaris del transport, les existències en els magatzems, així com les demandes a cobrir per part dels minoristes venen donades per la taula:

Costos	A	B	C	Existències
M	2 u.m	3 u.m.	5 u.m.	500 unitats
N	3 u.m.	4 u.m.	7 u.m.	700 unitats
Demandes	200 unitats	250 unitats	200 unitats	

(1) Troba les unitats de P que cal transportar des de cadascun dels dos magatzems per tal de satisfer les demandes dels tres minoristes a cost mínim. (2) Sabent que la demanda de A té un augment permissible de 550 unitats, amb un preu ombra associat de 3 u.m., calcula el nou cost mínim si la demanda de A del producte P augmentés 130 unitats.

SOLUCIÓ: (1) Si denotem els magatzems M i N per "1" i "2", i els minoristes A, B i C per "1", "2" i "3", caldrà resoldre el programa:

$$\left.\begin{array}{ll} \min & z=(2x_{11}+3x_{12}+5x_{13})+(3x_{21}+4x_{22}+7x_{23}) \\ \text{s.a:} & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 500 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 700 \\ & x_{11}+x_{21}\geq 200 \\ & x_{12}+x_{22}\geq 250 \\ & x_{13}+x_{23}\geq 200 \\ & x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}\geq 0 \end{array}\right\}.$$ [60]

Aplicant el SOLVER de l'Excel, la solució d'aquest programa és:

$$(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23})=(50,250,200,150,0,0)$$

amb un cost mínim de transport igual a $z_0=z(50,250,200,150,0,0)=2.300$ u.m.■[61]

(2) Aplicant l'anàlisi de sensibilitat, el preu ombra no varia i el nou benefici total seria de:

$\Delta z_0=\lambda_3\cdot\Delta b_3=3\cdot 130=390\text{ u.m.}$ implica: $z_0^*=z_0+\Delta z_0=2.300+390=2690$ u.m.■[62]

[60] Fixem-nos que el primer subíndex i de x_{ij} indica l'origen i el segon j la destinació.
[61] Per tant, cal transportar 50 unitats del producte de M a A, 250 de M a B, 200 de M a C i 150 de N a A. Notem que el segon magatzem només subministra el producte al primer minorista.
[62] La demanda de A es correspon amb la tercera restricció. Per tant: $\Delta b_3=130$ unitats i $\lambda_3=3$ u.m.

2.5. Exercicis

1. Resol gràficament els programes no lineals:

$$\text{(a)}\left.\begin{array}{rl}\max & z=x+y\\ \text{s.a:} & x^2+y^2\le 2\\ & y\le x\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}\text{(b)}\left.\begin{array}{rl}\max & z=y-(x-1)^2\\ \text{s.a:} & 2x+5y\le 10\\ & x+y\ge 1\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}\text{(c)}\left.\begin{array}{rl}\min & z=(x-1)^2+(y-1)^2\\ \text{s.a:} & 3x+5y\ge 15\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}.$$

2. Prova que el programa no lineal $\left.\begin{array}{rl}\max & z=3x+4y-xy\\ \text{s.a:} & 4x-5y\le 1\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}$ té solució infinita.

3. Suposa que $U(x,y)=2{,}75xy$ és la funció d'utilitat d'un consumidor on $x,y>0$ denoten, respectivament, les quantitats consumides de dos bens. Si els preus de compra són de 5 i 4 u.m., si hom pot destinar com a màxim 80 u.m. en la seva compra i si no es pot comprar més de 4 unitats del primer bé, calcula la utilitat màxima del consumidor.

4. Troba gràficament els òptims dels programes lineals:

$$\text{(a)}\left.\begin{array}{rl}\max & z=24x-3y\\ \text{s.a:} & -x+5y\le 15\\ & 3x+y\le 19\\ & x-5y\le 1\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}\text{(b)}\left.\begin{array}{rl}\min & z=0{,}5x+2y\\ \text{s.a:} & 4x+y\ge 5\\ & x+4y\ge 5\\ & x+6y\ge 6\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}\text{(c)}\left.\begin{array}{rl}\min & z=2x-3y\\ \text{s.a:} & -x+y\ge 1\\ & x+2y\ge 8\\ & 2x+y\ge 10\\ & x,y\ge 0\end{array}\right\}.$$

5. Una empresa manufacturera fabrica i ven dos productes A i B. En el procés de fabricació intervenen dos inputs, I i J, i la taula:

	A	B	Disponibilitat
I	3 unitats	5 unitats	190 unitats
J	1 unitat	3 unitats	90 unitats

ens mostra les unitats de cadascun d'ells que entren a formar part d'una unitat de A i de B, així com les seves disponibilitats. Llavors, si una unitat de A triga 6 hores en ser produïda i 2 hores una de B, i es disposa d'un màxim de 244 hores de treball: (a) Calcula la producció òptima d'aquests dos productes si cadascun d'ells deixa un benefici unitari de 20 i 25 u.m. (b) Quin seria el nou benefici òptim si disminuís 20 hores la disponibilitat temporal de treball, tenint en compte que el decrement permissible d'aquest recurs és de 24 hores i que el preu ombra associat és de 1,04166 u.m.[63]

[63] Cal aplicar l'anàlisi de sensibilitat per a resoldre l'apartat (b).

6. Una companyia dedicada a la producció de coure industrial té dues refineries R i T que reben mineral en brut des de dues mines M i N. Les dades d'oferta diària màxima de les mines, de les capacitats mínimes de processament diari de les dues refineries, així com els costos de transport per tona de material venen donades per la taula:

Costos	R	T	Oferta
M	3 u.m.	5 u.m.	400 tones
N	2 u.m.	9 u.m.	225 tones
Capacitat	450 tones	100 tones	

Amb aquestes dades: (a) Troba les tones de coure a transportar diàriament de les mines a les dues refineries per tal de minimitzar el cost del transport tenint en compte que la columna del valor igual de les taules del SOLVER és 225, 100, 225, 0. (b) Indica quin seria el nou cost del transport mínim si el cost unitari de M a T fos de 4,5 u.m. sabent que el decrement permissible d'aquest cost unitari és de 5 u.m. [64]

7. Un inversor vol constituir una cartera d'inversió en Borsa amb tres títols A, B i C, i la següent taula ens mostra els seus rendiments aproximats:

	A	B	C
Rendiment	6,5%	4,5%	9%

Aquest inversor disposa de 120.000€ i un expert li ha aconsellat que no inverteixi en A més de la meitat de la inversió total, i en B al menys 40.000€. Degut a que les accions de C tenen un risc més gran, li suggereix que la inversió en aquest sector no superi els 20.000€. Amb aquestes dades troba la distribució òptima de la cartera d'inversió. [65]

[64] Cal aplicar l'anàlisi de sensibilitat per a resoldre l'apartat (b).
[65] Guerrero Casas, F. Mª (1994) *Curso de optimización.* Barcelona: Ed. Ariel , pàgina 176. Aquest és un model de carteres d'inversió diferent al de Markowitz que hem vist al tema 1.

SOLUCIONS:

1.

   a. El màxim és el punt $(1,1)$ amb valor màxim associat 2.

   b. El màxim és el punt $\left(\frac{4}{5},\frac{42}{25}\right)$ amb valor màxim associat $\frac{41}{25}$.

   c. El mínim és el punt $\left(\frac{55}{34},\frac{69}{34}\right)$ amb valor mínim associat $\frac{49}{34}$.

2. La funció objectiu del programa s'optimitza indefinidament seguint la direcció positiva de l'eix d'ordenades.

3. 4 unitats del primer producte i 15 del segon maximitzen la utilitat del consumidor amb un valor òptim de 165 u.m.

4.

   a. El màxim és el punt $(6,1)$ amb valor màxim associat 141.

   b. El mínim és qualsevol punt del segment d'extrems $(1,1)$ i $\left(3,\frac{1}{2}\right)$, amb valor mínim associat 2,5.

   c. El programa no té solució finita.

5.

   a. Cal produir 35 unitats de A i 17 unitats de B, amb un benefici màxim de 1.125 u.m.

   b. El nou benefici òptim seria de 1.104,66 u.m.

6.

   a. Cal transportar diàriament 225 tones de coure de M a R, 100 tones de M a T i 225 tones de N a T. El cost mínim del transport seria de 1.625 u.m.

   b. El nou cost mínim seria de 1.575 u.m.

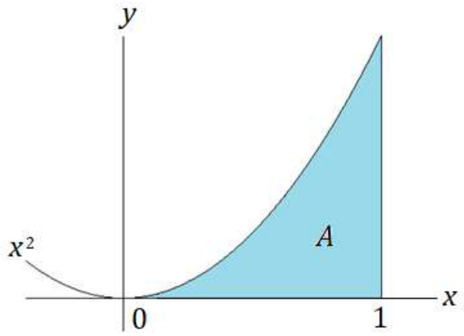
7. L'inversor ha d'invertir 60.000€ de la cartera en títols de tipus A, 40.000€ en títols de tipus B i 20.000€ en títols de tipus C. Els beneficis òptims de la cartera pugen a 7.500€.

BLOC II: Anàlisi dinàmica

3. INTEGRACIÓ DE FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE

La integració de funcions reals és una de les eines matemàtiques més eficients a l'hora de resoldre problemes relacionats amb fenòmens reals on intervé el temps com a variable independent. D'ací el nom de Anàlisi dinàmica que li hem donat a aquest bloc. Entre d'altres, les integrals ens permeten calcular àrees planes no rectilínies. Vegem un exemple:

Exemple: Calcula l'àrea A generada per la paràbola $y = x^2$:



Val a dir que no existeix cap fórmula "clàssica" que ens permeti calcular el valor de A doncs, com veiem, es tracta d'una figura amb un contorn no rectilini. Sortosament les integrals venen a ajudar-nos en el següent sentit. Ja que la paràbola $y = f(x) = x^2$ és una funció real d'una variable que té com a "primitiva" associada la funció real d'una variable:[66]

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

importants resultats matemàtics[67] ens permeten dir que l'àrea A és igual a la "integral definida":

$$A = \int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

En aquest primer tema veurem com calcular les "primitives" més bàsiques i donarem un cop d'ull a algunes de les seves aplicacions més rellevants com són ara el càlcul d'àrees sota funcions, així com també algunes aplicacions econòmiques. Val a dir que el que farem aquí és essencial per a poder abordar amb èxit el contingut del segon i últim tema d'aquest Bloc.

[66] Observem que la derivada d'aquesta funció és precisament la funció inicial $y = x^2$.
[67] El teorema fonamental del càlcul integral i la regla de Barrow.

3.1. Integral indefinida d'una funció

3.1.1. *Primitiva d'una funció*

En aquest apartat veiem com calcular les integrals indefinides (o primitives) a partir de mètodes específics per, posteriorment, donar un cop d'ull a algunes de les seves aplicacions al càlcul d'àrees i a l'Economia matemàtica més interesants. Des d'un punt de vista informal podem dir que integrar una funció real d'una variable és el "contrari" de derivar-la.

<u>Definició</u>: Una **primitiva** d'una funció d'una variable $y = f(x)$ és una altra funció $F(x)$ tal que la seva derivada és $f(x)$. En altres paraules:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x).$$ [68]

<u>Exemple</u>: Prova que la funció:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$$

és una primitiva de $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓ: Evident ja que:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x) \blacksquare$$

Val a dir que la primitiva d'una funció no és única. En efecte:

<u>Teorema</u>: Dos primitives d'una mateixa funció es diferencien en una constant. En altres paraules, si $F_1(x)$ i $F_2(x)$ són primitives de $y = f(x)$ existeix una constant $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

<u>Exemple</u>: Les primitives de $f(x) = x^2$ són del tipus:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \text{ amb } C \in \mathbb{R} \text{ constant.}$$

---

[68] Les primitives s'anomenen també **antiderivades**.

3.1.2. *Integral indefinida d'una funció. Integrals immediates i propietats*

La propietat anterior justifica la definició d'integral indefinida.

<u>Definició</u>: La **integral indefinida** (**integral** a partir d'ara) de $y = f(x)$ és igual a l'expressió: [69]

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

on $F(x)$ és una primitiva de $y = f(x)$ i $C \in \mathbb{R}$ és una constant.

<u>Exemple</u>: Donada la funció:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

troba:

1. La seva integral indefinida.
2. La primitiva que passa pel punt $(e, 2)$.

SOLUCIÓ:

(1) Ja que la derivada de $F(x) = \ln x$ és la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, la integral indefinida serà:

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln x + C \blacksquare$$

(2) Ara hem de trobar una funció de la forma:

$$F(x) = \ln x + C$$

que passi pel punt $(e, 2)$. Ja que:

$$2 = F(e) = \ln e + C = 1 + C \text{ implica: } C = 1$$

la primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ que estem buscant és la funció:

$$F(x) = \ln x + 1 \blacksquare$$

Des d'un punt de vista geomètric, poden dir que la integral indefinida d'una funció representa a una família de corbes en el pla, sent cadascuna d'aquestes corbes una primitiva.

[69] Aquest simbolisme té a veure amb el concepte d'integral definida.

3.1.2.1. Integrals immediates

Per tal de calcular integrals indefinides és essencial tenir present la següent llista d'**integrals immediates**, que són les integrals que s'obtenen directament a partir de la pròpia definició:

1. $\int a \cdot dx = a \cdot x + C$, per a tota constant $a \in \mathbb{R}$.
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, on $a \neq -1$.
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, on $a > 0$.
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
7. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$.
8. $\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \tan^{-1} x + C$.

Malauradament el càlcul d'integrals no admet quelcom de semblant a la regla de la cadena de la derivació i això fa que no totes les funcions elementals tinguin una primitiva expressable a partir d'altres funcions elementals.[70] Casos així serien, per exemple, les integrals:

$$\int \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx \text{ i } \int e^{-x^2} dx.$$

Així doncs, estem obligats a integrar cada tipus de funció emprant tot un seguit de mètodes d'integració específics. De fet, l'objectiu fonamental d'aquest tema és estudiar-ne els més senzills.

[70] Una **funció elemental** és aquella que es pot expressar a partir d'una quantitat finita de exponencials, logaritmes, potències, sinus, cosinus, tangents i constants mitjançant la composició de funcions, i utilitzant les quatre operacions fonamentals de l'aritmètica.

3.1.2.2. Propietats de les integrals indefinides

A partir d'ara caldrà tenir present les següents propietats de les integrals indefinides:

Propietats:

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.
2. $\int\big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$..
3. $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$, per a tota constant $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. "Integració logarítmica": [71]

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C.$$

Anem a veure un exemple d'aplicació:

Exemple: Calcula les integrals "quasi immediates":[72]

$$(1) \int(x^4 - 7x^3 + 5)\,dx.\ (2) \int\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2}\right)dx.\ (3) \int \frac{xdx}{1+x^2}.\ (4) \int \tan x\,dx.$$

SOLUCIÓ: (1) Aplicant les propietats anteriors tenim:

$$\int (x^4 - 7x^3 + 5)\,dx = \int x^4\,dx - 7\int x^3\,dx + 5\int dx = \left(\frac{x^5}{5}\right) - 7\left(\frac{x^4}{4}\right) + 5x + C\blacksquare$$

(2) Ara, dividint per x^2 i aplicant la llista d'integrals immediates:

$$\int\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2}\right)dx = \left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right) - 2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + C = -\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \frac{2}{x} + C\blacksquare$$

(3) Gràcies a la integració logarítmica i tot multiplicant i dividint per 2, deduïm que:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2) + C\blacksquare$$

(4) Com abans, i gràcies a la definició de funció tangent, tenim ara que:

$$\int \tan x\,dx = \int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = -\int\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx = -\ln\cos x + C\blacksquare$$

[71] Aquesta propietat pot ser vista com un mètode específic d'integració com els que analitzarem tot seguit.

[72] Diem que una integral és **quasi immediata** si es pot resoldre directament a partir de la taula d'integrals immediates tot aplicant les propietats anteriors.

3.2. Mètodes d'integració

3.2.1. *Integració per parts.*

Recordem que la derivada d'una funció $y = f(x)$ era igual a:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Doncs bé, considerant la part esquerra de la igualtat anterior com si fos un quocient,[73] la **diferencial** de la funció és igual a la expressió:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$ [74]

Com a propietat interessant que relaciona els conceptes d'integral indefinida i diferencial tenim que les operacions d'integració i de diferenciació són "inverses" una de l'altra en el sentit que:

$$\int df(x) = f(x) + C.$$ [75]

El mètode d'integració per parts es basa en el concepte de diferencial d'una funció i ens proporciona una fórmula precisa per avaluar cert tipus d'integrals. En concret ens diu que:

Propietat (mètode d'integració per parts): Si $u = u(x)$ i $v = v(x)$ són dues funcions reals derivables aleshores:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Aquesta és, precisament, la fórmula que cal aplicar per a resoldre integrals pel mètode d'integració "per parts". Vegem-ho.

[73] De fet és el límit d'un quocient.
[74] Val a dir que la diferencial d'una funció en un punt ens permet aproximar l'increment de la funció al voltant d'aquest punt. El concepte de diferencial va ser introduït per Leibniz.
[75] Aquest resultat és una conseqüència directa de la definició de diferencial i de la primera propietat de la plana anterior.

3.2.1.1. Aplicacions del mètode d'integració per parts

a. $\int p(x) \cdot e^{kx} \cdot dx$, amb $k \in \mathbb{R}$ constant i $p(x)$ polinomi.

Aquesta integral es pot resoldre fent:

$$u = p(x) \text{ i } dv = e^{kx}dx.$$

Exemple: Calcula la integral:

$$\int xe^x dx.$$

SOLUCIÓ: Ja que:

$$u = p(x) = x \text{ implica: } du = 1 \cdot dx = dx$$

i:

$$dv = e^{kx}dx = e^x dx \text{ implica: } v = \int e^x dx = e^x + C$$

deduïm, aplicant la fórmula d'integració per parts, que:[76]

$$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \blacksquare$$

b. $\int p(x) \cdot \ln x \cdot dx$, amb $p(x)$ polinomi.

Aquesta integral es pot resoldre fent:

$$u = \ln x \text{ i } dv = p(x)dx.$$

Exemple: Calcula la integral:

$$\int \ln x dx\,.$$ [77]

SOLUCIÓ: Ja que:

$$u = \ln x \text{ implica: } du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

i:

$$dv = p(x) \cdot dx = 1 \cdot dx \text{ implica: } v = \int 1 \cdot dx = x + C$$

deduïm, aplicant la fórmula d'integració per parts, que:

$$\int \ln x dx = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C \blacksquare$$

[76] No cal posar en la fórmula de la integració per parts la constant d'integració de $v = v(x)$.
[77] En aquest cas el polinomi és la unitat: $p(x) = 1$.

3.2.1.2. Aplicacions del mètode d'integració per parts

c. $\int p(x) \cdot \sin x \cdot dx$ ó $\int p(x) \cdot \cos x \cdot dx$, amb $p(x)$ polinomi.

Aquesta integral es pot resoldre fent:

$$u = p(x) \text{ i } dv = \sin x\, dx \text{ ó } dv = \cos x\, dx.$$

Exemple: Calcula la integral:

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx.$$

SOLUCIÓ: Ja que:

$$u = p(x) = x \text{ implica: } du = 1 \cdot dx = dx$$

i:

$$dv = \cos x\, dx \text{ implica: } v = \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

deduïm, aplicant la fórmula d'integració per parts:[78]

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C \blacksquare$$

d. $\int e^{kx} \cdot \sin x \cdot dx$ ó $\int e^{kx} \cdot \cos x \cdot dx$, amb $k \in \mathbb{R}$ constant.

Aquesta integral es pot resoldre fent:

$$u = \sin x \text{ ó } u = \cos x \text{ i } dv = e^{kx} dx.$$

Exemple: Calcula la integral $I = \int e^{-x} \cos x\, dx$.

SOLUCIÓ: Ja que:

$$u = \cos x \text{ implica: } du = -\sin x\, dx \text{ i } dv = e^{-x} dx \text{ implica: } v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

deduïm, aplicant el mètode d'integració per parts, que:

$$I = \int e^{-x} \cos x\, dx = -(e^{-x}) \cos x - \int e^{-x} \sin x\, dx.$$

Ja que, aplicant de nou la fórmula d'integració per parts, tenim que:

$$\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x\, dx = -e^{-x} \sin x + I$$

deduïm, aplicant tot l'anterior, que:

$$I = -(e^{-x}) \cos x - (-e^{-x} \sin x + I) \text{ implica: } I = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + C \blacksquare$$ [79]

[78] Recordem que no cal posar en la fórmula la constant d'integració.
[79] Fixem-nos en la "circularitat" del procés de resolució d'aquesta integral.

3.2.2. *Integració per substitució o canvi de variable*

En poques paraules, introduir un canvi de variable en una integral:

$$\int f(x)dx$$

consisteix, bàsicament, en substituir la variable x per una nova variable t a partir d'una igualtat funcional de la forma:

$x = \varphi(t)$, on $\varphi(t)$ és una funció derivable respecte t.[80]

Com que, aplicant diferencials sobre la igualtat funcional, tenim:

$x = \varphi(t)$ implica: $dx = \varphi'(t) \cdot dt$

aleshores la integral inicial en x es transforma en una integral en t:

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = \int g(t)dt.$$

Si aquesta darrera integral, que depèn únicament de la variable t, es pot resoldre, també es podrà resoldre la inicial tot "desfent" el canvi de variable. Vegem un exemple il·lustratiu:

<u>Exemple</u>: Calcula la integral:

$$\int \left(x \cdot \sqrt{x-1}\right) dx$$

aplicant el canvi de variable: $x - 1 = t$.

SOLUCIÓ: En aquest cas l'equació del canvi de variable seria:

$x = \varphi(t) = t + 1$ implica: $dx = \varphi'(t) \cdot dt = 1 \cdot dt = dt$.

Així doncs:

$$\int \left(x \cdot \sqrt{x-1}\right) dx = \begin{Bmatrix} x = t+1 \\ dx = dt \end{Bmatrix} = \int \left((t+1) \cdot \sqrt{t}\right) \cdot dt = \int \left((t+1) \cdot t^{\frac{1}{2}}\right) dt =$$

$$= \int \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt = \left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{3/2 + 1}\right) + \left(\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{1/2 + 1}\right) + C = \left(\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + \left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C =$$

$$= \{t = x - 1\} = \left(\frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + \left(\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C \blacksquare$$

[80] També cal que sigui una funció bijectiva respecte t per a poder "desfer" posteriorment el canvi.

3.2.2.1. Exemple d'aplicació del mètode d'integració per canvi de variable

Exemple: Calcula les següents integrals pel mètode de substitució:

1. $\int (1-2x)^7\,dx$.
2. $\int \frac{dx}{(x-3)^2}$.
3. $\int \left(\sqrt[3]{1-3x}\right)dx$.
4. $\int \frac{0{,}5dx}{\sqrt{x+5}}$.

SOLUCIÓ:[81]

(1) En aquests cas, introduirem el canvi de variable $t = 1-2x$:

$$\int (1-2x)^7\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1-t}{2} \\ dx = -\dfrac{dt}{2} \end{array}\right\} = \int t^7\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^7 dt = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^8}{8}\right) + C =$$

$$= \{t = 1-2x\} = -\frac{(1-2x)^8}{16} + C \blacksquare$$

(2) Ara caldrà considerar el canvi de variable $t = x-3$:

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2} = \left\{\begin{array}{l} x = t+3 \\ dx = dt \end{array}\right\} = \int \frac{dx}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = \left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) + C = -\left(\frac{1}{t}\right) + C = \{t = x-3\} =$$

$$= -\left(\frac{1}{x-3}\right) + C \blacksquare$$

(3) Amb el canvi de variable $1-3x = t$ deduïm que:

$$\int \left(\sqrt[3]{1-3x}\right)dx = \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1-t}{3} \\ dx = -\dfrac{dt}{3} \end{array}\right\} = \int \sqrt[3]{t}\cdot\left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\int t^{\frac{1}{3}}\,dt = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{t^{\frac{4}{3}}}{4/3}\right) + C =$$

$$= -\left(\frac{t^{\frac{4}{3}}}{4}\right) + C = \{t = 1-3x\} = -\left(\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{4}\right) + C \blacksquare$$

(4) Finalment, caldrà considerar el canvi de variable $t = x+5$:

$$\int \frac{0{,}5dx}{\sqrt{x+5}} = \left\{\begin{array}{l} x = t-5 \\ dx = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-0.5}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{0.5}}{0.5}\right) + C = t^{0.5} + C = \{t = x+5\} =$$

$$= \sqrt{x+5} + C \blacksquare$$

[81] En cada cas caldrà aplicar un canvi de variable convenient.

3.3. Integral definida d'una funció

3.3.1. *Integral definida d'una funció i propietats*

Donada una funció real contínua definida sobre un interval tancat:[82]

$$y = f(x), \text{ amb } a \le x \le b$$

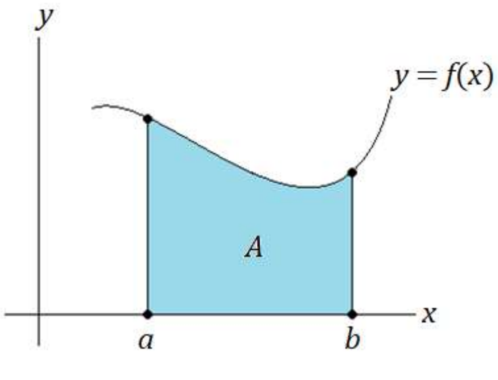
i amb la "restricció de positivitat":

$$f(x) \ge 0, \text{ per a tot } a \le x \le b$$

resulta doncs que la **integral definida** de $f(x)$ entre els punts $x = a$ i $x = b$, que denotem per:

$$\int_a^b f(x)dx$$

ens mesura l'àrea A compresa entre l'eix d'abscisses, la funció $y = f(x)$ i les dues rectes verticals $x = a$ i $x = b$. Gràficament:



Així doncs, la integral definida és un número real:

$$A = \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$ [83]

Com tindrem ocasió de comprovar, la restricció de positivitat de la funció no és un obstacle a l'hora de calcular àrees no rectilínies aplicant la integral definida.

[82] Les integrals definides sobre funcions contínues s'anomenen *integrals de Cauchy*.
[83] Hom pot trobar la definició formal d'integral definida en qualsevol manual de càlcul integral.

3.3.1.1. Propietats de la integral definida

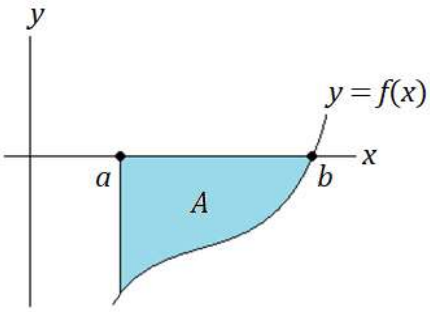
Propietats: En general:

1. $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
2. $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, per a tota constant $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
4. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, per a tot $a \le c \le b$.
6. Si $f(x) \ge 0$, per a tot $a \le x \le b$, aleshores $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.
7. Si $f(x) \le 0$, per a tot $a \le x \le b$, aleshores $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$.

D'aquestes propietats[84] es desprèn que si una funció contínua $y = f(x)$ és negativa entre els punts $x = a$ i $x = b$, és a dir, si:

$$f(x) \le 0, \text{ per a tot } a \le x \le b$$

com, per exemple:



el valor de l'àrea A coincideix amb el valor oposat de la integral definida. En altres paraules:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$ [85]

[84] Sobre tot les dues darreres.
[85] Per tant, si volem utilitzar integrals definides per a avaluar àrees sense dibuixar-les, es recomanable considerar sempre els valors absoluts de les integrals definides que hi estan involucrades. A tall d'exemple tenim les aplicacions mètriques de les integrals definides que veiem més endavant.

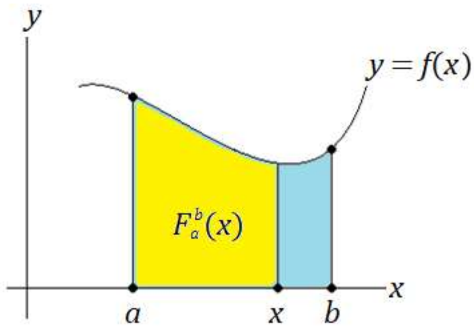
3.3.2. *Teorema fonamental del càlcul integral. Regla de Barrow*

Val a dir que el procés "geomètric" del càlcul de la integral definida que es desprèn de la seva definició no és el que es segueix habitualment.[86] En el seu lloc s'utilitza una propietat fonamental que relaciona la integral definida amb la indefinida i que, per la seva transcendència, enunciem aquí amb cert detall.

Definició: La **funció integral** d'una funció contínua $y = f(x)$ definida entre els punts $x = a$ i $x = b$ és, per definició, la funció real de variable real:

$$F_a^b(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Gràficament, la funció integral seria:[87]



Fixem-nos que aquesta funció val 0 si $x = a$, i la integral definida inicial si $x = b$:

$$F_a^b(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{ i } F_a^b(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

El teorema fonamental del càlcul integral ens diu que:

Teorema (Teorema fonamental del càlcul integral): La funció integral d'una funció real de variable real $y = f(x)$ contínua és una de les seves primitives. En altres paraules:

$$\frac{dF_a^b(x)}{dx} = f(x).$$

[86] Anomenat *mètode d'exhaustió*. Aquest mètode ja era conegut pels grecs i Arquímedes el va utilitzar per a aproximar el valor numèric de π.
[87] Notem que la funció integral avalua l'àrea en groc.

3.3.2.1. Regla de Barrow

La regla de Barrow que s'obté directament del teorema anterior, ens proporciona la integral definida d'una funció contínua sempre i quan admeti primitives.[88] En efecte:

Teorema (Regla de Barrow): Si $F(x)$ és una primitiva de $y = f(x)$ llavors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Exemple: Calcula la integral definida:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{2 - \sin x}\right) dx.$$

SOLUCIÓ: Degut a que la integral indefinida d'aquesta funció és:

$$\int \left(\frac{\cos x}{2 - \sin x}\right) dx = -\ln(2 - \sin x) + C$$

podem considerar com a primitiva associada la funció:

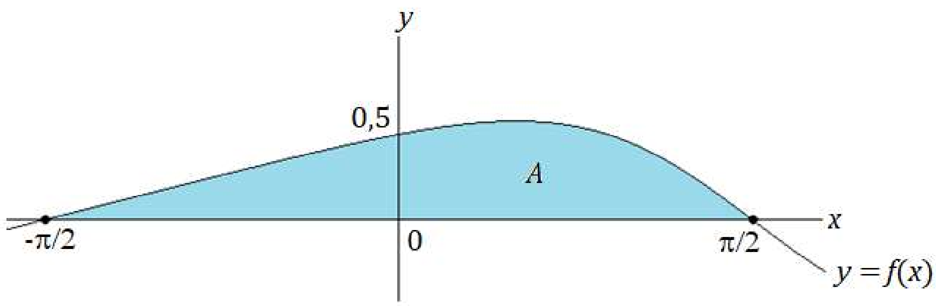
$$F(x) = -\ln(2 - \sin x).$$

Per tant, i aplicant la regla de Barrow, deduïm que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{2 - \sin x}\right) dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\ln\left(2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) - \left(-\ln\left(2 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= (-\ln 1) - (-\ln 3) = \ln 3 \ \blacksquare$$

Ja que la funció és positiva entre $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$ aquesta integral definida és l'àrea:

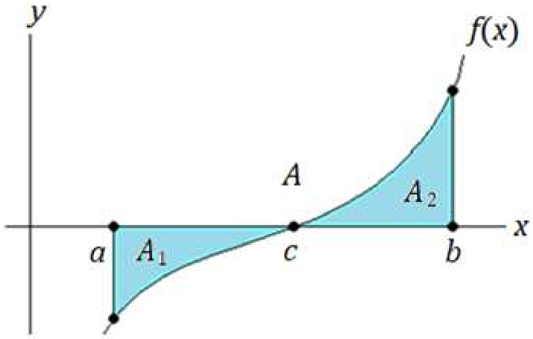


[88] Malauradament si una funció no té primitives la regla de Barrow no es pot aplicar.

3.4. Aplicacions de la integral definida

3.4.1. *Aplicacions mètriques: càlcul d'àrees*[89]

a. Es tracta de calcular l'àrea A determinada per:



En aquest cas:

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|.$$ [90]

<u>Exemple</u>: Troba l'àrea que determina $y = f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ entre $x = 1, x = 4$ i l'eix d'abscisses.

SOLUCIÓ: Ja que la funció és negativa per $1 \leq x \leq 2$ i positiva per $x \geq 2$, l'àrea serà igual a:

$$A = \left|\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx\right|.$$

Així doncs, i aplicant integració per parts, podem agafar com a primitiva $F(x)$ la funció:

$$\int \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + C \text{ implica: } F(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

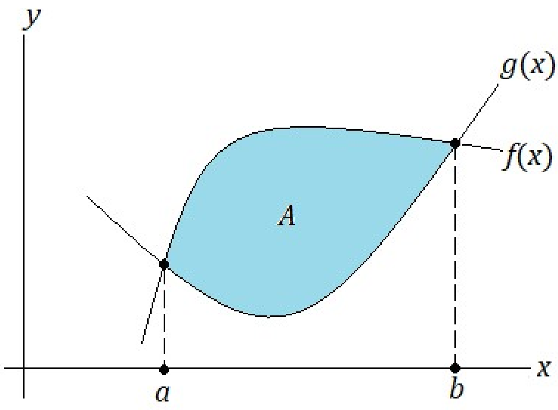
Així doncs, i aplicant la regla de Barrow, l'àrea que ens demanen serà igual a:

$$A = \left|\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx\right| = |F(2) - F(1)| + |F(4) - F(2)| =$$

$$= \left|-1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |4 \ln 2 - 2| = 3 \ln 2 - 1 \cong 1{,}08 \blacksquare$$

[89] Com veurem, no caldrà dibuixar les àrees que ens demanen per a avaluar-les.
[90] Notem que en aquest cas no caldria considerar el valor absolut de la segona integral definida.

b. Es tracta de calcular ara l'àrea A tancada entre dues funcions:



En aquest cas:

$$A = \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \right|.$$ [91]

Exemple: Troba l'àrea tancada per la paràbola $y = x^2 + 1$ i la recta $x + y = 3$.

SOLUCIÓ: Aquestes dues funcions es tallen en els punts $x = -2$ i $x = 1$. En efecte:

$$x^2 + 1 = 3 - x \text{ implica: } x^2 + x - 2 = 0 \text{ implica: } x = -2 \text{ ó } x = 1.$$

Per tant, l'àrea que ens demanen és igual a:

$$A = \left| \int_{-2}^{1} \big((x^2 + 1) - (3 - x)\big)dx \right| = \left| \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)dx \right|.$$

Donat que podem considerar como a primitiva la funció:

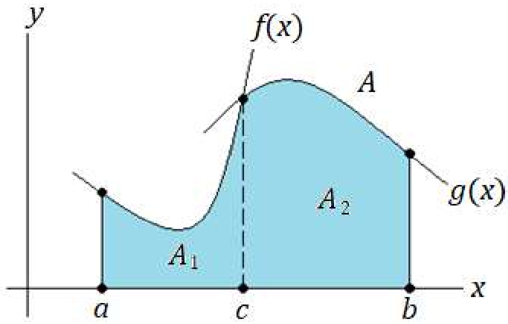
$$\int (x^2 + x - 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C \text{ implica: } F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

aquesta àrea serà igual a:

$$A = \left| \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)dx \right| = |F(1) - F(-2)| = \left| \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(\frac{10}{3}\right) \right| = \frac{9}{2} = 4.5 \blacksquare$$

[91] Caldrà posar sempre el valor absolut de la diferència entre les dues funcions sense importar quina de les dues és el minuend.

c. Es tracta de calcular l'àrea A determinada per dues funcions "consecutives":



L'àrea serà doncs:

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b g(x)dx\right|.$$

<u>Exemple</u>: Calcula l'àrea determinada per l'eix d'abscisses entre $x = -1$, $x = \frac{\pi}{2}$ i la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x}, x < 0 \\ \cos x\,, x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓ: Degut a quer aquesta funció canvia de definició en el punt $x = 0$, l'àrea que volem quantificar serà:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx\right| + \left|\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx\right|.$$

Tenint present que:

$$\int \left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = -x - 2\ln(1-x) + C \text{ implica: } F_1(x) = -x - 2\ln(1-x)$$

i que:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \text{ implica: } F_2(x) = \sin x$$

deduïm, per la regla de Barrow, que:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx\right| + \left|\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx\right| = |F_1(0) - F_1(-1)| + \left|F_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_2(0)\right| =$$

$$= |0 - (1 - 2\ln 2)| + |1 - 0| = 2\ln 2 \cong 1.3863\blacksquare$$

3.4.2. *Aplicacions econòmiques de la integral definida*

3.4.2.1. Funcions econòmiques marginals

La primera de les aplicacions econòmiques que considerarem té a veure amb funcions econòmiques *marginals* (benefici marginal, cost marginal, etc.) que s'estudien en Economia matemàtica. Vegem un exemple:

Exemple: Sabent que el cost marginal de producció d'un cert article de consum ve donat per la funció:

$$CMa(q) = 2q - 10 \text{ u.m.}$$

on la variable $q > 0$ denota el nombre d'unitats produïdes, i que el preu de venda unitari és constant i igual a 520 u.m.:

1. Determina la funció de costos totals sabent que 5100 u.m. són els beneficis de la producció i venda de 10 articles.
2. Calcula el nivell de producció que maximitza els beneficis totals.

SOLUCIÓ: (1) Com que el cost marginal $CMa(q)$ és la derivada de la funció de costos totals $C(q)$ aleshores, per definició:

$$C(q) = \int CMa(q)dq = \int (2q - 10)dq = q^2 - 10q + C.$$

Així doncs, ja que la funció d'ingressos és:

$$I(q) = 520 \cdot q$$

la funció de beneficis totals $B(q)$ s'expressarà de la forma:

$$B(q) = I(q) - C(q) = (520q) - (q^2 - 10q + C) = 530q - q^2 - C.$$

Finalment, com que $B(10) = 5100$ u.m., hom dedueix que els costos totals seran:

$$5100 = B(10) = 530 \cdot 10 - 10^2 - C \text{ implica: } C = 100 \text{ implica: } C(q) = q^2 - 10q + 100 \blacksquare$$

(2) Ja que:

$$0 = \frac{dB}{dq} = 530 - 2q \text{ implica: } q = 265 \text{ i } \frac{d^2B}{dq^2} = -2 < 0$$

deduïm que els beneficis màxims de la producció i venda d'aquest article s'obtenen produint i venent 265 articles amb un valor monetari òptim de:

$$B(265) = 530 \cdot 265 - 265^2 - 100 = 70.125 \text{ u.m.} \blacksquare$$

3.4.2.2. Excedent del consumidor i del productor

Una altra aplicació econòmica d'interès consisteix en trobar l'*excedent del consumidor* i/o *del productor* partir de les dues funcions d'oferta i de demanda associades.[92] Vegem un exemple:

Exemple: Si les funcions d'oferta i demanda d'un bé són, respectivament:

$$p_D = 25 - q^2 \text{ i } p_S = 2q + 1$$

1. Determina el preu d'equilibri del bé, així com la quantitat ofertada i/o demandada a aquest preu.
2. Calcula l'excedent del consumidor i del productor associat al preu d'equilibri anterior.

SOLUCIÓ: (1) Ja sabem que el preu d'equilibri ve donat per la igualtat $p_D = p_S$. Per tant, la quantitat demandada (l'oferta) $q_0 > 0$ en aquestes condicions serà de:

$$p_S = p_D \text{ implica: } q^2 + 2q - 24 = 0 \text{ implica: } q_0 = 4 \text{ unitats.}$$ [93]

En conseqüència, el preu d'equilibri $p_0 > 0$ serà de:

$$p_0 = p_D(4) = p_S(4) = 9 \text{ u.m.} \blacksquare$$

(2) En general, els excedents del consumidor ε_D i del productor ε_S al nivell de preus $p_0 > 0$ i quantitat demandada $q_0 > 0$ venen donats per les igualtats:

$$\varepsilon_D = \left(\int_0^{q_0} p_D dq\right) - p_0 \cdot q_0 \text{ i } \varepsilon_S = p_0 \cdot q_0 - \left(\int_0^{q_0} p_S dq\right).$$

Per tant, en el nostre cas, tindrem com a excedent del consumidor:

$$\varepsilon_D = \left(\int_0^{q_0} p_D dq\right) - p_0 q_0 = \left(\int_0^{4} (25 - q^2) dq\right) - 9 \cdot 4 = 42.66 \text{ u.m.} \blacksquare$$

i com a excedent del productor:

$$\varepsilon_S = p_0 q_0 - \left(\int_0^{q_0} p_S dq\right) = 9 \cdot 4 - \left(\int_0^{4} (2q + 1) dq\right) = 16 \text{ u.m.} \blacksquare$$ [94]

[92] Caldrà emprar integrals quan alguna d'aquestes funcions no sigui lineal.
[93] L'altra solució de l'equació és negativa i, òbviament, no cal considerar-la.
[94] No calia emprar integrals definides per a calcular l'excedent del productor doncs es tracta de l'àrea d'un triangle.

3.4.2.3. Evolució d'un bé al llarg del temps

La darrera de les aplicacions econòmiques consisteix en estudiar com s'acumula o minva una variable econòmica amb el temps (per exemple, quan triga en esgotar-se un bé sotmès a una demanda creixent). Veiem un exemple:

Exemple: Se sap que la demanda en tones d'un rar mineral M és de la forma:

$$D(t) = 2 \cdot 10^6 \cdot e^{0.04}$$

on $t \geq 0$ denota els anys transcorreguts des de l'inici de la seva explotació. Si les reserves inicials de M eren de 20.000 milions de tones, calcula el temps que trigaran a esgotar-se.[95]
SOLUCIÓ:
Suposant que la demanda mundial de M és contínua,[96] la quantitat demandada $Q(t_0)$ fins el moment $t_0 \geq 0$ (és el que s'entén per "demanda acumulada") és igual a la integral:

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} D(t)dt$$

on $t = 0$ denota el moment en què s'inicia l'explotació. Sabent que les reserves inicials de M eren de 20.000 milions de tones ($2 \cdot 10^{10}$ tones), haurem de calcular el valor de $t_0 > 0$ on la demanda acumulada sigui precisament igual a $2 \cdot 10^{10}$ tones, és a dir:

$$Q(t_0) = 2 \cdot 10^{10}.$$

Per tant:

$$2 \cdot 10^{10} = Q(t_0) = \int_0^{t_0} D(t)dt = \int_0^{t_0} (2 \cdot 10^6 \cdot e^{0.04t})dt = \frac{2 \cdot 10^6}{0.04} \cdot (e^{0.04t_0} - 1)$$

i, en conseqüència:

$$400 = e^{0.04\ {}_0} - 1 \text{ implica: } e^{0.04\ {}_0} = 401 \text{ implica: } t_0 = \frac{\ln(401)}{0.04} \cong 150.$$

Per tant, el mineral té una "vida útil" de gairebé 150 anys ■

[95] En aquest exemple la demanda de M creix "exponencialment". Hom diu que una funció creix (o decreix) *exponencialment* si el seu ritme de variació és proporcional, en tot moment, al seu valor. Aquest tipus de funcions tornaran a aparèixer en el tema següent.
[96] És a dir, cal suposar que es demanda mineral en tot moment. Aquesta hipòtesi és necessària per a poder resoldre l'exemple a partir d'integrals definides.

3.5. Exercicis

1. Calcula les integrals quasi immediates:

$$(1)\int \frac{4dx}{x^2}.\ (2)\int e^{2x}dx.\ (3)\int\left(\frac{x^2-7}{\sqrt{x}}\right)dx.\ (4)\int\frac{dx}{1-2x}.\ (5)\int\left(\frac{x^2+4x}{x^3+6x^2-71}\right)dx.$$

2. Aplicant el mètode d'integració per parts calcula les integrals:

$$(1)\int(x^2+x-2)e^x dx.\ (2)\int e^{2x}\sin x\,dx.\ (3)\int\ln\left(\frac{2}{x}\right)dx.\ (4)\int(1+x^2)\ln x\,dx.$$

3. Aplicant el mètode de substitució (canvi de variable) calcula les integrals:

$$(1)\int\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx.\ (2)\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-2x^2}}.\ (3)\int x^2e^{x^3}dx.\ (4)\int x(1-7x)^{10}dx.\ (5)\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

4. Calcula les integrals definides:

$$(1)\int_1^4\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx.\ (2)\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}.\ (3)\int_0^{\ln 2}(1+xe^{2x})dx.\ (4)\int_0^{0,25}\left(\frac{0,5}{1-\sqrt{x}}\right)dx.$$

5. Calcula l'àrea que determina la funció:

$$f(x)=(2x-1)e^x$$

   amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x=0$ i $x=1$.

6. Troba l'àrea que tanquen la hipèrbola:

$$y=\frac{1}{x+2}$$

   i la recta $12y+x=5$.

7. Calcula l'àrea que tanca la funció:

$$f(x)=\begin{cases}1,5x+3, & x<0\\ \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}, & x\geq 0\end{cases}$$

   amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x=-1$ i $x=3$.

8. La funció de costos marginals d'un fabricant de cotxes elèctrics és:

$$CMa(q)=0,8q+4 \text{ u.m.}$$

   Si actualment la fàbrica produeix 50 unitats, quant costaria doblar-ne la producció?

SOLUCIONS:

1.

$$(1)\ -\frac{4}{x}+C.\ (2)\ \frac{e^{2x}}{2}+C.\ (3)\ \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-14x^{\frac{1}{2}}+C.\ (4)\ -\frac{\ln(1-2x)}{2}+C.\ (5)\ \frac{\ln\left(x^3+6x^2-71\right)}{3}+C.$$

2.

$$(1)\ (x^2-x-1)e^x+C.\ (2)\ \frac{e^x(2\sin x-\cos x)}{5}+C.$$

$$(3)\ x\ln\left(\frac{2}{x}\right)+x+C.\ (4)\ \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\left(x+\frac{x^3}{9}\right)+C.$$

3.

$$(1)\ \tan^{-1}x+C.\ (2)\ -\frac{3\left(1-2x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{8}+C.\ (3)\ \frac{e^{x^3}}{3}+C.$$

$$(4)\ -\frac{1}{49}\cdot\left(\frac{(1-7x)^{11}}{11}-\frac{(1-7x)^{12}}{12}\right)+C.\ (5)\ 2\left(\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C.$$

4.

$$(1)\ \frac{7}{4}.\ (2)\ \ln 2.\ (3)\ 3\ln 2-\frac{3}{4}.\ (4)\ \ln 2-\frac{1}{2}.$$

5. $A=4e^{0,5}-e-3\cong 0,8766.$
6. $A=\frac{7}{24}-\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cong 0,004.$
7. $A=\frac{33}{4}=8,25.$
8. 3.200 u.m.

4. EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES

Les equacions diferencials ordinàries són equacions que ens permeten, per dir-ho així, "reconstruir" una funció d'una variable a partir de les seves derivades. Vegem un exemple introductori relacionat amb la datació temporal de l'isòtop radioactiu C^{14} del carboni:

<u>Exemple</u>: El mètode de datació temporal per carboni C^{14} es fonamenta en el fet que la proporció d'aquesta substància en tot organisme viu es manté constant al llarg de la seva vida i, en morir, disminueix al no haver-hi reposició. Se sap que en tot moment $t > 0$ després de la mort ($t = 0$), la "taxa" de desintegració del carboni C^{14} (la derivada respecte el temps) satisfà la "equació diferencial":

$$\frac{dC^{14}(t)}{dt} = -1.24486 \cdot 10^{-4} \cdot C^{14}(t).$$

Doncs bé, aquesta equació diferencial de primer ordre té per "solució general" l'expressió:

$$C^{14}(t) = C^{14}(0) \cdot e^{-1.24486 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

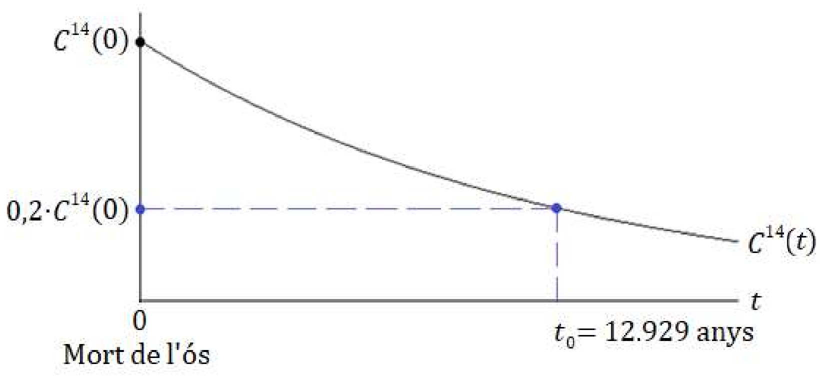
on $C^{14}(0)$ és la quantitat de carboni C^{14} inicial. Com a aplicació d'aquesta fórmula, suposem que les restes d'un ós trobades al Pirineu contenen només una cinquena part del carboni 14 present en un ós viu. Quan de temps fa que l'ós és mort? En aquest cas, el temps $t_0 > 0$ passat des de la mort ha de satisfer com a "condició inicial" que:

$$C^{14}(t_0) = \frac{1}{5} \cdot C^{14}(0).$$

Per tant, aplicant la fórmula anterior i simplificant per $C^{14}(0)$, veiem que:

$$\frac{1}{5} \cdot C^{14}(0) = C^{14}(t_0) = C^{14}(0) \cdot e^{-1.24486 \cdot 10^{-4} \cdot t_0} \text{ implica: } t_0 = 12.928{,}66.$$ [97]

En altres paraules, l'ós va morir fa aproximadament 12.929 anys. Gràficament:



[97] Notem que aquest temps no depèn de la quantitat $C^{14}(0)$ en el moment de la mort de l'ós.

4.1. Equacions diferencials ordinàries

4.1.1. *Equació diferencia ordinària i solucions*

<u>Definició</u>: Una **equació diferencial ordinària d'ordre $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}$ és una equació que depèn d'una variable independent x, una variable dependent $y = f(x)$ i de les n primeres derivades successives d'aquesta funció. Simbòlicament:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$ [98]

Vegem uns exemples:

<u>Exemple</u>: Comprova que són equacions diferencials i determina l'ordre de:

(1) $y' + y = x$. (2) $\ln(y') + 2y = 0$. (3) $y'' + 2y' + x = 0$. (4) $y''' - x \cdot y'' - 5x = 32$.

SOLUCIÓ:

(1) i (2) són equacions diferencials d'ordre 1 (o de "primer" ordre) ja que només apareix la primera derivada, i (3) i (4) són equacions diferencials de segon i tercer ordre■

El concepte de "solució" d'una equació diferencial és cabdal. De fet l'objectiu del tema consisteix en trobar les solucions de certes equacions diferencials de primer i segon ordre.

<u>Definició</u>: Una **solució** d'una equació diferencial és una funció derivable $y = f(x)$ que, substituïda en l'equació, la satisfà. Poden donar-se dos tipus de solucions: [99]

1. **Solució general**: És una solució que depèn de tants paràmetres com ens indica l'ordre de l'equació diferencial.
2. **Solució particular**: És qualsevol solució que s'obté de la general donant valors concrets als paràmetres.[100]

---

[98] Val a dir que la funció $y = f(x)$ és la "incògnita" de l'equació diferencial i que una equació diferencial d'ordre n ha de contenir necessàriament la derivada $y^{(n)}$ de la incògnita.

[99] En certs casos pot haver-hi un tercer tipus de solució, anomenada *solució singular*, que és una solució que no és ni la general ni cap de les particulars.

[100] Des d'un punt de vista geomètric aquestes solucions s'anomenen **corbes integrals**.

4.1.1.1. Exemple d'aplicació del concepte de solució d'una equació diferencial

Exemple: Donada l'equació diferencial de primer ordre:

$$y' + y = x$$

1. Prova que la funció:

$$y = C \cdot e^{-x} + x - 1, \text{amb } C \in \mathbb{R} \text{ paràmetre}$$

   és la solució general de l'equació diferencial.

2. Comprova que la recta:

$$y = x - 1$$

   n'és una solució particular (corba integral).

SOLUCIÓ:

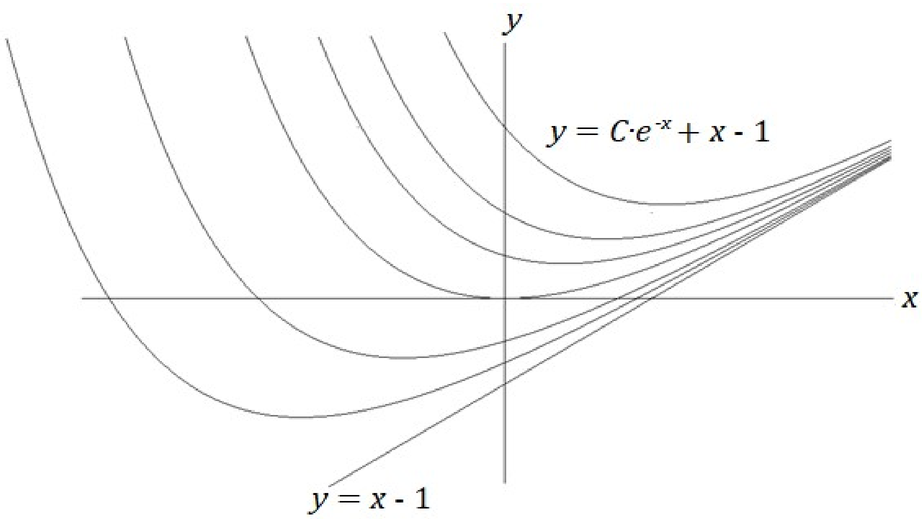
(1) Com que es tracta d'una equació diferencial de primer ordre i la funció que ens donen depèn d'un únic paràmetre, cal comprovar tant sols que satisfà l'equació diferencial per a afirmar que, efectivament, és la solució general. En efecte:

$$y = C \cdot e^{-x} + x - 1 \text{ implica: } y' + y = (-C \cdot e^{-x} + 1) + (C \cdot e^{-x} + x - 1) = x \blacksquare$$

(2) Si fem $C = 0$ en l'expressió anterior tenim que la funció $y = x - 1$ és una de les solucions particulars. En efecte:

$$C = 0 \text{ implica: } y = 0 \cdot e^{-x} + x - 1 = x - 1 \blacksquare$$

Gràficament:[101]



[101] Val a dir que la solució general d'una equació diferencial és una expressió funcional que representa a la "família" formada per les seves corbes integrals.

4.2. Equacions diferencials de primer ordre

Aquestes són les equacions diferencials que estudiarem en primer lloc. Començarem veient com poden venir expressades:

<u>Definició</u>: Una **equació diferencial de primer ordre** és una equació diferencial que depèn tant sol de les variables x, y, y'. En general, una equació diferencial d'aquest tipus pot expressar-se de tres maneres diferents: [102]

1. En **forma implícita**: $F(x, y, y') = 0$.
2. En **forma explícita**: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
3. En **forma contínua**: $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$.

Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: Troba les tres expressions equivalents de les equacions diferencials de primer ordre:

$$(1)\ \ln(y') + 2y = 0.\ (2)\ y' = 1 + x + y.\ (3)\ ydx + xdy = 0.$$

SOLUCIÓ:

(1) Es tracta d'una equació diferencial de primer ordre implícita. Les expressions explícita i contínua són respectivament:

$$y' = e^{-2y} \text{ i } dx - (e^{2y})dy = 0 \blacksquare$$

(2) Aquesta equació diferencial ve donada en forma explícita. Les expressions implícita i contínua són respectivament:

$$F(x, y, y') = y' - y - x - 1 = 0 \text{ i } dx - \left(\frac{1}{1 + x + y}\right) \cdot dy = 0 \blacksquare$$

(3) És una equació diferencial de primer ordre en forma contínua. Les expressions implícita i explícita són respectivament:

$$x \cdot y' + y = 0 \text{ i } y' = -\frac{y}{x} \blacksquare$$

[102] Òbviament, les tres expressions són equivalents com queda palès en el següent exemple.

4.2.1. *Equacions diferencials de variables separades*

<u>Definició</u>: Les equacions diferencials de **variables separades** són de la forma:

$$p(x)dx + q(y)dy = 0$$

amb $p(x)$ i $q(y)$ funcions reals d'una variable.

Aquestes equacions diferencials es poden resoldre ("integrar") directament sempre i quan les funcions $p(x)$ i $q(y)$admetin primitives.[103] En efecte:

<u>Propietat</u>: Si $P(x)$ i $Q(y)$ són, respectivament, primitives de $p(x)$ i $q(y)$, la solució general implícita de l'equació diferencial contínua $p(x)dx + q(y)dy = 0$ serà:

$$P(x) + Q(y) = C, \text{ amb } C \in \mathbb{R} \text{ paràmetre.}$$ [104]

<u>Exemple</u>: Resol l'equació:

$$xdx + ydy = 0$$

i troba, si existeix, la corba integral que passa pel punt (1,1).

SOLUCIÓ: És tracta d'una equació de variables separades amb funcions associades:

$$p(x) = x \text{ i } q(y) = y.$$

Com que les integrals indefinides d'aquestes dues funcions són:

$$\int p(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C \text{ i } \int q(y)dy = \int ydy = \frac{y^2}{2} + C$$

tenim com a solució general:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \blacksquare$$ [105]

Finalment, la corba integral que passa pel punt $(x, y) = (1,1)$ serà la circumferència de radi $r = \sqrt{2}$. En efecte:

$$(x, y) = (1,1) \text{ implica: } C = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 1 \text{ implica: } x^2 + y^2 = 2C = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \blacksquare$$

[103] De fet, la majoria dels mètodes de resolució de les equacions diferencials de primer ordre passen per reduir l'equació diferencial a una de variables separades equivalent.

[104] La solució general és precisament la variable y que apareix com a argument de la funció $Q(y)$.

[105] Notem que si fem variar el paràmetre, les solucions particulars (corbes integrals) són totes les circumferències que tenen per centre l'origen de coordenades.

4.2.2. *Equacions diferencials de variables separables*

<u>Definició</u>: Les equacions diferencials de **variables separables** són de la forma:

$$\big(p_1(x) \cdot p_2(y)\big)dx + \big(q_1(x) \cdot q_2(y)\big)dy = 0$$

amb $p_1(x), p_2(y), q_1(x)$ i $q_2(y)$ funcions d'una variable.

Aquestes equacions diferencials es poden transformar en equacions diferencials del tipus anterior si dividim l'equació diferencial pel producte $q_1(x) \cdot p_2(y)$. En efecte, si fem la divisió obtenim l'equació diferencial de variables separades:

$$\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}\right)dx + \left(\frac{q_2(y)}{p_2(y)}\right)dy = 0.$$

Un cop feta la divisió, caldrà aplicar el mètode de resolució del cas anterior per a obtenir la solució general. Vegem un exemple d'aplicació:

<u>Exemple</u>: Resol l'equació diferencial:

$$ydx + xdy = 0$$

i troba les seves corbes integrals.

SOLUCIÓ:

Es tracta d'una equació diferencial de variables separables amb:

$$p_1(x) = 1, p_2(y) = y, q_1(x) = x \text{ i } q_2(y) = 1.$$

Si dividim per $q_1(x) \cdot p_2(y) = xy$ s'obtindrà l'equació diferencial de variables separades:

$$\left(\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Com que:

$$\int \left(\frac{1}{x}\right)dx = \ln x + C \text{ i } \int \left(\frac{1}{y}\right)dy = \ln y + C$$

tenim, com a solució general:

$$\ln x + \ln y = C \text{ equivalent a: } xy = e^C = K\blacksquare$$

Així doncs, les hipèrboles equilàteres del 1er. i 3er. quadrants són precisament les solucions particulars■[106]

---

[106] De fet es podria provar que les hipèrboles equilàteres del 2on. i 4rt. quadrants també ho són. En altres paraules, que el paràmetre K pot prendre qualsevol valor real.

4.2.3. *Equacions diferencials lineals de primer ordre*

<u>Definició</u>: Les **equacions diferencials lineals de primer ordre** són de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

amb les funcions $p(x)$ i $q(y)$ com a coeficients. A més:

1. Si $q(x) = 0$ la equació diferencial que en resulta:

   $$y' + p(x) \cdot y = 0$$

   és l'equació diferencial lineal de primer ordre **reduïda** o **homogènia.**[107]
2. Si $p(x) = p$ i $q(y) = q$ són constants, l'equació diferencial:

   $$y' + p \cdot y = q$$

   és l'equació diferencial lineal de primer ordre **a coeficients constants** $p, q \in \mathbb{R}$.

Les equacions diferencials de tipus (1) i (2) són, en particular, equacions diferencials de variables separables o separades. Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: Troba la solució general de $y' - \left(\frac{2}{x}\right) \cdot y = 0$ i la solució particular pel punt (1,2).

SOLUCIÓ: Aquesta equació diferencial lineal de primer ordre reduïda és equivalent a l'equació de variables separades:

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right) \cdot y = 0 \text{ equivalent a: } dy - \left(\frac{2}{x}\right) \cdot y \cdot dx = 0 \text{ equivalent a: } \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}.$$

Ja que:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \text{ implica: } \ln y = 2\ln x + C = \ln(x^2) + C \text{ implica: } y = e^{\ln(x^2)+C} = e^C \cdot x^2$$

deduïm que la solució general és:

$$y = K \cdot x^2, \text{ fent } K = e^C.$$

Finalment, la solució particular que passa pel punt (1,2) és la paràbola:

$$(x, y) = (1,2) \text{ implica: } 2 = y = K \cdot 1^2 = K \text{ implica: } y = 2x^2 \blacksquare$$

Es pot provar que la solució general de l'equació diferencial reduïda $y' + p(x) \cdot y = 0$ és:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.$$

[107] Per tant, anomenarem **completa** a l'equació diferencial $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

4.2.3.1. Resolució de l'equació diferencial lineal completa de primer ordre

Per tal de resoldre l'equació diferencial lineal de primer ordre completa caldrà aplicar la fórmula que apareix en el següent teorema:

Teorema: La solució general de l'equació diferencial lineal de primer ordre completa:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

és igual a:

$$y = \left(e^{-\int p(x)dx}\right) \cdot \left(\int \left(e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\right) dx\right).$$

Vegem un exemple:

Exemple: Troba la solució general de l'equació diferencial lineal de primer ordre completa:

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right) \cdot y = x$$

i la solució particular que passa pel punt (1,2).

SOLUCIÓ:

Aplicant la fórmula anterior tot imposant que:

$$p(x) = -\left(\frac{2}{x}\right) \text{ i } q(x) = x$$

la solució general d'aquesta equació diferencial lineal de primer ordre completa serà:

$$y = \left(e^{-\int p(x)dx}\right) \cdot \left(\int \left(e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\right) dx\right) = \left(e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\right) \cdot \left(\int \left(e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} \cdot x\right) dx\right) =$$

$$= \left(e^{2\int\left(\frac{dx}{x}\right)}\right) \cdot \left(\int \left(e^{-2\int\left(\frac{dx}{x}\right)} \cdot x\right) dx\right) = \left(e^{2\ln x}\right) \cdot \left(\int e^{-2\ln x} \cdot x \cdot dx\right) =$$

$$= x^2 \cdot \int x^{-2} \cdot x \cdot dx = x^2 \cdot \int \frac{dx}{x} = x^2 \cdot (\ln x + C) \blacksquare$$ [108]

Finalment, pel punt $(x, y) = (1,2)$ passarà la solució particular o corba integral:

$$2 = y = x^2 \cdot (\ln x + C) = 1^2 \cdot (\ln 1 + C) = C \text{ implica: } y = x^2 \cdot (\ln x + 2) \blacksquare$$

[108] Com podem veure, el paràmetre de la solució general d'aquesta equació diferencial és la constant d'integració de la darrera de les integrals.

4.2.4. *Equacions diferencials de Bernouilli*

<u>Definició</u>: Les **equacions diferencials de Bernouilli** són de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}, \text{ amb } \alpha \neq 0,1$$

on $p(x)$ i $q(y)$ són funcions reals.[109]

Aquestes equacions diferencials es poden transformar en lineals de primer ordre a partir del canvi de variable:

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Vegem un exemple d'aplicació:

<u>Exemple</u>: Resol l'equació diferencial de Bernouilli $y' + y = -x \cdot y^{-1}$.

SOLUCIÓ: Observem que $\alpha = -1$. En general, per a resoldre una equació d'aquest tipus, cal dividir-la primer per:

$$y^{\alpha} = y^{-1}.$$

En el nostre cas és equivalent a multiplicar-la per la variable y. Per tant, ens quedaria:

$$y \cdot y' + y^2 = -x.$$

A continuació, cal introduir el canvi de variable $z = y^{1-\alpha}$ esmentat. En el nostre cas, i derivant:

$$z = y^{1-\alpha} = y^2 \text{ implica: } z' = 2y \cdot y' \text{ implica: } y' = \frac{z'}{2y}.$$

Finalment, substituint en l'equació diferencial anterior ens queda l'equació diferencial lineal en les variables x i $z = z(x)$:

$$z = y^2 \text{ i } y' = \frac{z'}{2y} \text{ implica: } y \cdot y' + y^2 = -x \text{ equivalent a: } z' + 2z = -2x.$$

Aquesta equació diferencial "auxiliar" és lineal de primer ordre i té per solució general:

$$z = \left(\frac{1-2x}{2}\right) + C \cdot e^{-2x}.$$

Desfent ara el canvi de variable introduït, s'obté la solució general implícita de l'equació diferencial de Bernouilli que anem buscant:

$$z = y^{1-\alpha} = y^2 \text{ implica: } y^2 = \left(\frac{1-2x}{2}\right) + C \cdot e^{-2x} \blacksquare$$

---

[109] Si $\alpha = 0$ l'equació diferencial de Bernouilli és lineal de primer ordre, i si $\alpha = 1$ és de variables separables.

4.3. Equacions diferencials de segon ordre

4.3.1. *Equació diferencial lineal de segon ordre a coeficients constants*

D'entre les equacions diferencials d'ordre superior, i degut sobretot a les seves aplicacions econòmiques, estudiarem tant sol les equacions diferencials lineals de segon ordre a coeficients i terme independent constants. Considerem la següent definició:

<u>Definició</u>: Les **equacions diferencials lineals de segon ordre** a coeficients i terme independent constants són de la forma:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = c, \text{ amb } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

En el cas que $c = 0$, tindríem l'equació diferencial lineal de segon ordre **reduïda**:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0.$$ [110]

Per resoldre aquestes equacions cal, en primera instància, trobar la solució general de la reduïda. A tal fi, haurem de considerar l'**equació característica** associada a aquesta equació diferencial com és:

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0.$$

Doncs bé, la solució general de la reduïda, i a fortiori de la completa, depèn de les arrels d'aquesta equació. En efecte:

<u>Teorema</u>: La solució general y_r de l'equació diferencial lineal reduïda:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

és de la forma:

1. $y_r = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$, amb $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ són les dues solucions reals de l'equació característica.
2. $y_r = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$, amb $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, si $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ és la solució real doble de l'equació característica.[111]

---

[110] Per tant, anomenarem **completa** a l'equació diferencial $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = c$.

[111] El cas en què les arrels de l'equació característica són complexes no el considerarem.

4.3.1.1. Resolució de l'equació diferencial lineal completa de segon ordre

L'exemple d'aplicació que veiem tot seguit ens mostra el procés que, en general, cal dur a terme per a resoldre una equació diferencial d'aquest tipus.

Exemple: Troba la solució general de l'equació diferencial $y'' + 2y' - 3y = 11$ i la solució particular que satisfà les "condicions inicials": $y(0) = \frac{1}{3}$ i $y'(0) = 0$.[112]

SOLUCIÓ: Donat que l'equació característica associada té per arrels:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \lambda - 3 = 0 \text{ implica: } \lambda_1 = -3 \text{ i } \lambda_2 = 1$$

deduïm, pel teorema anterior, que la solució general y_r de la reduïda és:

$$y_r = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{x}.$$

Degut a que, en general, la solució general y de la completa és de la forma:

$$y = y_r + y_p$$

on y_p és una solució particular de la completa, caldrà tant sols trobar-ne una d'aquest tipus. A tal fi, i tenint present que el terme independent de l'equació diferencial és una constant ($c = 1$) considerarem com a solució particular y_p la funció constant:

$$y_p = a, \text{ amb } a \in \mathbb{R}.$$[113]

Per tant, com que $y_p = a$ ha de satisfer l'equació diferencial completa, hom dedueix que:

$$11 = y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot a \text{ implica: } a = -\frac{11}{3}.$$

Conseqüentment, la solució general de l'equació diferencial completa inicial és:

$$y = y_r + y_p = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{x} - \frac{11}{3} \blacksquare$$

Finalment, com que aplicant les condicions inicials que ens donen tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} = y(0) = C_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{0} - \frac{11}{3} = C_1 + C_2 - \frac{11}{3} \\ 0 = y'(0) = C_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} \cdot (-3) + C_2 \cdot e^{0} = -3C_1 + C_2 \end{array}\right\} \text{ implica: } C_1 = 1 \text{ i } C_2 = 3$$

la solució particular de la completa que ens demanen serà:

$$y = e^{-3x} + 3 \cdot e^{x} - \frac{11}{3} \blacksquare$$

[112] Necessitarem sempre dues "condicions inicials" com aquestes per a determinar una solució particular d'una equació diferencial de segon ordre.
[113] Caldrà trobar el valor numèric d'aquesta constant $a \in \mathbb{R}$.. Val a dir que si no hi hagués terme en y en l'equació diferencial ($b = 0$), caldria considerar $y_p = a \cdot x$ com a solució particular.

4.4. Aplicacions econòmiques de les equacions diferencials

4.4.1. *Acumulació instantània d'un capital*

L'exemple que analitzem a continuació respon a un escenari financer on l'interès meritat es transforma en capital en cada instant.

<u>Exemple</u>: Suposem que la "taxa de creixement instantani" de un capital monetari $C = C(t)$, depenent de la variable temporal $t \geq 0$ mesurada en anys, és proporcional al capital $C(t)$ en tot moment d'acord amb la següent equació diferencial:

$$\frac{dC(t)}{dt} = i \cdot C(t)$$

on $0 < i < 1$ és una constant (anomenada "taxa d'interès instantani"). En aquest escenari, troba: (1) L'expressió general del capital monetari $C(t)$ depenent de la quantia monetària inicial $C_0 = C(0)$. (2) Si $i = 3\%$, quant de temps caldrà esperar per a doblar el valor de C_0?
SOLUCIÓ: (1) Ja que:

$$\frac{dC(t)}{dt} = i \cdot C(t) \text{ implica: } \int \frac{dC(t)}{C(t)} = \int i \cdot dt \text{ implica: } \ln C(t) = it + C$$

la solució general de l'equació diferencial és:

$$C(t) = e^{it+} \ .$$

Sabent que $C_0 = C(0)$, la solució general depenent del capital inicial $C_0 = C(0)$ serà:

$$C_0 = C(0) = e^{i \cdot 0 + C} = e^C \text{ implica: } C(t) = e^{it+C} = e^C \cdot e^{it} = C_0 \cdot e^{i \cdot t} \blacksquare$$

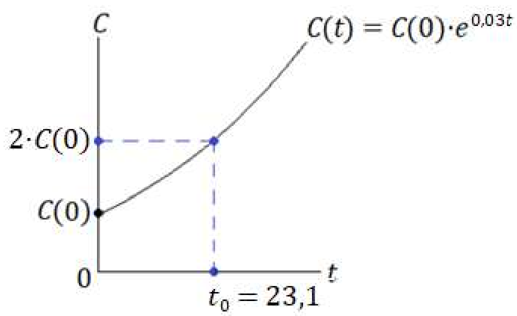
(2) En el cas particular que $i = 3\%$, el temps $t_0 > 0$ que cal esperar per a que:

$$C(t_0) = 2 \cdot C_0$$

és de:

$$2 \cdot C_0 = C(t_0) = C_0 \cdot e^{0.03 \cdot t_0} \text{ implica: } 2 = e^{0.03 \cdot t_0} \text{ implica: } t_0 = \frac{\ln 2}{0.03} = 23.1 \text{ anys} \blacksquare$$

Gràficament:



4.4.2. *Evolució temporal del preu d'un bé: el model lineal de Walras*

Veurem ara, amb un exemple, com el model lineal de Walras estudia l'evolució temporal del preu d'un bé.

<u>Exemple</u>: Si la "taxa de variació" o "ritme de creixement" del preu $p = p(t)$ d'un bé és proporcional a l'excés de la demanda $D = D(t)$ sobre l'oferta $S = S(t)$ de la forma:

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0{,}5 \cdot \big(D(t) - S(t)\big)$$

amb:

$$D = D(t) = 21 - 2 \cdot p(t) \text{ i } S = S(t) = 10 \cdot p(t) - 3$$

1. Troba l'expressió de $p = p(t)$ en funció del preu inicial $p_0 = p(0)$.
2. Prova que, a la llarga, $p = p(t)$ tendeix al preu d'equilibri p_E del bé.

SOLUCIÓ: (1) L'expressió general del preu $p = p(t)$ satisfà l'equació diferencial:

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0{,}5 \cdot \big(D(t) - S(t)\big) = 12 - 6 \cdot p(t)$$

que és de variables separables (o lineal a coeficients constants). Aplicant doncs algun dels dos mètodes de resolució que hem vist aquí tenim que la solució general és:

$$p = p(t) = 2 + (p_0 - 2) \cdot e^{-6t} \blacksquare$$

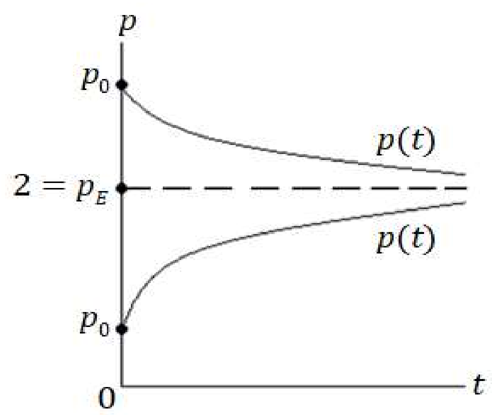
(2) A la llarga el preu $p = p(t)$ del bé és estable doncs si prenem límits tenim que:

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 2 + (p_0 - 2) \cdot e^{-\infty} = \{e^{-\infty} = 0\} = 2.$$

Val a dir que aquest valor és, precisament, el preu d'equilibri p_E del bé ja que:

$$D = S \text{ implica: } 21 - 2 \cdot p_E = 10 \cdot p_E - 3 \text{ implica: } p_E = 2 \blacksquare$$

Gràficament:



4.4.3. *Aplicació demogràfica: la corba logística*

Una aplicació important de l'equació diferencial de Bernouilli és la "corba logística" relacionada amb models de creixement diferents a l'exponencial. Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: En tot instant $t \geq 0$, el ritme en que es propaga un rumor en una població de 160.000 individus és proporcional al número de persones que hi estan assabentades i també al número de les que no ho estan. En concret, si $P = P(t)$ denota el nombre en milers d'individus que estan assabentats del rumor en $t \geq 0$ llavors:

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = 0{,}02 \cdot P(t) \cdot \big(160 - P(t)\big).$$

Es demana: (1) El número de persones assabentades del rumor al cap de mig any ($t = 0{,}5$) si inicialment era de 20.000 individus ($P(0) = 20$). (2) Prova que, a la llarga, tota la població s'assabentarà del rumor.

SOLUCIÓ:[114] (1) L'equació diferencial anterior és de Bernouilli amb paràmetre $a = 2$:

$$P'(t) - 3{,}2 \cdot P(t) = 0{,}02 \cdot P^2(t)$$

i la solució particular que s'obté de la solució general quan $P(0) = 20$ és de la forma:

$$P(t) = \frac{160}{1 + 7 \cdot e^{-3{,}2t}}.$$

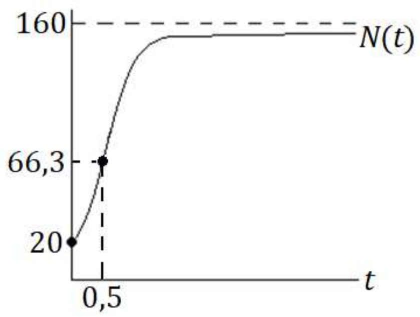
Així doncs, al cap de mig any ($t = 0{,}5$), la població assabentada serà de 66.300 individus:

$$P(0'5) = \frac{160}{1 + 7 \cdot e^{-3{,}2 \cdot 0{,}5}} = 66{,}3 \blacksquare$$

(2) Amb el pas del temps, el rumor arribaria a tota la població ja que:

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{160}{1 + 7 \cdot e^{-\infty}} = \{e^{-\infty} = 0\} = 160 \blacksquare$$

Gràficament:[115]



[114] Donarem només unes quantes pinzellades de la resolució d'aquest exemple.
[115] Aquesta corba és coneguda amb el nom de *corba logística* i apareix associada a molts fenòmens de creixement poblacional.

4.4.4. *Comportament d'un mercat amb expectatives sobre els preus*[116]

De vegades, l'oferta i la demanda d'un bé en tot instant no depenen tant sol del preu i de la seva taxa de variació, sinó també de la manera com canvia aquesta taxa. Vegem un exemple:

Exemple: Si:

$$\begin{cases} D = D(t) = 8 - 4 \cdot p(t) - 3 \cdot p'(t) + 2 \cdot p''(t) \\ S = S(t) = -4 + 2 \cdot p(t) + 4 \cdot p'(t) + 3 \cdot p''(t) \end{cases}$$

són la demanda i l'oferta d'un bé en funció del seu preu $p = p(t)$ i de les seves expectatives en tot instant $t \geq 0$, calcula la trajectòria temporal del preu d'equilibri del bé que satisfà les condicions inicials:

$$p(0) = 4 \text{ i } p'(0) = \tfrac{3}{5}.$$

SOLUCIÓ:

El preu d'equilibri del bé és aquell que iguala l'oferta i la demanda en tot moment. Per tant:

$$D(t) = S(t) \text{ implica: } p''(t) + 7 \cdot p'(t) + 6 \cdot p(t) = 12.$$

Com veiem, es tracta d'una equació diferencial de segon ordre a coeficients constants completa amb solució general:[117]

$$p = p(t) = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-t} + 2.$$

Ja que:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = p(0) = C_1 \cdot e^{-6\cdot 0} + C_2 \cdot e^{-0} + 2 = C_1 + C_2 + 2 \\ \frac{3}{5} = p'(0) = C_1 \cdot e^{-6\cdot 0} \cdot (-6) + C_2 \cdot e^{-0} \cdot (-1) = -6C_1 - C_2 \end{array}\right\} \text{ implica: } C_1 = -\tfrac{13}{25} \text{ i } C_2 = \tfrac{63}{25}$$

la trajectòria temporal del preu d'equilibri que ens demanen és:

$$p = p(t) = -\left(\frac{13}{25}\right) \cdot e^{-6t} + \left(\frac{63}{25}\right) \cdot e^{-t} + 2 \blacksquare$$

Aquesta trajectòria temporal és estable en el temps doncs:

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = -\left(\frac{13}{25}\right) \cdot e^{-\infty} + \left(\frac{63}{25}\right) \cdot e^{-\infty} + 2 = \{e^{-\infty} = 0\} = 2.$$

[116] Santisteban Martínez, J. (1994) *Problemas para Matemáticas III.* Albacete: Ed. A5, pàgina 172.
[117] Les solucions de l'equació característica associada són $\lambda_1 = -6$ i $\lambda_2 = -1$.

4.5. Exercicis

1. Prova que: (a) $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$, amb $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constants, és una solució de l'equació diferencial $y'' - y = 0$. Es tracta de la solució general? (b) Troba la corba integral associada amb les condicions inicials $y(0) = 0$ i $y'(0) = 3$.
2. Troba la solució general de les equacions diferencials:

$$(1)\ y' = e^{x-y}.\ (2)\ y = \ln\left(\frac{1}{y'}\right).\ (3)\ xdx + (1+y)^2dy = 0.\ (4)\ xdy + (1+y)^2dx = 0.$$

$$(5)\ xdx = 2ye^{-x}dy.\ (6)\ y' + x^2y = 5x^2.\ (7)\ y' = -\frac{y}{3x} + x.\ (8)\ y' + 6y + e^x = 0.$$

$$(9)\ y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \ln x.\ (10)\ y' - \left(\frac{4}{x}\right)y = 2\sqrt{y}.$$

$$(11)\ y'' + 0{,}3 \cdot y' = 0.\ (12)\ y'' - 3y' + y + 1 = 0.$$

3. Tenint en compte que la funció $y = e^{0{,}5\cdot x^2}$ no té primitiva expressable, prova que l'equació diferencial $y' + x \cdot y = 1$ no es pot resoldre analíticament.[118]
4. Demostra que la corba que en cada punt té la pendent de la recta tangent proporcional a la seva abscissa és un paràbola.
5. Troba la solució particular de $y'' + y' + 0{,}25y = 0$ tal que $y(0) = 0$ i $y(1) = e^{-0{,}5}$.
6. Troba la funció de demanda $Q = f(P)$ si l'elasticitat és $\epsilon = -1$ per a tot preu $P > 0$.[119]
7. Isaac Newton va establir que la variació instantània de la temperatura T d'un objecte és proporcional a la diferència de temperatura entre l'objecte i el medi on es troba. Si considerem la temperatura del medi constant igual a T_0:
   a. Resol l'equació diferencial que ens dona la temperatura $T = T(t)$ de l'objecte en funció de T_0 i de la constant de proporcionalitat $k \in \mathbb{R}$.
   b. La policia descobreix el cos sense vida del professor de matemàtiques en el seu despatx. El punt clau per a resoldre el suposat crim és esbrinar el moment exacte de la seva mort. El forense arriba al migdia, pren la temperatura del cos que és de 35° i una hora més tard comprova que ha baixat a 34°. Sabent que la temperatura del despatx s'ha mantingut constant i igual a 21°, i que la víctima tenia en vida una temperatura mitjana de 37°, dedueix en quin moment es va produir la mort.

[118] És a dir, aplicant algun dels mètodes que hem vist aquí.
[119] Dowling, E. T. (2010), plana 382. L'**elasticitat** de $y = f(x)$ és $\epsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$. Des d'un punt de vista econòmic $\epsilon = -1$ vol dir que si el preu P augmentés un 1%, la quantitat demandada Q disminuiria aproximadament un 1%.

SOLUCIONS:

1.

   a. Es tracta de la solució general.

   b. $y = \frac{3}{2} \cdot e^{x} - \frac{3}{2} \cdot e^{-x}$.

2.

$$(1)\ y = \ln(e^{x} + C).\ (2)\ y = \ln(x + C).\ (3)\ \frac{(1+y)^3}{3} + \frac{x^2}{2} = C.\ (4)\ y = \left(\frac{1}{\ln x - C}\right) - 1.$$

$$(5)\ y^2 = e^{x}(x-1) + C.\ (6)\ y = 5 - e^{-\left(x^3/3 + C\right)}.\ (7)\ y = \left(\frac{3x^2}{7}\right) + C \cdot x^{-\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

$$(8)\ y = -\left(\frac{e^{x}}{7}\right) + C \cdot e^{-6x}.\ (9)\ y = \frac{x}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{C}{x}.\ (10)\ y = \left(x \cdot (Cx - 1)\right)^2.$$

$$(11)\ y = C_1 + C_2 \cdot e^{-0{,}3x}.\ (12)\ y = C_1 \cdot e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x} - 1.$$

4. És una paràbola de la forma $y = ax^2 + b$.

5. $y = x \cdot e^{-0{,}5x}$.

6. $Q = f(P) = \frac{C}{P}$, amb $C > 0$ constant.

7.

   a. La solució general és $T = T(t) = T_0 + e^{kt+C}$.

   b. El suposat crim es va produir aproximadament a les 10 hores i 12 minuts del matí.

BIBLIOGRAFIA

ADILLÓN, R.; JORBA, L. (1995) *Lecciones de matemáticas para economistas.* Barcelona: Gráficas Rey.

ALEGRE, P.; GONZÁLEZ, l.; ORTÍ, F.; RODRÍGUEZ, G.; SÁEZ, J.; SANCHO, T. (1995) *Matemáticas empresariales*. Madrid: AC.

BORRELL, J. (1982) *Métodos matemáticos para la economía* I *y* II*.* Madrid: Pirámide.

CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. (2006) *Métodos fundamentales de economía matemática* (4ª ed)*.* Madrid: McGraw-Hill.

COSTA, E. (1991) *Problemas y cuestiones de matemáticas para economistas*. Madrid: Pirámide.

DOWLING, E. T. (2010). *Introduction to Mathematical Economics* (Schaum's Outline Series, 3rd. ed.) McGraw Hill.

SYDSAETER, K.; HAMMOND, P. J. (1996) *Matemáticas para el anàlisis económico*. Madrid: Prentice Hall.

GLOSSARI

Anàlisi de sensibilitat, 31
Antiderivada, 41
Conjunt i punt factible d'un programa d'òptims restringits, 6, 24
Constants de restricció, 5, 23
Corba integral, 63
Diferencial d'una funció, 45
Elasticitat d'una funció, 77
Equació característica d'una equació diferencial lineal de segon ordre, 71
Equació de restricció, 5
Equació diferencial de Bernouilli, 70
Equació diferencial de variables separables, 67
Equació diferencial de variables separades, 66
Equació diferencial lineal de primer ordre, 68
Equació diferencial lineal de segon ordre, 71
Funció de Lagrange, 11
Funció elemental, 43
Funció integral, 52
Funció objectiu i funció de restricció d'un programa, 5, 23
Integració logarítmica, 44
Integral immediata, 43
Integral quasi immediata, 44
Matriu hessiana restringida, 14
Multiplicador de Lagrange, 11
Òptim d'un programa, 7, 25
Optimització lliure, 11
Politop, 29
Preus ombra, 17
Primitiva d'una funció, 41
Programa canònic, 23
Programa factible i programa infactible, 24
Programa lineal acotat, 30
Programes equivalents, 23
Punt crític d'un programa, 12
Regla de Barrow, 53
Restricció de signe d'una variable instrumental, 5
Restricció saturada d'un programa, 27
Solució d'una equació diferencial, 63
Solució finita i solució infinita d'un programa, 25
Valor òptim d'un programa, 7, 25
Variables instrumentals, 5, 23
Vèrtex del conjunt factible, 24